Moderne Physik

Von den Grundlagen zu Anwendungen in Natur-, Ingenieur- und Lebenswissenschaften

Josef Tiggesbäumker*

11. August 2025

*josef.tiggesbaeumker@uni-rostock.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**
Eine Zeitenwende in Wissenschaft und Kultur . . . 5
Abriss der Themengebiete . . . 11
Lehrbücher zu Relativität und Quanten . . . 13
Das Skript . . . 14
. . . und die Klausur? . . . 21

A Relativität **23**
Gut zu wissen! . . . 27

1 Beobachter **29**
1.1 Superpositionsprinzip . . . 32
Blickwinkel . . . 32
Aufgaben . . . 38
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 40
1.2 Bezugssysteme . . . 41
Alles ist relativ! . . . 42
Neues Bezugssystem - Neue Physik? . . . 46
Gesucht: Ein Absolutes Bezugssystem! . . . 49
Aufgaben . . . 52
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 55
1.3 Faraday Paradoxon . . . 56
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 61
Was war wichtig? . . . 62

2 Äther **63**
2.1 Einsteinsche Postulate . . . 69
Relativitätsprinzip . . . 70
Bewegung ist relativ . . . 75
Aufgaben . . . 80
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 81
2.2 Stellare Aberration . . . 83
Was ist Licht? . . . 84
Aberration des Sternlichts . . . 86
Aufgaben . . . 92
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 93

2.3 Fizeau Experiment . . . 94
In Bewegung . . . 94
Aufgaben . . . 97
2.4 Michelson-Morley Experiment . . . 98
Interferometer . . . 99
Anwendungen . . . 100
Eine Bootsfahrt . . . 104
Laufzeitunterschiede . . . 105
Das Resultat . . . 112
Aufgaben . . . 116
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 117
Was war wichtig? . . . 118

3 Gleichzeitigkeit 119
3.1 Ereignis . . . 123
Relativität der Gleichzeitigkeit . . . 126
Referenzuhr . . . 127
Aufgaben . . . 130
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 132
3.2 Zeitdilatation . . . 133
Lichtuhr . . . 135
Lichtuhr reloaded I . . . 140
Anwendungen . . . 143
Aufgaben . . . 150
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 153
3.3 Längenkontraktion . . . 155
Lichtuhr reloaded II . . . 157
Die Entdeckung der Langsamkeit . . . 161
Raumzeit-Intervall . . . 162
Querkontraktion . . . 163
Anwendungen . . . 164
Garagenparadoxon . . . 169
Aufgaben . . . 172
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 177
Was war wichtig? . . . 178

4 Zerfall des Myons 181
4.1 Kosmische Höhenstrahlung . . . 188
Who ordered that? . . . 189
Rossi and Hall Experiment . . . 193
Anwendungen . . . 196
Aufgaben . . . 203
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 204

4.2 Radioaktives Zerfallsgesetz . . . 205
Blickwinkel . . . 206
Anwendungen . . . 211
Aufgaben . . . 213
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 214
4.3 Lorentz-Transformation . . . 215
Terrell-Effekt . . . 216
Galilei vs Lorentz . . . 216
Garagenparadoxon *reloaded* . . . 221
Weltlinien . . . 224
Aufgaben . . . 230
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 232
4.4 Relative Geschwindigkeit . . . 233
Superluminale Bewegung . . . 237
Aufgaben . . . 245
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 250
4.5 Synchrotron . . . 251
Brillanz . . . 255
Anwendungen . . . 259
Und in Zukunft? . . . 264
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 265
Was war wichtig? . . . 266

5 Relativistischer Dopplereffekt 269
5.1 Tscherenkow Strahlung . . . 275
Akustischer Machkegel . . . 277
Optischer Machkegel . . . 279
Anwendungen . . . 281
Das Rätsel der Sonnenneutrinos . . . 287
Aufgaben . . . 296
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 297
5.2 Akustischer und optischer Dopplereffekt . . . 298
Akustischer Dopplereffekt . . . 298
Anwendungen 1 . . . 300
Optischer Dopplereffekt . . . 300
Anwendungen 2 . . . 305
Dunkle Materie . . . 317
Aufgaben . . . 321
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 324
5.3 Mössbauer Effekt . . . 325
Impulsübertrag des Photons . . . 325
Harvard Tower Experiment . . . 331
Anwendungen . . . 333
Aufgaben . . . 337

Konzeptionelle und andere Fragen . . . 338
5.4 Exoplaneten . . . 339
Radialgeschwindigkeitsmethode . . . 340
Habitable Zone . . . 345
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 351
5.5 Wasserstoff 21-cm-Linie . . . 352
Anwendungen . . . 355
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 361
5.6 Hubble Konstante . . . 362
Trugschlüsse . . . 368
Hubble-X . . . 368
Aufgaben . . . 372
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 375
5.7 Relativistische Aberration . . . 376
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 382
5.8 Zwillingsparadoxon . . . 383
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 388
Was war wichtig? . . . 389

6 E=mc^2 391
6.1 Lichtimpuls . . . 397
Lichtuhr reloaded . . . 397
Aufgaben . . . 407
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 408
6.2 Masse . . . 410
Chemische Grundgesetze . . . 412
Bindungsenergie . . . 413
Energielieferant Sonne . . . 415
Energie auf der Waagschale . . . 418
Anwendungen . . . 420
Aufgaben . . . 427
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 433
6.3 Energie-Impulssatz . . . 435
Relativistischer Impuls . . . 436
Relativistische Energie . . . 441
Anwendungen . . . 447
Energie-Impuls-Beziehung . . . 449
Newtonsche Geister . . . 454
Teilchen, scheinbar aus dem Nichts . . . 456
Annihilation . . . 460
Aufgaben . . . 465
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 470
Was war wichtig? . . . 472

7 Chemie schwerer Elemente **473**
7.1 Relativistische Kontraktion . . . 476
7.2 Hybridisierung . . . 484
Was war wichtig? . . . 491

8 Allgemeine Relativitätstheorie **493**
8.1 Relativistisches Äquivalenzprinzip . . . 499
Schwere und träge Masse . . . 502
Einstein's birthday present . . . 504
Die Bahn des Merkur . . . 506
Licht werfen . . . 509
Aufgaben . . . 512
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 514
8.2 Gravitationslinsen . . . 515
Fata Morgana . . . 519
Die Sonnenfinsternis von 1919 . . . 520
Einsteinkreuz . . . 522
Microlensing . . . 529
Aufgaben . . . 535
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 536
8.3 Zeitrechnung . . . 537
Hafele-Keating Experiment reloaded . . . 543
Shapiro-Effekt . . . 549
Aufgaben . . . 557
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 558
8.4 Gravitationswellen . . . 559
Hulse-Taylor Pulsar . . . 564
Gravitationswelle GW150914 . . . 568
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 582
Was war wichtig? . . . 583

B Quantenwelt **585**
Physikalisches Vorwissen . . . 597
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 599
Gut zu wissen! . . . 600

9 Materiewellen **603**
9.1 Compton-Effekt . . . 614
Strahlungsdruck . . . 614
Levitation . . . 622
Hertzscher Dipol . . . 624
Röntgenstreuung am Elektron . . . 624
Compton-Wellenlänge . . . 630
Anwendungen . . . 632

Aufgaben . . . 637
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 641
9.2 Doppelspalt . . . 643
Youngsches Doppelspaltexperiment . . . 648
DeBroglie Beziehung . . . 652
Doppelspaltexperiment mit Elektronen . . . 654
Anwendungen . . . 657
Aufgaben . . . 665
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 670
9.3 Elektronenbeugung . . . 672
Davisson-Germer Experiment . . . 675
Thomson-Reid Experiment . . . 679
Anwendungen . . . 681
Aufgaben . . . 694
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 695
9.4 Elektronenmikroskop . . . 696
Rayleigh-Kriterium . . . 696
Aufbau von Elektronenmikroskopen . . . 700
Anwendungen . . . 704
Aufgaben . . . 707
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 709
9.5 Wellenpaket . . . 710
Lichtausbreitung in Medien . . . 710
Ausbreitung von Materiewellen . . . 711
Dispersion . . . 714
Aufgaben . . . 720
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 721
Was war wichtig? . . . 722

10 Heisenbergsche Unschärferelation 725
10.1 Heisenberg Mikroskop . . . 729
Akustische Schwebung . . . 732
Heisenberg schaut zu . . . 738
Aufgaben . . . 741
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 743
10.2 Orts-Impuls Unschärfe . . . 744
Laplacescher Dämon . . . 744
Anwendungen . . . 749
Aufgaben . . . 755
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 757
10.3 Energie-Zeit Unschärfe . . . 758
Anwendungen . . . 761
Aufgaben . . . 769
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 770

10.4 Virtuelle Teilchen . . . 771
Anwendungen 1 . . . 772
Austauschteilchen . . . 776
Anwendungen 2 . . . 777
Aufgaben . . . 780
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 782
10.5 Hawking-Strahlung . . . 783
Schwarze Löcher beobachten . . . 788
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 792
Was war wichtig? . . . 793

11 Wellenfunktion 795
11.1 Observable . . . 803
Wellenfunktion . . . 803
Wahrscheinlichkeitsdichte . . . 807
Anwendungen 1 . . . 809
Heisenberg ausgeschaltet . . . 811
Erwartungswert . . . 812
Hamilton-Formalismus . . . 813
Operatoren . . . 816
Zeitabhängige Schrödingergleichung . . . 818
Anwendungen 2 . . . 819
Zeitunabhängige Schrödingergleichung . . . 822
Stationäre Zustände . . . 824
Aufgaben . . . 828
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 832
11.2 Potenzialtopf . . . 834
Harmonisches Potenzial . . . 837
Nullpunktsenergie . . . 842
Anwendungen . . . 845
Kastenpotenzial . . . 849
Aufgaben . . . 862
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 868
11.3 Konzept *particle-in-a-box* anwenden . . . 869
Anwendungen . . . 870
Der Stand der Dinge . . . 888
Aufgaben . . . 890
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 894
11.4 Korrespondenzprinzip . . . 895
Von Leitern und Rampen . . . 895
Stroboskopie . . . 896
Quantum goes Macro . . . 899
Aufgaben . . . 904
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 905

Was war wichtig? . . . 906

12 Tunneleffekt **909**
12.1 Potenzialbarriere . . . 913
Optisches Tunneln . . . 913
Potenzialstufe . . . 918
Ramsauer-Effekt . . . 919
Endlich hoher Potenzialwall . . . 930
Potenzialbarriere . . . 933
Aufgaben . . . 938
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 943
12.2 Tunneln in Natur und Technik . . . 944
Alpha-Zerfall . . . 945
Kernfusion und Leben . . . 946
Anwendungen . . . 954
Aufgaben . . . 977
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 978
12.3 Rastertunnel-Mikroskop . . . 979
Arbeitsweise eines STM . . . 981
Anwendungen . . . 986
Aufgaben . . . 991
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 993
12.4 Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon . . . 994
Kopenhagener Deutung . . . 1001
Anwendungen 1 . . . 1003
Schrödingers Katze . . . 1004
Verschränkung . . . 1006
Doppelpalt reloaded . . . 1007
Quantenradierer . . . 1010
Anwendungen 2 . . . 1013
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1017
Was war wichtig? . . . 1018

13 Schwarzer Strahler **1021**
13.1 Wärmestrahlung . . . 1029
Anwendungen . . . 1032
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1034
13.2 Eigenschaften Schwarzer Körper . . . 1035
Strahlungsgesetze . . . 1039
Anwendungen . . . 1042
Aufgaben . . . 1052
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1056
13.3 Sterne als Schwarze Strahler . . . 1057
Hertzsprung-Russell-Diagramm . . . 1062

Aufgaben . . . 1064
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1066
13.4 Universum als Schwarzer Strahler . . . 1067
Kosmische Hintergrundstrahlung . . . 1070
Am Anfang war der Urknall . . . 1077
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1084
13.5 Ultraviolettkatastrophe . . . 1085
Herleitung . . . 1088
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1091
13.6 Plancksches Strahlungsgesetz . . . 1092
Herleitung . . . 1093
Rayleigh-Jeans *reloaded* . . . 1098
Anwendungen . . . 1099
Planck-Einheiten . . . 1102
Aufgaben . . . 1106
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1109
13.7 Quantenphänomen Wärmekapazität . . . 1110
Dulong-Petit Gesetz . . . 1110
Einstein-Modell . . . 1112
Freiheitsgrade der Bewegung . . . 1115
Herleitung . . . 1119
Debye-Modell . . . 1122
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1126
Was war wichtig? . . . 1127

14 Photoelektrischer Effekt 1129
14.1 Experimente zum Photoeffekt . . . 1137
Experimente von Hallwachs . . . 1137
Versuch einer klassischen Erklärung . . . 1138
Beobachtungen . . . 1142
Gegenfeldmethode . . . 1143
Aufgaben . . . 1147
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1148
14.2 Einsteins Theorie zum Photoeffekt . . . 1149
Die Gleichung . . . 1152
Anwendungen . . . 1154
Aufgaben . . . 1156
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1159
14.3 Photoeffekt in Wissenschaft und Technik . . . 1161
Anwendungen . . . 1161
Nuklearer Photoeffekt . . . 1173
Photoelektronenspektroskopie . . . 1176
Anwendungen . . . 1178
Aufgaben . . . 1183

Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1184
14.4 Photondetektor Auge . . . 1185
Abstandsgesetz . . . 1186
Von Zapfen und Stäbchen . . . 1189
Kohlrausch-Knick . . . 1192
Ein Ausflug in die Physiologie . . . 1198
Wahrnehmungsschwelle . . . 1200
Anwendungen . . . 1201
Aufgaben . . . 1207
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1208
Was war wichtig? . . . 1209

15 Der Weg zum Atom 1211
15.1 Quantisierung der Ladung . . . 1222
Elektrolyse . . . 1222
Elektrolytische Dissoziation . . . 1223
Anwendungen 1 . . . 1228
Faradaysche Gesetze . . . 1231
Anwendungen 2 . . . 1233
Kathodenstrahlen . . . 1236
Entdeckung des Elektrons . . . 1238
Spezifische Ladung . . . 1240
Bainbridge-Methode . . . 1241
Anwendungen 3 . . . 1245
Millikan-Versuch . . . 1248
Anwendungen 4 . . . 1254
Aufgaben . . . 1257
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1260
15.2 Frühe Atommodelle . . . 1261
Größe der Atome . . . 1262
Erkenntnisse der Chemie . . . 1265
Brownsche Bewegung . . . 1268
Anwendungen 1 . . . 1272
Periodensystem der Elemente . . . 1275
Rutherfords Streuexperimente . . . 1282
Rutherfords Atommodell . . . 1291
Anwendungen 2 . . . 1294
Atome sehen: Feldionenmikroskop . . . 1298
Aufgaben . . . 1301
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1306
15.3 Lichtemission aus Atomen . . . 1308
Optische Spektrometer . . . 1310
Linienstrahlung . . . 1313
Anwendungen 1 . . . 1318

Balmer-Formel . . . 1320
Strahlender Dipol . . . 1326
Anwendungen 2 . . . 1328
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1334
15.4 Lichtabsorption durch Atome . . . 1335
Fraunhofer-Linien . . . 1335
Spektralanalyse . . . 1337
Hertzsprung-Russell Diagramm . . . 1342
Anzahl der Fraunhoferlinien . . . 1344
Anwendungen . . . 1347
Aufgaben . . . 1352
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1353
15.5 Franck-Hertz Versuch . . . 1354
Anwendungen . . . 1364
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1365
Was war wichtig? . . . 1366

C Quantenwelt der Atome und Kerne **1371**
Gut zu wissen! . . . 1378

16 Bohrsches Atommodell **1381**
16.1 Bewegte Elektronen strahlen . . . 1385
Quantisierung der atomaren Energieniveaus . . . 1388
Bohrsche Postulate . . . 1397
Wasserstoffähnliche Systeme . . . 1400
Anwendungen . . . 1402
Aufgaben . . . 1404
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1409
16.2 Linienstrahlung aus Atomen . . . 1410
Wasserstoff-Serien . . . 1412
Ritzsches Kombinationsprinzip . . . 1416
Anwendungen . . . 1417
Aufgaben . . . 1430
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1433
16.3 Lyman-alpha Wald . . . 1435
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1438
Was war wichtig? . . . 1439

17 Beyond Bohr **1440**
17.1 Drehimpuls-Quantisierung . . . 1449
Auswahlregel . . . 1456
Exotische Atome . . . 1460
Zeeman-Effekt . . . 1466
Anwendungen . . . 1473

Aufgaben . . . 1476
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1482
17.2 Entdeckung des Spins . . . 1483
Stern-Gerlach Experiment . . . 1486
Anwendungen . . . 1491
Elektronenorbitale . . . 1495
Aufgaben . . . 1501
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1504
17.3 Aufbauprinzip . . . 1505
Effektive Kernladung . . . 1506
Pauli-Prinzip . . . 1512
Die Elemente des Periodensystems . . . 1513
Hundsche Regeln . . . 1518
Wahrscheinlichkeitsdichte . . . 1520
Relevanz des Aufbauprinzips . . . 1526
Anwendungen . . . 1532
Aufgaben . . . 1539
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1542
Was war wichtig? . . . 1544

18 Röntgen **1545**
18.1 Charakteristische Strahlung . . . 1558
Slater-Regeln reloaded . . . 1561
Linenemission . . . 1564
Anwendungen . . . 1569
Aufgaben . . . 1573
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1576
18.2 Moseley Gesetz . . . 1577
Anwendungen . . . 1584
Aufgaben . . . 1590
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1592
18.3 Röntgenröhre . . . 1593
Anwendungen . . . 1596
Aufgaben . . . 1597
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1598
18.4 Bremsstrahlung . . . 1599
Anwendungen . . . 1601
Aufgaben . . . 1604
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1605
18.5 Duane-Hunt Gesetz . . . 1606
Grenzfrequenz . . . 1606
Aufgaben . . . 1611
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1614
18.6 Röntgenoptik . . . 1615

Was war wichtig? . . . 1619

19 Röntgendiagnostik **1621**
19.1 Röntgenbild . . . 1627
Anwendungen . . . 1630
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1638
19.2 Lambert-Beer Gesetz . . . 1639
Aufgaben . . . 1643
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1646
19.3 Röntgenkontrast . . . 1647
Röntgenfilter . . . 1648
Anwendungen 1 . . . 1648
Massenabschwächungskoeffizient . . . 1652
Wechselwirkungsprozesse . . . 1653
Röntgen-Holographie . . . 1656
Absorptionskanten . . . 1659
Anwendungen 2 . . . 1660
Aufgaben . . . 1671
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1672
19.4 Röntgenbeugung . . . 1673
Interferenz . . . 1678
Bragg-Bedingung . . . 1679
Anwendungen 1 . . . 1681
Struktur der DNA . . . 1685
Anwendungen 2 . . . 1694
Röntgenstreuung an einzelnen Molekülen und Nanostrukturen . . . 1696
Aufgaben . . . 1704
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1706
Was war wichtig? . . . 1707

20 Laser **1709**
20.1 Stimulierte Emission . . . 1715
Besetzungsinversion . . . 1716
Kohärenzlänge . . . 1722
Anwendungen . . . 1727
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1730
20.2 Technische Realisation . . . 1731
Optischer Resonator . . . 1735
Lasersysteme . . . 1738
Anwendungen . . . 1743
Röntgenlaser . . . 1744
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1753
20.3 Laser im Einsatz . . . 1754
Interferometrie . . . 1755

Laser in der Technik . . . 1757
Laser in der Medizin . . . 1763
Fernerkundung . . . 1768
Anwendungen . . . 1774
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1781
Was war wichtig? . . . 1782

21 Kerne **1783**
20.1 Radium-Manie . . . 1790
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1795
20.2 Nuklide . . . 1796
Anwendungen 1 . . . 1797
Ordnungszahl . . . 1801
Isotope . . . 1802
Element Kohlenstoff . . . 1803
Massenspektrometrie . . . 1807
Aktivität . . . 1814
Nuklidkarte . . . 1815
Anwendungen 2 . . . 1819
Aufgaben . . . 1824
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1830
20.3 Altersbestimmung . . . 1832
Dendrochronologie . . . 1832
Radiokarbonmethode . . . 1834
Anwendungen . . . 1838
Klimaforschung . . . 1845
Erdgeschichtliche Datierung . . . 1849
Aufgaben . . . 1858
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1862
20.4 Starke Wechselwirkung . . . 1863
Kernmaterie . . . 1865
Aufgaben . . . 1873
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1876
20.5 Massendefekt *revisited* . . . 1877
Aufgaben . . . 1881
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1887
Was war wichtig? . . . 1888

23 Ionisierende Strahlung **1891**
22.1 Radon . . . 1897
Gesundheitsbelastung durch Rn . . . 1900
Aufgaben . . . 1905
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1907

22.2 Zerfallskanäle . . . 1908
Anwendungen . . . 1912
Zerfallsreihen . . . 1913
Educated guess . . . 1915
Aufgaben . . . 1921
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1925
22.3 Alpha-Zerfall . . . 1926
Nachweis des Alpha-Teilchens . . . 1926
Tunneln durch die Coulombbarriere . . . 1928
Geiger-Nuttall-Regel . . . 1932
Anwendungen . . . 1935
Aufgaben . . . 1939
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1943
22.4 Beta-Zerfall . . . 1944
Die Rolle der Neutrinos . . . 1944
K-Einfang . . . 1950
Beta-minus Zerfall . . . 1950
Beta-plus Zerfall und das Positron . . . 1954
Anwendungen . . . 1955
Aufgaben . . . 1962
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1966
22.5 Gamma-Zerfall . . . 1967
Anwendungen . . . 1973
Aufgaben . . . 1980
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1982
22.6 Aktivierung . . . 1983
Entdeckung des Neutrons . . . 1983
Anwendungen . . . 1986
Aufgaben . . . 1997
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 1999
22.7 Nachweis Ionisierender Strahlung . . . 2000
Nebelkammer . . . 2003
Emulsionen . . . 2005
Blasenkammer . . . 2005
Funkenkammer . . . 2006
Gasdetektoren . . . 2006
Drahtkammer . . . 2010
Szintillationsdetektoren . . . 2010
Aufgaben . . . 2012
Konzeptionelle und andere Fragen . . . 2014
Was war wichtig? . . . 2015
Naturkonstanten . . . 2017

1 Einleitung



Moderne Physik

It seems probable that most of the grand underlying principles have now been firmly established and that further advances are to be sought chiefly in the rigorous application of these principles to all the phenomena which come under our notice ... An eminent physicist has remarked that the future truths of physical science are to be looked for in the sixth place of decimals.

Albert Michelson, 1894

Eine Zeitenwende in Wissenschaft und Kultur

Eine der zentralen Fragen der Physik ist die nach der Natur der Materie. Die Physik zu Anfang des 20. Jahrhundert war geprägt durch eine Reihe offener Fragen, denn

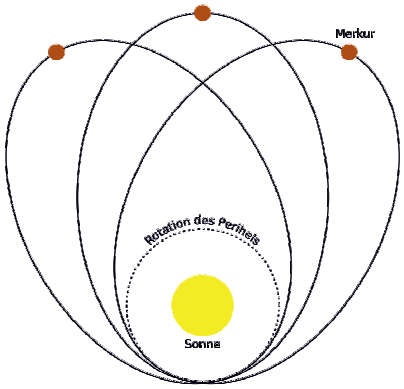


Abb. 1.1: Ein Problem bei der Erforschung der Planetendynamik im Sonnensystems war, dass sich die Bahn des Merkur nicht so verhielt, wie es die Newtonschen Gleichungen forderten. Erst die Relativitätstheorie konnte klären, warum der Merkur und im Übrigen auch alle anderen Planeten eine Periheldrehung vollführen.

die Newtonsche Mechanik und die Maxwellsche Elektrodynamik scheitern mit ihren Erklärungsversuchen. Überraschend ergibt sich eine Quantisierung Elektromagnetischer Wellen. Beispiele gefällig? Die Sonne ist ein scheinbar unerschöpflicher Energielieferant. Der Ausstoß an Strahlung erreicht gigantische Werte: $3.8 \cdot 10^{26}$ J/s. Der geringe Anteil von $1\,361\,\mathrm{W/m^2}$, der uns erreicht, die so genannte Solarkonstante, reicht aus, um auf der Erde Bedingungen zu schaffen, die die Entwicklung von Leben ermöglichte. Welche Physik steckt dahinter? Ein Kohleofen kann es nicht sein! Ein ähnliches Problem ist der heiße Erdkern. Auch hier war es nicht möglich, die Beobachtung mit den gängigen Vorstellungen der klassischen Physik zu erklären. Den Anstoß für die Revolution, die zur Entwicklung der Modernen Physik führte war aber ein Anderer. Welche Strahlung wird von einem heißen Objekt ausgesandt? Diese scheinbar simple Fragestellung war mit den Mitteln der klassischen Physik nicht erklärbar. Die Modelle ergeben ein Verhalten, dass unter dem Namen Ultraviolettkatastrophe in die Physikgeschichte einging. Salopp gesprochen sind sie und ich nach Ansicht der damaligen Modellierer starke strahlende Röntgenquellen. In einem Akt der Verzweiflung stellt Planck eine einfache Formel auf,[1] die die Größen Energie und Frequenz verbindet:

$$E_{ph} = h \cdot \nu_{ph} \tag{1.1}$$

Hier taucht eine der wichtigsten Naturkonstanten der Physik auf: h. Diese wird uns über den gesamten Text immer wieder begegnen. Kein quantenphysikalischer Effekt kann ohne eine Verwendung dieser Konstante mathematisch beschrieben werden. Als kleine Übung ordnen Sie die Naturkonstanten nach ihrer Relevanz!

Plancksches Wirkungsquantum: $6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$

[1] E_{ph} ist die Photonenenergie, h das Plancksche Wirkungsquantum und ν_{ph} die Frequenz des Lichts.

Energie	Physikalische Interpretation
eV	Energie der äußeren Elektronen in einem Atom
keV	Energie der inneren Elektronen in einem Atom
MeV	Energie der Neutronen und Protonen im Kern
GeV	Energie der Quarks als Bestandteile des beispielsweise Protons

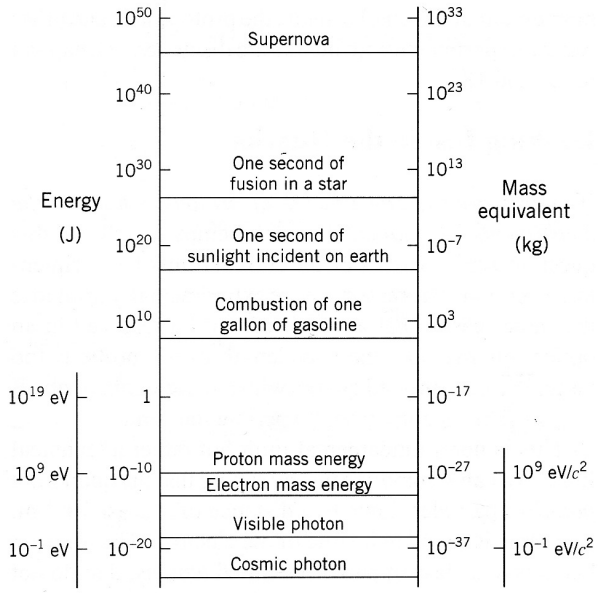


Abb. 1.2: Energien in unserem Universum und ihre äquivalente Masse [**?**].

Gleichung 1.1 veränderte radikal unsere Vorstellung über die Materie. Eng verbunden mit der Planck-Konstante h sind typische Energieskalen der Materie, siehe Tab. 1. Die in der Quantenphysik gebräuchliche Einheit ist das Elektronenvolt, kurz eV. An dieser Stelle sei nur die Tab. 1 aufgeführt, die die Umrechnung in SI-Einheiten darlegt. Die Chemie verwendet dagegen als Energieeinheit gerne kJ/mol. Gl. 1.1 kann man außerdem verwenden, um eine gegebene Energie einer bestimmen Frequenz oder inversen Wellenlänge zuzuordnen.

Noch eine weitere Ungereimtheit tat sich auf. Durch die Fortschritte in der Spektroskopie

	J	eV	cm^{-1}	Hz	kJ· mol^{-1}
J	1.0	$6.24 \cdot 10^{18}$	$5.03 \cdot 10^{22}$	$1.51 \cdot 10^{33}$	$6.02 \cdot 10^{20}$
eV	$1.60 \cdot 10^{-19}$	1.0	$8.07 \cdot 10^{3}$	$2.42 \cdot 10^{14}$	$9.65 \cdot 10^{1}$
cm^{-1}	$1.97 \cdot 10^{-23}$	$1.24 \cdot 10^{-4}$	1.0	$3.00 \cdot 10^{1}$	$1.12 \cdot 10^{-2}$
Hz	$6.63 \cdot 10^{-34}$	$4.14 \cdot 10^{-15}$	$3.34 \cdot 10^{-11}$	1.0	$4.00 \cdot 10^{-13}$
kJ· mol^{-1}	$1.66 \cdot 10^{-21}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$	$8.36 \cdot 10^{1}$	$2.51 \cdot 10^{12}$	1.0
K	$1.38 \cdot 10^{-23}$	$8.62 \cdot 10^{-5}$	$6.95 \cdot 10^{-1}$	$2.08 \cdot 10^{10}$	$8.31 \cdot 10^{-3}$

Tab. 1.1: Umrechnung von SI-Einheiten in Einheiten, die in der Quantenwelt gebräuchlich sind.

fand man, dass ein heißes Objekt ein kontinuierliches Schwarzkörperspektrum und einzelne Atome ein Linienspektrum aussenden. Die grundlegende und bis zu diesem Zeitpunkt nicht abschließend geklärte Frage dahinter lautet: Wie ist Materie aufgebaut? Schließlich führte die simple Feststellung Die Lichtgeschwindigkeit ist endlich! zu Einstein und seiner Formulierung der Relativitätstheorie.

Lichtgeschwindigkeit: $2.998 \cdot 10^8$ m/s

Beispielsweise konnte erst die Allgemeine Relativitätstheorie die Periheldrehung des Merkur erklären, siehe Abb. 1.1.[2] Erst die Relativitätstheorie und die Quantenphysik konnten befriedigende Antworten auf diese drängenden Fragen liefern. Energie und Masse sind -undenkbar für die Klassische Physik austauschbare Konzepte, siehe Abb. 1.2.Die Forschung, die mit Planck und Einstein Fahrt aufgenommen hat, führte zu rasanten Fortschritten in Physik und Chemie, der bis heute in Naturwissenschaften, Philosophie und Alltag nachwirken. Die technische Anwendung ist überall in unserem Leben greifbar. Abb. 1.3 und Abb 1.4 geben einen Überblick über die Erfolge der Physik im 20. Jahrhundert und stellen die Entwicklung in Bezug zur technisch-kulturellen Entwicklung.

Zeittafel Quantenphysik

1900 Planck erklärt das Spektrum eines Schwarzes Strahlers; Lenard führt Versuche zum Photoelektrischen Effekt durch.

1905 Einstein erklärt den Photoelektrischen Effekt.

1907 Einstein nutzt das Phänomen der Quantisierung, um die Wärmekapazität von Festkörpern bei tiefen Temperaturen zu erklären.

1909 Millikan entdeckt die Quantisierung der elektrischen Ladung.

1911 Rutherford stellt sein Atommodell vor.

1913 Bohrsches Atommodell

1914 Franck und Hertz entdecken die Energiequantisierung im Atom.

1916 Millikan verifiziert experimentell Einsteins Analyse des Photoelektrischen Effekts.

1923 Sommerfeld verallgemeinert das Bohrsche Atommodell.

1924 deBroglie Hypothese der Welleneigenschaften der Materie.

1925 Schrödinger und Heisenberg stellen Gleichungen zur Beschreibung der quantenphysikalischen Eigenschaften der Materie vor.

[2] *Lexikon:* Die Periheldrehung geht auf Störungen durch die großen Planeten zurück. Effekte der Relativitätstheorie spielen ebenfalls eine Rolle. Beim Merkur ist der Beitrag aus der Himmelsmechanik 532.08" pro Jahrhundert, bei der Erde 1165". Die entsprechende relativistischen Beiträge sind 43.03" und 3.8".

1927 Heisenbergsche Unschärferelation; Das Davisson-Germer Experiment weist die Welleneigenschaften der Materie nach.

1928 Dirac liefert eine relativistische Erweiterung der Schrödingergleichung.

1932 Entdeckung des Neutrons durch Chadwick und des Positrons durch Anderson

There is somthing fascinating about science. One gets such wholesome returns of conjecture out of suc a trifling investment of fact.

Mark Twain, *Life on the Mississippi* (1883)

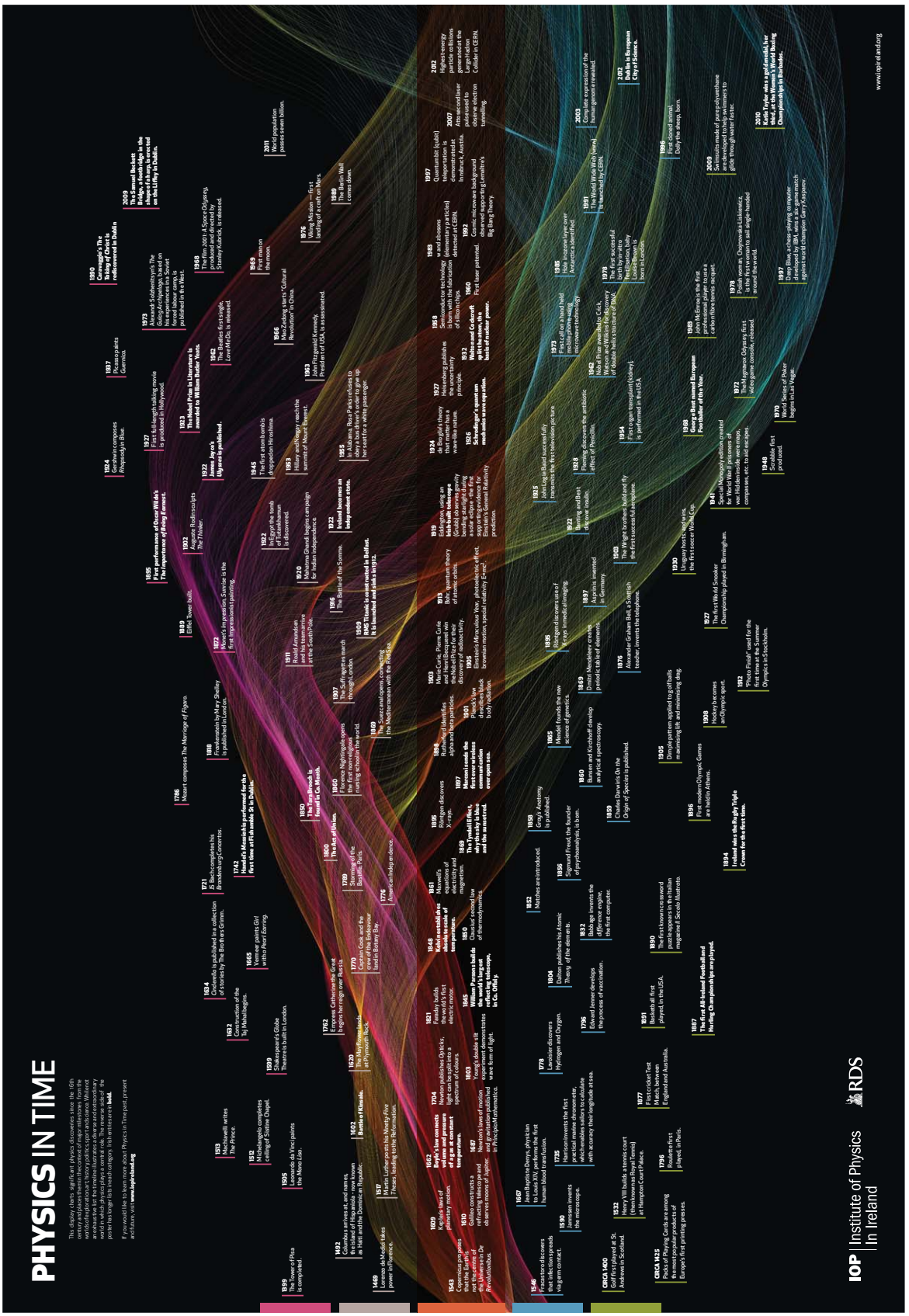


Abb. 1.3: Einordnung physikalischer Entdeckungen in ihren historischen Kontext 1

Abriss der Themengebiete

Since everyday life does not confront us with such swiftly moving bodies, Nature, always economical, had educated common sense only up to the level of everyday life.

Bertrand Russell

Der Plan für die Bearbeitung der Themen sieht folgendermaßen aus. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Relativitätstheorie.

What happens, when things go really fast?

Einstein hat sich dieses Themas angenommen und eine Theorie entwickelt, die auf zwei einfachen Regeln beruht. Die Konsequenzen sind allerdings vielfältig, Bahnfahrer sehen die Welt mit anderen Augen, Uhren gehen zu langsam und Licht krümmt sich. Im Kapitel Quantenphysik werden wir uns mit einer Reihe von Phänomenen beschäftigen, für die die klassische Physik keine Erklärung findet.

What happens, when things get really small?

Es beginnt mit dem spannenden Thema Materiewellen. Es geht um den Dualismus von Welle und Teilchen. Wie sich zeigen wird, lassen sich bestimmte Experimente in der mikroskopischen Welt nur erklären, wenn man dem betrachteten Teilchen Eigenschaften zuschreibt, die man ansonsten nur von Wellen kennt. Irritierenderweise bleiben die Teilcheneigenschaften davon unberührt. Ein merkwürdiger Zwitterzustand also. Es wird weiter erläutert, mit welchem Ansatz die theoretische Physik die Physik der mikroskopischen Welt erfasst. Ohne tief in die Materie einzusteigen, wird es möglich sein, das Verhalten wichtiger Modellsysteme zu verstehen. Als weitere Beispiele für das außergewöhnliche Gegebenheiten in der Quantenwelt betrachten wir den photoelektrischen Effekt, das Rutherford-Experiment und den Franck-Hertz-Versuch, um zu erläutern, welche Schritte notwendig waren, um zum Bohrschen Atommodell und darüber hinaus zu gelangen.

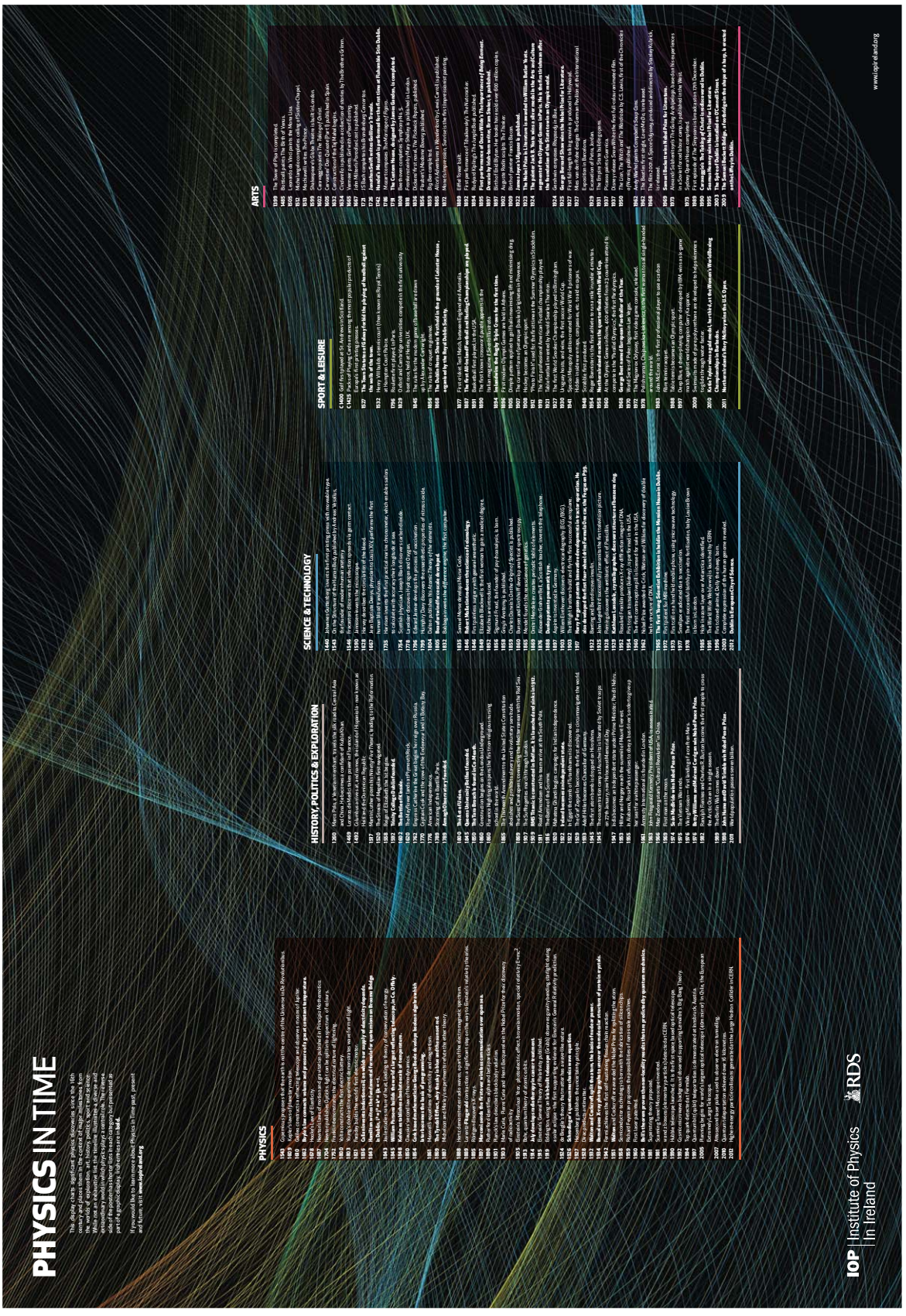


Abb. 1.4: Einordnung physikalischer Entdeckungen in ihren historischen Kontext 2



Als Sie ihr Studium begonnen haben, hatten Sie sicherlich den Eindruck, in Physik und Mathematik gut vorbereitet zu sein. Sie haben sicherlich bald gemerkt, was Ihnen für eine Diskussion über Physik fehlte: die Fähigkeit quantitative Rechnungen durchzuführen, Grundlagen der Trigonometrie einzusetzen, Gleichungen zielführend umzustellen, mit Zehnerpotenzen zu arbeiten und Skalierungen zu nutzen. Gerade diese Kompetenzen werden Sie benötigen, um dem Stoff folgen zu können.

Lehrbücher zu Relativität und Quanten

Grundlage der Buches ist nicht die Wiedergabe des Inhalts eines ausgewählten Lehrbuchs. Vielmehr ist der Text aus der Verwendung vieler Lehrbücher und anderer Artikel entstanden. Wundern Sie sich also nicht über den Umfang der Literaturliste. Viel Freiraum zum Stöbern also. Hauptsächlich sind dies englischsprachige Publikationen. Hier eine Liste ohne Anspruch auf Vollständigkeit:[3]

- Lehrbücher in Deutsch[4] [? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?]
- Lehrbücher in Englisch [?]
- Spezielle Lehrbücher aus der Physikalischen Chemie [? ? ? ?]

[3]Empfehlenswerte Lehrbücher sind in der Literaturliste markiert!
[4]Englischsprachige Ausgabe. Diese Lehrbücher sind auch auf Deutsch erschienen.

- Spezielle Lehrbücher zu themennahen Gebieten [**?**]
- Reiseliteratur [**? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?**]

Ziel ist, einen spannenden Überblick der Physik zu geben und vor allen Dingen die Auswirkungen der Modernen Physik auf Astrophysik, Chemie, Technik und *life sciences* herauszuarbeiten. Grundsätzlich kann man für die Vertiefung des Stoffes jedes Lehrbuch verwenden, in dem die Themen Spezielle Relativitätstheorie und Quantenphysik behandelt wird. Auch die Lehrbücher aus der Oberstufe (Metzler Physik [**?**], Cornelsen Physik [**?**]) sind geeignet, die Grundlagen aufzuarbeiten. Darüber hinaus findet man Aktuelles und Anregungen für den späteren Unterricht in folgenden Zeitschriften:

- American Journal of Physics
- Journal of Chemical Education
- Nature
- Physical Review letters
- Physik in unserer Zeit
- Physik Journal
- Science
- Spektrum der Wissenschaft
- The Physics Teacher

Ich empfehle, Mitglied der Deutschen Physikalischen Gesellschaft zu werden, und das reichhaltige Angebot der DPG für einen Beitrag von nur €18 im Jahr wahrzunehmen. Falls Sie Fragen haben, melden Sie sich!

Das Thema Energie wird uns in neuer und vielfältiger Weise beschäftigen. Tab. 1 liefert eine Übersicht, wie sich die Energie in unterschiedliche Maßeinheiten umrechnet. Diese sind in der Atom- und Kernphysik, aber auch in der Chemie, gebräuchlich und wir werden regen Gebrauch davon machen.

Das Skript

Im Skript werden die Erkenntnisse vertieft und Sie finden zusätzliche Hinweise und Beispiele, die ihnen das Verständnis erleichtern sollen. Ich legen ihnen ans Herz zu stöbern (Selbststudium). Es werden interessante Aspekte vorgestellt, für die in einer Vorlesung leider nicht die Zeit bleibt. Es ist das Ziel, möglichst Beispiele aus anderen Forschungsrichtungen zu verwenden. Dies soll zeigen, wie weit die Erkenntnisse aus der Relativitätstheorie und der Quantenphysik auch die anderen Naturwissenschaften und die Technik beeinflusst haben.

Eine Strategie muss her!

Erschrecken Sie nicht wegen des Umfangs des Skripts. Es ist so konzipiert, dass es einen umfassenden Überblick liefert. Ihre Aufgabe wird es sein, eine Lernstrategie zu entwickeln, um die Texte ökonomisch zu lesen. Das bedeutet, dass Sie lernen müssen, die vermeintliche Spreu (interessante Entwicklungen) vom aktuellen Weizen (klausurrelevant) beim Lesen effektiv zu trennen. Das Erlernen dieser Fähigkeit wird Ihnen in ihrem späteren Beruf äußerst nützlich sein, um innerhalb kurzer Zeit eine Thematik zu erfassen. Zum Beispiel können Abbildungen helfen, einen Sachverhalt leichter zu erfassen.

Wie ist das Skript aufgebaut?

Jedes Kapitel beginnt mit einer Motivation, die die Relevanz des Themas herausstellt und einer Vorstellung der physikalischen Grundlagen. Letzteres sind die Grundlage für die spätere Klausur. Die Beispiele und die Abstracts, die verstreut und im Abschnitt Anwendungen auftauchen, stellen das Thema in den physikalisch-historischen Zusammenhang oder spannen den Bogen in ändig die aktuelle Forschung. Für nicht vollständig erst gemeine Anmerkungen zum Stil Wissenschaftlichen Schreibens, siehe das Glossar in Fig. 1.5.der Für die Klausur sind diese Ausflüge nur in Ausnahmefällen relevant. Am Ende jeden Kapitels finden Sie Aufgaben. Der Schwierigkeitsgrad ist unterschiedlich und reicht von einfach bis anspruchsvoll. Eingearbeitet sind auch *multiple choice* Fragen. Die Beantwortung wird ihnen klarmachen, ob Sie die Konzepte verinnerlicht haben. Gleiches gibt für den Abschnitt *Konzeptionelle und andere Fragen.* Können Sie überzeugende Antworten auf die Denkanstöße anbieten? Am Ende der Themenkomplexe wie Relativitätstheorie findet man eine Liste der wichtigsten Fachbegriffe, Experimente und Phänomene. Können Sie die aufgelisteten Begriffe thematisch einordnen und erläutern?

Nicht alle Formeln und Herleitungen im Text sind gleich wichtig. Dies gilt auch für die Klausur. Manche Formel und Herleitungen sind nur der Vollständigkeit halber vermerkt. Grundlegenden Gleichungen, die für die Physik im Allgemeinen (also nicht nur für die anstehende Klausur) von Relevanz sind, werden im Text farblich hervorgehoben. Die tatsächlich notwendigen Formeln zum Lösen der Übungsaufgaben und für die Klausur sind deutlich geringer. Eine Herleitung dient in der Regel nur dazu, eine bestimmte Herangehensweise an ein Problem zu erläutern. Wenn es möglich ist, wird auf eine mathematische Herleitung verzichtet und die angegebene Formel auf andere Weise motiviert. Für Interessierte verweise ich auf das Skript und die einschlägigen Lehrbücher.

Welche Funktion haben die im Text verwendeten Text- und Seitenfarben?

- *Lexikon:* Manchmal ist es notwendig, sich an bestimmte Zusammenhänge zu erinnern. An anderer Stelle ist es zweckmäßig, eine unbekannte Thematik kurz einzuordnen. Vielleicht wissen Sie schon, was sich hinter bestimmten Begriffen verbirgt. Wenn nicht, soll hier eine Hilfe zur Verfügung gestellt werden.

Phrase	*Translation*
Typical results are shown.	The best results ever obtained are shown.
The agreement with predicted curve is excellent .	The agreement with predicted curve is fair.
is good.	is poor.
is satisfactory.	is doubtful.
is fair.	is imaginary.
is as good as could be expected.	is nonexistent.
Correct within an order of magnitude.	Wrong
... accidently stained during mounting.	... dropped on the floor.
... handled with extreme care.	... not dropped on the floor.
High purity, very high purity, or spectroscopically pure	Composition unknown except for the exaggerated claims of the supplier
Preliminary experiments have shown	We did it once but couldn't repeat it.
Presumably at longer times.	I didn't take the time to find out.
It is hoped that this work will stimulate further efforts in the field.	This paper isn't very good, but neither are any of the others in this miserable field.
Three of the samples were chosen for detailed study.	The results of the others didn't make sense and were ignored.
The W-Pb system was chosen as being especially suitable to show the predicted behavior.	The fellow in the next lab already had some made up.
It has long been known ..	I haven't bothered to look up the original reference
A survey of the earlier literature ...	I even read last year's journals.
It is suggested (or it is believed) that ...	I think ...
It is generally believed that ...	A couple of other guys think so too.
... of great theoretical and practical importance.	... interesting to me.
Elegant ...	A reference to work that will be attacked.
Thanks are due to Joe Glotz for assistance with the experiments and to John Doe for valuable discussions.	Glotz did the work and Doe explained what it meant.

Abb. 1.5: Ein Wörterbuch des Wissenschaftlichen Schreibens [**?**].

- Questions? Manche Fragen sind offensichtlich, aber man muss sie auch stellen.

- Aktuelle Forschung: Um die Relevanz der Thematik hervorzuheben, erscheinen im Text so genannte *abstracts*. Hier versuchen Forscher, ihrer Erkenntnisse zu Anfang ihrer Publikation kurz und prägnant zusammen zu fassen. Sie werden feststellen, dass Relativität und Quanten nicht abgehandelt und olle Kamellen, sondern Gegenstand der aktuellen Forschung sind. Als Training werden sie im Original wiedergegeben. Sie werden merken, dass man die Aussage mit etwas Übung schnell erfassen kann, da es sich hier nicht um einen literarischen Text handelt. Ein nicht so ernst gemeintes Beispiel aus dem Journal of Physics A [**?**], siehe Abb. 1.6.

  Wie muss man so ein *abstract* lesen?

  - Forscher veröffentlichen die Resultate ihrer wissenschaftlichen Arbeit, weil sie der Meinung sind, dass sich durch ihre Arbeit unsere Sicht auf die Natur und Naturphänomene ändert. Es hat sich etwas Neues ergeben und das Neue könnte die Arbeit anderer Wissenschaftler beeinflussen.

- Zunächst geht es darum das Thema des Papiers in die Wissenschaftslandschaft einzuordnen. Hier kommt es auf die Zielgruppe der Zeitschrift an. Journale wie Nature und Science richten sich an alle Naturwissenschaftler und Mediziner. Leser von Physical Review Letters sind wahrscheinlich Physiker und die, die sich eine Abhandlung im Astrophysical Journal anschauen, sind schon Experten auf dem Gebiet der Astrophysik. Auf jeder Ebene wird also zunächst versucht die Leserschaft mitzunehmen und für den eigenen Beitrag zu interessieren.
- Dann geht man ins Detail und erläutert den wissenschaftlichen Hintergrund. Keine Arbeit entsteht aus dem Nichts, sondern hat eine wissenschaftliche Vorgeschichte.
- Dann geht es ans Eingemachte: Die Fragestellung wird formuliert und die zentralen Ergebnisse der Untersuchung werden kurz und knackig dargestellt.
- Es wird die Frage beantwortet, ob sich durch die Resultate ein Beitrag zum Verständnis der Natur und ihrer Dynamik ergeben hat.
- Weiter wird erläutert, ob sich möglicherweise auch übergreifende Aspekte ergeben haben, die für Forscher in angrenzenden Gebieten relevant sind.

Lesen Sie die *abstracts* anhand dieser angegebenen Aspekte. Bei einem gut geschriebenen Artikel spielt es dann keine Rolle mehr, ob Sie sich in Themen wie Kristallographie oder Vogelkunde auskennen - die zentrale Aussage werden sie erfassen. Probieren Sie es mal aus und lesen Sie die beiden folgenden abgedruckten Texte!

Beispiel 1 aus der Welt der Nanophysik:

Femtosecond X-ray protein nanocrystallography [?]**:** X-ray crystallography provides the vast majority of macromolecular structures, but the success of the method relies on growing crystals of sufficient size. In conventional measurements, the necessary increase in X-ray dose to record data from crystals that are too small leads to extensive damage before a diffraction signal can be recorded. It is particularly challenging to obtain large, well-diffracting crystals of membrane proteins, for which fewer than 300 unique structures have been determined despite their importance in all living cells. Here we present a method for structure determination where single-crystal X-ray diffraction 'snapshots' are collected from a fully hydrated stream of nanocrystals using femtosecond pulses from a hard-X-ray free-electron laser, the Linac Coherent Light Source. We prove this concept with nanocrystals of photosystem I, one of the largest membrane protein complexes. More than 3 000 000 diffraction patterns were collected in this study, and a three-dimensional data set was assembled from individual photosystem I nanocrystals ($\approx$200 nm to 2 μm in size). We mitigate the problem of radiation damage in crystallography by using pulses briefer than the timescale of most damage processes. This offers a new approach to structure determination of macromolecules that do not yield crystals of sufficient size for studies using conventional radiation sources or are particularly sensitive to radiation damage.

Beispiel 2 aus der Welt der Biologie:

Brood Parasitic Cowbird Nestlings Use Host Young to Procure Resources [?]**:** Young brood parasites that tolerate the company of host offspring challenge the existing evolutionary view of family life. In theory, all parasitic nestlings should be ruthlessly self-interested and should kill host offspring soon after hatching. Yet many species allow host young to live, even though they are rivals for host resources. Here we show that the tolerance of host nestlings by the parasitic brown-headed cowbird Molothrus ater is adaptive. Host young procure the cowbird a higher provisioning rate, so it grows more rapidly. The cowbird's unexpected altruism toward host offspring simply promotes its selfish interests in exploiting host parents.[5]

[5] **Brutparasitische Kuhstärling Nestlinge verwenden Wirtsjunge um Nahrung zu beschaffen:** Junge Brutparasiten, die die Gesellschaft von Wirtsnachkommen tolerieren, stellen die bestehende evolutionäre Sichtweise des Familienlebens in Frage. Theoretisch sollten alle parasitischen Nestlinge rücksichtslos eigennützig sein und die Nachkommen des Wirts bald nach dem Schlüpfen töten. Dennoch lassen viele Arten Wirtsjunge leben, obwohl sie Rivalen um Wirtsressourcen sind. Hier zeigen wir, dass die Toleranz gegenüber Wirtsnestlingen durch den parasitischen Braunkopf-Kuhvogel *Molothrus ater* adaptiv ist. Wirtsjunge verschaffen dem Kuhvogel eine höhere Versorgungsrate, sodass er schneller wächst. Der unerwartete Altruismus des Kuhstärlings gegenüber den Nachkommen des Wirts fördert einfach sein egoistisches Interesse an der Ausbeutung der Gasteltern.

IOP FTC
IOP PUBLISHING JOURNAL OF PHYSICS A: MATHEMATICAL AND THEORETICAL
J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 492001 (5pp) doi:10.1088/1751-8113/44/49/492001

FAST TRACK COMMUNICATION

Can apparent superluminal neutrino speeds be explained as a quantum weak measurement?

M V Berry[1], **N Brunner**[1], **S Popescu**[1] **and P Shukla**[2]

[1] H H Wills Physics Laboratory, Tyndall Avenue, Bristol BS8 1TL, UK
[2] Department of Physics, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India

Received 12 October 2011, in final form 27 October 2011
Published 11 November 2011
Online at stacks.iop.org/JPhysA/44/492001

Abstract
Probably not.

Abb. 1.6: Für die Antwort auf die gestellte Frage[a] muss man genauer hinschauen [**?**].
[a] Probably not.

- Geschichte der Naturwissenschaften: Ein Textauszug bringt ein Thema in seinen historischen Zusammenhang.
- Zitate (berühmter) Forscher: Manche Sätze der Kollegen muss man einfach bringen.

  We must be clear that when it comes to atoms, language can be used only as in poetry [**?**].

  Niels Bohr

- Trainingsphase: Im Anschluss an jedes Unterkapitel finden Sie Übungsaufgaben mit Lösungen. Danach finden Sie Konzeptionelle und andere Fragen: Kennen Sie die Begriffe? Haben Sie das physikalische Konzept verstanden und können Sie es anwenden? Hier besteht die Möglichkeit, ihr Verständnis über Phänomene der Physik zu überprüfen.
- Was war wichtig? Am Ende des Kapitels finden Sie eine Zusammenstellung der wichtigsten physikalischen Erkenntnisse des jeweiligen Themas: Die Stichworte sollen Ihnen helfen,das Thema zu strukturieren und auf die wesentlichen Aspekte im Hinblick auf die anstehende Klausur hinzuweisen:

In der Experimentalphysik werden Lernschritte durch Demonstrationsexperimente motiviert oder vertieft. Im Skript gibt es an den entsprechenden Stellen zusätzliche weblinks zu Videodateien. Hier können Sie sich die Experimente nochmal in Ruhe anschauen. Abschließend noch ein wichtiger Aspekt. Relativitätstheorie und Quantenphysik sind nicht von der klassischen Physik entkoppelt. Bewegt sich das Objekt langsam oder wird immer größer, verhalten sich die Studienobjekte klassisch. Relativitätstheorie und Quantenphysik modifizieren die Beschreibung im Rahmen der Klassischen Physik bei hohen Geschwindigkeiten und auf mikroskopischer Ebene. Die Übergänge sind fließend! Daher ist es sinnvoll, stets auch die Ergebnisse der klassischen Physik im Auge zu behalten. Beispielsweise beobachtet man bei kleinen Teilchen das Phänomen der Interferenz, das man schon in der Optik kennengelernt hat.

Viel Spaß bei diesem interessanten Ausflug in die Moderne Physik!

. . . und die Klausur?

In der Klausur werden die physikalischen Konzepte der Relativitätstheorie und der Quantenphysik abgefragt. Sie sollten Details der Meilenstein-Experimente kennen und wichtige experimentelle Aufbauten skizzieren und ihre Funktionsweise erläutern können. Was beinhaltet die Klausur für Fragen und Aufgaben? Hier Beispiele aus früheren Jahren:

- **Freitext-Aufgaben:**

  1. Erklären Sie das Messprinzip eines Rastertunnelmikroskops!
  2. Beschreiben Sie die zentralen Resultate des Rutherford-Experiments!

- **Rechen-Aufgaben:**

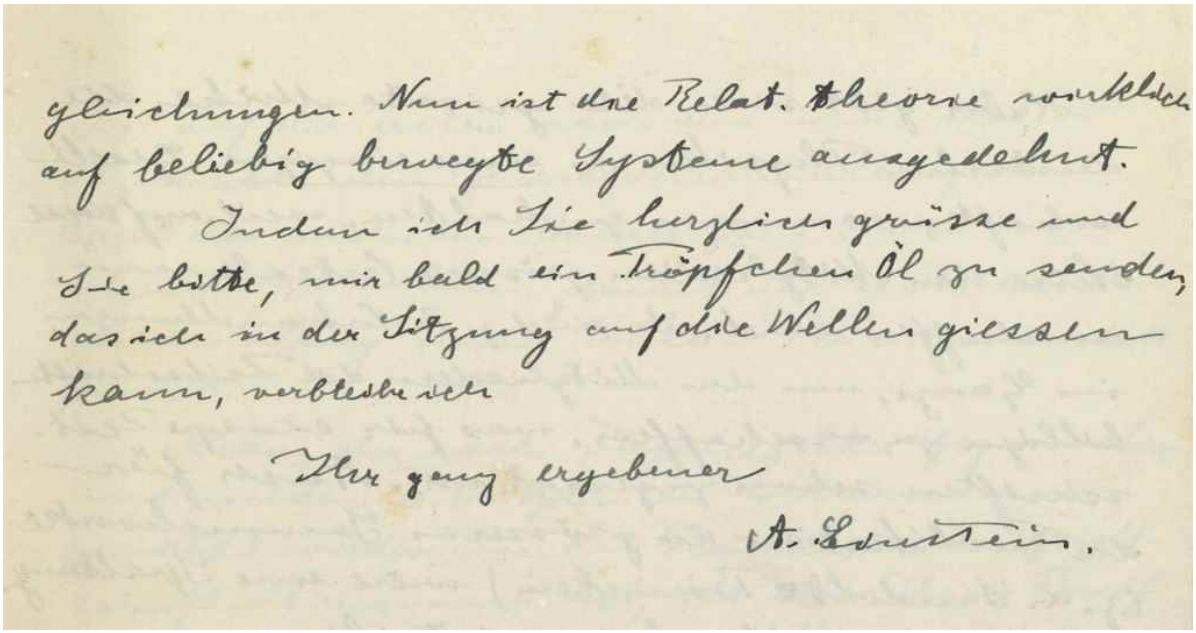
  1. Ein Raumschiff der Länge L_0=150 m (Eigenlänge) bewegt sich im Vergleich zu einer Raumstation mit einer Geschwindigkeit von $2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. Welche Länge hat das Raumschiff für die Astronauten in der Raumstation?
  2. Mit dem nackten Auge kann man am Nachthimmel eine hell leuchtende Sonne erkennen. Das Maximum des Spektrums findet man bei einer Wellenlänge von 430 nm. Die Lichtintensität des Sterns bei dieser Wellenlänge beträgt $1.6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m^2}$. (Hinweis: W=J/s)
     a) Bestimmen Sie die Anzahl an 430 nm-Photonen, die pro Sekunde durch die Pupille (Durchmesser 8 mm) auf die Netzhaut treffen!
     b) Welche Oberflächentemperatur hat der Stern?

- **Multiple choice:**

  1. Welche der genannten Systeme sind nach der Speziellen Relativitätstheorie zur Beschreibung von Naturvorgängen gleichberechtigt:
     ◯ Es handelt sich um Inertialsysteme!
     ◯ Es handelt sich um Nicht-Inertialsysteme!
     ◯ Es handelt sich um Inertial- und Nicht-Inertialsysteme!
     ◯ Es handelt sich um Quantensysteme!
     ◯ Es handelt sich um Superpositionssysteme!
  2. Erhöht sich die Masse eines Atoms, wenn das System ein grünes Photon bei 555 nm absorbiert?
     ☐ Ja!
     ☐ Nein!
     Erläutern Sie ihre Entscheidung!

Für weitere Eindrücke verweise ich auf die Probeklausur, die Sie im Dateien-Ordner auf StudIP finden.

A Relativität


gleichungen. Nun ist die Relat. Theorie vorläufig
auf beliebig bewegte Systeme ausgedehnt.
Indem ich Sie herzlich grüsse und
Sie bitte, mir bald ein Tröpfchen Öl zu senden,
das ich in der Sitzung auf die Wellen giessen
kann, verbleibe ich
Ihr ganz ergebener
A. Einstein.

Albert Einstein[1] an Wilhelm Wien 1914

Time is nature's way to keep everything from happening all at once.

Zitat aus einem Roman von Ray Cummings, 1919

Zeit ist dass, was uns im Weiteren beschäftigen wird. Auch unser Körper erlebt Aspekte der Zeit. Überlagert von unseren unmittelbaren Reaktionen auf äußere Einflüsse ist der zirkadiane Rhythmus (24-Stunden-Zyklus physiologischer Aktivität) in unser Leben eingepflanzt. Und das gilt nicht nur für Menschen, sondern auch für Tiere und Pflanzen. Beim Menschen definiert der zirkadiane Rhythmus die Zeiten der niedrigsten Körpertemperatur, der größten Wachsamkeit, des stärksten Anstiegs des Blutdrucks und des tiefsten Schlafs. Obwohl dieser Rhythmus durch Licht und Temperatur beeinflusst

[1] The Nobel Prize in Physics 1921 was awarded to Albert Einstein *for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect.*

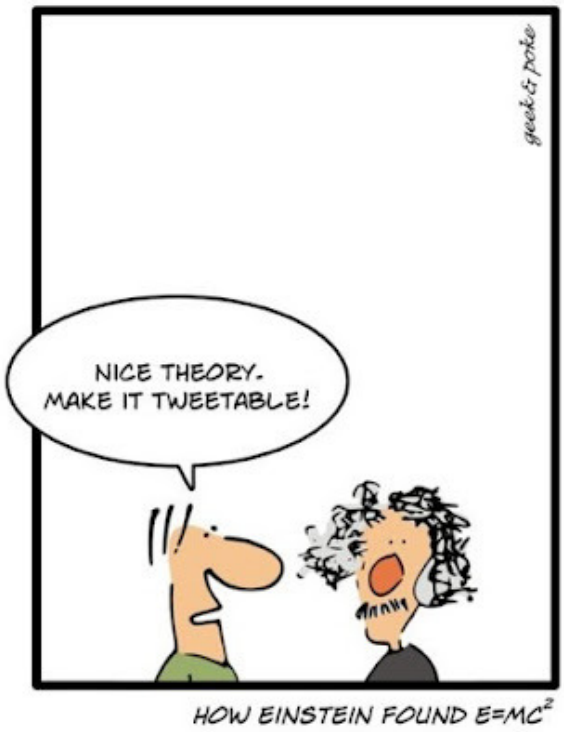


Abb. 1.1: Ein Einstein Cartoon.

werden kann, entsteht er durch interne molekulare Mechanismen.[2] Der evolutionäre Vorteil ist, dass es Organismen ermöglicht, Licht, Nahrung etc. je nach ihrer Verfügbarkeit zu verschiedenen Zeitpunkten des Zyklus optimal zu nutzen. Die Rotation der Erde, der regelmäßige Wechsel der Helligkeit hat sich eingeprägt und die Wahrnehmung von Zeit ermöglicht. Im Folgenden wollen wir den Begriff Zeit aus physikalischer Sicht untersuchen und zur Erklärung die Einsteinsche Relativitätstheorie heranziehen.

Most of us think of space and time as separate because that is the way we think that we experience them. For example, we seem to have some control over our position in space, but none at all over our position in time. There is nothing we can do about the flow of time. We can choose to stand perfectly still, in which case our position in space does not change, but there is no way that we can stand still in time [**?**].

Die relativistische Mechanik greift wie die klassische Physik auf die Konzepte Masse, Impuls, Kraft und Energie zurück. Allerdings ergeben sich die relativistischen Definitionen in leicht veränderter Weise. Welche Anforderungen stellen wir an die Relativitätstheorie?

- Ein relativistisches Gesetz muss in jedem beliebigen Bezugssystem gelten.
- Bei geringen relativen Geschwindigkeiten reduzieren sich die relativistischen Gleichung auf die klassischen Ausdrücke.

[2] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 2017 was awarded jointly to Jeffrey C. Hall, Michael Rosbash and Michael W. Young *for their discoveries of molecular mechanisms controlling the circadian rhythm*

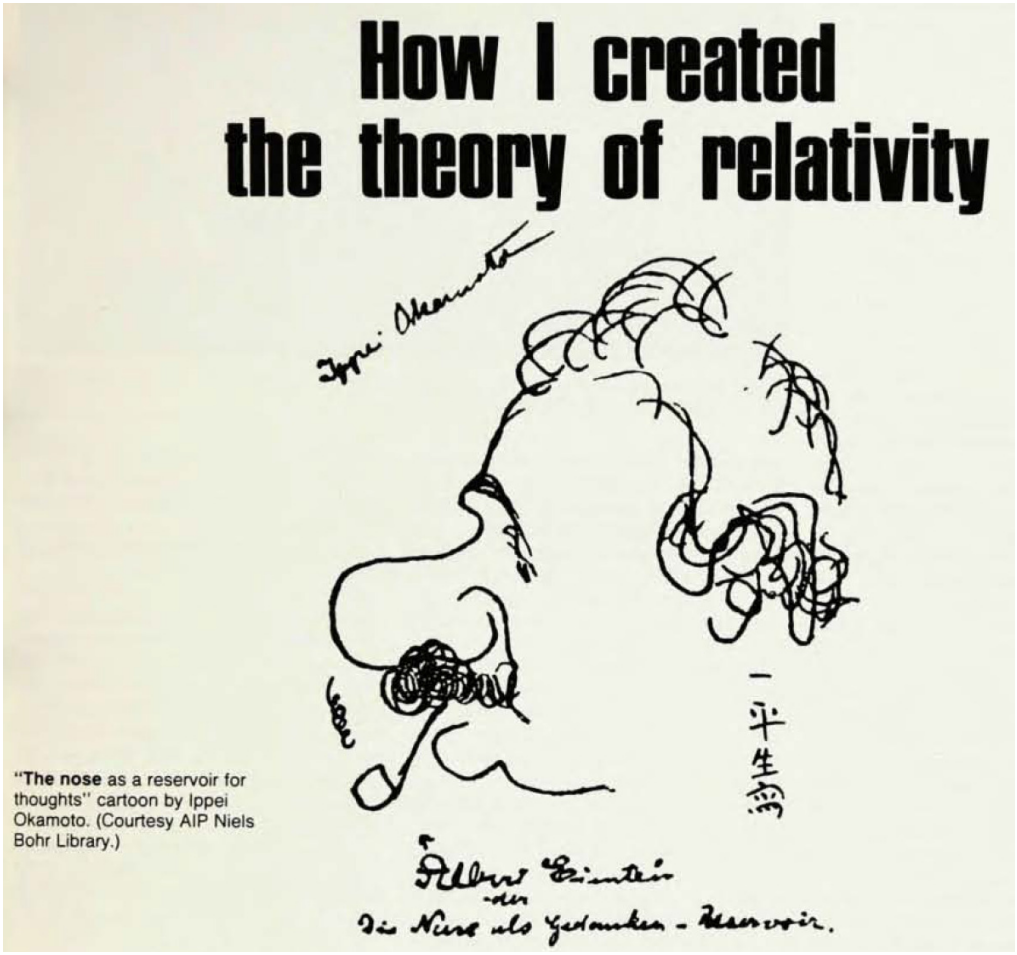


Abb. 1.2: Vortrag von Albert Einstein am 14. Dezember 1922 in Kyota. Da er in dieser Zeit in Japan war, konnte er den Nobelpreis in Stockholm nicht entgegen nehmen [**?**].

- Die Ergebnisse der relativistischen Rechnungen stimmen mit den experimentellen Resultaten überein.

To see the world in a grain of sand
and a heaven in a wild flower
hold infinity in the palm of your hand
and infinity in an hour

Auguries of innocence (William Blake, 1803)

Welche Lehrbücher befassen sich mit dem Thema Relativitätstheorie? Hier eine Auswahl [? ? ?

der Literaturliste markiert!

Was müssen Sie an physikalischem Wissen für das Kapitel Relativität mitbringen?

- Superpositionsprinzip
- Masse und Kraft
- Energie und Impuls
- Kinetische und Potentielle Energie
- Massen-, Impuls- und Energieerhaltung
- Dopplereffekt
- elektrische Ladung
- Lorentzkraft
- Frequenz und Wellenlänge
- elektromagnetisches Spektrum
- Dispersion, Beugung und Interferenz

Über der Eingangspforte zur Speziellen Relativitätstheorie steht nicht:
Jedem Nichtmathematiker ist der Eintritt verwehrt.

Wilhelm Wien[3]

[3]The Nobel Prize in Physics 1911 was awarded to Wilhelm Wien *for his discoveries regarding the laws governing the radiation of heat.*

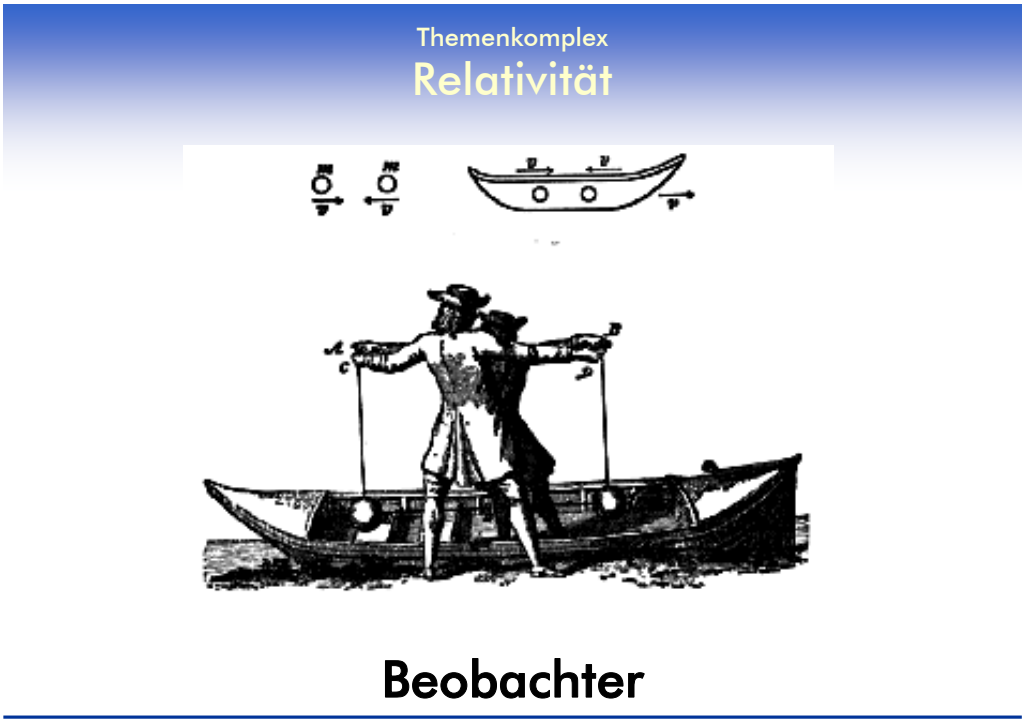
Gut zu wissen!

Nach der Durcharbeitung des Abschnitts Relativität sollten Sie in der Lage sein, folgende zentrale Begriffe zu erklären:

- Äquivalenzprinzip
- Bezugssystem
- Galilei-Transformation
- Eigenlänge
- Eigenzeit
- Einsteinsche Gleichung
- Ereignis
- Gravitationslinse
- Gravitationswelle
- Inertialsystem
- Längenkontraktion
- Lichtgeschwindigkeit
- Lorentz-Transformation
- Massendefekt
- Michelson-Morley Experiment
- Postulate der Speziellen Relativitätstheorie
- Raumzeit
- Relativistische Energie-Impulsgleichung
- Relativistische Geschwindigkeitsaddition
- Relativistische Kinetische Energie
- Relativistischer Dopplereffekt
- Relativistischer Impuls
- Ruheenergie
- Ruhemasse

- Schwarzes Loch
- Tscherenkow-Strahlung
- Weltlinie
- Zeitdilatation

1 Beobachter



There was a young lady of Wight
Who travelled much faster than light
She departed one day
In a relative way
And arrived on the previous night.

Limerick von Arthur Henry Reginald Buller, 1923 [**?**]

[1]In diesem Kapitel rekapitulieren wir Erkenntnisse der klassischen Physik. Speziell geht es darum, wie eine ruhende und eine sich bewegende Person physikalische Phänomene

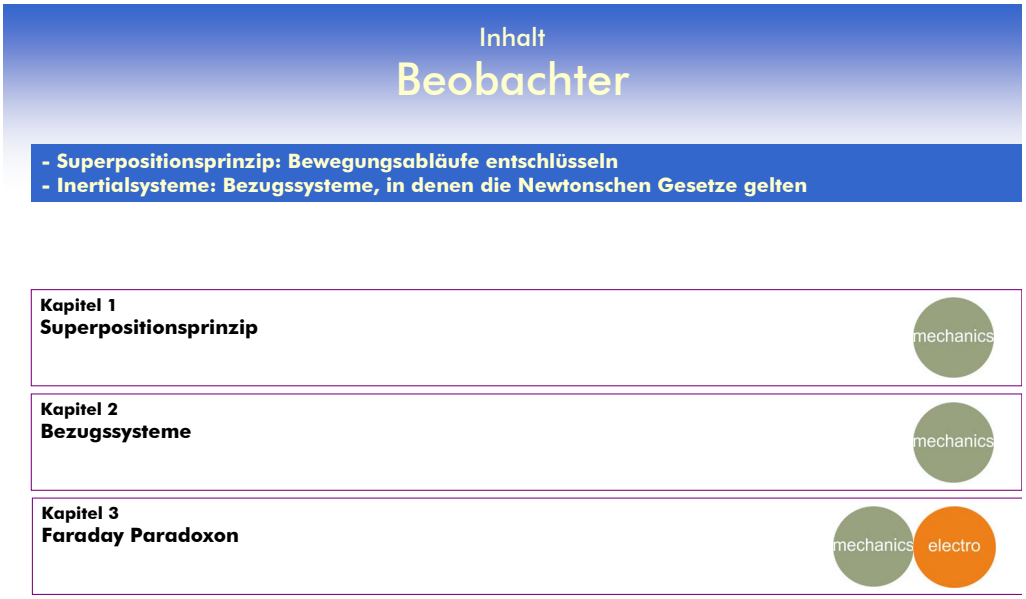
[1]Abschnitte mit ^{4LP} (*For the Love of Physics*) markiert, sind für die Klausur NICHT relevant.

wahrnehmen. Die Frage, die wir untersuchen wollen, ist: Müssen wir die Physik an geänderte Verhältnisse anpassen? Die Antwort wird lauten: NEIN!

Vorab noch eine historische Notiz. 1907, zwei Jahre nach seinen bahnbrechenden Arbeiten zur Lichtquantenhypothese und zur Speziellen Relativitätstheorie scheiterte Eintein bei dem Versuch sich mit der Arbeit *Elektrodynamik bewegter Körper* zu habilitieren. Der Vertreter der Experimentalphysik bemerkte dazu: Was Sie da geschrieben haben, verstehe ich nicht.

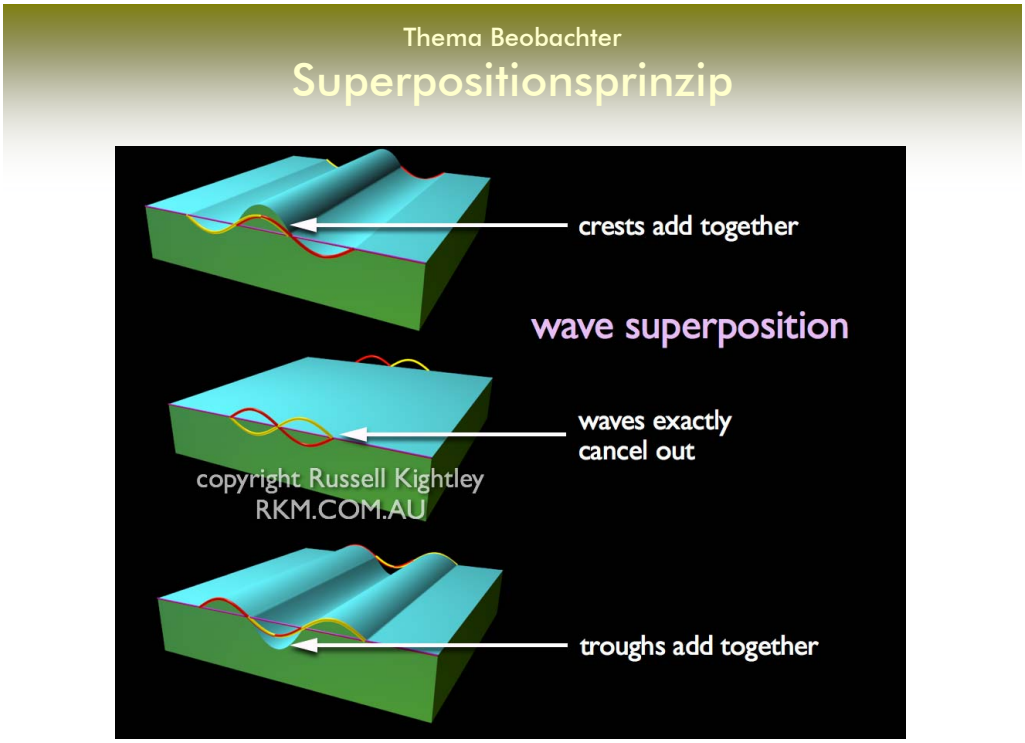
Zum Titelbild: A fundamental physical principle applicable to collisions was recognized by Christian Huygens (1629-1695). This was what we would now call the equivalence of different frames of reference. Huygens considered an elastic collision between two equally massive spheres with equal and opposite velocities ($\pm v$). He argued that, by symmetry, they would recoil with their velocities reversed. He now imagined such a collision taking place on a boat that was itself moving at velocity v with respect to the shore. If this collision were observed by a man standing on the river bank, he would see it as a collision between a stationary sphere and one moving with velocity $2 \cdot v$. Or, if the boat were moving with speed u, the initial velocities of the spheres would be $u + v$ and $u - v$. In both cases the velocities as seen by the man on the bank would be interchanged by the collision. In other words, on the basis of the original symmetric collision one could predict the results of all collisions between these two objects occurring with the same relative initial velocity.

A.P. French - The Nature of Physics (1997)



An dieser Stelle werden jeweils die in der Vorlesung behandelten Unterkapitel aufgeführt. Auf der rechten Seite findet man Querverweise zur klassischen Physik (Mechanik, Fluide, Oszillationen, Thermodynamik, Elektrodynamik, Optik). Außerdem wird auf Themen aus anderen Wissenschaftsgebieten (Astrophysik, Chemie, Biologie, *life sciences*, Technik) hingewiesen, die im Rahmen dieses Kapitels besprochen werden. Die Abschnitte dieses Kapitel beschäftigen sich mit dem wichtigen Superpositionsprinzip [], dass in der klassischen Mechanik im Zusammenhang mit der dreidimensionalen Bewegung eines Körpers im Raum behandelt wird. Weiter gehen wir auf den Begriff Bezugssysteme ein. Vorangestellt und blau unterlegt sind oben Sie zentralen Konzepte, die in diesem Kapitel besprochen werden. In den Vorlesungen werden Inhalte auch mit Hilfe von Demonstrationsexperimenten oder Filmausschnitten vermittelt. Weiter gehören Beispielrechnungen dazu, um exemplarisch einen Sachverhalt greifbar zu machen.

1.1 Superpositionsprinzip



Superposition[2] beschreibt die Überlagerung von physikalischen Größen wie Amplituden und Kräften, die sich gegenseitig nicht beeinflussen. Die Abbildung erläutert das Superpositionsprinzip am Beispiel der Ausbreitung von Wasserwellen. Im oberen Teil des Bildes addieren sich die Amplituden der aufeinander zulaufenden Wellen und ergeben einen Wellenberg mit doppelter Amplitude. Das Beispiel ist nicht von ungefähr gewählt. In den Vorlesungen zur Quantenphysik werden wir uns intensiv dem Konzept Welle-Teilchen Dualismus widmen.

Blickwinkel[4LP]

Allgemein kann der Ort und die Bewegung eines physikalischen Objektes nur relativ zu einem Bezugssystem angegeben werden. In diesem Zusammenhang eine Reihe von Beispielen:

[2] *Lexikon:* In der Physik versteht man unter Superposition eine Überlagerung physikalischer Größen, die sich nicht gegenseitig beeinflussen. Das Superpositionsprinzip wird in der Physik oft genutzt. Beispiele finden sich in der Mechanik, der Elektrodynamik, der Optik und der Quantenphysik.



Abb. 1.1: Bei der Luftbetankung kommt der relativen Bewegung eine ganz praktische Bedeutung zu.

Ein Beispiel aus der Luftfahrttechnik[4LP]

Die Abb. 1.1 zeigt eine Luftbetankung, mit der die Reichweite eines Flugzeuges erhöht werden kann. Man erkennt die Bedeutung der Betrachtung relativer Bewegung. Im Bezug auf den Erdboden bewegen sich beide Flugzeuge mit einer gewissen Geschwindigkeit. Relativ zueinander ist ihre Geschwindigkeit nahezu NULL.

Ein Beispiel aus der Astronomie[4LP]

Jedes Jahr im August kommt es am Nachthimmel zu einem spektakulären Ereignis, wenn die Erde den Orbit des ehemaligen Kometen *Swift-Tuttle* durchdringt. Die Bahn ist voll mit Bruchstücken dieses Kometen. *Swift-Tuttle* bewegt sich in seinem Orbit um die Sonne nahezu senkrecht zur Bahnebene der Erde, siehe Abb. 1.2. Das Maximum der Aktivität der Perseiden wird stets Mitte August erreicht. Für uns ist wichtig, dass der Meteoritenschwarm aus Richtung des Sternbildes Perseus zu kommen scheint. Tatsächlich und das sieht man auf den nächsten Seiten, ist die scheinbare Richtung eine Überlagerung der Geschwindigkeiten von Erde und Kometentrümmern. Dieses Naturschauspiel verdeutlicht das Superpositionsprinzip und die Rolle des Beobachters.

In der Relativitätstheorie versetzt man sich oft in die Rolle von Beobachtern in unterschiedlichen Bewegungszuständen, die ein und dasselbe Experiment beobachten. An dieser Stelle, wollen wir dieses Vorgehen am Beispiel der Beobachtung des Perseidenschwarms erläutern. Folgende Situationen sind möglich, siehe Abb. 1.1:

1. Ein Beobachter steht auf der Oberfläche der Erde und beobachtet die Bewegung

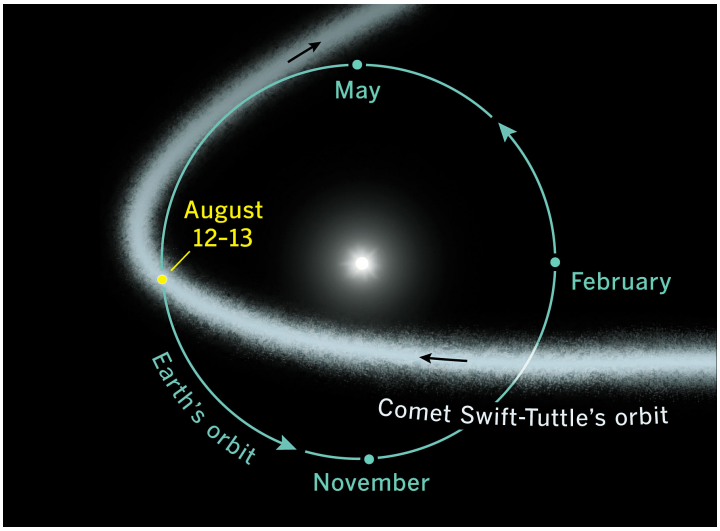


Abb. 1.2: Die Bahn des Kometen Swift-Tuttle kreuzt einmal im Jahr die Bahn der Erde und erzeugt Mitte August einen eindrucksvollen Meteoritenschauer.

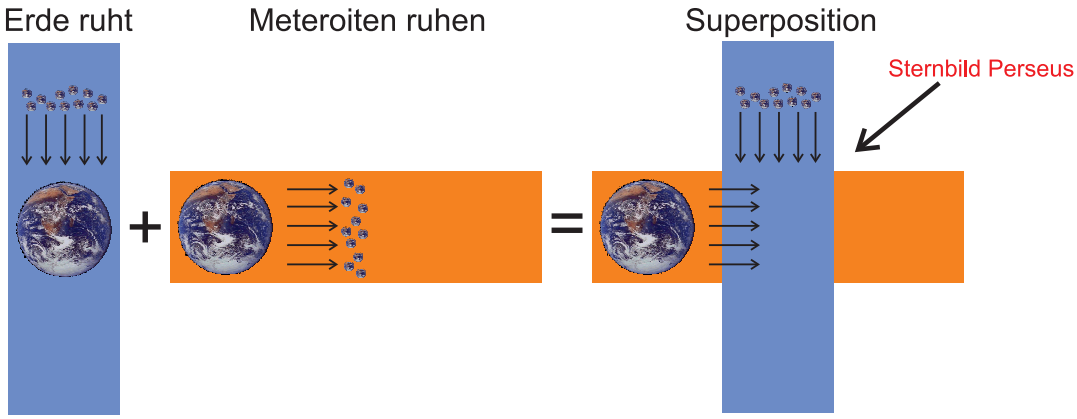


Abb. 1.3: Die scheinbare Einflug der Meteoriten des Kometen Swift-Turtle aus dem Sternbild Perseus resultiert aus einer Überlagerung der Bewegung von Meteoritenschwarm und Erde um die Sonne.

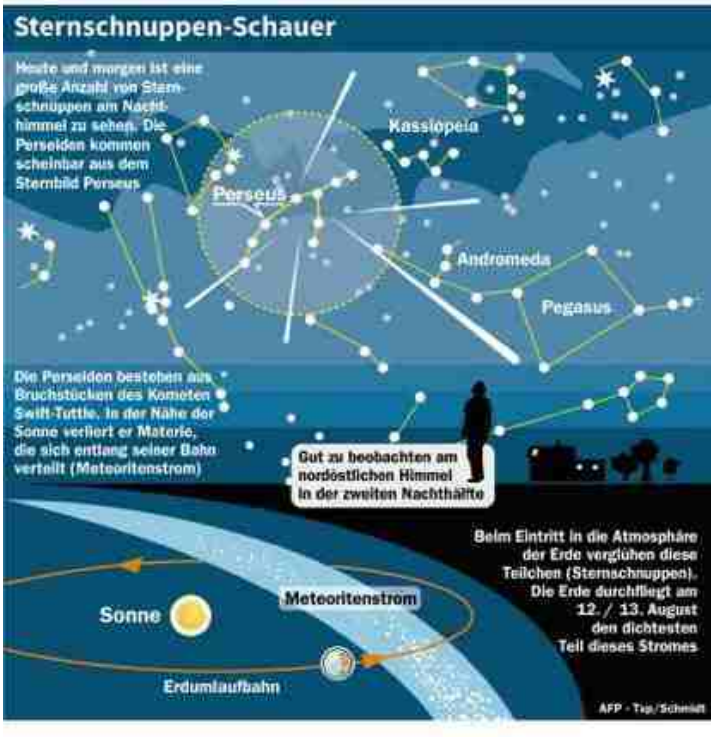


Abb. 1.4: Erklärung für das Phänomen des Persiden-Sternschuppenschauers.



Abb. 1.5: Ausnutzung des Superpositionsprinzips bei Sprüngen mit dem Skateboard. Da sich die horizontale Geschwindigkeit von Skateboard und Skateboarder nicht ändern, gelingt der Sprung über den Wagen.

der Meteoriten. Unter der Annahme, dass sich die Erde nicht bewegt, interpretiert er den Vorgang und kommt zu dem Schluss, dass die Einschläge der Meteoriten aus einer bestimmten Richtung kommen.

2. Ein Beobachter steht auf der Oberfläche eines der Meteoriten und beobachtet die Bewegung der Erde. Diese Person interpretiert das Ereignis in anderer Weise. Für den Beobachter auf dem Meteoriten rast die Erde auf ihn zu.

3. Jeder der Beobachter würde von sich behaupten, dass er ruht!

Fazit: Beide Personen betrachten dasselbe Ereignis, kommen aber zu einer unterschiedlichen Beschreibung des Vorgangs. Tatsächlich bewegen sich aber sowohl Erde als auch die Meteoriten. Die Überlagerung dieser beiden Bewegungen führt dazu, dass Beobachter auf der Erde vermuten, die Meteoriten kämen aus Richtung des Sternbilds Perseus, siehe Abb. 1.4. Die Überlagerung solcher Bewegungen ist als Superpositionsprinzip bekannt.[3]

Aerodynamik ist für Leute, die keine Motoren bauen können

Enzo Ferrari

Ein Beispiel aus dem Alltag[4LP]

Man kann das dargestellte Geschehen aus zwei so genannten Bezugssystemen betrachten. Bezugssystem 1 ist ein Fußgänger auf der Landstraße (ruhender Beobachter). Er beobachtet, das die Regentropfen senkrecht nach unten fallen. Für ihn bewegt sich das Auto senkrecht dazu auf der Landstraße. Alternativ kann man das Geschehen auch aus der Sicht des Autofahrers betrachten. Dies ist das Bezugssystem 2. Der Mitfahrer stellt sich gerade die Frage, warum die Rückscheibe einfach nicht nass wird beim Fahren im Regen:

Ich saß auf der Rückbank von nem A8, es hat stark geregnet und auf der Heckscheibe sammelte sich kein einziger Tropfen Wasser. Die Scheibe blieb einfach frei. Ach so, die Geschwindigkeit des Fahrzeugs variierte zwischen 110-160 km/h (vielleicht hat es ja was mit der Aerodynamik zu tun).

Der Fußgänger versteht das Phänomen, weil er ohne viel nachzudenken das Superpositionsprinzip heranzieht. Anhang von Geschwindigkeitsvektoren und der Vektoraddition findet man die Lösung. Übersteigt die Geschwindigkeit des PKW einen bestimmten Wert, kann kein Tropfen mehr auf die Heckscheibe fallen.

Wie würde man als Physiker das Superpositionsprinzip demonstrieren? Eine der Möglichkeiten sei hier aufgezeigt, siehe Abb.1.6: Das Hochwerfen eines Balls durch eine Person auf einem fahrenden Wagen. Man erkennt, dass ruhende und sich bewegende Beobachter das Experiment in unterschiedlicher Weise beschreiben würden.

[3] Kleiner Zeitvertreib: Abb. 1.5 zeigt einen Bewegungsablauf, den man mit Hilfe des Superpositionsprinzip analysieren könnte. Der Photograph hat allerdings bei der Aufnahme etwas gemogelt!

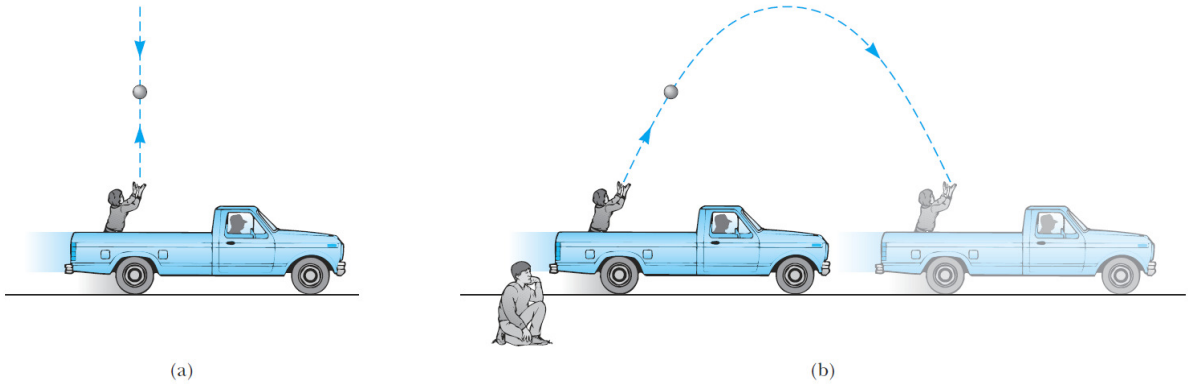


Abb. 1.6: (a) Der Beobachter auf dem Auto sieht, dass sich der Ball vertikal bewegt, wenn er nach oben geworfen wird. (b) Der Beobachter auf der Erde sieht eine parabolische Bahnkurve [**?**].

- Die Person auf dem Auto sagt: *Der Ball bewegt sich zunächst senkrecht nach oben.*
- Die Person auf dem Boden bemerkt, dass sich der Ball in der Aufwärtsbewegung sowohl nach oben als auch nach rechts bewegt.
- Beide stimmen darin überein, dass der Ball wieder in die Hand des Werfers zurückfällt.

Eine Auswirkung des Superpositionsgesetzes ist, dass ein senkrecht fallender Körper und ein waagerecht geworfener Ball zur gleichen Zeit auf dem Boden aufschlagen, obwohl der Ball eine längere Flugbahn hat (*counterintuitive physics*). Ein letztes Beispiel: Der Affenschuss.

Link to video **Superpositionsgesetz**

Link to video **Affenschuss**

Für das Lösen der Übungsaufgaben im Rahmen der Relativitätstheorie ist es sinnvoll, in bestimmter Weise an die Aufgabenstellungen heranzugehen.

- Klären Sie zunächst, ob die Relativitätstheorie überhaupt verwendet werden muss. Relativistische Effekte kann man über den Faktor[4] γ einordnen. Wenn γ nahe dem Wert EINS liegt, sind die relativistischen Effekte gering. In diesem Fall reicht eine Berechnung im Rahmen der klassischen Physik.

- Was soll ermittelt werden? Was sind die unbekannten Größen in der Aufgabe?

- Identifizieren Sie die bekannten Größen. Gibt es Angaben zu Relativgeschwindigkeiten?

- Haben Sie die konzeptionellen Aspekte des Problems verstanden?

- Was für ein Ergebnis erwarten Sie?

- Welche Gleichungen werden benötigt?

- Setzen Sie die gegeben Werte erst ganz am Schluss ein.

- Vermeiden Sie es, Werte frühzeitig abzurunden.

- Überlegen Sie, ob das Ergebnis sinnvoll ist. Überprüfen Sie ihre Überlegungen, indem sie Parameter variieren.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Alice fährt Bahn und Bob steht am Bahnsteig. Der Zug, mit Alice an Bord, fährt von rechts nach links an Bob vorbei. Auf Höhe von Bob lässt Alice einen Ball aus dem Zugfenster fallen. Versetzen Sie sich in die Lage von Bob. Welche Bahnkurve vollführt der Ball, wenn man mal den Luftwiderstand außer acht lässt?[5]

(i) Der Ball vollführt eine Parabelbahn nach links!

(ii) Der Ball fällt senkrecht nach unten!

(iii) Der Ball vollführt eine Parabelbahn nach rechts!

[4] $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}$. v: Geschwindigkeit des Objekts, c: Lichtgeschwindigkeit
[5] Antwort: (i)

Aufgabe 1.2: Alice fährt wieder Bahn und Bob steht immer noch am Bahnsteig. Der Zug, mit Alice an Bord, fährt von rechts nach links an Bob vorbei. Auf Höhe von Bob lässt Alice einen Ball aus dem Zugfenster fallen. Versetzen Sie sich jetzt in die Lage von Alice. Welche Bahnkurve vollführt der Ball, wenn man den Luftwiderstand nicht berücksichtigt?[6]

i Der Ball vollführt eine Parabelbahn nach links!

ii Der Ball fällt senkrecht nach unten!

iii Der Ball vollführt eine Parabelbahn nach rechts!

Aufgabe 1.3: Two pilots flying identical aircraft with a cruising speed of 200 mi/hr fly to equally distant cities 400 mi away, and return to their home base. City X lies to the west, and city Y lies to the south of home base. Aloft there is an 70 mi/hr wind blowing from the west. Find[7]

(a) the time of flight going to each city

(b) each time of flight returning

(c) the difference in total time of flight times

(d) the ratio of total flight times

Aufgabe 1.4: A man on the ground observes a plane taking off on the airport runway at 120 m/s. A car traveling 32 m/s follows it down the runway. Find the relative velocity of the plane as seen by the driver of the car.[8]

[6] Antwort: (ii)
[7] Answer: (a) 1.48 hr to X, 2.14 hr to Y, (b) 3.08 hr from X, 2.14 hr from Y, (c) 0.28 hr, (d) 1.067
[8] Answer: 88 m/s

Konzeptionelle und andere Fragen

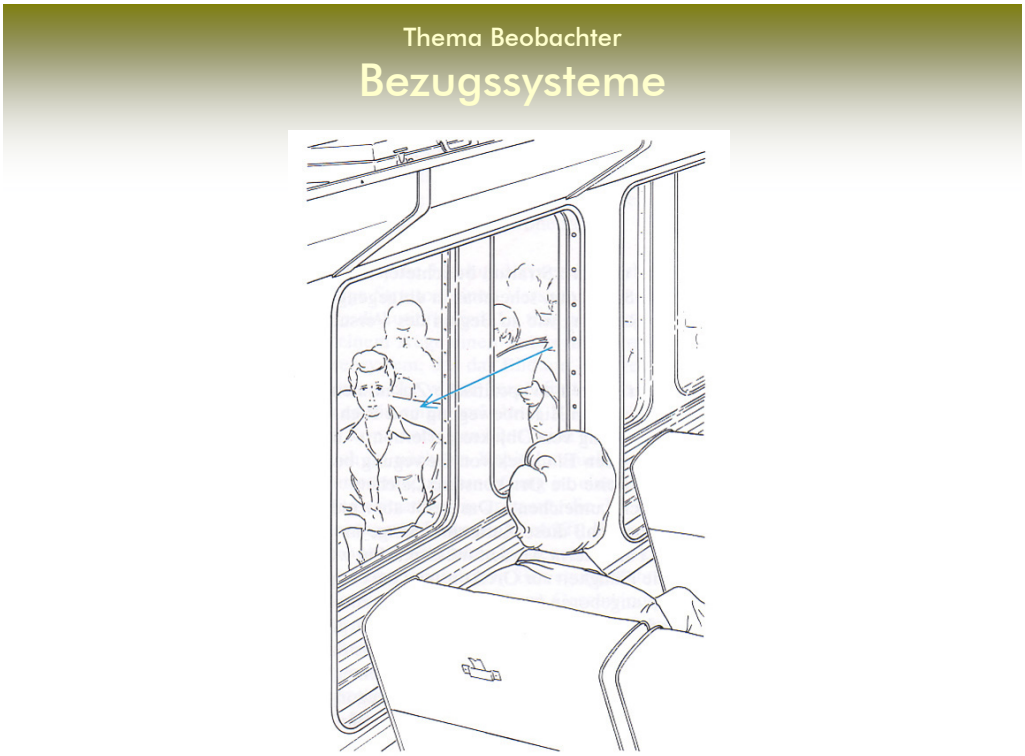
1. Sie rennen im Regen nach Hause. Unter welchem Winkel halten Sie ihren Schirm um möglichst wenig nass zu werden?

2. Zwei Kanonen feuern unter demselben Abschusswinkel, wobei die eine der Kanonen die Kugel mit doppelter Geschwindigkeit ausstößt. Warum ist das Verhältnis der Weiten 4:1?

3. Ein Ball wird in einem sich nach oben bewegenden Fahrstuhl senkrecht nach oben geworfen. Welche Geschwindigkeit hat der Ball im Scheitelpunkt seiner Bahn aus der Sicht eines Beobachters im Erdgeschoss?

4. Juan Carlos ist im Hauptberuf König, aber er fährt auch mal gerne nach Botswana zur Großwildjagd. Auf einer seiner Safaris entdeckt er einen Affen auf einem hohen Baum. Da gerade kein Elefant in der Nähe ist, überlegt er sich seine Schießkünste zu verfeinern. Sein Guide flüstert ihm ins Ohr, dass sich der Affe in dem Moment wo der Schuss fällt fallen lässt. Überlegen Sie sich genau, wohin sie zielen, Majestät!

1.2 Bezugssysteme



Was hat die Natur mit den von uns eingeführten Koordinatensystemen und deren Bewegungszustand zu tun? Wenn es schon für die Naturbeschreibung nötig ist, sich eines von uns willkürlich eingeführten Koordinatensystems zu bedienen, so sollte die Wahl von dessen Bewegungszustand keiner Beschränkung unterworfen sein.

Isaac Newton

Sind alle Bezugssysteme gleich gut geeignet, um die Gesetze der Physik in einfachster Weise zu formulieren?

Betrachten wir dazu unser Sonnensystem.

- Der Bezugspunkt ist das Zentrum unserer Sonne und die Stellung der Achse wird festgelegt durch die Position der Fixsterne. Dieses Koordinatensystem wählte Kepler, um die Bewegung der Planeten zu beschreiben. Eine Erkenntnis, die sich in den Keplerschen Gesetzen ausdrückt, ist: Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne.
- Nun wählen wir ein Bezugssystem, dass mit der Winkelgeschwindigkeit der Sonne mitdreht. Um die Bewegung der Planeten benötigt man nun einen Satz an

Gleichungen, der deutlich komplexer ist. Die Kräfte wären nicht mehr durch ein einfaches $1/R^2$ Gesetz beschreibbar.

- Schließlich könnte man ein Bezugssystem wählen, dass sich mit der Rotation der Erde mitbewegt, wobei die Achsen in Bezug auf Fixsterne (Polarstern) festgelegt sind. Die Bewegung der Erde wäre einfach zu beschreiben, denn in diesem Koordinatensystem bewegt sie sich nicht. Die Bewegung von Sonne und Planeten wäre dagegen äußerst komplex.

Es stellt sich also heraus, dass es oft ein oder mehrere Bezugssysteme gibt, in dem die Beschreibung physikalischer Vorgänge stark vereinfacht werden kann. Nach welchem Kriterium kann man diese Bezugssysteme auswählen? Es stellt sich heraus, dass für ein Ensemble von Teilchen die Newtonschen Gesetze nur in einem bestimmten Satz an Bezugssystemen gültig sind. Ahnen Sie, welche das sind? Überlegungen dieser Art fallen unter die Katagorie Ockhams Messer.[9] Der Person des Beobachters wird in der Relativitätstheorie eine große Bedeutung beigemessen. Dabei stellt man fest, dass bestimmte Aussagen bezüglich des Bewegungszustandes nicht getroffen werden können. Um in die Thematik einzuführen, zunächst wieder Beispiele aus der klassischen Mechanik. Ein nahezu alltägliches Geschehen bei der Einfahrt von Zügen in einen größeren Bahnhof. Zwei Züge haben nahezu dieselbe Geschwindigkeit. Ein Zugreisender beobachtet eine Person im anderen Zug. Die relative Geschwindigkeit der beiden Personen ist gering. Für einen Beobachter am Bahnsteig bewegen sich beide Personen mit hoher Geschwindigkeit. Der Zugreisende könnte aber auch behaupten, dass sich die Person auf dem Bahnsteig mit hoher Geschwindigkeit auf ihn zu bewegt.[10]

Alles ist relativ!

Immer wenn wir von Bewegung sprechen, meinen wir eine Bewegung in Bezug auf ein bestimmtes Bezugssystem. Das kann eine Straße, die Erdoberfläche, die Sonne, das Zentrum unserer Milchstraße oder das Universum sein. Eine Analyse der Bewegung der Galaxien liefert, dass unsere Milchstraße in Bezug auf die lokalen Gruppe eine Rotationsgeschwindigkeit von 100 km/s hat. Man nimmt an, dass unsere lokale Gruppe Teil eines Superhaufens von Galaxien ist, dessen Zentrum der Viro-Cluster ist. In Bezug dazu bewegt sich die Milchstraße mit einer Rotationsgeschwindigkeit von 300 km/s. Selbst die Filamente des kosmischen Netzes[11] rotieren [**?**]. Drehimpuls kann also selbst in den größten Strukturen im Kosmos generiert werden! Ein Stein, der in Rostock oder Sydney fallen gelassen wird, fällt nach unten. Tatsächlich bewegen sie sich in unterschiedliche

[9] *Lexikon:* Ockhams Messer ist ein heuristisches Forschungsprinzip: Bei Hypothesen und Theorien ist die einfachste Erklärung vorzuziehen.

[10] Dieses Szenario wird uns ab jetzt immer wieder beschäftigen. Selbst bei der Herleitung der Gleichung $E = m \cdot c^2$ werden wir darauf zurückgreifen.

[11] *Lexikon:* Als kosmisches Netz beschreibt man die Materieverteilung im Universum, dass geprägt ist durch ausgedehnte Leerräume. Lange Galaxienfilamente, teils hunderte Millionen Lichtjahre lang, verbinden wie Fäden Galaxienhaufen und Superhaufen.

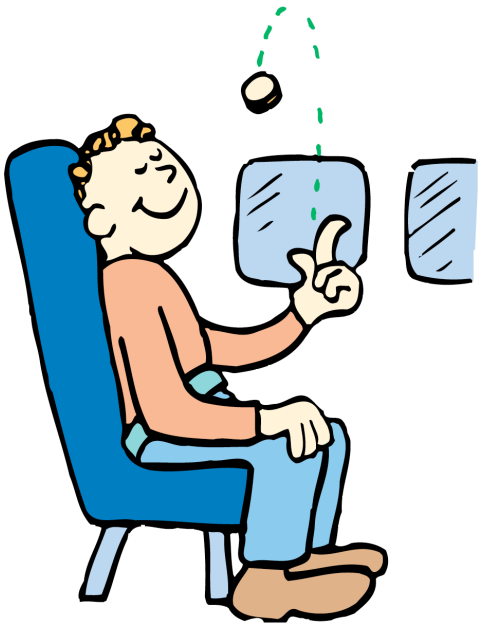


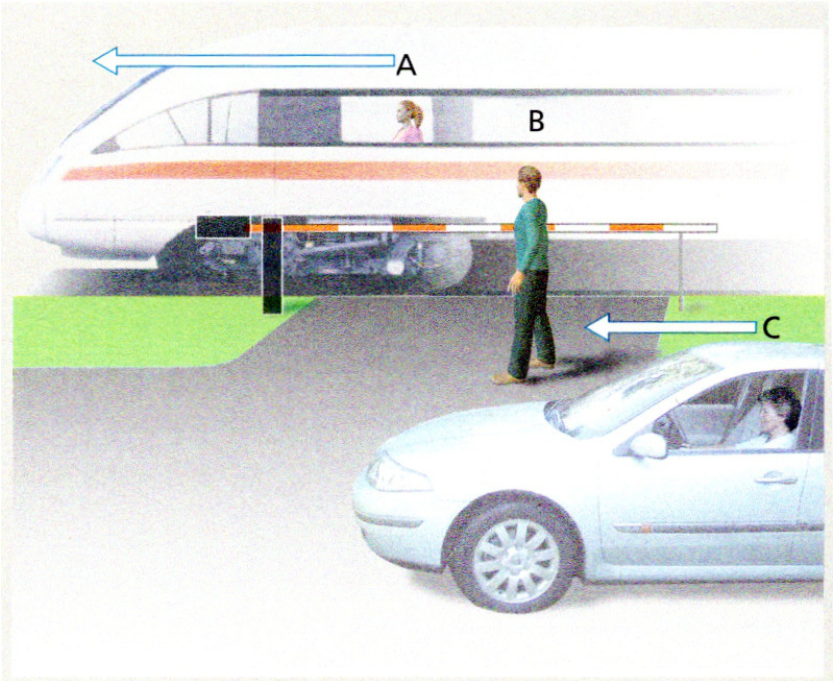
Abb. 1.7: Ein Münzwurf im Flugzeug. Aber wie würde ein Beobachter am Boden das Experiment beschreiben?

Richtungen in Bezug auf den Erdmittelpunkt. Wohin setzt man nun den Ursprung für das Referenzsystem? Es kommt also immer darauf an, in welchem Bezugssystem sich ein Beobachter befindet. Eine weitergehende Frage wäre: Gibt es ein Bezugssystem, mit dem wir alle unsere Bewegungen vergleichen können? Die Antwort wird negativ ausfallen. Die Erklärung wird im Kapitel *Äther* gegeben.

Verschiedene Sichtweisen

In diesem Zusammenhang ein Experiment aus dem Bereich *counterintuitive physics*: Nehmen Sie eine Plastikflasche, bohren ein Loch in den Boden und füllen die Flasche mit Wasser. Wenn sie den Deckel abschrauben, fließt das Wasser durch das Loch im Boden heraus. Aber was passiert, wenn Sie loslassen und die Flasche fällt? Probieren Sie es aus und versetzen sie sich in die unterschiedlichen Bezugssysteme! Um zu verdeutlichen, wie unterschiedlich die Antworten ausfallen können, nochmal zurück zum Superpositionsprinzip. Im Beispiel behandeln wir den freien Fall eines Körpers, wobei zwei Beobachter den Vorgang interpretieren. Um das Experiment zu beschreiben, bedient man sich der Kinematischen Gleichungen. Diese beschreiben die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss einer konstanten Beschleunigung. Zur Illustration ein Beispiel: Sie werfen im Flugzeug eine Münze hoch, siehe Abb. 1.7. Das Ergebnis des Experiments tragen Sie in ihr Tagebuch ein. Sind Sie der Meinung, dass andere Zuschauer sagen: *Genau! Das habe ich auch gesehen.*

Rechnen wir nach: Eine Reisender sitzt im Flugzeug (Reisegeschwindigkeit v_x=-900 km/h oder -250 m/s, und lässt einen Ball fallen. Für diesen Beobachter fällt der Ball senkrecht



Geschwindigkeit	A	B	C
vom Zug aus	0	−100	−40
vom Bahnübergang aus	100	0	60
vom Pkw aus	40	−60	0

Abb. 1.8: Neulich am Bahnübergang. Beobachter geben für dieselbe Situation unterschiedliche Angaben über Geschwindigkeiten von Objekten an.

nach unten. Für die Geschwindigkeit des Balls beim Aufprall ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_i^2 + 2\,g \cdot h \\ v_f &= \sqrt{2 \cdot (-9.81\,\mathrm{m/s})^2 \cdot (-1.0\,\mathrm{m})} \\ v_f &= 4.43\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei v_i=0 die Anfangs-, v_f die Endgeschwindigkeit, g die Erdbeschleunigung und h die Abwurfhöhe ist. Die Bewegung ist aus seiner Warte aus betrachtet also vertikal. Nun wechseln die Position und betrachten das Experiment aus der Sicht einer Person auf dem

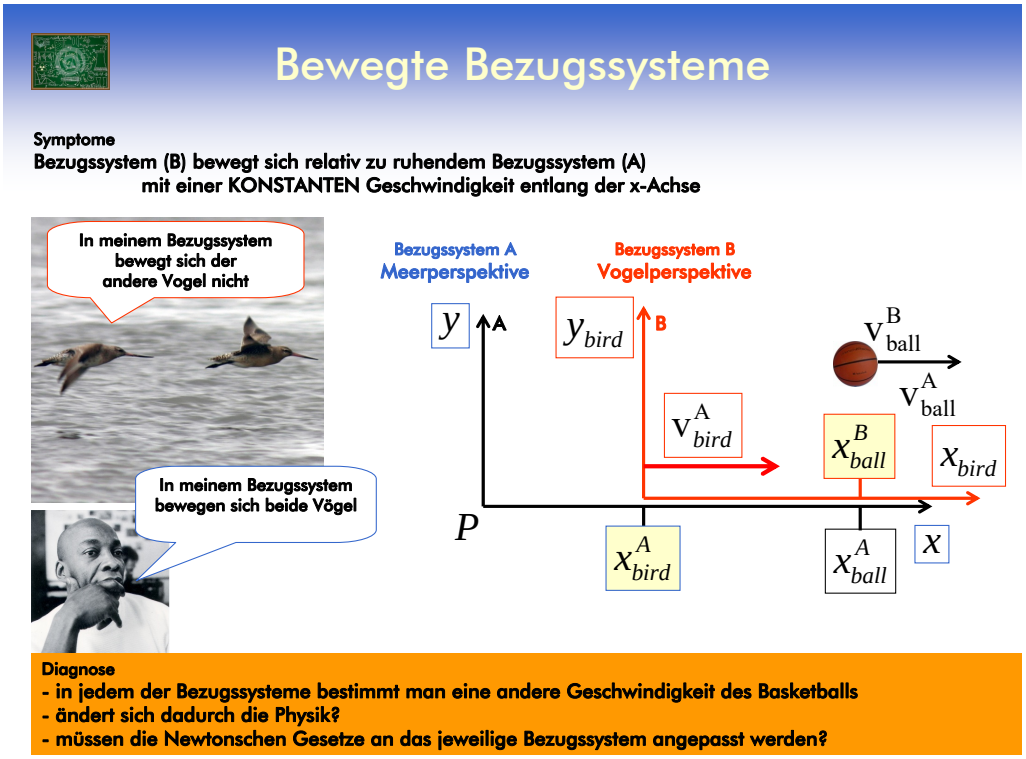
Boden. Wir nutzen das Superpositionsprinzip und schätzen ab.

$$
\begin{aligned}
v_x &= -250\,\mathrm{m/s} && (1.2)\\
v_y &= -4.43\,\mathrm{m/s} && (1.3)\\
v &= |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\\
v &= \sqrt{(-250\,\mathrm{m/s})^2 + (-4.43\,\mathrm{m/s})^2}\\
v &= 250.04\,\mathrm{m/s} && (1.4)\\
\tan\Theta &= \frac{v_y}{v_x}\\
\theta &= \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)\\
\theta &= \arctan\left(\frac{-4.43\,\mathrm{m/s}}{-250\,\mathrm{m/s}}\right)\\
\theta &= 1.02^o && (1.5)
\end{aligned}
$$

Ein Beobachter am Boden sieht dagegen eher einen mit hoher Geschwindigkeit ausgeführten Wurf. Er kommt zu dem Schluss, dass die Bewegung des Balls nahezu parallel zum Boden ist. Die Beschreibung ist grob unterschiedlich, aber eigentlich haben beide recht. Schlussfolgerung ist, dass Beobachter, die sich zueinander mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen, einen physikalischen Vorgang möglicherweise unterschiedlich bewerten. Abbildung 1.8 zeigt ein weiteres Beispiel. In der Relativitätstheorie wird das der Normalfall sein. Um die Bedingungen nicht zu komplex werden zu lassen, werden im weiteren Bezugssysteme betrachtet, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Man nennt solche Bezugssysteme ein Inertialsystem.[12] Man sollte in der Definition eines Inertialsystems den Zusammenhang zum Ersten Newtonschen Gesetz (Trägheitsgesetz) erkennen:

Ein kräftefreier Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

[12] *Lexikon:* Unter einem Inertialsystem versteht man in der Physik ein Koordinatensystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig und gleichförmig bewegt. Alle Systeme, die sich gleichförmig gegenüber einem anderen Inertialsystem bewegen, sind ebenfalls Inertialsysteme.



Neues Bezugssystem - Neue Physik?

Eine wichtige Erkenntnis bei der Behandlung von Inertialsystemen ist, dass sich die Physik nicht ändert, wenn man das Bezugssystem wechselt. Dazu betrachten man ein Bezugssystem B, dass sich im Vergleich zum Bezugssystem A mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung x bewegt. Orte und Geschwindigkeiten eines Balls werden von Beobachtern in den beiden Bezugssystem bestimmt. Diese Frage soll geklärt werden: Der Ball hat eine gewisse Beschleunigung im Bezugssystem Meer (A). Welche Beschleunigung hat der Ball im Bezugssystem Vogel (B)? Geschwindigkeiten mögen unterschiedlich sein,

$$\begin{aligned} x^A_{ball} &= x^B_{ball} + x^A_{bird} \\ \frac{d}{dt}x^A_{bird} &= \frac{d}{dt}x^B_{ball} + \frac{d}{dt}x^A_{bird} \\ v^A_{ball} &= v^B_{ball} + v^A_{bird} \end{aligned} \tag{1.6}$$

aber die Analyse zeigt, dass in beiden Intertialsystemen die Beschleunigungen identisch gemessen werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v^A_{ball} &= \frac{d}{dt}v^B_{ball} + \frac{d}{dt}v^A_{bird} \\ a^A_{ball} &= a^B_{ball} + NULL \end{aligned} \tag{1.7}$$

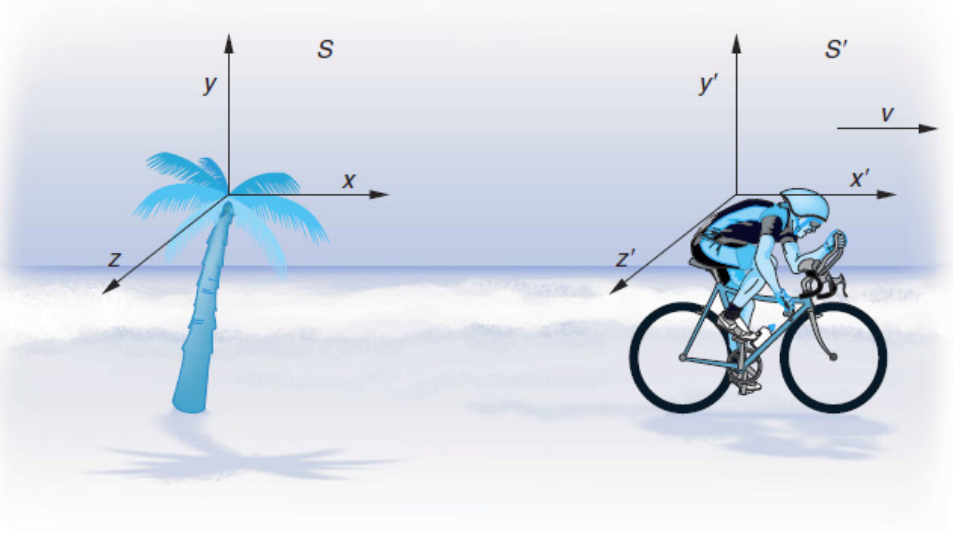


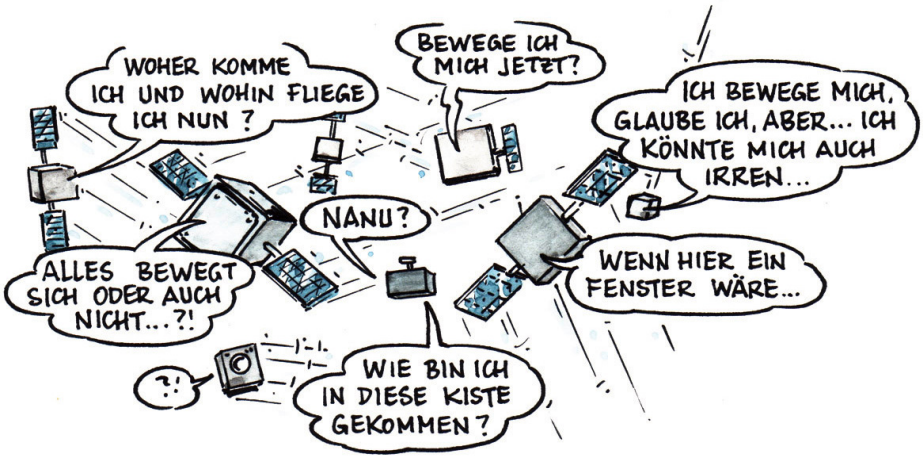
Abb. 1.9: Das Bezugssystem S ist die Erde mit der Palme und das Bezugssystem S' stellt den Radfahrer dar. Die relative Bewegung verläuft entlang der x-Achse. In Bezug auf das Bezugssystem S bewegt sich S' mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung. Was würde der Radfahrer sagen?

da v^A_{bird} konstant. Das bedeutet, dass auch das Zweite Newtonsche Gesetz (Aktionsprinzip) in jedem Inertialsystem gültig ist. Hinter dieser Erkenntnis versteckt sich die Galilei-Transformation (Tab. 1.1).[13] Kräfte verursachen Beschleunigungen. Daraus kann man den Schluss ziehen, dass sich Kräfte unter einer Galilei-Transformationen nicht ändern. Beobachter in unterschiedlichen Bezugssystemen stellen für ein Teilchen gleiche Beschleunigungswerte fest. Die Bedeutung des Vorzeichens verdeutlicht Abb. 1.9. Sowohl die Palme als auch der Radfahrer stellen separate Bezugssysteme dar. Der Radfahrer bewegt sich in Bezug auf die ruhende Palme mit konstanter Geschwindigkeit $+v$, während die Palme sich aus Sicht des ruhenden Radfahrers mit konstanter Geschwindigkeit $-v$ entfernt.

Wie man erkennt, ist die Zeiteinteilung in allen Bezugssystemen nach der Galilei-Transformation gleich. Das bedeutet, dass Uhren, unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der sie sich bewegen, stets dieselbe Taktrate haben. Im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie wird sich dies ändern.

Ein auch für die Spezielle Relativitätstheorie wichtiges Inertialsystem ist das Ruhesystem, in dem sich ein Körper, relativ zum Beobachter betrachtet, in Ruhe befindet. Wie sich herausstellen wird, kann ein Beobachter nicht postulieren, dass er sich in einem ruhenden System befindet, siehe Abb. 1.10. Damit sind wir am Kern der Einsteinschen Überlegungen angelangt. Kann ein Beobachter entscheiden, ob er sich in einem ruhenden Bezugssystem befindet? Darüber hinaus stellt sich die Frage, woran man ein ruhendes

[13] *Lexikon:* Bewegt sich das System B gegenüber dem A mit konstanter Geschwindigkeit v längs der x-Achse, so gilt mit dem absoluten Zeitbegriff der Physik die Galilei-Transformation (Tab. 1.1).



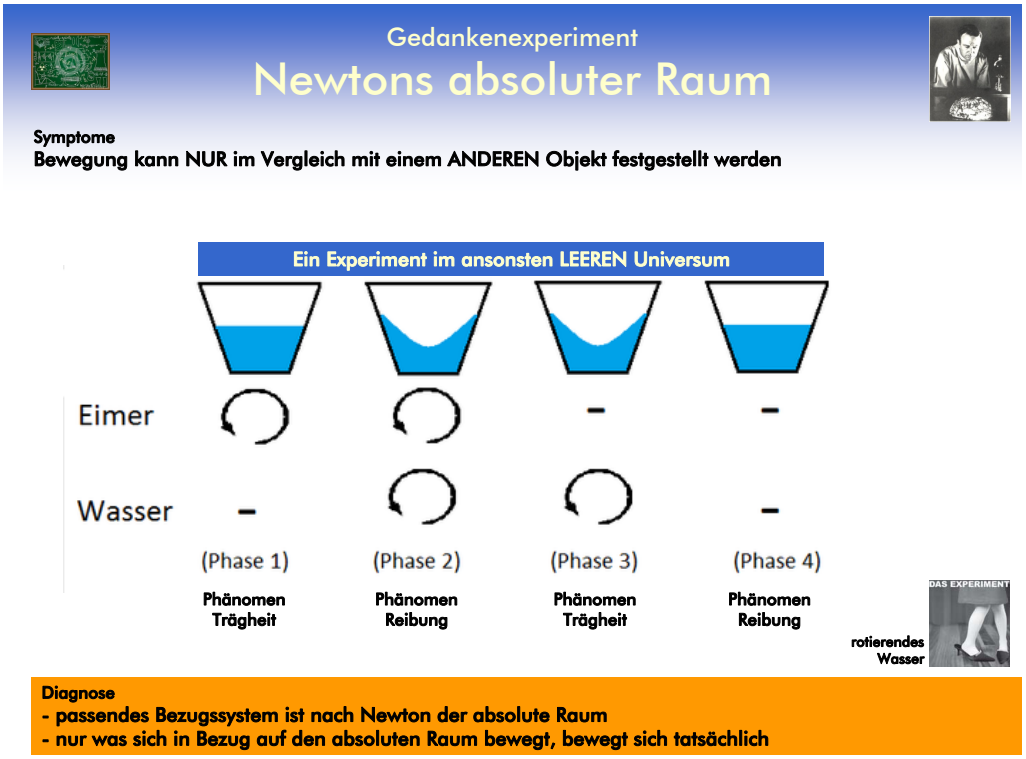
© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG | Big Bang 8 ōbv

Abb. 1.10: Relative Bewegung ist die Berechnung der Dynamik eines Körpers in Bezug auf ein anderes sich bewegendes oder stationäres Bezugssystem. Der Cartoon spielt auf Phänomene der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie an. Werfen Sie nach Abschluss des Abschnitts Relativität nochmal einen Blick auf diese Abbildung!

Bezugssystem erkennt. Eigentlich kann es nur ein einziges Ruhesystem geben und alle anderen bewegen sich relativ zu diesem absoluten Bezugssystem.

$t_B = t_A$	$t_A = t_B$
$x_B = x_A - v \cdot t$	$x_A = x_B + v \cdot t$
$y_B = y_A$	$y_A = y_B$
$z_B = z_A$	$z_A = z_B$

Tab. 1.1: Galilei-Transformation



Gesucht: Ein Absolutes Bezugssystem![4LP]

An der Frage, ob es ein ausgezeichnetes Bezugssystem gibt, gehen die Meinungen von Newton und Einstein auseinander. Newton meint JA und Einstein sagt NEIN. Dazu ein Gedankenexperiment,[14] dass auf Ernst Mach zurückgeht. Stellen Sie sich vor, das Universum sei leer bis auf einen Eimer mit Wasser. Newton postuliert die Existenz eines absoluten Bezugssystems. Folgerichtig schließt man, dass entweder das Wasser oder der Eimer das gesuchte absolute Bezugssystem sein muss. Das bedeutet, dass sich ein Körper sich nur bewegt, wenn er sich in Bezug auf diese Referenz in Bewegung setzt. Der Eimer wird in Rotation versetzt. Das Wasser im Eimer wird dadurch ebenfalls in Bewegung gesetzt. Man kann vier unterschiedliche Phasen beobachten:

Phase 4: Der Eimer und das Wasser sind in Ruhe. Die Wasseroberfläche ist flach. *Fazit:* Die *relative* Bewegung zwischen Eimer und Wasser ist *minimal*.

Phase 1: Der Eimer dreht sich. Das Wasser beginnt aber erst mit einer gewissen Verzögerung zu rotieren *Fazit:* Die Wasseroberfläche bleibt flach und die die *relative* Bewegung

[14] *Lexikon:* Ein Gedankenexperiment ist eine hypothetische Situation, in der eine Hypothese, Theorie oder ein Prinzip aufgestellt wird, um deren Konsequenzen zu durchdenken. Was könnte passieren und welche Auswirkungen haben unterschiedliche Vorgehensweisen?

zwischen Eimer und Wasser ist *maximal*. Man beobachtet in beiden Fällen eine ebene Wasseroberfläche, obwohl die *relative* Bewegung von Wasser und Eimer grob unterschiedlich ist.

Phase 2: Das Wasser rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit des Eimers. Es bildet sich eine parabelförmig geformte Wasseroberfläche aus. *Fazit:* Die *relative* Bewegung zwischen Eimer und Wasser ist *minimal*.

Phase 3: Die Rotationsbewegung des Eimers wird abrupt gestoppt. Aufgrund der Trägheit rotiert das Wasser im Eimer weiter. Die Wasseroberfläche ist immer noch parabelförmig ausgeformt. *Fazit:* Die *relative* Bewegung zwischen Eimer und Wasser ist *maximal*. Die Situation entspricht den Bedingungen in Phase 1 in Bezug auf die *relative* Bewegung. Allerdings sind die Rollen vertauscht.

Sowohl der Eimer als auch das Wasser im Eimer scheiden als Referenz für ein absolutes Bezugssystem aus. Man beobachtet

- eine glatte Wasseroberfläche sowohl bei minimaler (Phase 4) als auch bei maximaler (Phase 1) relativer Bewegung.
- eine parabelförmige Wasseroberfläche sowohl bei minimaler (Phase 2) als auch bei maximaler (Phase 3) relativer Bewegung.

Das Gedankenexperiment macht deutlich, dass es schwierig sein könnte, ein absolutes Bezugssystem nachzuweisen.

Falls es den absoluten Raum gibt, muss er eigentlich einen Bezug für alle Bewegung liefern, nicht nur für die beschleunigte Bewegung. Wenn es den absoluten Raum wirklich gibt, warum lässt er uns dann nicht erkennen, wo wir uns, absolut betrachtet, befinden, so dass wir andere materielle Objekte nicht mehr als Bezugspunkte verwenden müssen um unsere Position zu bestimmen. Und wenn der absolute Raum wirklich existiert, wie kommt es dann, dass er auf uns einwirken kann (indem er beispielsweise unsere Arme nach außen zieht, wenn wir uns drehen), während wir offenbar keine Möglichkeit haben, ihn zu beeinflussen [**?**]?

Issac Newton, 1687

Die Überlegungen von Ernst Mach [**?**] weisen in eine andere Richtung. In zwei zueinander rotierenden Planeten würde jeder vom anderen System behaupten, dass es rotieren würde und man selbst in Ruhe wäre, siehe Abb. 1.11.

Der Versuch Newtons mit dem rotirenden Wassergefäss lehrt nur, dass die Relativdrehung des Wassers gegen die Gefässwände keine merklichen Centrifugalkräfte weckt, dass dieselben aber durch die Relativdrehung gegen die Masse der Erde und die übrigen Himmelskörper geweckt werden. Niemand kann sagen, wie der Versuch verlaufen würde, wenn die Gefässwände immer dicker und massiger, zuletzt mehrere Meilen dick würden.

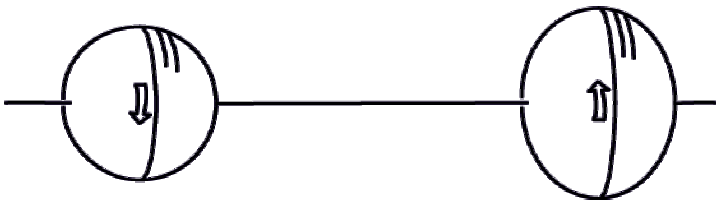


Abb. 1.11: You are standing in a field looking at the stars. Your arms are resting freely at your side, and you see that the distant stars are not moving. Now start spinning. The stars are whirling around you and your arms are pulled away from your body. Why should your arms be pulled away when the stars are whirling? Why should they be dangling freely when the stars don't move [**?**]?

Es liegt nur der eine Versuch vor, und wir haben denselben mit den übrigen uns bekannten Thatsachen, nicht aber mit unsern willkürlichen Dichtungen in Einklang zu bringen [**?**].

Ernst Mach, 1883

Nun wird klar, was in der nächsten Vorlesung *Äther* zu klären ist. Gibt es im Universum ein Bezugssystem, auf das man alle Bewegungen von Körpern beziehen kann. Dieses absolute Bezugssystem wird Äther genannt. Dazu wird ein Experiment vorgestellt, dass versuchte den Äther nachzuweisen, das Michelson-Morley Experiment [**?**].

Wollte man die Hypothesen über den Äther wörtlich nehmen, so wäre der Äther eine fürchterliche Maschinerie von unsichtbaren Zahnrädern, Kreiseln und Getrieben, die in der verwickelsten Weise ineinandergreifen, und von dem Wust wäre nichts zu bemerken als einige relativ einfache Kräfte, die als elektromagnetisches Feld in Erscheinung treten.

Max Born, 1920

Aufgaben

Aufgabe 2.1: In einem Fluss der Breite b_x=50 m fließt das Wasser mit einer Geschwindigkeit v_y=1.2 m/s. Ein Fährschiff bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_x=5 m/s zum anderen Ufer. Wie weit wird es abgetrieben?

Für den Winkel Θ in der das Boot abtreibt ergibt sich

$$\tan\Theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1.2\,\mathrm{m/s}}{5\,\mathrm{m/s}} = 0.24$$

Wenn das Fährschiff das andere Ufer erreicht, beträgt die Driftstrecke d

$$\begin{aligned} d &= b \cdot \tan\Theta \\ d &= (100\,\mathrm{m}) \cdot (0.24) \\ d &= 12\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2: Ein Flugzeug bewegt sich mit einer horizontalen Geschwindigkeit von[15] v_x^i=936 km/h über dem Erdboden. Fünf Sekunden nach dem Abwurf landet ein Care-Paket nach freiem Fall auf dem Boden. Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand!

(i) Aus welcher Höhe y_f wurde das Care-Paket abgeworfen??

(ii) Welche vertikale Geschwindigkeit v_y^f hat das Paket beim Aufschlag?

(iii) Welche Aufprallgeschwindigkeit $|v^f|$ hat das Care-Paket?

(i) Die Fallhöhe berechnet sich aus:

$$\begin{aligned} y_f &= -\frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \\ y_f &= -\frac{1}{2}\,(9.81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}) \cdot (5\,\mathrm{s})^2 \\ y_f &= -123\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

(ii) Die Fallgeschwindigkeit ergibt sich mit:

$$\begin{aligned} v_y^f &= v_y^i - g \cdot t \\ v_y^f &= 0 - (9.81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}) \cdot (5\,\mathrm{s}) \\ v_y^f &= -49\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

(iii) Ohne Luftwiderstand beträgt die horizontale Geschwindigkeit v_x^i=v_x^f=260 m/s. Damit ergibt sich die Aufprallgeschwindigkeit $|v^f|$:

$$\begin{aligned} |v^f| &= \sqrt{(v_x^f)^2 + (v_y^f)^2} \\ |v^f| &= \sqrt{(260\,\mathrm{m/s})^2 + (-49\,\mathrm{m/s})^2} \\ |v^f| &= 260\,\mathrm{m/s} = 952\,\mathrm{km/h} \end{aligned}$$

[15] i : initial; f : final

Aufgabe 2.3: Bei einem Feuerwerk wird eine Rakete mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $|v|$=70.0 m/s in einem Winkel von Θ=75^o in Bezug auf den Boden in die Luft geschossen. Am höchsten Punkt der Bahn explodiert die Rakete. Rechnen Sie wieder ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

(i) In welcher Höhe explodiert die Rakete?

(ii) Wie viel Zeit vergeht zwischen Start und Explosion?

(iii) In welchen horizontalem Abstand ereignet sich die Explosion?

(i) Am höchsten Punkt der Bahn ist v_y^f=0. Die Rechnung vereinfacht sich, weil y_i=0 gewählt wird:

$$\begin{aligned}(v_y^f)^2 &= (v_y^i)^2 - 2\,g\cdot(y-y_i)\\ 0 &= (v_y^i)^2 - 2\,g\cdot y\\ y &= \frac{(v_y^i)^2}{2\,g}\end{aligned}$$

Wir berechnen auf der Grundlage des Superpositionsprinzips die vertikale Geschwindigkeitskomponente:

$$\begin{aligned}v_y^i &= v\cdot\sin\Theta\\ v_y^i &= (70\,\mathrm{m/s})\cdot(\sin(75^o))\\ v_y^i &= 67.6\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Flughöhe mit:

$$y = \frac{(67.6\,\mathrm{m/s})^2}{2\cdot(9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})} = 233\,\mathrm{m}$$

Für die Flugzeit findet man, da v_y^f=0:

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}(v_y^i + v_y^f)\cdot t\\ y &= \frac{1}{2}(v_y^i)\cdot t\\ t &= \frac{2\,y}{v_y^i}\\ t &= \frac{2\,(233\,\mathrm{m})}{67.6\,\mathrm{m/s}}\\ t &= 6.9\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

(iii) Da der Luftwiderstand NULL ist, beträgt die horizontale Geschwindigkeit des Projektils

$$\begin{aligned}v_x^i &= v\cdot\cos\Theta\\ v_x^i &= (70\,\mathrm{m/s})\cdot(\cos(75^o))\\ v_x^i &= 18.1\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

Die Rakete fliegt in den 6.9 s eine Entfernung auf dem Boden von:

$$\begin{aligned} x &= v_x^i \cdot t \\ x &= (18.1\,\mathrm{m/s}) \cdot (6.9\,\mathrm{s}) \\ x &= 125\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4: Is a laboratory at rest on the earth's surface really an inertial frame of reference?[16]

[16] Answer: No, because it is accelerated as a consequence of the earth's rotation on its axis and revolution around the sun.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wenn Sie in einem Verkehrsflugzeug fliegen, kann es Ihnen vorkommen, dass das Flugzeug stillsteht und sich die Erde unter Ihnen bewegt. Ist dieser Standpunkt vertretbar?
2. Welche Bedeutung hat die Galilei-Transformation?
3. Was würden Sie unter dem Begriff Galilei-Invariant verstehen?
4. Ist die Länge eines Objekts bei einer Galilei-Transformation invariant?
5. Ist die Geschwindigkeit eines Objekts bei einer Galilei-Transformation invariant?
6. Ist die Beschleunigung eines Objekts bei einer Galilei-Transformation invariant?
7. Geben Sie Beispiele für Nicht-Inertialsysteme!
8. Überlegen Sie sich ein Beispiel aus der klassischen Physik, bei der die Bewegung einer Uhr den Zeittakt ändert.
9. Ist die Erde ein Inertialsystem?
10. Ist die Sonne ein Inertialsystem?
11. Wie beschreibt ein Beobachter auf der Erde die Bewegung der Sonne, wenn man postuliert, dass die Erde ein Inertialsystem ist?
12. In einem fahrenden Zug wird ein Ball mit der Geschwindigkeit v in Fahrtrichtung geworfen. Welche Geschwindigkeit hat der Ball für einen am Bahngleis stehenden Beobachter nach Ansicht der Klassischen Physik?

Faraday Paradoxon^{4LP}



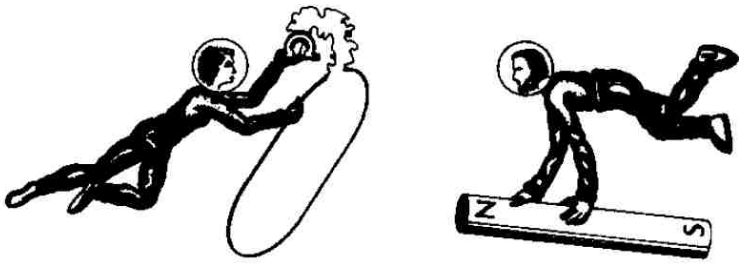
Der einfachste Versuch, den man selbst gemacht hat, ist besser als der schönste, den man nur sieht.

Michael Faraday

The beast that river-dwellers have long feared is coming later this week. It's a wave called Pororoca, the great roar, and its low bellow can be heard up to an hour before it arrives.



Abb. 1.12: In manchen Flüssen, hier am Amazonas, entstehen, aufgrund der Gezeitenströmungen, Wellen, die sich kilometerweit den Fluss herauf bewegen. Für den Surfer bewegt sich die Welle nicht. Ändern sich magnetische und elektrische Felder, wenn man sich mit Lichtgeschwindigkeit mit der Lichtwelle fortbewegt [**?**]?



We see Lucy and Ringo both moving, approaching each other.

Lucy says:
The loop is stationary and the magnet is moving toward it. There is a magnetic field, but it can't produce any force on my electrons since they are stationary within the loop. Instead, the magnetic field is changing, growing stronger as the magnet gets closer, and this changing magnetic field produces an electric field which causes forces on the electrons, and drives them around the loop and produces the current in the galvanometer.

Ringo says:
The magnet is stationary and the loop is moving toward it. The electrons in the loop, since they are moving with the loop, feel a magnetic force,
$\vec{F}_m = -\frac{e}{c}\,\vec{v} \times \vec{B}$,
which drives them around the loop and produces the current in the galvanometer.
There is no electric field.

Conclusion:
Electric and magnetic fields are not invariant entities themselves, but are aspects of a single entity, the electromagnetic field, which manifests itself differently to different moving observers.

Abb. 1.13: Relativität am Beispiel von Magnet und Leiterschleife [**?**].

It tumbles in from the ocean and travels up the Amazon on a path of destruction. While the region's residents accept the river's wrath and start moving their boats and animals, daredevils called bore riders grab their surfboards (Fig. 1.12). This beast that they will ride is called a tidal bore, a wave that flows in from the ocean and propagates to dozens of rivers around the world. Along the Amazon, one of the strongest bore tides brings big waves that travel for miles and seem to last forever, perfect for a long ride. Local legend has it that three mischievous children travel up the Amazon playing practical jokes. But the scientific harbinger of this curse - or gift if you're a surfer - is that familiar force we call gravity.

The New York Times (2016)

Zum Abschluss noch ein wichtiger Aspekt, der bislang nicht zur Sprache kam, siehe Abb. 1.13. Tatsächlich sind Überlegungen zur Elektrodynamik der Startpunkt, der Ein-

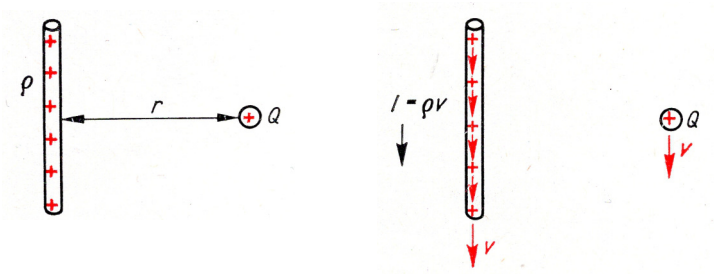


Abb. 1.14: *links:* Eine Punktladung Q^+ im Abstand r von einem positiv aufgeladenen Draht (Ladungsdichte ρ). *rechts:* Dieselbe Situation, aber betrachtet von einem Beobachter, der sich mit einer Geschwindigkeit v nach oben bewegt[**?**].

stein zur Formulierung der Relativitätstheorie führte [**?**]. Die Gesetze der Elektrodynamik verletzen das Relativitätsprinzip von Newton und Galilei. Ein ruhender und ein sich bewegender Beobachter interpretieren folgendes Experiment, bekannt geworden als Faraday Paradoxon, unterschiedlich. Dazu betrachten wir eine Punktladung im Abstand r von einem geladenen Draht (Ladungsdichte ρ), siehe Abb. 1.14, links. Die auf die Punktladung wirkende Kraft ist aufgrund der Feldstärke[17] $E_e = 2\,\rho/r$

$$\begin{aligned} F_{ruhend} = F_e &= q_e \cdot E_e \\ F_e &= \frac{2\,q_e \cdot \rho}{r} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Nun betrachtet ein Beobachter das Experiment. Diese Person bewegt sich allerdings mit einer gewissen Geschwindigkeit v nach rechts, siehe Abb. 1.14. Da dieser Beobachter bewegte Ladungen bemerkt, ergibt sich zusätzlich noch ein magnetisches Feld. Der dafür verantwortliche Strom ist

$$I_e = \rho \cdot v \tag{1.9}$$

Für den Linienstrom gilt

$$B_M = \frac{2\,\rho \cdot v}{c \cdot r} \tag{1.10}$$

Auf die sich ebenfalls bewegende Ladung wirkt daher die magnetische Kraft

$$\begin{aligned} F_{bewegt} = F_M &= \frac{q_e \cdot B_M \cdot v}{c} \\ F_M &= \frac{q_e \cdot v}{c} \cdot \frac{2\,\rho \cdot v}{c \cdot r} \\ F_M &= \frac{2\,q_e \cdot \rho}{r} \frac{v^2}{c^2} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Der Beobachter kommt zu dem Schluss, dass auf die Punktladung eine Superposition

[17] Der Übersichtlichkeit habe ich im Folgenden die Naturkonstanten ε_0 und μ_0 einfach mal weggelassen. Wegen $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$ können sie aber einfach eingesetzt und in die Gleichungen eingefügt werde.

von abstoßender elektrostatischer und anziehender magnetischer Kraft wirkt

$$\begin{aligned} F_{bewegt} &= \frac{2\,q_e \cdot \rho}{r} - \frac{2\,q_e \cdot \rho}{r}\frac{v^2}{c^2} \\ F_{bewegt} &= \frac{2\,q_e \cdot \rho}{r}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Beide Beobachter schätzen die wirkenden Kräfte aufgrund ihres unterschiedlichen Bewegungszustandes also um einen Faktor $(1 - v^2/c^2)$ unterschiedlich ein. Nach der klassischen Physik sollte aber die auf die Punktladung wirkende Kraft nicht von Bewegungszustand abhängen. Im Rahmen der Elektrodynamik versagt also das Galileische Relativitätsprinzip. Was wären mögliche Lösungsansätze?

(i) Das Relativitätsprinzip von Galilei gilt nur für die Mechanik. Für die Elektrodynamik gilt das Prinzip nur in einem ausgezeichneten Bezugssystem. Nur in diesem Bezugssystem bewegt sich Licht mit der Lichtgeschwindigkeit c. Dahinter versteckt sich die Theorie des Äthers.

(ii) Das Relativitätsprinzip gilt, aber die Gesetze der Elektrodynamik sind einfach falsch formuliert worden. In diesem Ansatz (Emissionstheorie) breitet sich Licht mit konstanter Geschwindigkeit c in Bezug auf seine Quelle aus. Die Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der Lichtquelle abhängt, wurde allerdings durch Experimente eindeutig widerlegt.

(iii) Das Relativitätsprinzip ist richtig, aber die Formulierung des klassischen Physik ist falsch. Das ist der Ansatz der Einsteinschen Überlegungen.

Man kann also anhand des Faraday-Paradoxons und in Bezug die eingangs gezeigte Abb. 1.13 feststellen:

- Die relative Bewegung ergibt unabhängig vom Bewegungszustand dasselbe Resultat.

- Für Lucy gibt es sowohl ein magnetisches als auch ein elektrisches Feld, während für Ringo nur ein magnetisches Feld vorhanden ist. Das sich ändernde magnetische Feld erzeugt ein elektrische Feld und für Lucy bewegt der so induzierte Strom die Nadel des Galvanometers.

- Das Gedankenexperiment demonstriert die Lorentz-Transformation eines elektrischen Feldes in ein Bezugssystem dass sich durch ein stationäres Magnetfeld bewegt. Hier existiert ebenfalls ein elektrisches Feld.

- Die Bewegung des Nadel des Galvanometers ist ein relativistischer Effekt, denn der induzierte Strom hängt vom β-Faktor v/c ab. Es ist erstaunlich, dass man diesen relativistischen Effekt bemerkt, obwohl v/c in der Größenordnung 10^{-12} liegt. Woran liegt das? Enorm viele Elektronen sind beteiligt.



Abb. 1.15: Photo eines Zugs in der bolivianischen Wüste, der beschreibt, wie man durch die Raumzeit reisen könnte[**?**].

Um sie schon mal einzustimmen auf Aspekte wie Längenkontraktion, die demnächst besprochen werden, schauen Sie sich das Video zum Faraday-Paradoxon an.

Link to video **Faraday-Paradoxon**

Im Rahmen der Vorlesung beschäftigen wir uns zunächst mit Bezugssystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit zueinander bewegen. Die dadurch verursachten Phänomene können auf der Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie erklärt werden. Die Allgemeine Relativitätstheorie beschäftigt sich dagegen mit beschleunigten Bezugssystemen. Dazu gehören auch Effekte, die durch die Gravitation hervorgerufen werden. Als Ergänzung empfehle ich *Frames of reference* anzuschauen. Der Film zeigt spannende Experimente zum Superpositionsprinzip. Weiter wird behandelt, in welcher Weise sich die Beobachtung ändert, wenn man sich in einem bewegten oder auch rotierenden Bezugssystem befindet. Er beleuchtet damit nochmal wesentliche Punkte dieser Vorlesung.

Link to video **Frames of Reference**

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Für einen Beobachter bewegt sich eine elektrische Ladung senkrecht zu einer eindimensionalen elektrischen Ladungsverteilung (Linienladung). Was ändert sich, wenn sich der Beobachter parallel zur LInienladung bewegt?

2. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie!

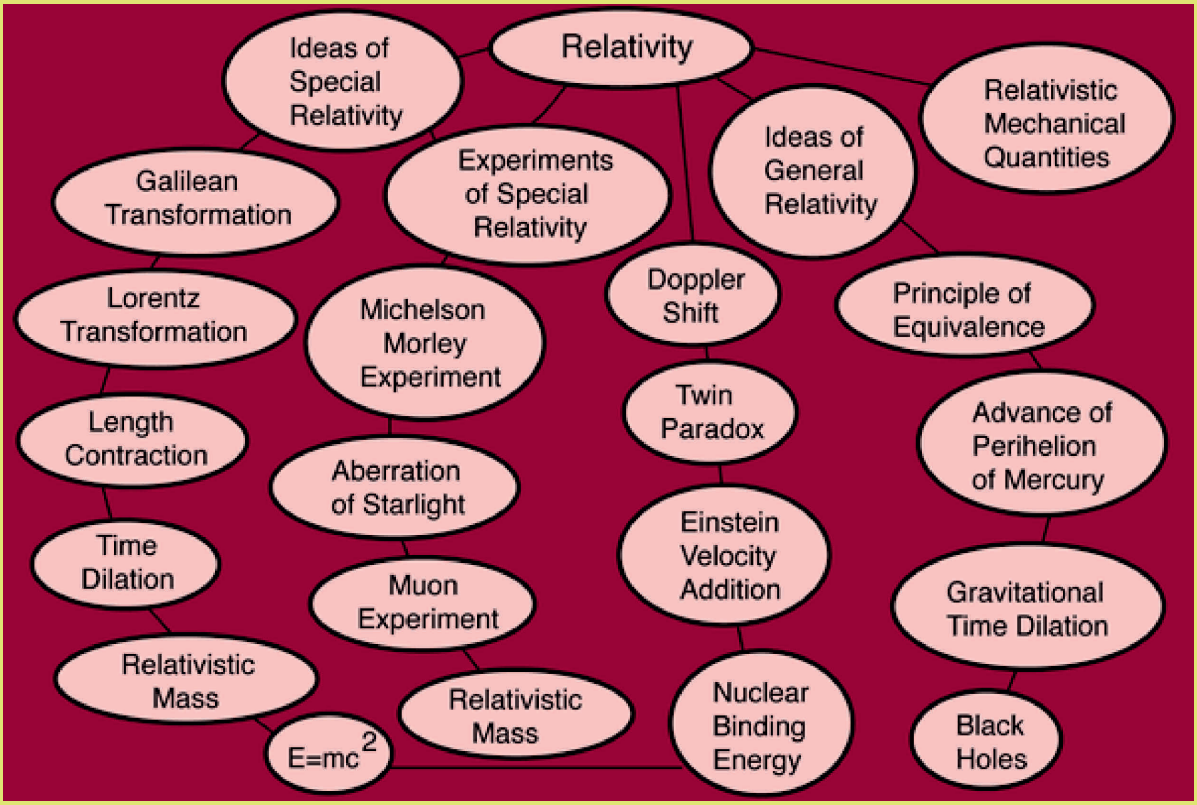


Abb. 1.16: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

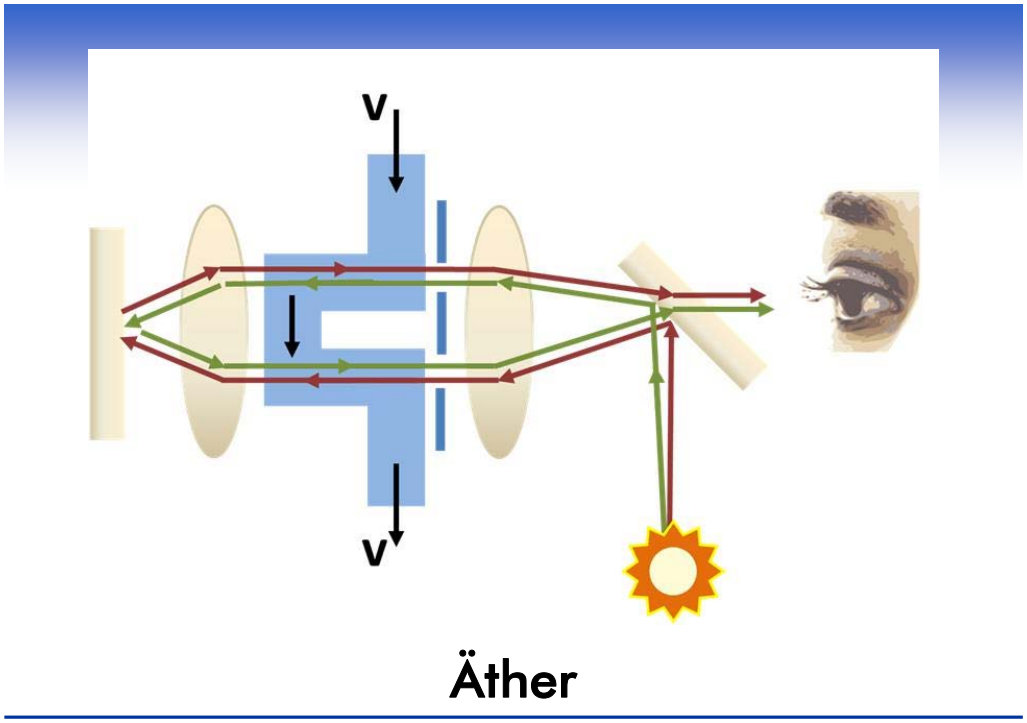
Was ist relevant für die Klausur?

- Newtonsche Axiome
- Superpositionsprinzip
- Bezugssystem/ Inertialsystem
- Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} t_A &= t_B \\ x_A &= x_B + v \cdot t \\ y_A &= y_B \\ z_A &= z_B \end{aligned}$$

- Spezielle vs Allgemeine Relativitätstheorie

2 Äther



Was halten Sie eigentlich davon, Mrs. Uhura, wenn Sie einmal ein paar Lichtjahre dienstfrei machen?

Captain Kirk in der Enterprise Folge *Kennen Sie Tribbles?*

[1]Mit dem Phänomen Licht haben Sie sich schon im Rahmen der Optik intensiv auseinandergesetzt. Sie haben zur Kenntnis genommen, dass die Lichtgeschwindigkeit c als Naturkonstante in der Liste der Naturkonstanten auftaucht.

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: $2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

Vor dem 17. Jahrhundert haben die meisten Wissenschaftler, darunter Kepler und Descartes die Geschwindigkeit des Lichts als unendlich angesehen. Informationen können

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

damit jede beliebige Entfernung ohne Zeitverlust zurückzulegen. Galileo Galilei war einer der ersten, der diese Annahme in Frage stellte und Versuche (1638) unternahm, die Lichtgeschwindigkeit experimentell zu messen:

Let each of two persons take a light contained in a lantern, or other receptacle, such that by the interposition of the hand, the one can shut off or admit the light to the vision of the other. Next let them stand opposite each other at a distance of a few cubits and practice until they acquire such skill in uncovering and occulting their lights that the instant one sees the light of his companion he will uncover his own. . . . Having acquired skill at this short distance let the two experimenters, equipped as before, take up positions separated by a distance of two or three miles and let them perform the same experiment at night, noting carefully whether the exposures and occultations occur in the same manner as at short distances; if they do, we may safely conclude that the propagation of light is instantaneous; but if time is required at a distance of three miles which, considering the going of one light and the coming of the other, really amounts to six, then the delay ought to be easily observable. . . In fact I have tried the experiment only at a short distance, less than a mile, from which I have not been able to ascertain with certainty whether the appearance of the opposite light was instantaneous or not; but if not instantaneous it is extraordinarily rapid.

Galileo Galilei, 1638

Genauere Messungen folgten 1676 mit Römer ($2.14 \cdot 10^8$ m/s–$2.27 \cdot 10^8$ m/s) und später Bradley, der 1748 die Lichtgeschwindigkeit mit $3.01 \cdot 10^8$ m/s bestimmte [**?**]. Sicher kennen Sie die Zahnradmethode von Armand Fizeau [**?**] oder die Drehspiegelmethode von Fizeau und Foucault. Weitere Methoden wurden entwickelt [**? ?**]. Die aktuell genaueste Messung stammt von Evenson et al. [**?**]: c=299 792 456.2 m/s. Sie wissen auch bereits, dass einige unserer SI-Einheiten über die Eigenschaften von Licht definiert sind. Welche sind das? Im Rahmen der Relativitätstheorie taucht ein neuer Aspekt auf. Es geht um die Ausbreitung von Licht und -salopp gesprochen- seinen Einfluss auf den Gang von Ereignissen. Fassen wir kurz zusammen, was wir schon über Licht gelernt haben:

- Licht breitet sich auch im Vakuum aus.
- Licht bewegt sich im Vakuum stets schneller als jeder andere massenbehaftete Körper.
- Licht zeigt keine Wechselwirkung mit anderem Licht.
- Licht transportiert Energie.
- In Materie ist die Lichtgeschwindigkeit Lichts als Tempo des Energietransports geringer als im Vakuum.
- Licht breitet sich geradlinig aus, wenn es weit von Materie entfernt ist.
- Lichtstrahlen sind eine Näherung, wenn man die Wellenlänge vernachlässigen kann.

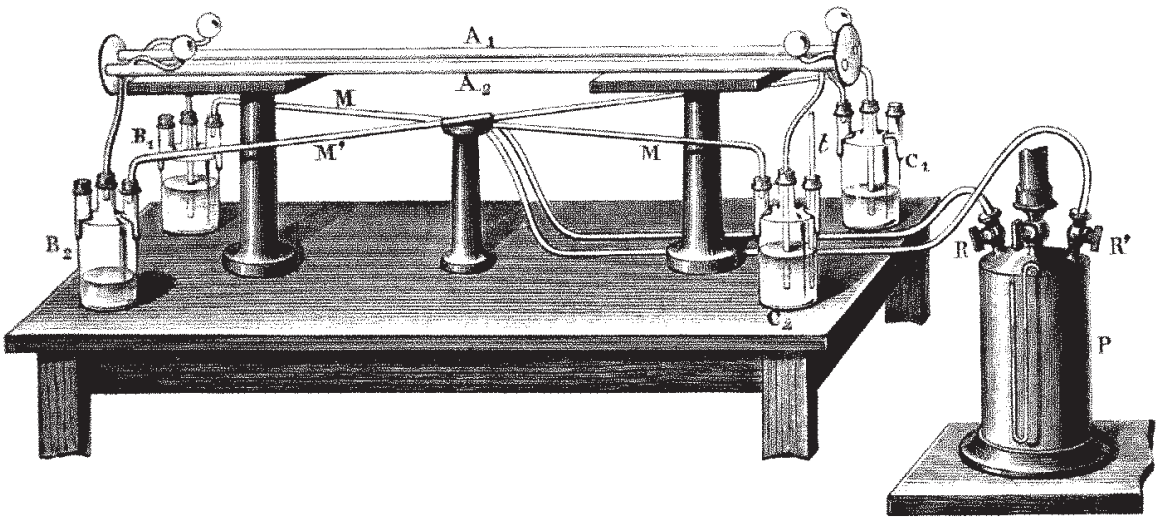


Abb. 2.1: Aufbau des Fizeau-Experiments (1851) [**?**]

- Licht kann auf einen Körper einen Impuls übertragen
- Licht hat einen Drehimpuls. Es ist möglich, einen Körper in Rotation zu versetzen.
- Schatten bewegen sich ohne Geschwindigkeitsbegrenzung.

Dieses Kapitel befasst sich mit einem Meilenstein der experimentellen Physik. Berühmt sind die Messungen von Michelson und Morley[2] deshalb geworden, weil sie nicht erfolgreich waren und es gerade durch diesen Misserfolg der Relativitätstheorie von Einstein entscheidend zum Durchbruch verholfen hat. Das Experiment beschäftigt sich mit der Ausbreitung von Lichtwellen in einem Medium. Dieses postulierte Medium, das für die Ausbreitung von Licht sorgt, ist der Äther, der, nach Ansicht vieler Forscher des 19. Jahrhundert, ein absolutes Bezugssystem darstellt. Der Eintrag zum Begriff *Äther* im Brockhaus Konversationslexikon stellt noch 20 Jahre nach dem Experiment, folgendes fest:

Äther, Lichtäther, nach allgemeiner Annahme der neueren Physik ein äußerst feiner und höchst elastischer Stoff, der nicht nur im ganzen Weltraume ausgebreitet ist, sondern auch die Zwischenräume ausfüllt, durch welche die kleinsten Teilchen der Körper voneinander getrennt sind. Der Ä. ist das Mittel, durch das sich die Licht- und Wärmestrahlen fortpflanzen. Als solches müssen ihm, da derselbe Querschwingungen fortleitet, gewisse Eigenschaften eines starren Körpers zugeschrieben werden, während er andererseits wieder Eigenschaften einer Flüssigkeit zeigen soll. Im Ä. pflanzen sich auch die elektrischen und magnetischen Zustände fort, die zu den Vorgängen des Lichts in engster Beziehung stehen. Früher galt der Ä. als Imponderabilie, d.h als ein gewichtsloser Stoff. Aus der

[2] The Nobel Prize in Physics 1907 was awarded to Albert Abraham Michelson for his optical precision instruments and the spectroscopic and metrological investigations carried out with their aid.

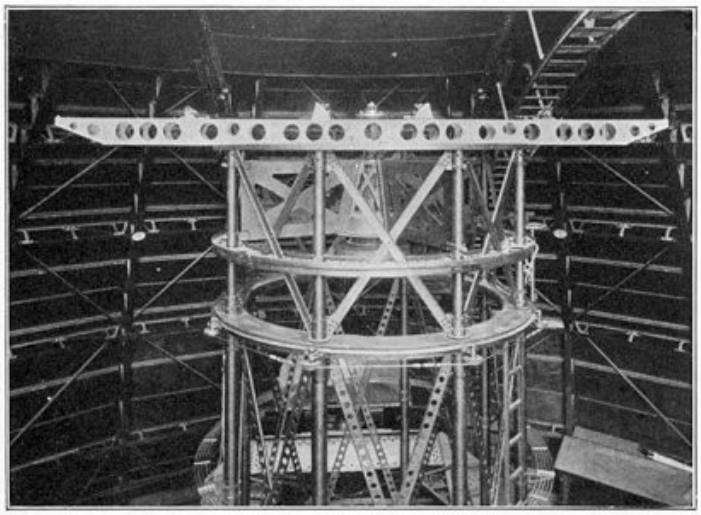


Abb. 2.2: Michelson-Sterninterferometer auf dem Rahmen des Hooker-Spiegelteleskops am Mount-Wilson-Observatorium (1920) [**?**].

Energie der Lichtwellen hat man gefunden, daß der Ä. etwa 15 trillionenmal leichter ist als atmosphärische Luft.

Brockhaus Konversationslexikon, 1901

Einen ähnlichen Aufbau wie das berühmte Michelson-Morley Experiment zeigt das Titelbild. Abb. 2.1 zeigt eine Zeichnung der Originalversion. Licht wird durch eine Küvette mit fließendem Wasser geleitet. Man erkennt, dass sich das Licht auf dem Weg von der Lichtquelle zum Detektor Auge mal mit und dann gegen den Flüssigkeitsstrom bewegt. Führt das zu einem Unterschied in der Ausbreitungsgeschwindigkeit? Die Situation erinnert stark an ein Boot, dass sich mal stromaufwärts, mal stromabwärts bewegt. Tatsächlich führen wir genau dieses Gedankenexperiment durch, um die Idee des Michelson-Morley Experiment zu verstehen. Der auf dem Titelbild dargestellte experimentelle Aufbau (Fizeau Experiment) ist, genauso wie im Michselson-Morley Versuch, ein so genanntes Interferometer. Die Leistungsfähigkeit dieses Instruments, kleinste Unterschiede in der optischen Weglänge nachzuweisen, ist unübertroffen und auch technologisch interessant.[3] Abb. 2 zeigt den Einsatz eines Michelson-Interferometers in der Astronomie.[4] Diese Geräte erreichen eine Winkelauflösung von 0.00002 Bogensekunden[5] und sind geeignet Sterne in einer Entfernung von bis zu 100 Parsec[6] aufzulösen. Es sei

[3] Ohne großen Aufwand erreichen optische Interferometer eine Auflösung von 1Å, also von der Größenordnung des Wasserstoffatoms.

[4] *Lexikon:* Das **Michelson-Sterninterferometer** (Abb. 2) beruht darauf, dass Licht eines Sterns auf getrennten Wegen aufgenommen und zur Interferenz gebracht wird. Die Lichtwege werden durch Spalte mit einem variablen Abstand generiert. Wählt man den Abstand der Spalte zu groß verschwindet das Interferenzmuster. Aus diesem Abstandswert kann man, wenn man die Entfernung zum Stern kennt, auf den Durchmesser der betrachteten Sonne schließen.

[5] 1 Bogensekunde = $0{,}00028^o$

[6] astronomisches Längenmaß: $1\,\mathrm{pc}{=}3 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$

angemerkt, dass der kürzlich erfolgte Nachweis von Gravitationswellen [**?**] mit einem Michelson-Interferometer erfolgte.

In der weiteren Behandlung des Themas ist es sinnvoll, auf Näherungen zurückzugreifen. Das macht Sinn, denn zum Beispiel ist oft die Geschwindigkeit v eines Objektes klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c, d.h. $\beta = v/c \ll 1$.

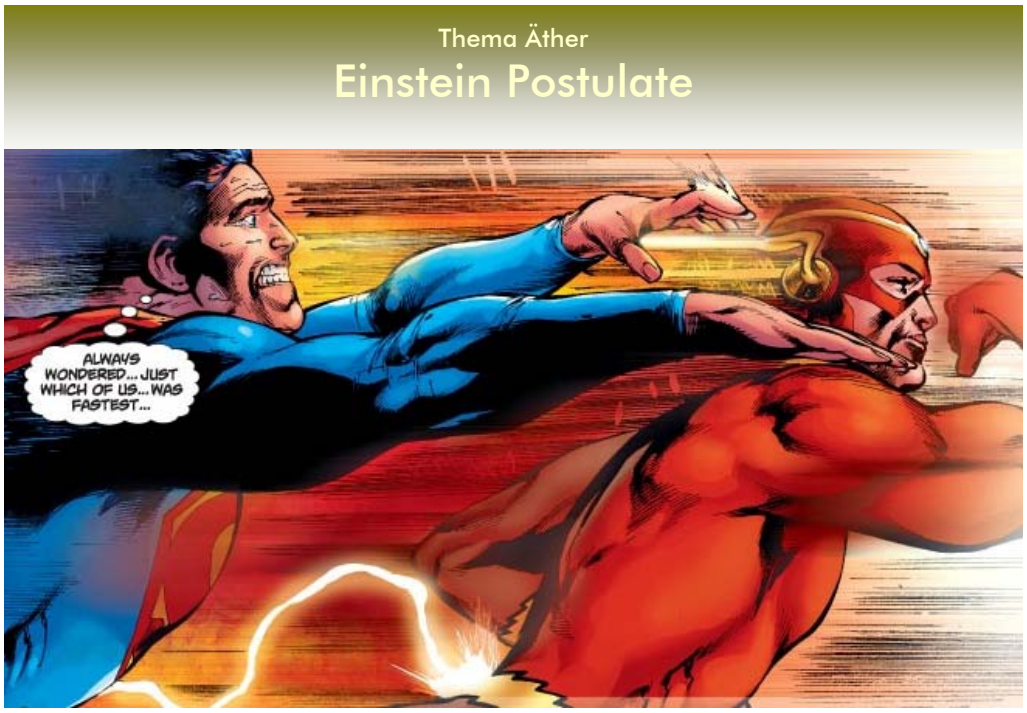
$$(1+\beta)^2 \approx 1+2\beta \tag{2.1}$$
$$(1+\beta)^n \approx 1+n\cdot\beta \tag{2.2}$$
$$(1-\beta)^2 \approx 1-2\beta \tag{2.3}$$
$$\frac{1}{1+\beta} \approx 1-\beta \tag{2.4}$$
$$\frac{1}{1-\beta} \approx 1+\beta \tag{2.5}$$
$$\sqrt{1-\beta} \approx 1-\frac{\beta}{2} \tag{2.6}$$
$$\sqrt{1+\beta} \approx 1+\frac{\beta}{2} \tag{2.7}$$

Den so genannten β-Parameter werden wir im Laufe der Vorlesung häufig verwenden. Weiter gilt für $|\alpha| \ll 1$

$$\exp(\alpha) \approx 1+\alpha \tag{2.8}$$
$$\ln(1+\alpha) \approx \alpha \tag{2.9}$$
$$\sin(\alpha) \approx \alpha \tag{2.10}$$
$$\cos(\alpha) \approx 1-\frac{\alpha^2}{2} \tag{2.11}$$


Inhalt
Äther
- Postulate der Relativitätstheorie
- Einfluss der endlichen Lichtgeschwindigkeit auf astronomische Beobachtungen
- interferometrischer Überprüfung der Ätherheorie
Kapitel 1
Einstein Postulate
thermo
electro
Kapitel 2
Stellare Aberration
optics
astro
Kapitel 3
Michselson-Morley Experiment
optics
astro
technology

2.1 Einsteinsche Postulate



Der normale Erwachsene denkt über die Raum-Zeit-Probleme kaum nach. Das hat er nach seiner Meinung bereits als Kind getan. Ich hingegen habe mich geistig derart langsam entwickelt, daß ich erst als Erwachsener anfing, mich über Raum und Zeit zu wundern. Naturgemäß bin ich dann tiefer in die Problematik eingedrungen als die normal veranlagten Kinder.

Albert Einstein

Jedermann weiß, dass sich Supermann und Flash mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die Frage ist nur, ob der Geschwindigkeit von Körpern natürliche Grenzen gesetzt sind. Dies führt zu den Einsteinschen Postulaten.

Spätestens in der Optik lernt man, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Lichtwelle im Vakuum eine Naturkonstante ist. Weiter ergibt sich, dass sich diese Naturkonstante als Produkt zweier anderer Naturkonstanten ergibt, die man den Themen Elektrostatik und Magnetismus zuordnen kann.

$$c_{vac} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \tag{2.12}$$

Elektrische Feldkonstante: $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

Magnetische Feldkonstante: $\mu_0 = 12.566 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$

Konzeptionell sind die Gebiete eng miteinander verknüpft, wie die Gleichung aufzeigt. Den Zusammenhang kann man in einem kurzen Satz zusammenfassen:

Licht ist eine elektromagnetische Welle!

Die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit führt zu einem Dilemma, denn sie ist physikalisch nicht vereinbar mit der Galilei-Transformation der klassischen Mechanik. In der Vorlesung *Beobachter* wurde die Galilei-Transformation verwendet und führte zu dem Ergebnis, dass der gemessene Wert für die Beschleunigung eines Objektes in allen Bezugssystemen gleich ist. Wie sich zeigen wird, stimmt dies nicht mehr, wenn sich die Geschwindigkeiten der Körper der Lichtgeschwindigkeit annähern.

Relativ zur Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts im Vakuum (c=300 000 km/ s) würden Beobachter in unterschiedlichen Bezugssystemen jeweils andere Werte für die Lichtgeschwindigkeit messen. Beispielsweise ergäbe sich eine Erhöhung der Lichtgeschwindigkeit, wenn man dem Lichtpuls entgegen fliegt. Demnach müsste es möglich sein, sich mit einer Geschwindigkeit zu bewegen, die höher ist als c. Eine Naturkonstante, deren Wert vom Bezugssystem abhängt, wäre fatal [**?**].

Dauerhaft glatte Haut in Lichtgeschwindigkeit: Philips präsentiert den Lumea Precision Plus

Werbung der Firma Philips, 2012

Relativitätsprinzip

Befinden sich in A zwei synchrone Uhren und bewegt man die eine derselben auf einer geschlossenen Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie wieder nach A zurückkehrt, was t Sekunden dauern möge, so geht die letztere Uhr bei ihrer Ankunft in A gegenüber der unbewegt gebliebenen um $1/2\,t\cdot(v/V)^2$ Sekunden nach. Man schließt daraus, daß eine am Erdäquator befindliche Unruheuhr um einen sehr kleinen Betrag (10−7 s pro Umlauf) langsamer laufen muss als eine genau gleich beschaffene, sonst gleichen Bedingungen unterworfene, an einem Erdpole befindliche Uhr [**?**].

Albert Einstein (1905)

In der klassischen Physik wird beim Wechsel zwischen Inertialsystemen die Galilei-Transformation verwendet. Für zwei Bezugssysteme A und B, die sich relativ zueinander mit

der Geschwindigkeit v parallel in Richtung x bewegen, gilt

$$t_B = t_A \tag{2.13}$$
$$x_B = x_A - v \cdot t \tag{2.14}$$
$$y_B = y_A \tag{2.15}$$
$$z_B = z_A \tag{2.16}$$

Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik

Beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen bleiben alle Gesetze der Mechanik unverändert.[7]

Das bedeutet, dass für die Dynamik von Körpern nach Newton folgendes gilt:

- Erstes Newtonsches Gesetz: Ohne äußere Kräfte ist die Geschwindigkeit u eines Körpers im Bezugssystem S konstant, siehe Abb. 2.3. Das andere Bezugssystem S'

[7] Galileo Galilei war der erste, der das Relativitätsprinzip formulierte. Im seinem im Jahr 1632 erschienenen *Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme* schreibt er: Schließt Euch in Gesellschaft eines Freundes in einen möglichst grossen Raum unter dem Deck eines Schiffes ein. Verschafft Euch Mücken, Schmetterlinge und ähnliches fliegendes Getier; sorgt auch für ein Gefäß mit Wasser und kleinen Fischen darin; hängt ferner oben einen Eimer auf, welcher tropfenweise Wasser in ein zweites enghalsiges darunter gestelltes Gefäß träufeln lässt. Beobachtet nun sorgfältig, solange das Schiff stille steht, wie die fliegenden Tierchen mit der nämlichen Geschwindigkeit nach allen Seiten des Zimmers fliegen. Man wird sehen, wie die Fische ohne irgendwelchen Unterschied nach allen Richtungen schwimmen; die fallenden Tropfen werden alle in das untergestellte Gefäß fließen. Wenn Ihr Eurem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht kräftiger nach der einen als nach der anderen Richtung zu werfen, vorausgesetzt, dass es sich um gleiche Entfernungen handelt. Wenn Ihr, wie man sagt, mit gleichen Füssen einen Sprung macht, werdet Ihr nach jeder Richtung hin gleich weit gelangen. Achtet darauf, Euch all dieser Dinge sorgfältig zu vergewissern, wiewohl kein Zweifel obwaltet, dass bei ruhendem Schiffe alles sich so verhält. Nun lasst das Schiff mit jeder beliebigen Geschwindigkeit sich bewegen: Ihr werdet - wenn nur die Bewegung gleichförmig ist und nicht hier- und dorthin schwankend - bei allen genannten Erscheinungen nicht die geringste Veränderung eintreten sehen. Aus keiner derselben werdet Ihr entnehmen können, ob das Schiff fährt oder stille steht. Beim Springen werdet Ihr auf den Dielen die nämlichen Strecken zurücklegen wie vorher, und wiewohl das Schiff aufs schnellste sich bewegt, könnt Ihr keine größeren Sprünge nach dem Hinterteile als nach dem Vorderteile zu machen: Und doch gleitet der unter Euch befindliche Boden während der Zeit, wo Ihr Euch in der Luft befindet, in entgegengesetzter Richtung zu Eurem Sprunge vorwärts. Wenn Ihr Eurem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht mit größerer Kraft zu werfen, damit er ankomme, ob nun der Freund sich im Vorderteile und Ihr Euch im Hinterteile befindet oder ob Ihr umgekehrt steht. Die Tropfen werden wie zuvor ins untere Gefäss fallen, kein einziger wird nach dem Hinterteile zu fallen, obgleich das Schiff, während der Tropfen in der Luft ist, viele Spannen zurücklegt. Die Fische im Wasser werden sich nicht mehr anstrengen müssen, um nach dem vorangehenden Teile des Gefäßes zu schwimmen als nach dem hinterher folgenden; sie werden sich vielmehr mit gleicher Leichtigkeit nach dem Futter begeben, auf welchen Punkt des Gefäßrandes man es auch legen mag. Endlich werden auch die Mücken und Schmetterlinge ihren Flug ganz ohne Unters chied nach allen Richtungen fortsetzen. Niemals wird es vorkommen, dass sie gegen die dem Hinterteil zugekehrte Wand gedrängt werden, gewissermaßen müde von der Anstrengung, dem schnell fahrenden Schiffe nachfolgen zu müssen, und doch sind sie während ihres langen Aufenthaltes in der Luft von ihm getrennt.



Abb. 2.3: Ein Körper verbleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange dieser nicht durch die Einwirkung von Kräften zur Änderung seines Zustandes gezwungen wird.

bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v. Damit ist $u' = u - v$ ebenfalls konstant.

- Zweites Newtonsches Gesetz: Beobachter in unterschiedlichen Bezugssystemen (S, S') messen die Auslenkung einer Feder. Beide bestimmen dieselbe Streckung der Feder, also $F = F'$. Das die Beschleunigung ebenfalls unabhängig vom Beobachtungszustand ist, hatten wir schon im Kapitel *Beobachter* gezeigt.

- Drittes Newtonsches Gesetz: Da die gemessene Kraft in unterschiedlichen Bezugssystemen gleich gemessen wird, folgt unmittelbar das Reaktionsprinzip.

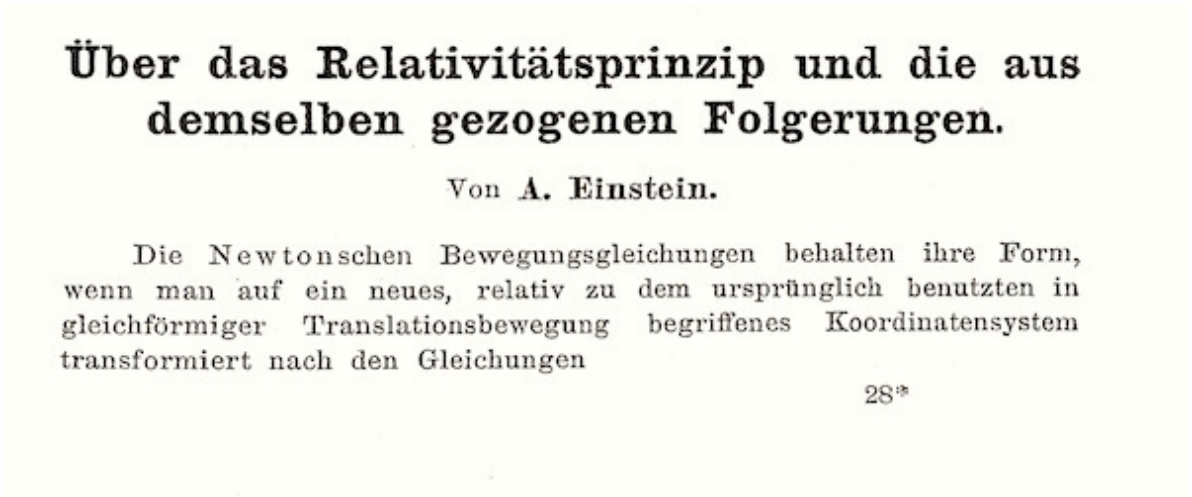
Diese klassische Betrachtung führt auf zwei Schlussfolgerungen:

- Die Gesetze der Newtonschen Mechanik gelten in allen Inertialsystemen.[8]

- Es gibt nur ein Bezugssystem, in dem sich Licht mit gleicher Geschwindigkeit in alle Richtungen ausbreitet. Weiter gefasst heißt das, dass es nur ein Inertialsystem gibt, in dem die Gesetze der Elektrodynamik gelten.

Wir werden den Beweis antreten, dass die zweite Schlussfolgerung falsch ist! Die Erweiterung der Galilei-Transformation im Rahmen der Relativitätstheorie führt zur so genannten Lorentz-Transformation (Kapitel *Zerfall des Myons*), die die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit berücksichtigt. Einstein hat auf der Grundlage dieser Überlegungen die physikalischen Konsequenzen durchgespielt und Richtlinien aufgestellt. Die Einsteinschen Postulate erscheinen auf den ersten Blick nicht aufregend, aber sie haben unser physikalisches Weltbild durcheinander gewirbelt. Abb. 2.4 zeigt eine der Arbeiten Einsteins zur Relativitätstheorie, erschienen im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

[8] *Lexikon:* Die **Newtonschen Bewegungsgleichungen** sind invariant gegenüber einer Galilei-Transformationen.



Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen.

Von **A. Einstein.**

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen behalten ihre Form, wenn man auf ein neues, relativ zu dem ursprünglich benutzten in gleichförmiger Translationsbewegung begriffenes Koordinatensystem transformiert nach den Gleichungen

28*

Abb. 2.4: Aus Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 4, 411-462 (1908)

4, 411-462 (1908). Wichtig ist die Erkenntnis der Speziellen Relativitätstheorie, dass die Verbreitung von Information Zeit benötigt.

1. Relativitätsprinzip: Die Gesetze der Physik gelten in allen Inertialsystemen und kein Bezugssystem ist ausgezeichnet.

2. Prinzip der Konstanz der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht: Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat denselben Wert unabhängig von der Richtung und dem Bezugssystem des Beobachters.

Das sind die Einsteinschen Postulate. Die Gesetze der Physik gelten in beliebigen Bezugssystemen, also nicht nur in der klassischen Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik. Allerdings muss man damit rechnen, dass Messergebnisse von Beobachtern in anderen Bezugssystemen unterschiedlich ausfallen.

Das zweite Einsteinsche Postulat stellt fest, dass weder Superman noch Flash die Lichtgeschwindigkeit erreichen. Allgemein kann kein massebehafteter Körper die Lichtgeschwindigkeit überschreiten.

Link to video **Lucky Luke**

Speed of Light from Direct Frequency and Wavelength Measurements of the Methane-Stabilized Laser [?]: The frequency and wavelength of the methane-stabilized laser at 3.39 μm were directly measured against the respective primary standards. With infrared frequency synthesis techniques, we obtain ν=88.376 181 627(50) THz. With frequency-controlled interferometry, we find λ=3.392 231 376 (12) μm. Multiplication yields the speed of light c=299 792 456.2(1.1) m/sec, in agreement with and 100 times less uncertain than the previously accepted value. The main limitation is asymmetry in

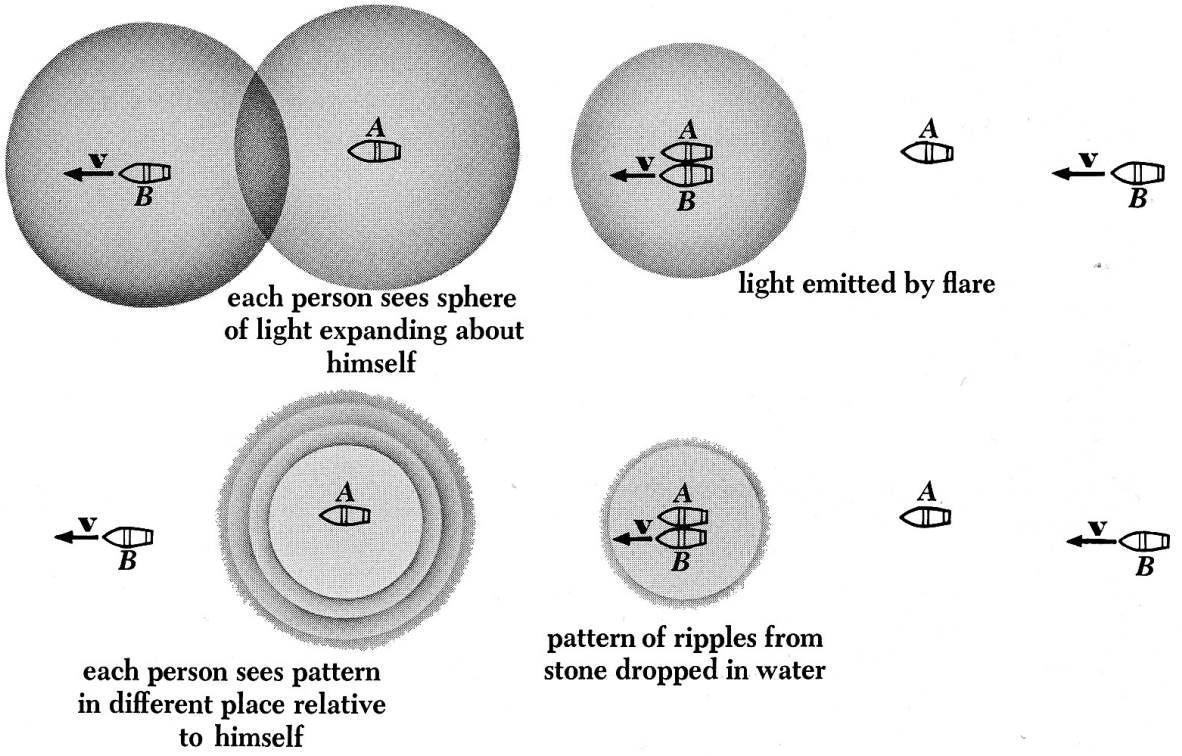


Abb. 2.5: Relativistische Phänomene scheinen der Alltagserfahrung zu wiedersprechen[**?**]!

the krypton 6057 Å line defining the meter.

Zur Illustration der Einsteinschen Postulate betrachten wir folgende Situationen, siehe Abb. 2.5.

(I) Es ist ziemlich nebelig. Zwei Boote (A, B) befinden sich auf einem See, wobei Boot A sich nicht bewegt und Boot B über den See schippert. Wegen des dichten Nebels kann aber keiner der beiden Kapitäne sagen, ob sein Boot tatsächlich ruht oder sich bewegt. Gerade als Boot A neben Boot B ist, wird ein Signalfeuer gezündet. Kugelförmig und mit Lichtgeschwindigkeit breitet sich das Licht aus. Da die Lichtgeschwindigkeit in allen Referenzsystemen identisch ist, stellen beide Kapitäne fest, dass der Ursprung des Leuchten von ihrem eigenen Boot ausgegangen ist. Diese Beobachtung machen die Segler auf beiden Booten, egal ob sie sich bewegen, also unabhängig von ihrem Bewegungszustand. Aufgrund des Nebels gibt es kein anderes Bezugssystems, an dem man sich orientieren können und so kann nicht festgestellt werden, welcher der beiden Boote eine Ortsveränderung vollführt. Beide Segler kommen also zum selben Ergebnis.

(II) Es klärt auf und man kann weit gucken. In einem der Boote lässt ein Segler einen Stein ins Wasser plumpsen, wenn die Boote aneinander vorbei fahren. Anhand der Ausbreitung der Wasserwellen kann nun entschieden werde, welches Boot im

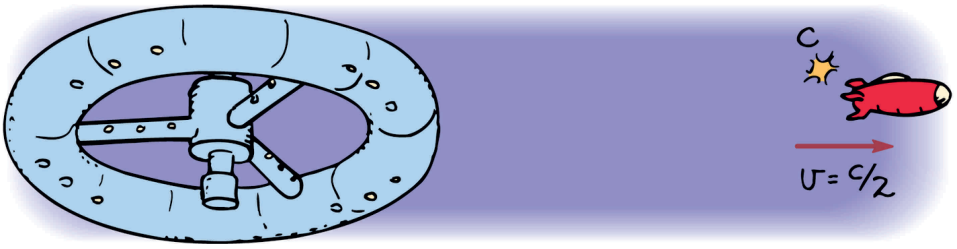


Abb. 2.6: Ein Raumfahrer entfernt sich mit halber Lichtgeschwindigkeit von einer Raumstation. Mit welchem Wert bestimmt er die Geschwindigkeit des Lichtpulses, der von der Station ausgesendet wurde?

Wasser dümpelt und welches Boot sich bewegt, da das Wasser ein Bezugssystem darstellt. In diesem Fall macht es aber einen Unterschied, wie man sich in Bezug auf die Ausbreitung der Wasserwellen bewegt. Mit Lichtwellen ist das völlig anders, wie das zweite Einsteinsche Postulat klarstellt!

Eine Konsequenz der Einsteinschen Postulate ist also, dass es kein absolutes Bezugssystem Äther geben kann. Das bedeutet auch, dass Beobachter, die sich relativ zueinander bewegen, nicht herausfinden können, welcher der Personen sich in Ruhe befindet. Es ist nur möglich, ihre relative Geschwindigkeit zueinander zu bestimmen. Nach Newton besteht aber die Möglichkeit, dass es ein ausgezeichnetes Bezugssystem gibt. Die Frage stellt sich, wie man diese Hypothesen experimentell überprüfen kann. Später mehr dazu im Abschnitt zum Michelson-Morley Experiment. Überraschend sind auch die Konsequenzen, die sich aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ergeben [**?**].[9] Nach Einstein unterscheidet sich Licht von allen anderen Arten von Wellen. Für Schallwellen beispielsweise würde ein Beobachter eine Erhöhung der Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Wellen feststellen, wenn er sich auf eine Schallquelle zubewegt. Ein ähnlich gelagertes Experiment mit Lichtwellen durchgeführt, würde einen solchen Effekt nicht zeigen. Mehr dazu im Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*.

Bewegung ist relativ

Jeder Lichtstrahl bewegt sich im ruhenden System mit bestimmter, gleich bleibender Geschwindigkeit unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper entsandt wird [**?**].

Albert Einstein, 1905

Betrachten wir ein solches Experiment genauer. Angenommen ein Raumfahrer entfernt sich mit halber Lichtgeschwindigkeit von einer Raumstation, siehe Abb. 2.6. Zu einem

[9] Basierend auf astronomischen Beobachtungen von Doppelsternsystemen zeigte deSitter, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle ist.

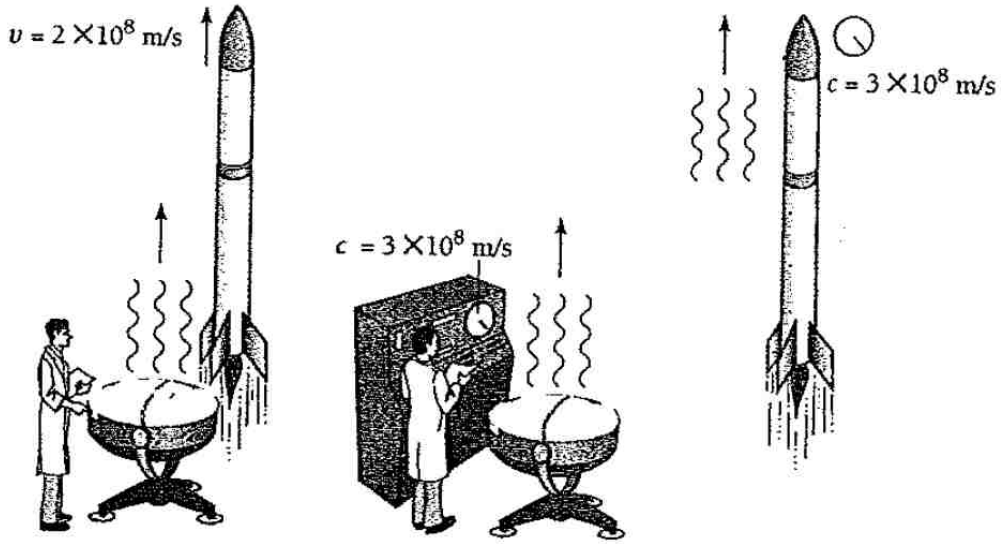


Abb. 2.7: Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich hoch [**?**].

gewissen Zeitpunkt sendet er einen Lichtpuls zurück in Richtung der Station. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Lichtstrahl? Nach der klassischen Physik (Galilei-Transformation) ist die Lage klar. Der Lichtstrahl hat aufgrund der Eigengeschwindigkeit der Rakete eine Geschwindigkeit von $c/2$. Die Einsteinschen Postulate ergeben eine andere Sichtweise, oder mit Einstein gesprochen:

Jeder Beobachter bestimmt also, unabhängig vom Bezugssystem in dem er sich befindet, die Lichtgeschwindigkeit mit dem Wert 300 000 km/ s. Dazu eine Reihe von Beispielen.

Gedankenexperiment 1 (siehe Abb. 2.7):

- Was passiert, wenn ein vorbeifliegendes Raumschiffe beobachtet, dass jemand auf der ruhenden Erde das Licht anschaltet?
- Welche Geschwindigkeit des Lichtstrahls würde der Astronaut mit seinen Instrumenten bestimmen?

Der Raumfahrer kommt zu demselben Ergebnis wie der Beobachter auf der Erde. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 300 000 km/ s.

Gedankenexperiment 2 (siehe Abb. 2.8):

Ein Raumschiff bewegt sich mit Überlichtgeschwindigkeit. Da die Geschwindigkeit des Lichts ($3 \cdot 10^8$ m/ s) geringer ist, überholt die Rakete den Lichtstrahl. Was beobachtet eine Person auf der Erde? Der Mann am Fernrohr stellt fest, dass das Licht der Taschenlampe sich rückwärtig ausbreitet. Das kann nicht sein, da in diesem Fall das Relativitätsprinzip verletzt wäre.

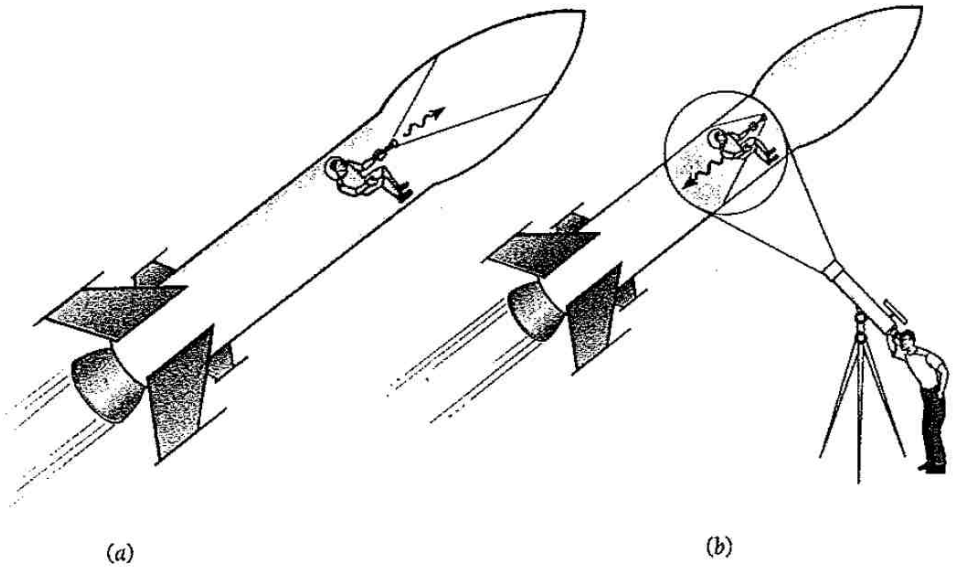


Abb. 2.8: Ein Raumfahrer sendet in einem Raumfahrzeug einen Lichtpuls aus, wobei er annimmt, dass er sich mit Überlichtgeschwindigkeit fortbewegt [**?**].

Wie stimmen die Einsteinschen Postulate der Speziellen Relativitätstheorie mit der Wirklichkeit überein? Zu dieser Frage erschien 1949 ein Übersichtsartikel mit dem Titel *Postulate versus Observation in the Special Theory of Relativity* [**?**].

Experimenteller Nachweis 1:

Nach diesen Gedankenspielen ein reales Experiment, dass am CERN[**?**] mit schnellen Teilchen durchgeführt wurde. Dazu verwendet man schnelle Teilchen, die im Flug zerstrahlen. Als bewegte Strahlenquelle verwendet man den Zerfall [**? ?**] von Teilchen oder die Vernichtung [**?**] von Positronen beim Kontakt mit normaler Materie.

Bei der Elektron-Positron Annihilation ist das Positron meistens dabei schon in Ruhe, aber in wenigen Fällen hat das Teilchen noch merklichen Impuls. Im Schwerpunktsystem yon Positron und Elektron werden die beiden Vernichtungsquanten entgegen gerichtet ausgesandt. Im Laborsystem dagegen mehr in Vorwärtsrichtung. Würden sich die Geschwindigkeiten addieren, hätte das eine Lichtquant die Geschwindigkeit $1.6c$ und das andere $0.4c$ betragen. Entsprechend unterschiedliche Flugzeiten zu den Detektoren wäre die Folge. Im CERN-Experiment [**?**] sendet schnelles Objekt - hier ein Pion[10] - ebenfalls zwei Lichtblitze (Photonen γ_{ph})[11] in entgegengesetzte Richtung aus:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma_{ph} + \gamma_{ph}$$

[10] *Lexikon:* **Pion** ist die Kurzform von π-Meson. Pionen ($m_\pi \approx 200 \cdot m_e$) bestehen aus einem Quark und einem Antiquark, haben eine geringe Lebensdauer ($8{\cdot}10^{-17}$ s) und kommen in drei Ladungszuständen (π^+, π^o, π^-) vor. Pionen wurden erstmals 1947 in der kosmischen Höhenstrahlung entdeckt.

[11] *Lexikon:* Photonen sind die Energiepakete der elektromagnetischen Strahlung

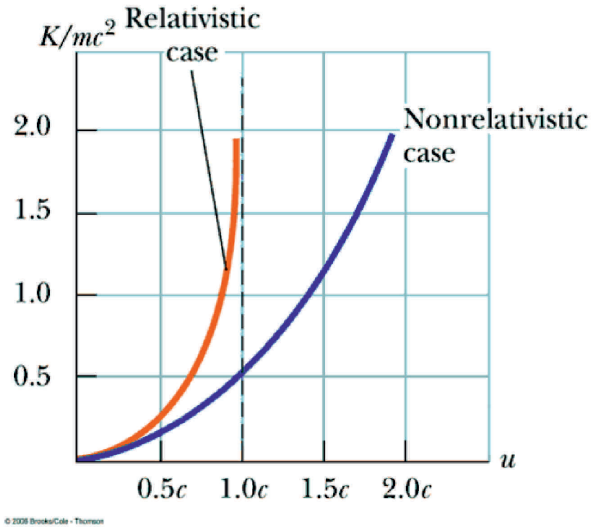


Abb. 2.9: Abhängigkeit der Kinetischen Energie eines Teilchens von seiner Geschwindigkeit.

Spielt die Bewegungsrichtung des Teilchen (0.99975c) dabei eine Rolle? Das Ergebnis lautet in jedem der Experimente NEIN. Die Versuche bestätigten also die Vorhersagen der Einsteinschen Postulate.

Experimenteller Nachweis 2:

Das zweite Beispiel zur Bestätigung der Speziellen Relativitätstheorie beschäftigt sich mit der Grenzgeschwindigkeit c. Der Trick ist, dass im Experiment [**?**] die kinetische Energie E_{kin} eines Teilchens (hier ein Elektron mit Ladung e, Masse m_e) auf unterschiedliche Weise bestimmt wird. Zum einen erhält man E_{kin} aus einer Messung der Endgeschwindigkeit v, die das Elektron im Feld eines Kondensators (angelegte Spannung U_e) erhält. Man misst dazu die Flugzeit des Elektrons Quellort zum Detektor. Zum anderen kann man die Energie des Teilchens messen, indem man die Umwandlung von kinetischer in thermische Energie ΔQ_{th} bei einem inelastischen Stoß mit einem Metallblock ausnutzt (Energieerhaltungssatz). Die damit verbundene Temperaturerhöhung ΔT_K hängt von der Masse m und der Wärmekapazität c_{th} des Metallblocks ab (Kapitel *Thermodynamik*).

$$\Delta Q_{th} = m \cdot c_{th} \cdot \Delta T_K \tag{2.17}$$

Geschwindigkeit und kinetische Energie können damit unabhängig voneinander bestimmt werden. Das Experiment ergab (Abb. 2.9), dass die kinetische Energie immer größer wurde, die Geschwindigkeit aber nie die Lichtgeschwindigkeit erreichte (rot). Die klassische Beziehung $E_{kin} = 1/2\, mv^2$ gilt also nicht für hohe Teilchengeschwindigkeiten (blau). Man beachte, dass man erst oberhalb eines Wertes von etwa $0.2\, c$ eine Abweichung zwischen den beiden Kurven feststellt. Außerdem sollte die Achsenbeschriftung der y-Achse auffallen. Die kinetische Energie ist in Einheiten von mc^2 angegeben. Dieser Ausdruck wird in der Vorlesung *Einsteingleichung* behandelt. In [**? ? ? ?**] sind einfacher zu realisierende Aufbauten beschrieben, die, statt beschleunigter Elektronen aus einem Beschleuniger,

radioaktive Präparate verwenden, um diesen Aspekt der Speziellen Relativitätstheorie zu untersuchen.

Link to video **The ultimate speed**

Experimental relativistic zero-knowledge proofs [**?**]**:** Protecting secrets is a key challenge in our contemporary information-based era. In common situations, however, revealing secrets appears unavoidable; for instance, when identifying oneself in a bank to retrieve money. In turn, this may have highly undesirable consequences in the unlikely, yet not unrealistic, case where the bank's security gets compromised. This naturally raises the question of whether disclosing secrets is fundamentally necessary for identifying oneself, or more generally for proving a statement to be correct. Developments in computer science provide an elegant solution via the concept of zero-knowledge proofs: a prover can convince a verifier of the validity of a certain statement without facilitating the elaboration of a proof at all. In this work, we report the experimental realization of such a zero-knowledge protocol involving two separated verifier–prover pairs. Security is enforced via the physical principle of special relativity, and no computational assumption (such as the existence of one-way functions) is required. Our implementation exclusively relies on off-the-shelf equipment and works at both short (60 m) and long distances ($\geq$ 400 m) in about one second. This demonstrates the practical potential of multi-prover zero-knowledge protocols, promising for identification tasks and blockchain applications such as cryptocurrencies or smart contracts.

Gegenwärtig debattiert jeder Kutscher und jeder Kellner, ob die Relativitätstheorie richtig sei.Die Überzeugung wird hierbei bestimmt durch die Zugehörigkeit zu einer politischen Partei [**?**].

Albert Einstein an Marcel Grossmann (12. September 1920)

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Stimmt die Behauptung? *Im Prinzip ist es möglich, dass eine Person, die einem Lichtpuls mit hoher und konstanter Geschwindigkeit folgt, beobachtet, dass das Licht nahezu stillsteht.*[12]

(i) JA!

(ii) NEIN!

Aufgabe 1.2: Ein Raumschiff startet von der Erde und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v zu einem entfernten Stern. Die Raumfahrer senden einen Lichtpuls zurück zur Erde. Welche Geschwindigkeit des Lichtpulses bestimmt man auf der Erde?[13]

(i) c

(ii) $c + v$

(iii) $c - v$

Aufgabe 1.3: Alice bewegt sich mit ihrem Raumschiff Hansa4Ever mit $0.99c$ relativ zur Milchstraße. Alice beschließt, die Masse ihres Schiffes zu bestimmen. Dazu schiebt Alice den Beschleunigungshebel nach vorne und bestimmt mit dem schiffsinternen Beschleunigungsmesser die resultierende Beschleunigung. Das Ergebnis ist:[14]

(i) Im Vergleich zum Wert bei einer Geschwindigkeit von NULL relativ zur Milchstraße ist der Beschleunigung größer!

(ii) Alice stellt keinen Unterschied fest.

(iii) Im Vergleich zum Wert bei einer Geschwindigkeit von NULL relativ zur Milchstraße ist der Beschleunigung geringer.

Aufgabe 1.4: Was war der Zweck des Michelson-Morley Experiment?[15]

(i) Um den genauen Wert der Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen.

(ii) Die Analyse des elektromagnetischen Spektrums.

(iii) Um festzustellen, dass die Erde ein absolutes Bezugssystem darstellt

(iv) Um zu erfahren, wie der Äther die Ausbreitung von Licht beeinflusst.

[12] Antwort: (ii)
[13] Antwort: (i)
[14] Antwort: (ii)
[15] Antwort: (iii) und (iv)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie hat Römer im 17. Jahrhundert die Lichtgeschwindigkeit gemessen?
2. Welche anderen Verfahren kennen Sie, die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen?
3. Erläutern Sie die Einsteinschen Postulate!
4. Warum führen die beiden Einsteinschen Postulate der Speziellen Relativitätstheorie zu Widersprüchen mit der Newtonschen Mechanik?
5. Nach Newton hängt die Gravitationskraft quadratisch vom Abstand der beiden Massen ab. Ändern die Einsteinschen Postulate etwas an dieser Aussage?
6. Wie kann man die Geschwindigkeit des Lichts verändern?
7. *Lucky Luke, der Mann der schneller zieht als sein Schatten* (siehe Abb. 2.10). Ist das sein Alleinstellungsmerkmal oder zieht jedermann schneller als sein Schatten?
8. Ist die Schallgeschwindigkeit wie die Lichtgeschwindigkeit für Beobachter in unterschiedlichen Bezugssystemen gleich groß?
9. Kann ein Körper auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden?
10. Warum hat man geglaubt, dass die Ausbreitung von Licht ein Medium benötigt?
11. Verlangt das Relativitätsprinzip, dass jeder Beobachter die gleichen physikalischen Gesetze beachtet?
12. Wenn sich ein Spiegel mit einer Geschwindigkeit von $0.75c$ von einer Lichtquelle wegbewegt, bewegt sich das Spiegelbild dann mit einer Geschwindigkeit von $1.5c$ von der Quelle weg?
13. In einem Experiment wird festgestellt, dass ein neu entdecktes Teilchen sich ein bisschen schneller bewegt als das Licht im Vakuum. Ist damit die Spezielle Relativitätstheorie widerlegt?
14. Eine Rakete bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $3/4 \cdot c$ relativ zur Erde. Am Bug des Raumschiffs wird ein Lichtstrahl ausgesendet. Was beobachtet der Astronaut, eine Person auf der Erde und ein Raumfahrer, der sich mit $1/4 \cdot c$ auf die Rakete zubewegt?
15. Wie ändert sich der Impuls eines Teilchen, wenn man den Körper auf Lichtgeschwindigkeit bringen will?
16. Wie unterscheidet sich Licht von allen anderen Wellenarten?
17. Kann man aus den Einsteinschen Postulaten ableiten, dass ein Lichtstrahl ausgesendet von einem schnellen Raumschiff nicht die Lichtgeschwindigkeit übersteigen kann?



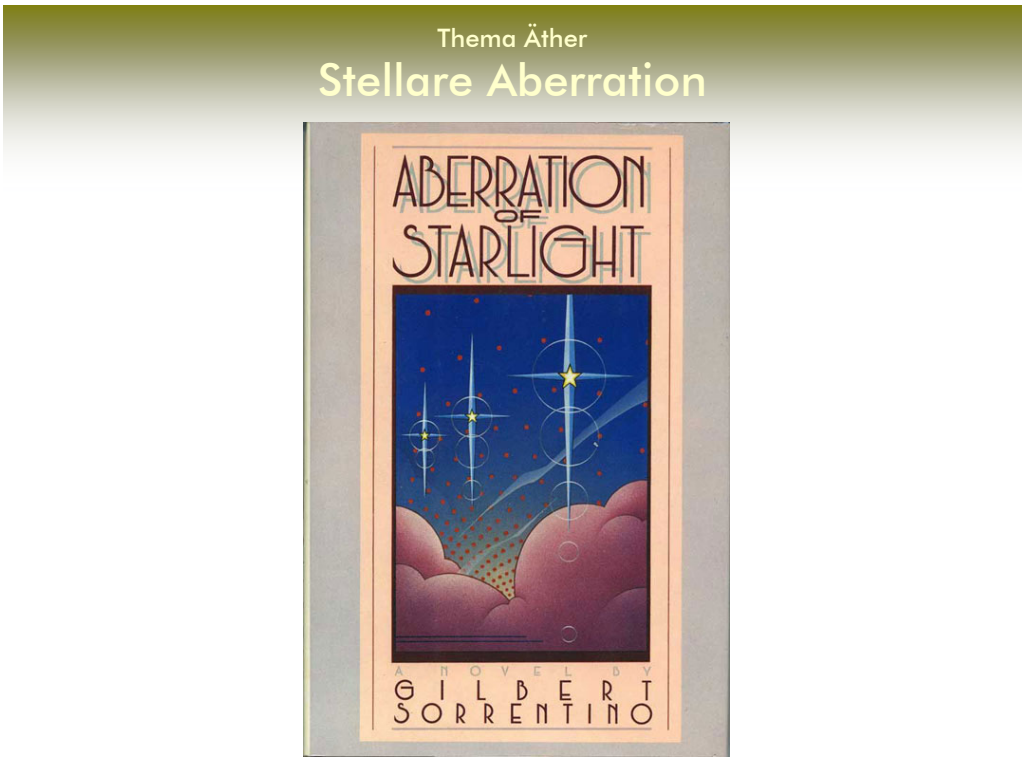
Abb. 2.10: Lucky Luke und sein Schatten.

18. Gibt es ein Bezugssystem, in dem das Photon in Ruhe ist? Alle masselosen Teilchen -also auch Photonen- bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit.

19. Zwei Raumschiffe nähern sich mit $0.9c$. Was würden die Raumfahrer sehen?

20. Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit in Megaparsec pro Planckzeit?

Stellare Aberration^{4LP}



Bevor das Michselson-Morley Experiment vorgestellt wird, ist es sinnvoll, Überlegungen zum Äther anzustellen. Diese Überlegungen sind eng verknüpft mit dem Thema dieses Kapitels *Stellare Aberration*. Hinter diesem Begriff aus der Astronomie verbirgt sich eine geringfügige Ortsveränderung der Gestirne, die durch die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit hervorgerufen wird. Es gibt wichtige Gründe, sich mit dem Phänomen der stellaren Aberration zu beschäftigen:

- Die stellare Aberration ist der älteste direkte Beweis für die Bewegung der Erde um die Sonne.

- Bradleys Messungen der beobachteten Winkelabweichung für acht Sterne im Jahr 1727 stimmen mit aktuellen Werten innerhalb von 1% überein. Weiter gaben die Messungen den für die damalige Zeit genauesten Wert für die Lichtgeschwindigkeit.

- Die stellare Aberration wird verwendet, um die Umlaufgeschwindigkeit der Erde um die Sonne zu bestimmen. Die zusätzliche Aberration durch die Erdrotation kann man ebenfalls nachweisen. Der GAIA[16] Satellit hat eine ausreichende Genau-

[16]Global Astrometric Interferometer for Astrophysics

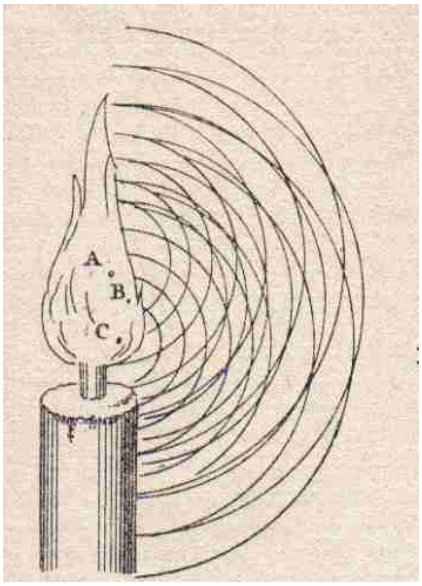


Abb. 2.11: Jeder Punkt eines leuchtenden Körpers, wie die Sonne, eine Kerze oder eine brennende Kohle, sendet Wellen aus, deren Zentrum genau dieser Punkt ist (Christiaan Huygens, 1678) [?].

igkeit, um die Umlaufbahn unserer Sonne um das Zentrum unserer Galaxie mit höchster Genauigkeit zu bestimmen.

- Die Stellare Aberration und die später besprochenen Experimente von Fizeau haben Einstein wesentlich bei der Entwicklung der Speziellen Relativitätstheorie beeinflusst [?].

Der Zusammenhang zum zweiten Postulat der Speziellen Relativitätstheorie ist damit offensichtlich. Kann man beobachten, wie sich Licht im Raum ausbreitet? JA! Mittlerweile gibt es Kameras, die eine so hohe Zeitauflösung haben, dass man die Propagation des Lichts direkt beobachten kann.

Link to video **Laser pulse shooting through a bottle**

Was ist Licht [?]?

Eine historische Notiz zur Einführung. Es geht um die Ausbreitung von Licht in einem Medium. Newton und Huygens waren uneins über die Frage: Was ist Licht? Newton war der Meinung, dass Licht aus Korpuskeln besteht, während Huygens dem Licht einen Wellencharakter zuschrieb, siehe Abb. 2.11. Interessant ist, dass die beiden Ansätze zu unterschiedlichen Vorhersagen in Bezug auf den Brechungsindex kommen.

$$c_{medium} = n_{medium} \cdot c \quad \rightarrow \quad \text{Newton} \tag{2.18}$$

$$c_{medium} = \frac{c}{n_{medium}} \quad \rightarrow \quad \text{Huygens} \tag{2.19}$$

Es sei angemerkt, dass beide Ansätze optische Phänomene wie Brechung (Abb.2.12) erklären können. Erst das Youngsche Doppelspalt Experiment konnte diese widersprüchlichen Ideen aufklären (siehe Kapitel *Materiewellen*). Huygens behielt recht und aus

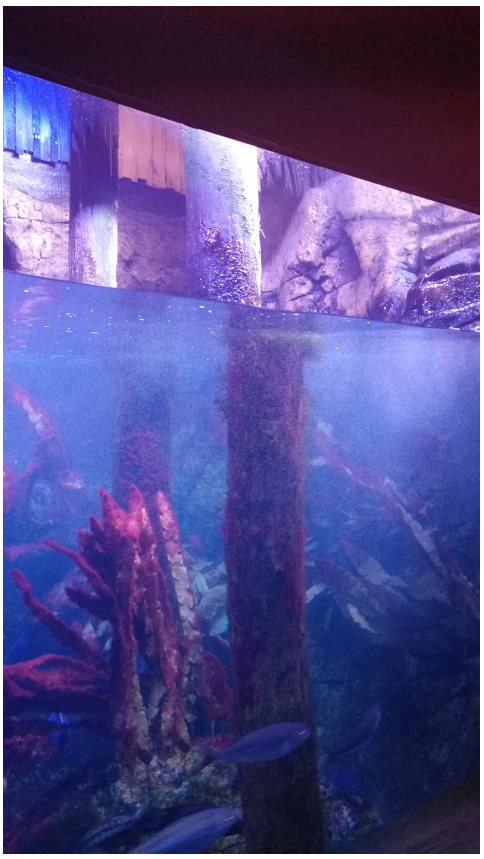


Abb. 2.12: Phänomen der Lichtbrechung, beobachtet im Ozeaneum in Stralsund.

heutiger Sicht hatte Newton irgendwie auch recht. Mehr dazu in der *Quantenphysik* unter dem Thema Welle-Teilchen Dualismus. Experimente, insbesondere das Youngsche Doppelspalt (Kapitel *Materiewellen*) belegten, dass Licht Welleneigenschaften hat und sich damit Phänomene wie die Lichtbrechung oder die Interferenz an dünnen Schichten (Abb. 2.13) mit der Huygenschen Theorie erklären lässt. Im Gegensatz zu Newton verringert sich die Lichtgeschwindigkeit beim Eintritt vom Vakuum in ein Medium mit einem Brechungsindex n.

Welche Erkenntnisse haben wir über die Ausbreitung von Licht und die Rolle des Mediums Äther? Anbei ein historischer Abriss.

1672 Ole Römer bestimmt die Lichtgeschwindigkeit aus der Bewegung der Monde um Jupiter.

1810 Francois Arago misst die Ablenkung des Strahls eines entfernten Sterns durch ein Prisma. Ein Nachweis über eine mögliche Abbremsung oder Beschleunigung des Lichtstrahls durch die Erdbewegung kann nicht erbracht werden.

1818 Augustin Fresnel erklärt Aragos Beobachtung durch die Äthertheorie.

1849 Armand Fizeau und später Leon Foucault weisen nach, dass die Lichtgeschwindigkeit in Wasser geringer ist als in Luft.



Abb. 2.13: Eine dünne Ölschicht zeigt das Phänomen der Newtonschen Ringe.

1851 Armand Fizeau führt Messungen zur Ätherreibung in bewegtem Medium über ein differentielles Interferometer durch.

Nach dem Brockhaus Konversationslexikon von 1901 ist der Äther ein äußerst feiner und höchst elastischer Stoff, der nicht nur im ganzen Weltraume ausgebreitet ist, sondern auch die Zwischenräume ausfüllt, durch welche die kleinsten Teilchen der Körper voneinander getrennt sind. Der Äther ist das Mittel, durch das sich die Licht- und Wärmestrahlen fortpflanzen.

Die Einsteinschen Postulate widersprechen dieser Darstellung. Zunächst beschäftigen wir uns deshalb mit der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit und erkunden, welche Hinweise es gegeben hat, die die Einsteinsche Hypothese unterstützen. Hierzu betrachten wir astronomische Untersuchungen. Ein Gedankenexperiment, siehe Abb. 2.14, um zu illustrieren wie sich eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit auf eine Messung auswirkt.

Aberration des Sternlichts

... wenn zur Fortpflanzung des Lichts Zeit erforderlich ist, die scheinbare Lage eines ortsfesten Gegenstandes eine verschiedene sein muss, je nachdem ob sich das Auge [das Teleskop] in Ruhe befindet oder aber sich in irgendeine Richtung bewegt.

James Bradley in einem Bericht an die Royal Astronomical Society

Anfang des 17. Jahrhunderts setzte sich die Erkenntnis durch, dass die Erde nicht das Zentrum des Universums ist, sondern um die Sonne kreist. Tatsächlich bewegen sich alle Sterne, wie Edmound Halley im Jahr 1718 nachwies. Abb. 2.15 zeigt, wie sich die Position von 61 Cygni,[17] einem Doppelsternsystem, am Himmel im Laufe der Zeit verändert hat.

[17] Das Interesse der Astronomen an 61 Cygni wurde durch Messungen von Piazzi aus dem Jahr 1804 geweckt, der die Eigenbewegung des Systems nachwies. Friedrich Bessel bestimmte 1838 die Entfernung mit etwa 10.4 Lj. Historisch gesehen war dies die erste Entfernungsmessung eines anderen Sterns und die erste Messung der stellaren Parallaxe.

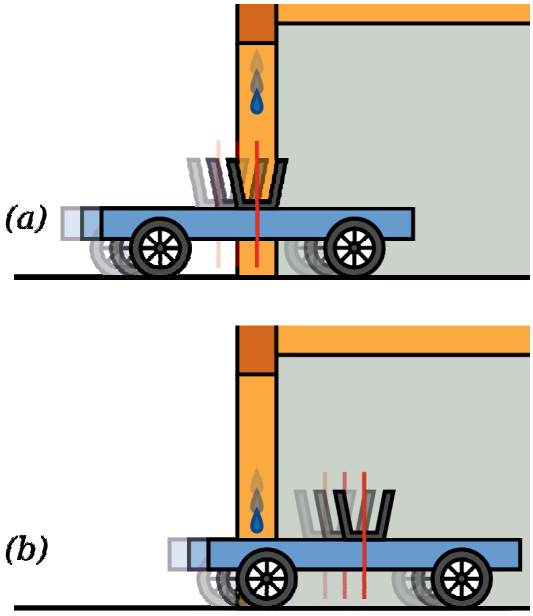


Abb. 2.14: Die Waggon-Analogie, die das Fehlen des Ätherwiderstands illustriert. Ein Eimer auf einem Waggon fährt in einem Tunnel. Ein von der Decke fallender Wassertropfen trifft nicht die Mitte des Eimerbodens, obwohl er sich genau oberhalb befindet. Stellen Sie sich dieselbe Situation bei astronomischen Beobachtungen vor. Der Eimer ist die Teleskopsröhre, der Tropfen ein Photon und der Waggon die Erde. Wird der Äther vom Waggon mitgezogen, würde der Tropfen sich mit dem Waggons mitbewegen und die Mitte des Eimerbodens treffen.

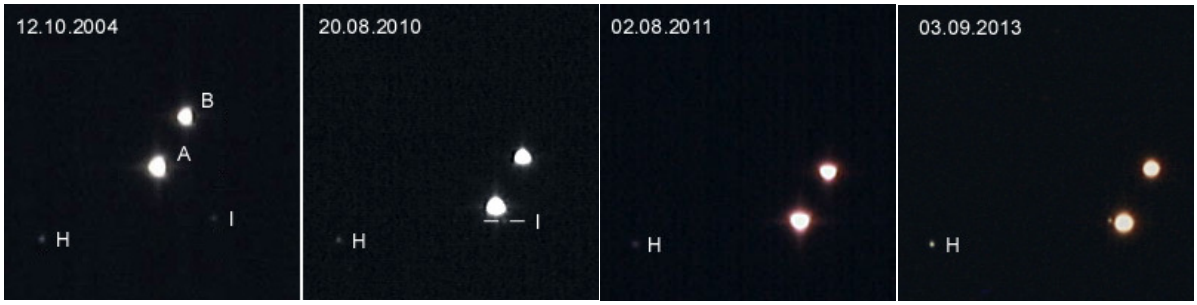


Abb. 2.15: Eigenbewegung von 61 Cygni zwischen 2004 und 2013

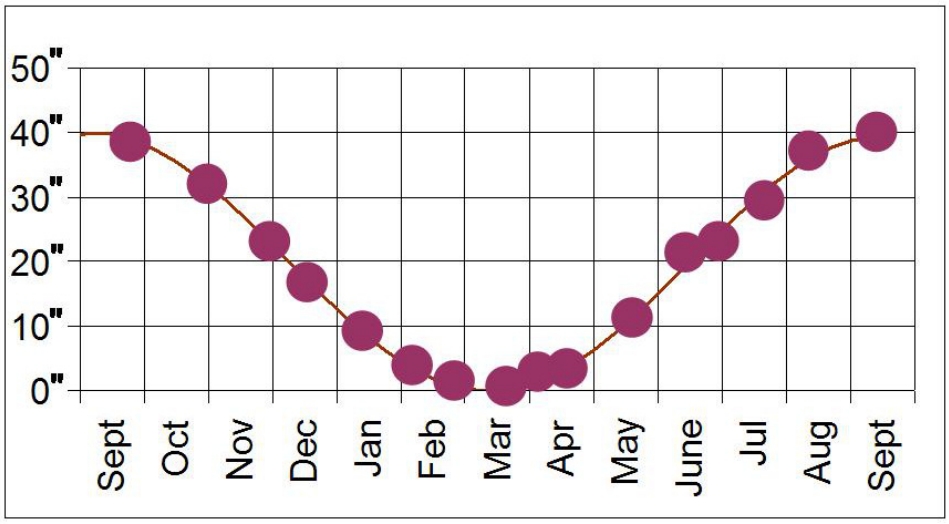


Abb. 2.16: Bradleys Daten über die Aberration von γ-Draconis, aufgezeichnet im Jahr 1727 [**?**].

Aufgrund der Bewegung im Orbit um die Sonne, sollte sich bei der Beobachtung von Sternen eine Parallaxe zeigen. Eine Schwierigkeit ergab sich zu damaliger Zeit: Wie weit sind die Sterne eigentlich von uns entfernt und wie groß ist der Effekt? Hat die Gravitation des Mondes Einfluss auf die Messungen, da sich die Position der Erde leicht verschiebt? Nimmt man den Bahndurchmesser der Erdbahn als Referenz ergibt sich für einen Stern in 1 pc oder 3 Lj oder $3 \cdot 10^{20}$ m Entfernung eine Parallaxe von einer Bogensekunde[18] Die Parallaxe eines Sterns in 100 pc Entfernung zu bestimmen, erfordert eine Auflösung von 1/100 Bogensekunden. Mit Hilfe von CCD Aufnahmekameras und moderner Bildverarbeitung können entferntere Objekte vermessen werden. Das Hubble-Teleskop WFC3 hat eine Genauigkeit von einigen zehn Mikrobogensekunden und ermöglicht Entfernungsmessungen bis zu 3 000 pc oder 10^5 Lj [**?**]. Dadurch können kosmische Entfernungen mit hoher Genauigkeit allein aus der Kenntnis der Erdumlaufbahn bestimmt werden. Man muss aber festhalten, dass man kosmische Entfernungen mit dieser Methodik nur im näheren Umkreis bestimmen kann. Für größere Entfernungen müssen andere Verfahren wie die spektroskopische Parallaxe [**?**] genutzt werden, siehe auch Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*.

Während die Erde die Sonne umkreist, scheint sich die Position naher Sterne gegenüber dem weiter entfernten Hintergrund leicht zu verschieben. Die Verschiebung selbst bei den nahegelegenen Sternen gering, beispielsweise eine Bogensekunde für ein Objekt in 3.26 Lichtjahre Entfernung. Im Jahr 1725 ergaben sich durch die Beobachtungen des britischen Astronomen James Bradley Hinweise ganz anderer Art.[19] Der Astronom be-

[18] 1 Grad sind 60 Bogenminuten, eine Bogenminuten sind 60 Bogensekunden. Eine Bogensekunde entspricht deshalb 1/3600 Grad.

[19] *Lexikon:* **Aberration** ist eine infolge der endlichen Lichtgeschwindigkeit und der Bewegung des Beobachters hervorgerufene scheinbare Ortsveränderung der Sterne.

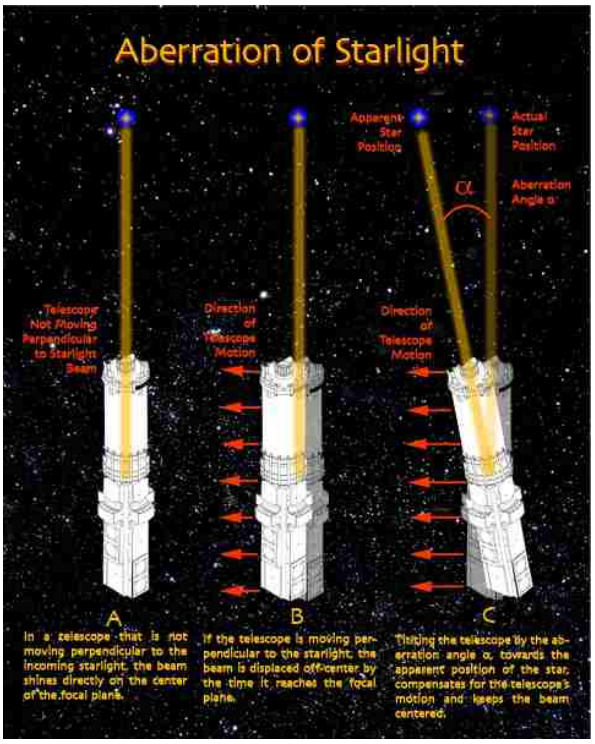


Abb. 2.17: Die Aberration des Sternenlichts verursacht eine geringfügige Ortsveränderung aller Gestirne hervorgerufen durch die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit [**?**].

obachtete, dass sich die Position der Sterne im Laufe eines Jahres in periodischer Weise um wenige Bogensekunden ändert, siehe Abb. 2.16. Die astronomische Beobachtung von Bradley war nur zu erklären, mit der Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist. Ein Beitrag durch den Effekt der Parallaxe konnte ausgeschlossen werden. Es sei angemerkt, dass durch die Messungen von Bradley die Angabe über die Lichtgeschwindigkeit gegenüber der Messung von Römer deutlich verbessert wurde. Die Genauigkeit der Messungen von Bradley war lange unübertroffen. Erst 1838 konnte Friedrich Wilhelm Bessel gelang es, die Entfernung des Fixsterns 61 Cygni direkt aus der parallaktischen Bewegung mit 11 Lichtjahren zu bestimmen. Der Einfluss der Ausbreitungsgeschwindigkeit auf die Sternbeobachtung ist in Abb. 2.17 und Abb. 2.18 nochmal verdeutlicht. Abb. 2.19 zeigt eine mechanische Analogie des Phänomens.

Die Messungen von Bradley untermauern die Aussage der Einsteinschen Postulate in Bezug auf die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit. Da die Messungen lange vor den Arbeiten von Einstein erfolgte, wurden zusätzliche Experimente durchgeführt, um die Beobachtungen zu erklären. Zum Beispiel stellt sich die Frage, ob die Bewegung des Lichts durch die Atmosphäre, also das Medium Luft, nicht den beobachteten Effekt hervorruft. Noch stärker sollte der Effekt im Medium Wasser sein. Hier bewegt sich das Licht aufgrund des höheren Brechungsindex (n=1.333) merklich langsamer als in Luft (n=1.0003). Der Astronom George Airy entwickelte aus diesem Grund ein mit Wasser gefülltes Teleskop um festzustellen, ob die stellare Aberration vom Medium in der Optik des Instruments abhängt [**?**], siehe auch [**?**]. Abb. 2.20 illustriert die Unterschiede. Die Lichtgeschwindigkeit in Wasser ist geringer ist als in Luft, somit ist die Aufenthaltsdauer

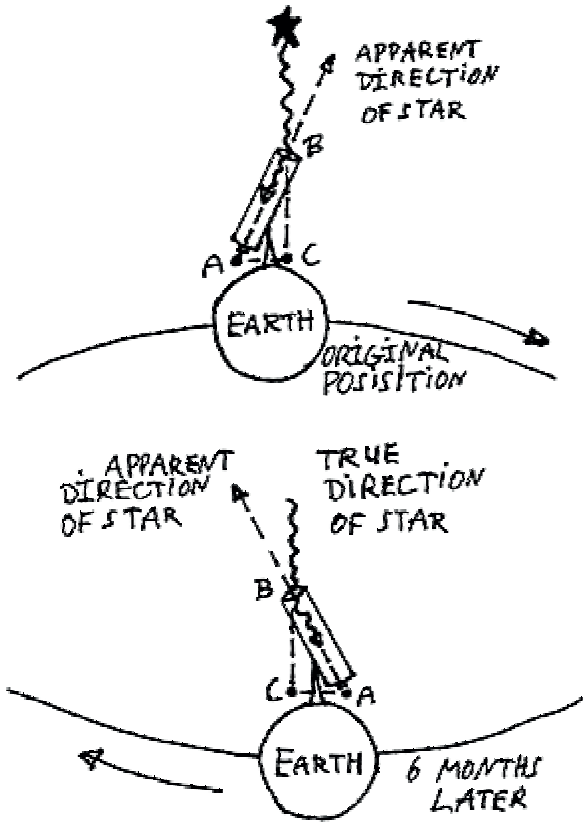


Abb. 2.18: Im Jahr 1727 bemerkte der James Bradley, dass bestimmte Sterne ein halbes Jahr später an einer anderen Richtung am Himmel zu stehen schienen. Die Entdeckung der Stellaren Abberation war ein wichtiger Beitrag bei der Entwicklung der Relativitätstheorie.

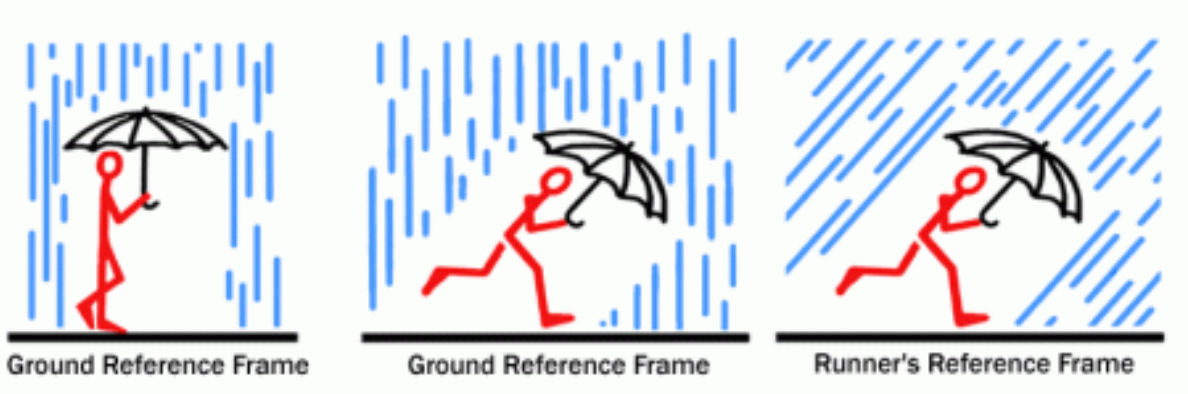


Abb. 2.19: Scheinbare Abweichung von Regen und Licht für einen sich bewegenden Beobachter. Der sich bewegende Beobachter sieht den Regen nicht aus seiner tatsächlichen Richtung fallen, sondern unter einem Winkel, der von den Geschwindigkeiten von Beobachter und Regentropfen abhängt. Je schneller er läuft, desto eher scheint der Regen horizontal zu fallen. Eine ähnliche Überlegung kann man für astronomische Beobachtungen anstellen.

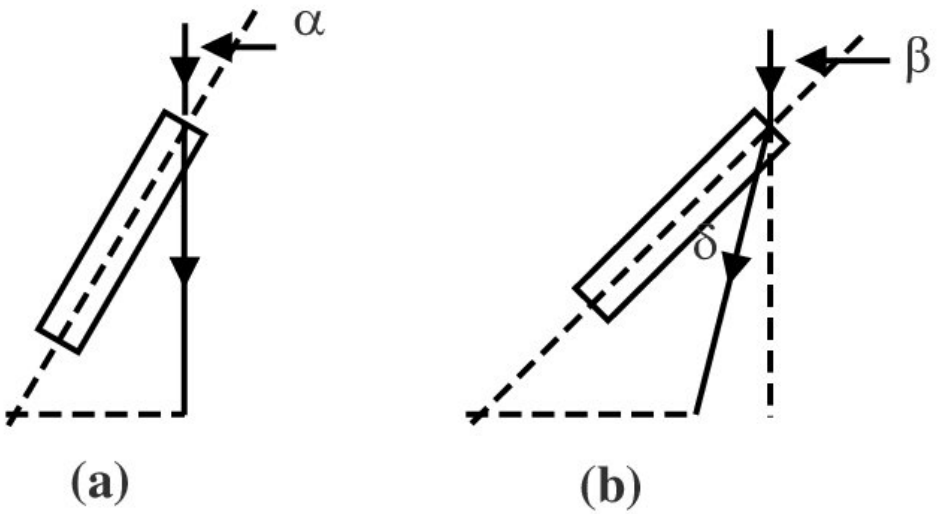


Abb. 2.20: Airys Experiment mit einem normalen (a) und einem wassergefülltem Teleskop (b) [**?**]

des Lichtes im Teleskop größer und damit sollte die seitliche Bewegung des Teleskops eine größere Winkelverschiebung bewirken. Airys Motivation für seine Arbeiten war eine Arbeit von Klinkerfues, der behauptete einen solchen Effekt beobachtet zu haben. Die genaue Bestimmung der Sternpositionen war damit in Frage gestellt. Auch diese Arbeit hat einen unmittelbaren Bezug zum Äther (Fresnelscher Mitführungskoeffizient) und damit zur Speziellen Relativitätstheorie.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Galileo Galilei war der Erste, der versuchte die Lichtgeschwindigkeit zu ermitteln. Das war um 1600. Zwei Männer wurden mit Signallaternen auf entfernten Hügeln postiert. Der zweite Mann sollte mit seiner Laterne ein Signal zurücksenden, sobald er Licht vom ersten Mann beobachtet. Schätzen Sie die Zeit ab, die Licht benötigt, um die Strecke in Galileos Experiment (1.8 km) zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit zurückzulegen. Vergleichen Sie das Resultat mit der typischen Reaktionszeit eines Menschen?

$$\begin{aligned} \Delta t_{Galilei} &= \frac{\Delta s}{c} \\ \Delta t_{Galilei} &= \frac{2 \cdot (1.8 \cdot 10^3\,\mathrm{m})}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} \\ \Delta t_{Galilei} &= 1.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Die typische Reaktionszeit eines Menschen ist etwa $t_{human} = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$.

$$\frac{t_{human}}{t_{Galilei}} = 25 \cdot 10^3$$

Ein schwieriges Unterfangen also für Galilei.

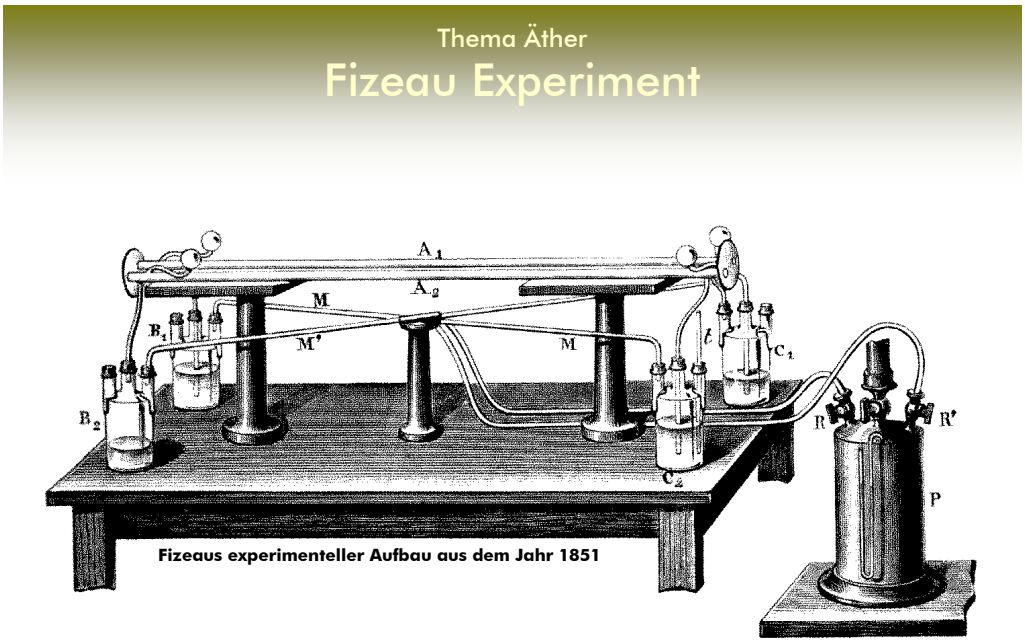
Konzeptionelle und andere Fragen

1. Warum sehen einige der nahen Planeten in der Nacht wie helle Sterne aus? Wie kann man die Planeten von den Sternen unterscheiden?

2. Stellen Sie sich vor, dass die Sonne aufhört zu scheinen, während Sie den Vollmond beobachten? Wann würde man den Unterschied bemerken?

3. Welche Geschwindigkeit hat die Dunkelheit?

Fizeau Experiment[4LP]



The general conclusion of this memoir would be,... that the translation motion of the earth is of no appreciable consequence on optical phenomena produced with terrestzrial sources or solar light, that those phenomena do not allow to appreciate the absolute motion of a body and that only relative motions can be attained [**?**].

Eleuthere Mascart, 1874

In Bewegung

Ruht der Äther tatsächlich und ist er ein absolutes Bezugssystem? Dazu ein weiteres Experiment mit Bezug zur Speziellen Relativitätstheorie: Der Versuch von Fizeau zur Lichtausbreitung in strömenden Medien. In diesem Zusammenhang sind die Arbeiten von Augustin Jean Fresnel wichtig, der den so genannten Fresnelschen Mitführungskoeffizienten einführte.[20]

[20] *Lexikon:* Beim **Mitführungskoeffizienten** geht man von der Annahme aus, dass der Äther von Materie mitgeführt wird und das abhängig vom Brechungsindex der Materie. In einem geschlossenen Auto bemerkt man keinen Fahrtwind, weil die Luft im Inneren mitführt wird. Führt die Erde den Äther mit, wäre eine Messung des Ätherwinds unmöglich. Das Fizeau-Experiment widerlegte die Mitführungshypothese.

Huygens erkannte, dass sich Licht in einem Medium langsamer ausbreitet. Fizeau konnte diese Vermutung bestätigen. Interessant sind in diesem Zusammenhang seine Arbeiten zur Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in einem bewegten Medium. Warum? Für einen Beobachter, der mit der Flüssigkeit mit schwimmt, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c_n = \frac{c}{n} \tag{2.20}$$

wobei n der aus der Optik bekannte Brechungsindex ist. Anders stellt sich die Situation für einen außerhalb stehenden Beobachter dar. Hier schon mal vorab die Gleichung für die Lorentz-Transformation, die wir im Kapitel *Zerfall des Myons* genauer kennenlernen werden Sie beschreibt wie Geschwindigkeiten in unterschiedlichen Bezugssystemen behandelt werden. Hier ist angepasst an das Fizeau-Experiment:

c_{LS} ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts für einen Beobachter im Laborsystem (LS).

c_n ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts im Medium c/n mit einem Brechungsindex von n

v_w ist die Strömungsgeschwindigkeit des Mediums

$$\begin{aligned}
c_{LS} &= \frac{c_n + v_w}{1 + \frac{c_n \cdot v_w}{c^2}} \\
c_{LS} &= \frac{c/n_w + v}{1 + \frac{(c/n) \cdot v_w}{c^2}} \\
c_{LS} &= \frac{c/n + v_w}{1 + \frac{n \cdot v_w}{c}} \\
c_{LS} &\approx \left(\frac{c}{n} + v_w\right) \cdot \left(1 - \frac{v_w}{n \cdot c}\right) \\
c_{LS} &\approx \frac{c}{n} - \frac{v}{n^2} + v_w \\
c_{LS} &\approx \frac{c}{n} + v_w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Für n=1 reduziert sich die Gleichung auf c_{LS}=c. Sehen Sie den Zusammenhang zur Relativitätstheorie? Wie wirkt sich die Existenz des Äthers aus? Man erwartet, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit auch von der relativen Bewegung zwischen Flüssigkeit und Äther abhängt. Daraus ergeben sich zwei mögliche Schlussfolgerungen:

- Der Äther bleibt von der Bewegung der Flüssigkeit unberührt. Als Konsequenz hat die Anwesenheit des Äthers keinen Einfluss auf die Lichtgeschwindigkeit und die Größe c/n ändert sich nicht.

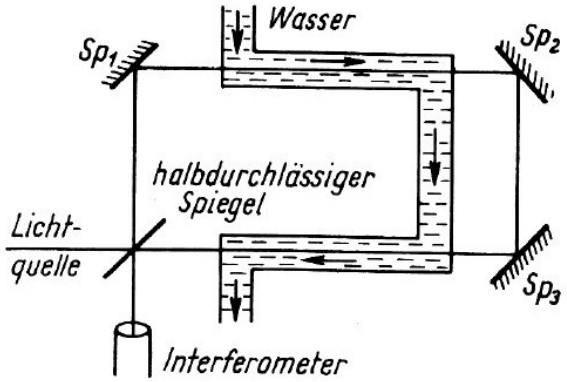


Abb. 2.21: Messung der Lichtgeschwindigkeit im Wasser nach Fizeau [?].

- Der Äther wird durch die Bewegung der Flüssigkeit mitgenommen. Als Konsequenz muss man die Strömungsgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit addieren (oder subtrahieren).

Keine der beiden Hypothesen wird vom Fizeau-Experiment bestätigt. Damit ist die Sache aber nicht ausgestanden. Es ergibt sich kein Konflikt zur Äthertheorie, wenn der Äther nur mit einem geringen Anteil $v \cdot (1 - 1/n^2)$ mitgeführt wird. Den Term $1 - 1/n^2$ nennt man den Fresnelschen Mitführungskoeffizienten. So hin gebogen, entzieht sich der Äther einem experimentellen Nachweis.

Interessant, auch im Hinblick auf das im Anschluss besprochene Experiment von Michelson und Morley ist der experimentelle Aufbau, mit dem Fizeau seine Experimente durchführte und den Nachweis erbrachte, dass die Lichtausbreitung in bewegten Flüssigkeiten tatsächlich der obigen Gleichung gehorcht. Abb. 2.21 zeigt den Aufbau. Wasser wird mit einer bestimmten Geschwindigkeit v_w durch ein Rohrsystem geführt. Licht fällt auf einen teildurchlässigen Spiegel, der den Strahl in zwei Teile aufspaltet. Ein Lichtstrahl durchquert die Anordnung im Uhrzeigersinn, der Andere entgegen dem Uhrzeigersinn. Das Licht bewegt sich damit einmal in Strömungsrichtung und einmal gegen die Strömung. Am teildurchlässigen Spiegel treffen die Strahlen wieder aufeinander, überlagern sich hinter dem Spiegel und es kommt zur Interferenz. Wichtig ist, dass kein direktes Licht diesen Bereich erreicht. Können Sie das nachvollziehen? Man spricht von einer Messung gegen einen dunklen Hintergrund. Aufbauten solcher Art sind in der Experimentalphysik sehr beliebt, da sie sich durch eine hohe Empfindlichkeit auszeichnen. Man erkennt, dass die Information durch die Auswertung der überlagerten Lichtsignale gewonnen wird. Ein Lichtstrahl bewegt sich mit $(c/n + v_w(1 - 1/n^2)$, der Andere gegen die Richtung der Flüssigkeitsströmung $(c/n - v_w(1 - 1/n^2)$. Beide Wege in der strömenden Flüssigkeit sind aber identisch. Der eine Lichtstrahl wandert also dem andern voraus und führt auf dem Detektor zu Interferenzen. Aus Experimenten bei unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten überprüfte Fizeau die obige Gleichung. Genauere Messungen zum Mitführungskoeffizienten wurden von Michelson/Morley[?], Zeeman [? ?] und anderen durchgeführt. Eine Beschreibung für einen Aufbau im Rahmen eines Schülerprojekts findet man in [?].

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Im Fizeau-Experiment waren die gegeben experimentellen Parameter wie folgt: Länge jedes Wasserrohrs: ℓ=1.5 m; Brechungsindex von Wasser: n=1.33; Wellenlänge des verwendeten Lichts: λ=5.3 $\cdot$ 10^{-7} m; Geschwindigkeit der Wasserströmung: v_w=7 m/s. Im Vergleich zu v_w=0.0 m/s ergab sich eine Verschiebung des Interferenzrings von ΔN=0.23. Wie groß ist der Fresnelsche Mitführungskoeffizient d_F?

Licht bewegt sich mal mit mal gegen die Wasserströmung. Die Beobachtung der Verschiebung der Interferenzringe zeigt, dass die Wasserbewegung einen Einfluss hat. Die Zeiten t_1, t_2, die die Strahlen zur Durchquerung des Wasserrohrs benötigen, sind

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{2\,\ell}{(c/n) - v_w \cdot d_F} \\ t_2 &= \frac{2\,\ell}{(c/n) + v_w \cdot d_F} \end{aligned}$$

Die Zeitdifferenz Δt ist:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{4\,\ell \cdot v_w \cdot d}{(c/n)^2 - (v_w \cdot d_F)^2} \approx \frac{4\,\ell \cdot n^2 \cdot v_w \cdot d_F}{c^2}$$

Die Periodendauer des Lichts ist $T_\lambda = \lambda/c$. Damit ergibt sich eine relativer Zeitversatz $\Delta t/T_\lambda$, den man direkt in einer Verschiebung des Interferenzmusters umrechnen kann:

$$\Delta N = \frac{\Delta t}{T_\lambda} = \frac{4\,\ell \cdot n^2 \cdot v_w \cdot d_F}{\lambda \cdot c}$$

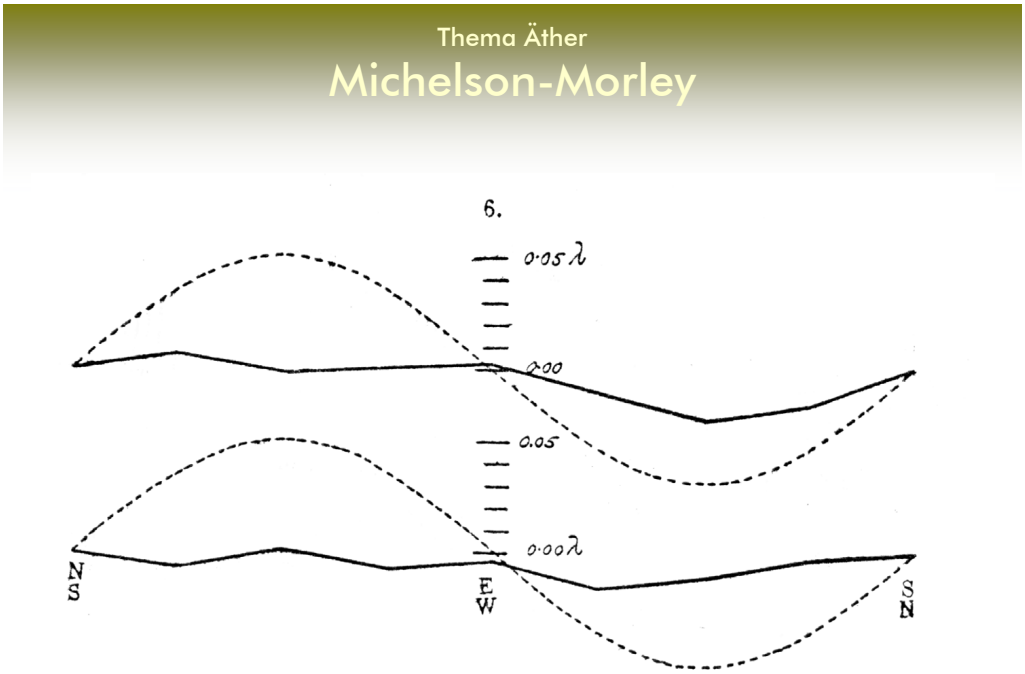
womit sich der Mitführungskoeffizient d_F berechnen lässt:

$$d_F = \frac{\lambda \cdot c \cdot \Delta N}{4\,\ell \cdot n^2 \cdot v_w} = 0.47$$

Der Wert für den Mitführungskoeffizienten stimmt gut mit der Analyse nach Fresnel überein

$$d_F = 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{(1.33)^2} = 0.44$$

Michelson-Morley Experiment



Licht: Die ultimative Messlatte!
Das Titelblatt zeigt das zentrale Resultat des Michelson-Morley Experiments. Die gestrichelte Linie ist die theoretische Erwartung auf der Grundlage des Existenz des Äthers, während die durchgezogene Linie das Ergebnis der experimentellen Messung zeigt. Die Messwerte konnten die Hypothese eines Äthers nicht bestätigen. Tatsächlich ist die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment deutlich größer, wie sich am Ende des Abschnitts zeigen wird!

Die Wissenschaft bietet unterschiedliche Erklärungen an, um das Nullresultat des Michelson-Morley Experiments zu erklären.

- Die Erde ist fest mit dem Äther verbunden.
- Feste Körper kontrahieren und Uhren gehen langsamer bei einer Bewegung im Äther.
- Das Medium Äther existiert nicht.

Hypothese 1 wirft viele Fragen auf, da unklar ist, warum der Äther gerade an die Erde gebunden sein soll. Hypothese 2 wurde von Lorentz (1892) und Fitzgerald (1897) aufgestellt. Zusätzlich sollten sich die Längen aller physikalischen Körper, die sich mit einer

Geschwindigkeit v in Bezug auf den Äther bewegen,in ihrer Länge verkürzen und zwar um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Als Resultat sollten sich die beiden Effekte aufheben. Experimente mit einem Interferometer mit unterschiedlicher Armlänge verliefen allerdings ergebnislos. Der erwartete Änderung im Signal blieb aus. Hypothese 3 ist überprüfbar und geht auf Einstein zurück und wurde durch das Experiment von Michelson und Morley bestätigt.

Der Nachweis durch das Michelson-Morley Experiment lässt folgende Schlussfolgerungen zu:

- Die Annahme einer absoluten Zeit ist nicht haltbar.
- Die Lichtgeschwindigkeit ist keine Eigenschaft, die durch ein Medium hervorgerufen wird.
- Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist eine Naturkonstante.

Ein weiteres Studie zur Existenz des Äthers, auf das hier nicht weiter eingegangen wird, ist das Trouton-Noble-Experiment [**?**]. In diesem Versuch wird ein geladener Plattenkondensator betrachtet, der von einer dünnen Torsionsfaden gehalten wird. Stimmt die Äthertheorie, würde die Bewegung der Erde durch den Äther zu einem Drehmoment führen, das bewirkt, dass sich die Platten senkrecht zur Bewegungsrichtung ausrichtet. Stimmt dagegen die Behauptung der Speziellen Relativitätstheorie, dass sich die Maxwellschen Gleichungen in allen Bezugssysteme nicht ändern, wird kein Drehmoment vorhergesagt. Das Experiment ist damit ebenfalls ein Test der Äthertheorie. Wie bei Michelson-Morley war das Ergebnis negativ und damit eine Bestätigung der Speziellen Relativitätstheorie.

Interferometer

Ein Schema des experimentellen Aufbaus eines Michelson-Interferometers ist in Abb. 2.22 gezeigt. Licht trifft von links kommend auf einen Strahlteiler, der 50% durchlässt und 50% des Lichts reflektiert. Die Lichtstrahlen treffen danach auf Spiegel, die das Licht zurück auf den Strahlteiler werfen. Dort wiederholt sich der Vorgang. Da das Licht aber nun von rechts/oben kommend auftrifft, wird der reflektierte Strahl nach unten abgelenkt. In dieselbe Richtung bewegt sich der von unten kommende transmittierte Lichtstrahl. Am Schirm ergibt sich eine Überlagerung der beiden Teilstrahlen und ein Interferenzmuster erscheint. Das entstehende Muster hängt vom Wegunterschied der beiden Lichtwege ab. Verändert sich die optische Weglänge (grau) hat dies sofort Auswirkungen auf das Interferenzmuster. Hervorzuheben ist noch, dass nur die reflektierten Lichtstrahlen den Detektor erreichen. Die Messung erfolgt also, wie beim Fizeau-Experiment vor einem dunklen Hintergrund. Das heißt, dass das gesuchte Interferenzsignal nicht von der Strahlung der intensiven Lichtquelle überlagert ist. Dies erhöht die Empfindlichkeit im Experiment erheblich.

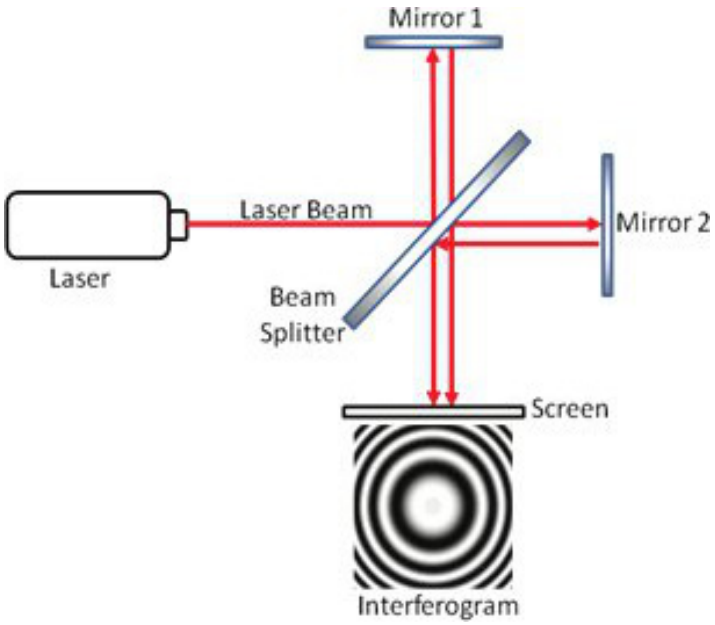


Abb. 2.22: Aufbau eines Michelson Interferometers.

Link to video **Michelson Interferometer**

In Abb. 2.23 sind Beispiele für die Beobachtungen in einem Versuch mit einem Michelson Interferometer gezeigt. Man könnte vermuten, dass man mit diesem Verfahren Längenunterschiede im Bereich der Wellenlänge, also etwa 1 μm auflösen kann. Tatsächlich ist die Empfindlichkeit um viele Größenordnungen höher. Den Extremfall mit 10^{-18} m zeigen die Experimente zum Nachweis von Gravitationswellen [**?**].

Anwendungen^{4LP}

Neben dem Michelson-Interferometer gibt es anders konzipierte Interferometer-Aufbauten. Weit verbreitet in der Laserphysik im Zusammenhang mit Anregung-Abfrage Experimenten ist das Mach-Zehnder-Interferometer [**? ? ?**]. Ein einfaches Interferometer kann mit Hilfe von zwei Glasplatten realisiert werden. Der Name: Jamin-Interferometer [**? ?**]. Im Jahr 1834 stellte Humphrey Lloyd am Trinity College in Dublin sein Manuskript „*New Case of Interference of the Rays of Light* vor [**?**]. Monochromatisches Licht wird in einem geringen Winkel von der Oberfläche eines Glases reflektiert. Diese Reflexion dient als virtuellen Lichtquelle. Direktes und reflektiertes Licht interferiern und es kommt zu Interferenzstreifen.

Interferometrische Verfahren werden in vielen Bereichen von Forschung und Technik eingesetzt. Einfache Aufbauten sind auch für den Unterricht geeignet. Beispiele sind

- Reibung [**?**]

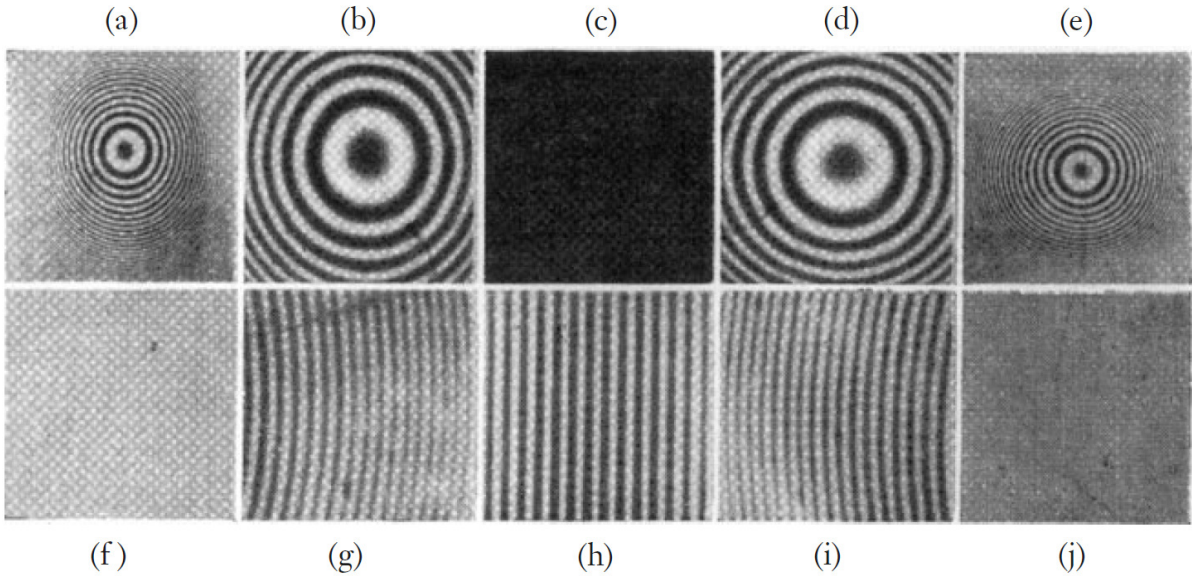


Abb. 2.23: Die Interferenzstreifen erscheinen auf den Aufnahmen weiß. (a) Interferenzsignal, wenn der Abstand zu Spiegel M_1 geringer ist als der Abstand zu M_2; (b) wenn die Abstände nahezu gleich sind (Reflexion am Strahlteiler ändert die Phase um 180^o, was zu destruktiver Interferenz führt); (c) wenn die Abstände genau gleich sind; (d) wenn der Abstand zu M_1 etwas größer ist als der Abstand zu M_2; (e) wenn der Abstand zu M_1 größer ist als der Abstand zu M_2; (f-j) sind jeweils für die gleichen Spiegelabstände wie (a-e), außer dass die Spiegel jetzt nicht parallel, sondern leicht gegeneinander geneigt sind [**?**].

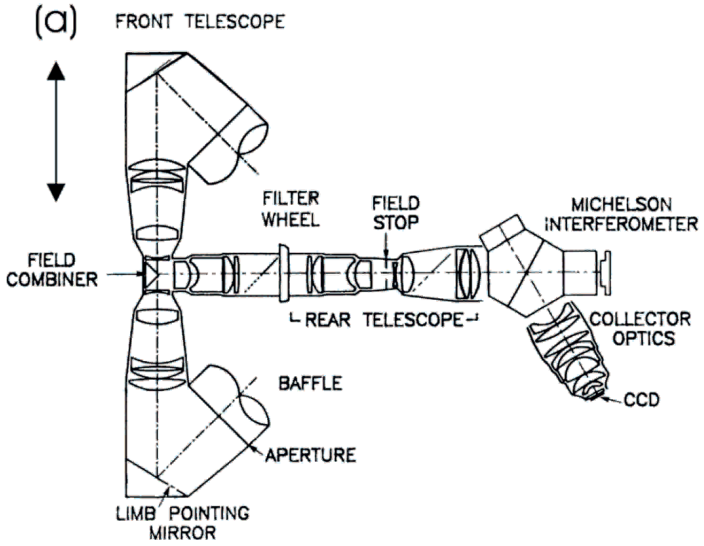


Abb. 2.24: Optischer Aufbau des *Wind Imaging Interferometer* (WINDII). WINDII war auf dem Satelliten *Upper Atmosphere Research Satellite* installiert und arbeitet von 1991 und bis 2003. Die Mission bestimmte die Windverhältnisse in der Atmosphäre zwischen 80 und 110 km [**?**].

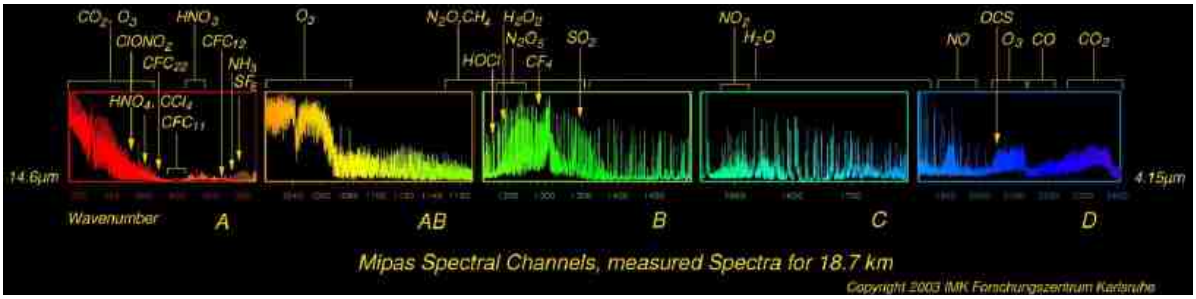


Abb. 2.25: Der von MIPAS[21] in einer Höhe von 18.7 km gemessene Spektralbereich (4.15-14.6 μm). Die reiche Anzahl spektraler Emissionslinien demonstriert, dass es gelingt, viele Moleküle nachzuweisen [**?**].

- Elastische Eigenschaften [**?**]
- Akustik [**? ?**]
- Wellenlängenkontrolle von Laserquellen [**?**]
- Thermische Eigenschaften [**? ?**]
- Piezoelektrische Ausdehnung [**?**]
- Interferometrische Prüfung von Oberflächen [**?**]
- Astrophysik [**?**]
- Astronomie [**?**]

  In der Astronomie werden die direkte Bildgebung oder die Interferometrie zur Beobachtung verwendet. Im Vergleich erlaubt Interferometrie eine bessere räumliche Auflösung, da die direkte Abbildung durch Beugung aufgrund der Apertur des Instruments begrenzt ist. Ein Interferenzmuster generiert aus der Beobachtung durch zwei Teleskope erlaubt es den Abstand zwischen zwei Sternen mit einer Auflösung jenseits der Beugungsgrenze zu bestimmen [**?**]. Eine interessante Variante des Lloyd mirrors wird in der Radioastronomie verwendet. Man findet es unter dem Namen Sea-Interferometer [**?**]

  The development of astronomical interferometry [**?**]**:** Astronomical interferometry was pioneered by Fizeau and Michelson in the 19th century. In the 1920s, the first stellar diameters were measured. The development of radio interferometry began in the 1950s, and led to the construction of powerful synthesis arrays operating at cm, mm, and sub-mm wavelengths. Modern computer and control technology has enabled the interferometric combination of light from separate telescopes also in the visible and infrared regimes. Imaging with milliarcsecond resolution and astrometry with microarcsecond precision have thus become reality.



Abb. 2.26: Photo des deutschen Gravitationswellendetektor GEO 600 in der Nähe von Hannover [**?**].

- Biomedizinische Bildgebung

  All-optically integrated photoacoustic and optical coherence tomography [?]: All-optically integrated photoacoustic (PA) and optical coherence tomography (OCT) dual-mode imaging technology that could offer comprehensive pathological information for accurate diagnosis in clinic has gradually become a promising imaging technology in the aspect of biomedical imaging during the recent years. This review refers to the technology aspects of all-optical PA detection and system evolution of optically integrated PA and OCT, including Michelson interferometer dual-mode imaging system, Fabry-Perot (FP) interferometer dual-mode imaging system and Mach-Zehnder interferometer dual-mode imaging system. It is believed that the optically integrated PA and OCT has great potential applications in biomedical imaging.

- Atmosphären- und Klimaforschung [**? ?**], siehe Abb. 2.24 und 2.25

- Sensorik [**?**]

- Biosensoren [**? ?**]

- Gravitationswellendetektoren [**?**]

  Eine wichtige physikalisch-astrophysikalische Anwendung ist der experimentelle Nachweis von Gravitationswellen (Kapitel *Allgemeine Relativitätstheorie*). Der Nachweis erfordert, dass man einen Effekt beobachtet, der Längen auf der Größenordnung von 1/1000 des Protondurchmessers staucht, also 10^{-18} m!. Abb. 2.26 zeigt ein Photo des deutschen Systems Geo600, das bei Hannover aufgebaut wurde [**?**]. Die Armlänge des deutschen Interferometers beträgt 600 m.

- Archimedes-Experiment

  Wie schwer ist das Vakuum? Das Vakuum beinhaltet eine nichtverschwindende Energie. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation (Kapitel *Unschärferelation*)

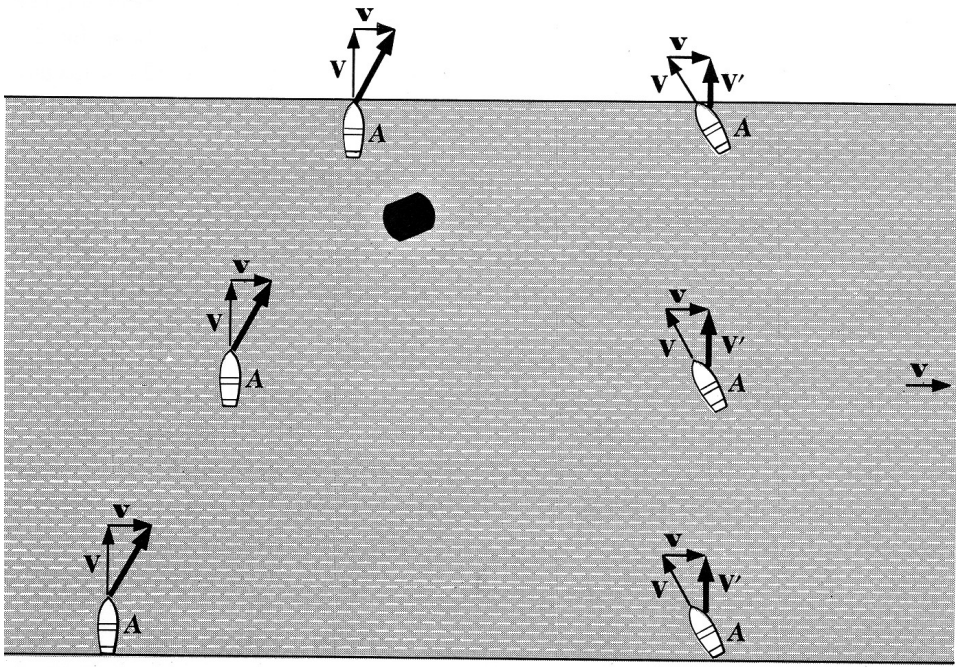


Abb. 2.27: Boot A muss um die Flussströmung auszugleichen, flussaufwärts fahren, um auf dem kürzesten Weg über den Fluss fahren zu können [**?**].

gibt es aufgrund von Vakuumfluktuationen eine kurzzeitige Bildung von Teilchen-Antiteilchen (Elektro-Positron) Paaren, so genannten Virtuellen Teilchen. Leider liegen die Vorhersagen von Kosmologie und Quantenphysik weit auseinander und zwar 120 Größenordnungen! Messungen sind also notwendig, um diese Diskrepanz aufzulösen. Dies geschieht unter Ausnutzung des Casimir-Effekts und experimentell mit Hilfe einer Balkenwaage und eines Michelson-Interferometers [**? ?**].

Eine Bootsfahrt

Zum Verständnis des Michelson-Morley Experiments und der damit verbundenen Messung der Bewegung der Erde durch den Äther, betrachten wir einen ganz alltäglichen Vorgang, nämlich das Übersetzen eines Ruderboots an einem Fluss (Abb. 2.27). Hier muss man unterscheiden, ob man sich parallel oder senkrecht zur Strömungsrichtung des Flusses bewegen will. Wir nehmen an, dass das Boot wieder an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt. Für den Fall, dass man sich parallel zum Ufer bewegt, ist die Geschwindigkeit des Bootes bei Bewegung in Strömungsrichtung erhöht, während die Geschwindigkeit stromaufwärts geringer ist, siehe Abb. 2.29.

$$\begin{aligned} v_{||} &= v_{boat} + v_{river} \quad \text{in Strömungsrichtung} \\ v_{||} &= v_{boat} - v_{river} \quad \text{entgegen Strömungsrichtung} \end{aligned}$$

Paddelt man stets in Richtung der kürzesten Entfernung zwischen den beiden Ufern stellt man fest, dass man von der Strömung abgetrieben wird. Will man nicht abgetrieben

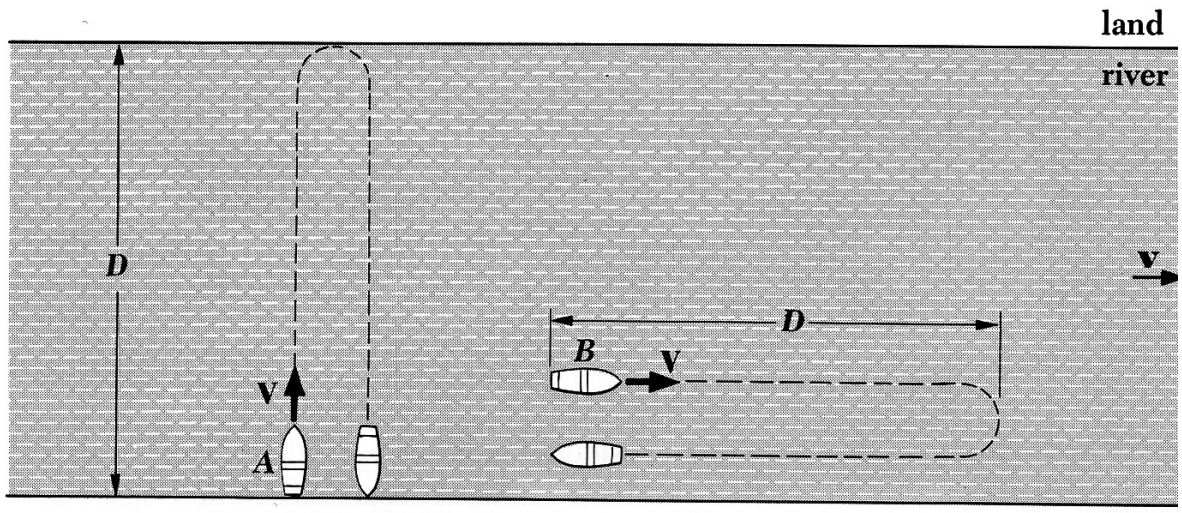


Abb. 2.28: Boot A fährt direkt über den Fluss und kehrt zu seinem Ausgangspunkt zurück, während Boot B eine gleiche Strecke stromabwärts fährt und von dort zurück kehrt [**?**].

werden, muss man gegensteuern (Abb. 2.27). Die resultierende Bewegung ist also eine Superposition zweier Bewegungen, siehe Vorlesung *Beobachter*.

$$\begin{aligned} v_{Vorhalt}^2 &= v_{boat}^2 + v_{river}^2 \\ v_{boat} &= \sqrt{v_{Vorhalt}^2 - v_{river}^2} \end{aligned}$$

Ähnlich ist die Idee beim Michelson-Morley Experiment. Der Äther ist ein absolutes Bezugssystem (ruhend) und die Erde bewegt sich relativ zu diesem Bezugssystem. Ändert man die Sichtweise kann man annehmen, dass wir ruhen und der Äther bewegt sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit und Richtung relativ zu uns. Der Äther ist also der Fluss in unserem Beispiel (Geschwindigkeit des Wassers v_{river} und Strömungsrichtung des Flusses). Man betrachtet nun in einem Gedankenexperiment zwei Szenarien, wobei man annimmt, dass die Boote in einem ruhenden Gewässer dieselbe Geschwindigkeit haben.

1. Das Boot bewegt sich in Richtung der Äthers (z.B. flussaufwärts fahren)
2. Das Boot bewegt senkrecht zur Richtung des Äthers (Übersetzen auf das andere Ufer)

Die Boote sollen aber an ihren Ausgangspunkt zurückkehren. Der für die Durchführung notwendige Kurswechsel kosten keine Zeit. Boot 1 überquert den Fluss ein zweites Mal in entgegengesetzter Richtung. Boot 2 fährt erst flussabwärts, dreht und fährt zurück. Ein technisches Detail muss noch berücksichtigt werden. Damit das übersetzende Boot nicht abgetrieben wird, paddelt der Ruderer mit einem bestimmten Vorhaltewinkel, um eine Abdrift zu vermeiden. Dieser Winkel ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras.

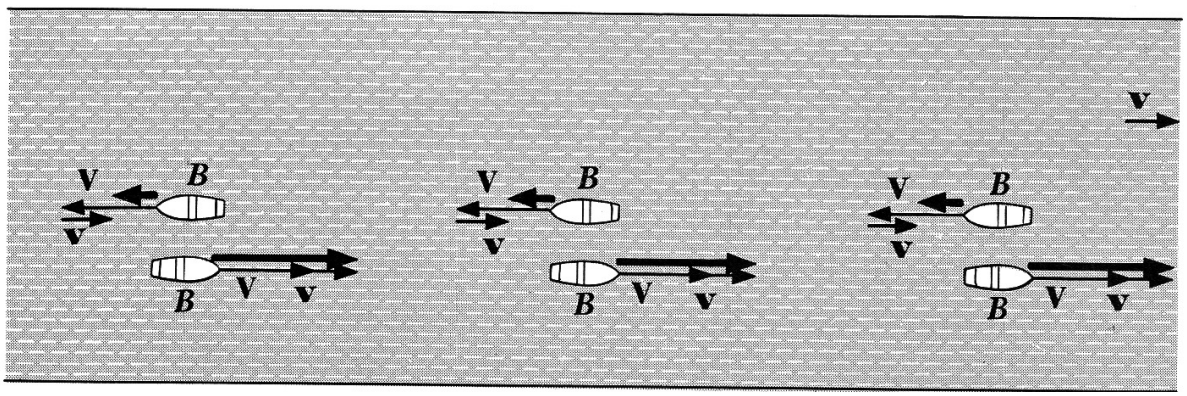


Abb. 2.29: Relativ zum Ufer ist die Geschwindigkeit des Bootes B flussabwärts um die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses erhöht, während seine Geschwindigkeit flussaufwärts um den gleichen Betrag reduziert wird [**?**].

Laufzeitunterschiede

Das so konzipierte Gedankenexperiment wird im Michelson Interferometer realisiert, siehe Abb. 2.30. Durch die unterschiedliche Richtung der Lichtstrahlen in Bezug auf die Ätherbewegung sollten sich Zeitunterschiede durch die unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit ergeben. Im Interferometer würden sich diese in vermeintlichen Längenänderungen ausdrücken und das Instrument zeigt eine Veränderung im Interferenzmuster. Der Einfachheit halber betrachtet man den Fall, dass durch einen Zufall die Bewegung des Äthers in Richtung des waagerechten Interferometerarms erfolgt. Die Rechnung wird nun exemplarisch durchgeführt.[22] Man berechnet dazu die Zeiten, die die Lichtstrahlen in den beiden Armen des Interferometers benötigen. Die beiden Teilstrecken werden zweifach durchlaufen ($t_{||}, t_{\perp}$). Daraus ergibt sich ein Faktor 2 in den Gleichungen. Wichtig ist, dass es Unterschiede in der Zeit gibt, die die beiden Teilstrahlen im Interferometer benötigen. Die Längen der Interferometerarme (ℓ_1, ℓ_2) sind nicht genau genug bekannt.

[22] So detailliert, wie hier dargestellt, wird so eine ausführliche Rechnung nur an einigen wenigen Stellen in der Vorlesung erfolgen.

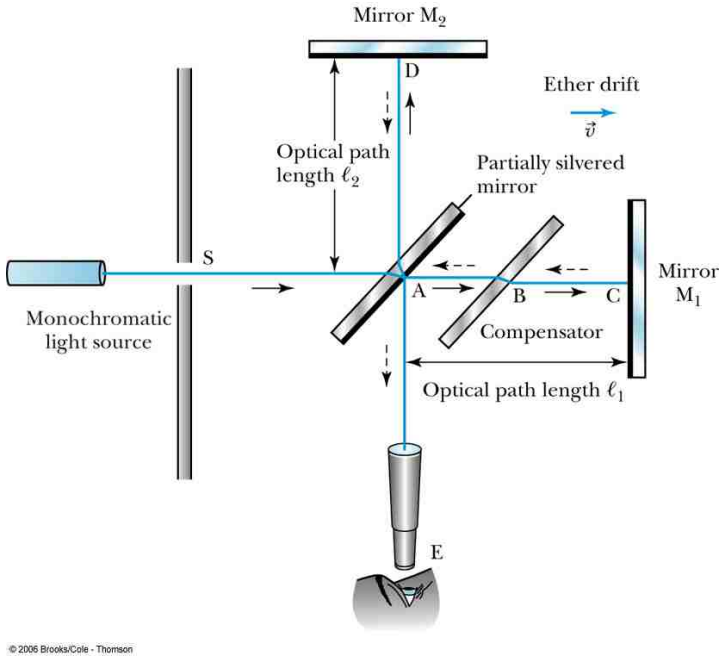


Abb. 2.30: Schematischer Aufbau eines Michelson Interferometers zur Messung der Ätherdrift.

Herleitung

- Horizontale Wegstrecke

$$
\begin{aligned}
t_{AC} &= \frac{\ell_1}{v_{light} + v_{ether}} \\
t_{CA} &= \frac{\ell_1}{v_{light} - v_{ether}} \\
t_{||} &= t_{AC} + t_{CA} \\
t_{||} &= \frac{\ell_1}{v_{light} + v_{ether}} + \frac{\ell_1}{v_{light} - v_{ether}} \\
t_{||} &= \frac{2\,\ell_1}{v_{light}\left(1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}\right)}
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

- Vertikale Wegstrecke

$$\begin{aligned} t_\perp &= t_{AD} + t_{DA} \\ t_\perp &= \frac{2\,\ell_2}{\sqrt{v_{light}^2 - v_{ether}^2}} \\ t_\perp &= \frac{2\,\ell_2}{\sqrt{v_{light}^2 \cdot \left(1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}\right)}} \\ t_\perp &= \frac{2\,\ell_2}{v_{light}^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

- Für den Moment eine kleine Vereinfachung: Beide Interferometerarme haben dieselbe Länge ℓ ($= \ell_1 = \ell_2$), damit die Ausdrücke an dieser Stelle nicht zu komplex werden.

$$\begin{aligned} t_{||} &= \frac{\ell}{v_{light} - v_{ether}} + \frac{\ell}{v_{light} + v_{ether}} \\ t_{||} &= \frac{2\,\ell \cdot v_{light}}{v_{light}^2 - v_{ether}^2} \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} t_\perp &= \frac{2\,\lambda}{v_{light}^2 - v_{ether}^2} \\ t_\perp &= \frac{2\,\ell\sqrt{v_{light}^2 - v_{ether}^2}}{v_{light}^2 - v_{ether}^2} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Für den Fall $v_{ether} = 0$, ist der Zeitunterschied in den Laufwegen NULL und es kommt zu konstruktiver Interferenz siehe Abb. 2.23. Ist $v_{ether} \neq 0\,\mathrm{m/s}$, ergibt sich

$$v_{light} > \sqrt{v_{light}^2 - v_{ether}^2} \quad \rightarrow \quad t_{||} > t_\perp \tag{2.26}$$

- Wie erheblich ist der Effekt? Dazu setzen wir realistische Werte ein. Als Maß für die Äthergeschwindigkeit wählen wir die Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne ($3 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$). Dann findet man

$$\frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2} = \frac{3 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}}{3 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}} = 10^{-8} \tag{2.27}$$

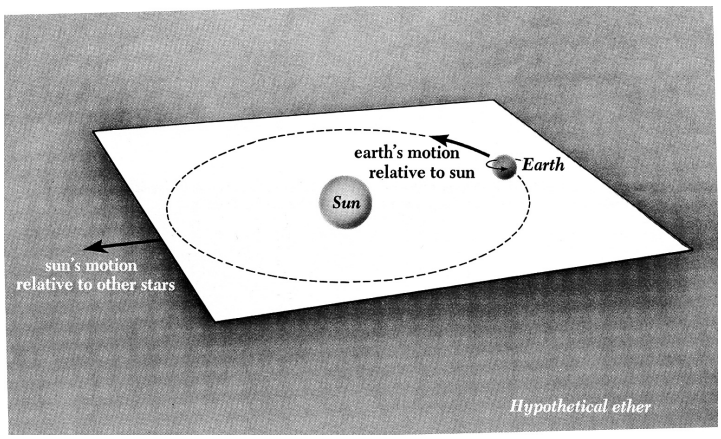


Abb. 2.31: Bewegung der Erde durch den hypothetisch angenommen Äther [**?**].

Für die Armlänge des Interferometers wählen wir die Abmessungen des Michelson-Experiments (11 m).

$$\begin{aligned}
\Delta t &= t_{||} - t_{\perp} \\
\Delta t &= \frac{2\,\ell}{v_{light}} \left(\frac{1}{1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}}} \right) \\
\Delta t &= \frac{22\,\mathrm{m}}{2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} \cdot \left(\left(\frac{1}{1 - 10^{-8}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 10^{-8}}} \right) \right) \\
\Delta t &= 3.5 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{s}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Abschätzung deutet schon an, dass das Experiment eine Herausforderung an die Experimentatoren darstellte. Technologisch ist das Experiment, und insbesondere zur damaligen Zeit, eine Herausforderung an die Mechanik. Tatsächlich bestimmt man die zugehörigen Längenunterschiede aus der Interferenz. Die Zeitunterschiede zu bestimmen, ist selbst mit heutigen Verfahren nicht möglich.

- Natürlich gibt es, wie angemerkt, bei der Durchführung des Experiments noch weitere Probleme. Beispielsweise ist gar nicht bekannt, in welche Richtung sich Sonne und Erde in Bezug auf den Äther bewegt, siehe Abb. 2.31. Michelson und Morley lösen die Probleme, indem sie den Versuchsaufbau um 90^o drehen. Das heißt, dass man die eben vorgestellte Rechnung für beide Fälle durchführen muss. Die unterschiedlichen Längen der Interferometerarme tauchen nun wieder auf. Die Ergebnisse werden wieder voneinander abgezogen. Für das Experiment in der Aus-

gangslage (0^o) findet man:

$$t_1^0 = \frac{2\,\ell_1}{v_{light} \cdot \left(1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}\right)} \tag{2.29}$$

$$t_2^0 = \frac{2\,\ell_2}{v_{light} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}}} \tag{2.30}$$

Ist das Experiment um 90^o gedreht, ergibt sich:

$$t_1^{90} = \frac{2\,\ell_1}{v_{light} \cdot \sqrt{\frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}}} \tag{2.31}$$

$$t_2^{90} = \frac{2\,\ell_2}{v_{light} \cdot \left(1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}\right)} \tag{2.32}$$

Damit ergeben sich folgende Ausdrücke für 0^o:

$$\begin{aligned} \Delta t^0 &= t_1^0 - t_2^0 \\ \Delta t^0 &= \frac{2\,\ell_1}{v_{light} \cdot \left(1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}\right)} - \frac{2\,\ell_1}{v_{light} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_v^2}{v_v^2}}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

und für 90^o:

$$\begin{aligned} \Delta t^{90} &= t_1^{90} - t_2^{90} \\ \Delta t^{90} &= \frac{2\,\ell_1}{v_{light} \cdot \sqrt{\frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}}} - \frac{2\,\ell_1}{v_{light} \cdot \left(1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}\right)} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Der Vergleich liefert, dass die Bewegung der Erde im Äther zu einem messbaren Signal führen sollte:

$$\Delta t^0 - \Delta t^{90} = \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{v_{light}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{ether}^2}{v_{light}^2}}} \right) \tag{2.35}$$

- Jetzt kann man ausnutzen, dass die Geschwindigkeit des Äthers deutlich geringer ist als die Geschwindigkeit des Lichts ($v_{ether} \ll v_{light}$). Deshalb kann man Näherungen verwenden.

$$\frac{1}{1-\alpha^2} \approx 1+\alpha^2 \tag{2.36}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \approx 1+\frac{1}{2}\alpha^2 \tag{2.37}$$

$$\tag{2.38}$$

So ergibt sich eine hinreichend genaue Gleichung für das zu erwartende Resultat.

$$\Delta t^0 - \Delta t^{90} = (\ell_1+\ell_2)\cdot\frac{v_{ether}^2}{v_{light}^3} \tag{2.39}$$

Der Ausdruck belegt, dass man die Bewegung im Äther im Prinzip messen kann. Da wir im Experiment keine Zeitmessung durchführen, sondern Längenunterschiede bestimmen, muss man den Ausdruck noch in eine Wegstrecke umrechnen. Das ist einfach, denn $v = \Delta x/\Delta t$. Anhand des Zeitunterschieds in den Laufzeiten der beiden Interferometerarme

$$\Delta t = t_\perp - t_{||} \tag{2.40}$$

$$\Delta t = \frac{2\,\ell}{c}\frac{1}{1-\frac{v_{ether}^2}{c^2}} - \frac{2\,\ell}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{ether}^2}{c^2}}} \tag{2.41}$$

berechnen wir im Folgenden die Verschiebung der Interferenzstreifen. Als relative Geschwindigkeit in Bezug auf den Äther orientieren wir uns an der Orbitalbewegung der Erde um die Sonne, v_{ether}=$3\cdot10^4\,$m/s oder v_{ether}^2/c=10^{-8}.[23] Da dieser Term deutlich kleiner ist als EINS, können wir ansetzen

$$(1\pm x)^n \approx 1 \pm n\cdot x \tag{2.42}$$

Das führt auf folgende Gleichung:

$$\Delta t = \frac{2\,\ell}{c}\left(\left(1+\frac{v_{ether}^2}{c^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\frac{v_{ether}^2}{c^2}\right)\right) \tag{2.43}$$

$$\Delta t = \frac{\ell}{c}\frac{v_{ether}^2}{c^2} \tag{2.44}$$

Der sich aus dem Zeitunterschied ergebende zugehörige Wegunterschied d=$c\cdot\Delta t$ entspricht einer Anzahl an Interferenzringen n_{fringe}

$$d = n_{fringe}\cdot\lambda \tag{2.45}$$

[23] Zufälligerweise bewegt sich der Äther mit dieser Geschwindigkeit relativ zum Sonnensystem. Damit gibt es auch einen Zeitpunkt, an dem die relative Geschwindigkeit der Erde zur Sonne NULL ist.

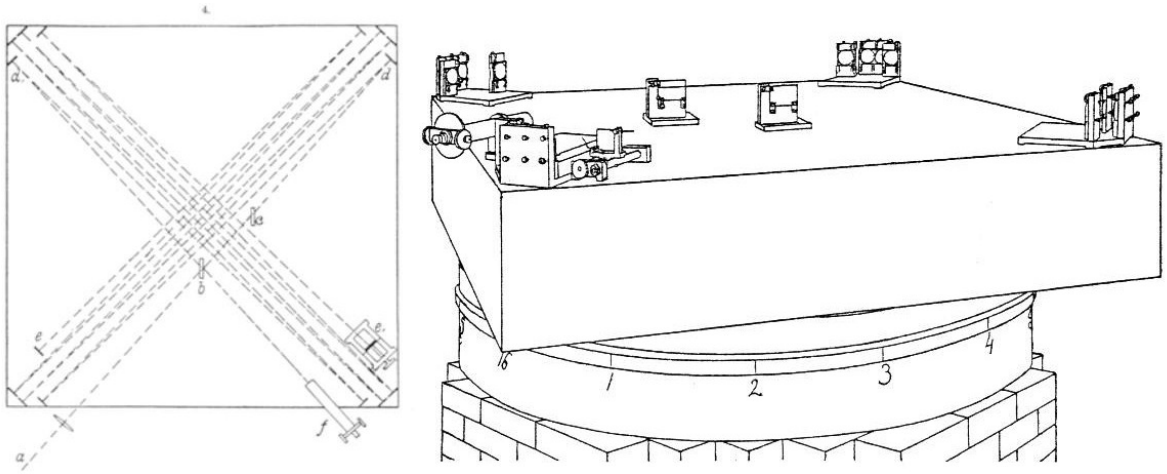


Abb. 2.32: Experiment von Michelson und Morley [**?**].

der sich damit in Abhängigkeit typischer experimenteller Parameter (ℓ=10 m, λ=500 nm) berechnen lässt.

$$\begin{aligned} n_{fringe} &= \frac{\ell}{\lambda}\frac{v_{ether}^2}{c^2} \\ n_{fringe} &= \frac{10\,\mathrm{m}}{5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}\frac{(3\cdot 10^4\,\mathrm{m/s})^2}{(3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \\ n_{fringe} &= 0.2 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Da eine Verschiebung auf Hin- und Rückweg der Lichtstrahlen erfolgt, ergibt sich ein Wert von 0.4. Eine solche Phasenverschiebung um weniger als einen halben Interferenzring ist groß genug, um ihn experimentell auflösen zu können.

Das Resultat

Die hohen technologischen Anforderungen an das Experiment sorgten für einen komplexen Aufbau, der höchste Anforderungen an die mechanische Genauigkeit stellte. Abb. 2.32 zeigt den Aufbau, der von Michelson und Morleyverwendet wurde. Die optischen Komponenten wurden auf einem 1.5 Meter durchmessenden Sandstein aufgebaut. Der optischer Tisch mit dem Interferometer war drehbar gelagert und die Halterung schwamm in Quecksilber, um Spannungen und Vibrationen bei der Rotation des Tisches zu minimieren. Länge der Arme des Interferometers wurde durch Vielfachreflexion auf etwa 11 Meter verlängert. Der Aufbau erlaubte Messungen in allen horizontalen Orientierungen. Das Ergebnis nach vielen Messungen war für Michelson und Morley als Vertreter der Äthertheorie niederschmetternd, siehe Abb. 2.33. Eine Verschiebung des Interferenzmusters wird unter Berücksichtigung der experimentellen Auflösung nicht beobachtet. Auch experimentelle Unwägbarkeiten, wie Messungen zu verschiedenen Tageszeiten hatten keinen Einfluss auf das Ergebnis. Die Streuung der Messwerte gibt Auskunft über die Auflösungsgrenze im Versuch. Die gestrichelte Linie ist die theoretische Vorhersage,

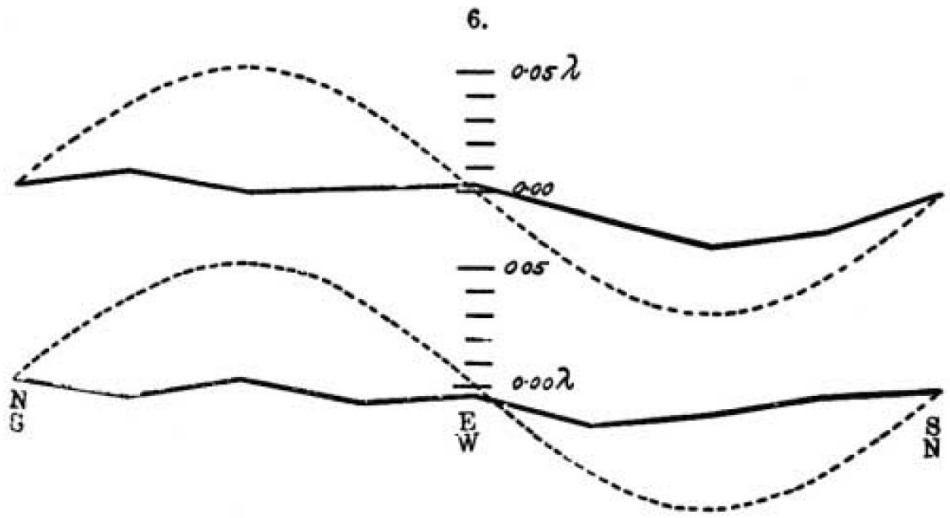


Abb. 2.33: Ergebnis des Michelson-Morley Experiments. *oben:* Messung Mittags; *unten:* Messung Abends. Die gepunktete Linie gibt das Ergebnis einer Rechnung unter Berücksichtigung des Äthers wieder. Die Kurve ist allerdings um einen Faktor 8 in y-Richtung gestaucht. Der erwartete Effekt ist, in eine Länge umgerechnet, geringer als ein Hundertstel des Abstandes der Interferenzringe [**?**].

allerdings schon um einen Faktor acht verkleinert. Das Michelson Experiment erbringt KEINEN Nachweis der Existenz des Äthers [**?**].

The Velocity of Light Within a Massive Enclosure [?]: D. C. Miller explains in his report, that the difference between his results and those of other experimenters in the field may be due to entrapping of the ether in the heavily enclosed apparatus of the other investigators, while his own apparatus is quite open to the outside atmosphere. If this explanation be correct, it should be possible to detect a differential light velocity between a light beam in a heavily walled tube with stopped ends held in the direction of the earth's velocity and a light beam just outside and parallel to the tube... On September 1, 1934, the apparatus was set up on the top of a high hill about two miles south of Moscow, and many observations were made in all azimuths during the daylight hours of September 1, 2 and 3. No shift of the interference fringes was observed, although conditions were very favorable, and a shift of 1/10 fringe would easily have been seen. I conclude that Professor Miller's explanation of the difference between his results and those of the other investigators is not correct.

Mit dem Aufbau hätte die Existenz des Äthers locker nachgewiesen werden können. Weitere Experimente mit verbesserten Instrumenten folgten, siehe beispielsweise [**? ? ? ?**]. Abb. 2.34 zeigt eine Zusammenstellung von Resultaten, die Forscher zwischen 1881 und 1930 erzielten im Vergleich zur Erwartung aufgrund einer relativen Bewegung zum Äther. Die 45^o-Linie in der Abbildung entspricht der Bahngeschwindigkeit der Erde um

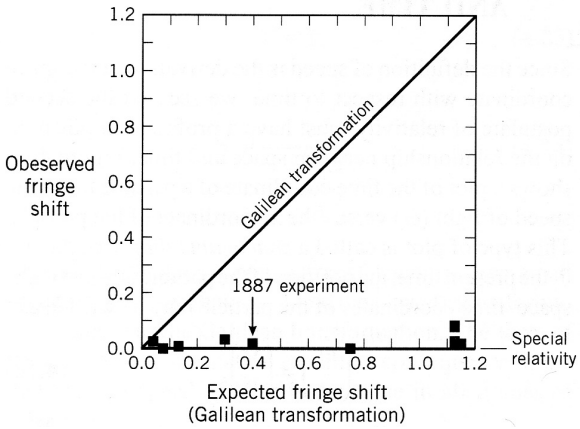


Abb. 2.34: Zusammenstellung der Forschungergebnisse zur Überprüfung des Michelson-Morley Resultats [**?** **?**].

die Sonne. Am Ergebnis von Michelson und Morley hat sich aber nichts geändert. Die Genauigkeit ist im Laufe der Jahre im weiter gesteigert worden. Die genauste Messung erfolgte mit Hilfe des Mössbauer-Effekts. Das Ergebnis ergab eine Geschwindigkeit von $1.6 \pm 2.8\,\mathrm{m/s}$ für den möglichen Ätherwind [**?**].

Das Michelson-Morley Experiment ist eines der wohl berühmtesten Experimente in der Physik, insbesondere weil es in Bezug auf die Intention der Forscher misslang [**?**]. Um die Äthertheorie zu retten, wurde vermutet, dass die Erde den Äther mitreißt (*ether drag theory*). Würde das stimmen, wäre die Erde bezüglich des Äthermedium in Ruhe und es wäre also ganz natürlich, dass das Michelson-Morley Experiment ein NULL-Resultat ergibt. Das Gegenargument liefert die Stellare Aberration. Der Eintritt des Lichts in den Ätherbereich der Erde sollte nach Snellius (Kapitel *Optische Instrumente*) eine Lichtbrechung verursachen. Die Experimente von Bradley haben aber gezeigt, dass sich das Licht der beobachteten Sterne gradlinig ausbreitet. Schlussfolgerung:

Es gibt keine experimentellen Hinweise auf die Existenz des Äthers [**?**]!

Das Michelson-Morley Experiment bestätigt das Erste Einsteinsche Postulat!

Direct terrestrial test of Lorentz symmetry in electrodynamics to 10^{18} [**?**]**:** Lorentz symmetry is a foundational property of modern physics, underlying the standard model of particles and general relativity. It is anticipated that these two theories are low-energy approximations of a single theory that is unified and consistent at the Planck scale. Many unifying proposals allow Lorentz symmetry to be broken, with observable effects appearing at Planck-suppressed levels; thus, precision tests of Lorentz invariance are needed to assess and guide theoretical efforts. Here we use ultrastable oscillator frequency sources to perform a modern Michelson-Morley experiment and make the most precise direct terrestrial test to date of Lorentz symmetry for the photon, constraining Lorentz violating orientation-dependent relative frequency changes $\Delta\nu/\nu$ to $9.2 \pm 10.7 \cdot 10?19$ (95% confidence interval). This order of magnitude improvement over previous Michelson-Morley experiments allows us to set comprehensive simulta-

neous bounds on nine boost and rotation anisotropies of the speed of light, finding no significant violations of Lorentz symmetry.

Es wird diskutiert, ob man als Einstieg in die Relativitätstheorie das Konzept des Äthers überhaupt behandelt. Das ist sicherlich etwas dran, da das Konzept schon lange *ad acta* gelegt wurde. Die Motivation sollte eher aus Richtung der Relevanz, die das Michelson-Interferometers für Naturwissenschaft und Technik hat: Beispiele sind das *Very Large Telescope Interferometer* [**?**], Fourier-Transform-Infrared (FTIR) Spektrometer [**?**] oder Laserinterferometer [**?**], die man unter anderem zur Messung der Quantenverschränkung eingesetzt. Spektakulär ist die Verwendung eines solchen Instruments mit 4 km Armlänge mit dem der erste direkte Nachweis von Gravitationswellen gelang [**?**] (Nobelpreis für Physik 2017, genau 100 Jahre nach der Verleihung an Michelson)[24] Mehr dazu im Kapitel *Allgemeine Relativitätstheorie*.

Michelson-Morley analogue for electrons using trapped ions to test Lorentz symmetry [?]: All evidence so far suggests that the absolute spatial orientation of an experiment never affects its outcome. This is reflected in the standard model of particle physics by requiring all particles and fields to be invariant under Lorentz transformations. The best-known tests of this important cornerstone of physics are Michelson-Morley-type experiments verifying the isotropy of the speed of light. For matter, Hughes-Drever-type experiments test whether the kinetic energy of particles is independent of the direction of their velocity, that is, whether their dispersion relations are isotropic. To provide more guidance for physics beyond the standard model, refined experimental verifications of Lorentz symmetry are desirable. Here we search for violation of Lorentz symmetry for electrons by performing an electronic analogue of a Michelson-Morley experiment. We split an electron wave packet bound inside a calcium ion into two parts with different orientations and recombine them after a time evolution of 95 milliseconds. As the Earth rotates, the absolute spatial orientation of the two parts of the wave packet changes, and anisotropies in the electron dispersion will modify the phase of the interference signal. To remove noise, we prepare a pair of calcium ions in a superposition of two decoherence-free states, thereby rejecting magnetic field fluctuations common to both ions. After a 23-hour measurement, we find a limit of $h \cdot 11$ mHz (h is Planck's constant) on the energy variations, verifying the isotropy of the electron's dispersion relation at the level of one part in 10^{18}, a 100-fold improvement on previous work. Alternatively, we can interpret our result as testing the rotational invariance of the Coulomb potential. Assuming that Lorentz symmetry holds for electrons and that the photon dispersion relation governs the Coulomb force, we obtain a fivefold- improved limit on anisotropies in the speed of light. Our result probes Lorentz symmetry violation at levels comparable to the ratio between the electroweak and Planck energy scales. Our experiment demonstrates the potential of quantum information techniques in the search for physics beyond the standard model.

[24] The Nobel Prize in Physics 2017 was divided, one half awarded to Rainer Weiss, the other half jointly to Barry C. Barish and Kip S. Thorne *for decisive contributions to the LIGO detector and the observation of gravitational waves.*

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 4.1: Welche der beiden angegebenen Zeitintervalle $t_\perp$, $t_{||}$ ist größer?[25]

Aufgabe 4.2: Welche Längenänderung Δx können mit einem Michelson-Interferometer bei Verwendung von Licht der Wellenlänge λ aufgelöst werden?[26]

(a) $\Delta x \ll \lambda$

(b) $\Delta x \approx \lambda$

(c) $\Delta x \gg \lambda$

Aufgabe 4.3: Wie groß ist der Wegunterschied zwischen den beiden optischen Armen (ℓ_1, ℓ_2) beim Michselson-Interfermoter[27]

(a) $\ell_1 - \ell_2$

(b) $2\,\ell_1 - \ell_2$

(c) $\ell_1 - 2\,\ell_2$

(d) $2\,\ell_1 - 2\,\ell_2$

[25] Antwort: $t_{||}$
[26] Antwort: (a)
[27] Antwort: (d)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Können Sie den experimentellen Aufbau des Michelson-Morley Experiments skizzieren?

2. Warum wird das Licht im Michelson-Morley Experiment über eine Vielzahl an Spiegeln geführt?

3. Welche Bedeutung hat das Michelson-Morley Experiment im Hinblick auf die Tatsache, dass das Experiment eigentlich ein Fehlschlag war?

4. Warum ist das Michelson-Morley Experiment im Nachweis empfindlicher, im Vergleich zu Messungen, die jeweils einzeln die parallele und senkrechte Drift der Erde im Bezug auf den Äther bestimmen?

5. Warum musste das Michelson-Morley Experiment über einen längeren Zeitraum immer wieder durchgeführt werden?

6. Eine der Erklärungen für die Existenz des Äthers war, dass die Erde sich in einer Ätherblase befindet, die sich mit der Erde mitbewegt. Schlagen Sie ein Experiment vor, dass diese Hypothese aus hebelt!

7. Kann man feststellen, ob ein Körper in Ruhe ist?

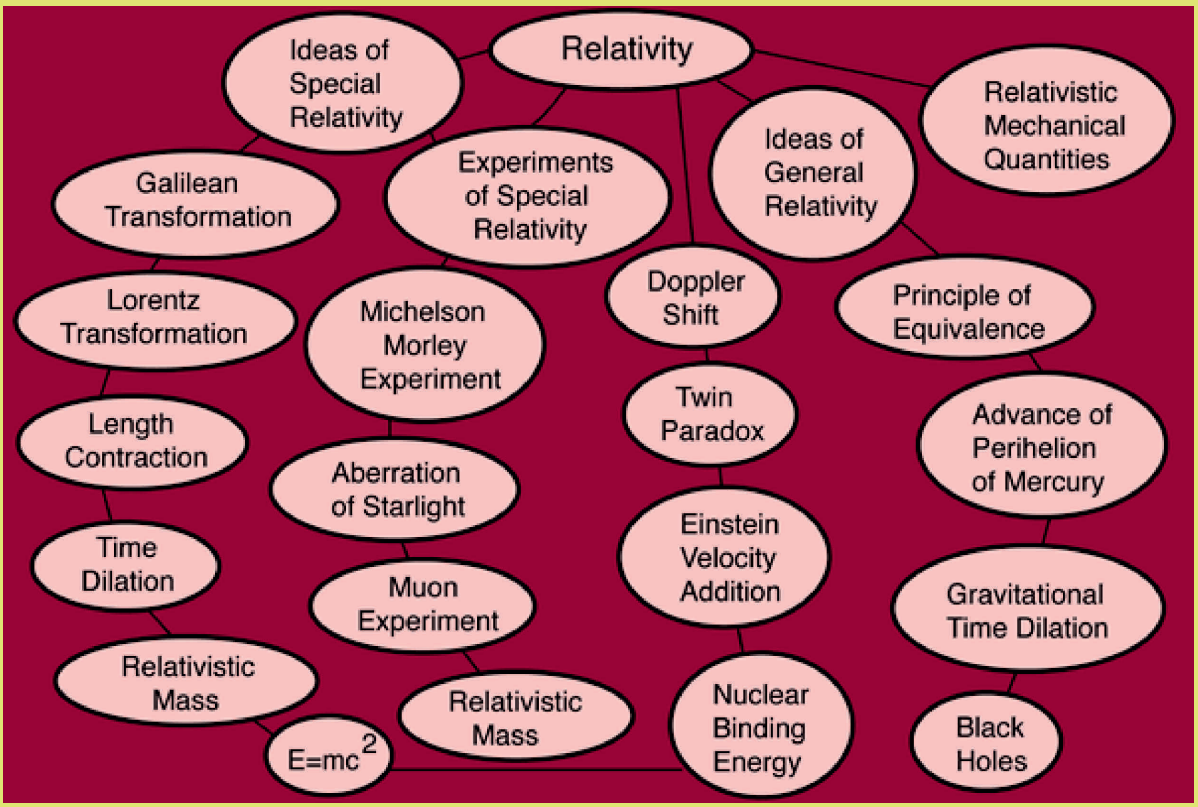


Abb. 2.35: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was ist relevant für die Klausur?

- Naturkonstante Lichtgeschwindigkeit
- Einsteinsche Postulate der Speziellen Relativitätstheorie
- Interferenz von Lichtwellen
- Funktionsweise des Michelson-Interferometers
- Michelson-Morley Experiment

3 Gleichzeitigkeit



Gleichzeitigkeit

Versuchen Sie mal einem Polizisten zu erklären, dass eine Geschwindigkeitsbeschränkung ohne Hinweis auf das zugehörige Bezugssystem sinnlos sei! [**?**]

[1]Wie synchronisiert man Uhren untereinander? Über die koordinierte Weltzeit UTC.[2] Ein Problem ist die genaue Zeitabstimmung. Diese erfolgt über den Austausch von Signalen. Eine Herausforderung ist die Notwendigkeit, die Zeitstempel Anwendern auf anderen Kontinenten mitzuteilen, um Resultate vergleichen zu können. Beispiele sind hoch genaue Navigation [**?**] oder der Abgleich von Signalen durch weit von einander befindlichen Detektoren für Gravitationswellen [**?**] (siehe Kapitel *Allgemeine Relativitätstheorie*). In der Praxis wird dies durch Signale realisiert, die über Satelliten übertragen werden. Ein großes Problem ist dabei, dass die Atmosphäre die Ausbreitung der Signale in kaum

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.
[2]UTC: Coordinated Universal Time; UTC ist der Standard, nach dem die Welt Uhren abstimmt.



Abb. 3.1: Ein Calvin & Hobbes Cartoon

vorhersehbarer Weise beeinflusst. Je genauer die Zeitmessung, desto höher wird der technische Aufwand. Forscher haben es kürzlich geschafft, das Ticken zweier Uhren mit einer hohen Präzession über 113 km zu synchronisieren [**?**]. Der bisherige Rekord lag bei 16 km. Und wie ist das, wenn sich der Empfänger bewegt?

Nachdem die vorherige Vorlesung *Äther* die Einsteinschen Postulate vorgestellt hat und experimentell gezeigt wurde, dass Einsteins Überlegungen

1. Die Lichtgeschwindigkeit ist eine endliche Grenzgeschwindigkeit (Naturkonstante) und niemand kann diese Geschwindigkeit überschreiten.

2. Es gibt kein ausgezeichnetes Bezugssystem.

wohl richtig sind, geht es in dieser Vorlesung um die Konsequenzen, die sich aus den Postulaten ergeben. Nimmt man die Spezielle Relativitätstheorie ernst, hat das Auswirkungen auf die Zeitmessung und die Bestimmung von Distanzen, siehe Abb. 3.1. Wie sich zeigt, ergeben sich für relativ zueinander bewegte Personen Unterschiede in der Beobachtung physikalischer Vorgänge. Wie synchronisiert man Uhren nicht nur im eigenen, sondern auch in unterschiedlichen Bezugssystemen? Beispielsweise ist es in der Speziellen Relativitätstheorie nicht möglich, Uhren nebeneinander zu stellen, beide Zeiger auf 12 Uhr zu setzen und dann die Uhr nach Wismar zu fahren, denn die Spezielle Relativitätstheorie gilt nur in unbeschleunigten Bezugssystemen. Ziel ist es also, zu lernen, wie man Uhren synchronisiert und wie Beobachter Zeitabläufe in unterschiedlichen Bezugssystemen wahrnehmen. Noch etwas Unerwartetes passiert: Abstände verändern sich. Das hat Auswirkungen auf den Ausgang physikalischer Experimente und führt beispielsweise zu Überlegungen überlange Wagen in viel zu kurze Garagen einzuparken.

In classical physics it was always assumed that clocks in motion and at rest have the same rhythm, that rods in motion and at rest have the same length. If the velocity of light is the same in all coordinate systems, if the relativity theory is valid, then we must sacrifice this assumption. It is difficult to get rid of deep-rooted preducides, but there is no other way. [**?**]

Albert Einstein nach Leopold Infeld, The evolution of physics, New York, 1938

Wie weit unsere Vorstellung über die Realität durch die Relativitätstheorie durcheinander geworfen, bemerkt auch der Philosoph und Mathematiker Bertrand Russell in seinem Buch *Das ABC der Relativitätstheorie* [**?**]:

Die Relativitätstheorie hängt weitgehend davon ab, dass man Vorstellungen los wird, die im normalen Leben nützlich sind. Aus verschiedenen, mehr oder weniger zufälligen Gründen legen die Verhältnisse auf der Erdoberfläche Vorstellungen nahe, die sich als ungenau herausstellen, obwohl sie uns nun schon als Denknotwendigkeiten erscheinen. Der wichtigste dieser Umstände besteht darin, dass die meisten Gegenstände auf der Erdoberfläche, von einem irdischen Standpunkt aus betrachtet, ziemlich dauerhaft und fast ortsfest sind. Wenn das nicht so wäre, erschiene uns der Begriff der Bewegung nicht so eindeutig. Wenn jemand von King's Cross Station nach Edinburgh fahren will, weiß er, dass er King's Cross dort finden wird, wo es immer war, dass die Schienen in dieselbe Richtung führen werden wie beim letzten Mal, als er diese Reise machte, und das Waverley Station in Edinburgh nicht zum Schloss hinauf gewandert sein wird. Er sagt und denkt deshalb, dass er nach Edinburgh gefahren ist, nicht, dass Edinburgh zu ihm gefahren ist, obwohl diese Behauptung genauso richtig wäre [**?**].

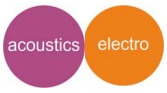
Bertrand Russell, 1997

Inhalt

Gleichzeitigkeit

- Beobachter in unterschiedlichen Inertialsystemen nehmen Ereignisse unterschiedlich wahr
- Uhren gehen in bewegten Bezugssystemen langsamer
- Längen verkürzen sich in bewegten Bezugssystemen

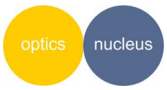
Kapitel 1
Ereignis



Kapitel 2
Zeitdilatation



Kapitel 3
Längenkontraktion



3.1 Ereignis



When your watch gets out of order you have a choice of two things to do: throw it in the fire or take it to the watch-tinker. The former is the quickest.

Mark Twain

Was ist ein Ereignis? Sicherlich war der Einschlag der Bruchstücke des Kometen Shoemaker-Levy 9 auf Jupiter 1994 ein Jahrhundertereignis für die Astrophysik. Jeder Beobachter kann allerdings nur Aussagen über Ereignisse machen, die vor Ort stattfinden. Über Ereignisse, die woanders vonstatten gehen, muss man sich informieren, d.h. man wartet auf eine Funknachricht. In unserem Fall sind das Lichtsignale, die über ein auswärtiges Ereignis wie Schoemaker-Levy 9 Auskunft geben. Abb. 3.2 zeigt eine Aufnahme des European Southern Observatory vom 1. Mai 1994, der Bruchstücke des Kometen zeigt, die zwischen dem 16. und 22. Juli 1994 auf Jupiter einschlugen. Wir wussten also von diesem Ereignis, weil die Astronomen durch ihre im Vorfeld gemachten Beobachtungen auf den Einschlag vorbereitet waren. Es mag Situationen geben, bei denen das anders ist. Anhand eines Gedankenexperiments wollen wir uns die Unterschiede zwischen Messungen zur Ausbreitung von Wellen vor Augen führen. Dazu betrachten wir Licht und Schallwellen und wechseln jeweils den Bezugspunkt. Mal bewegt sich die Quelle - mal bewegt sich der Beobachter.

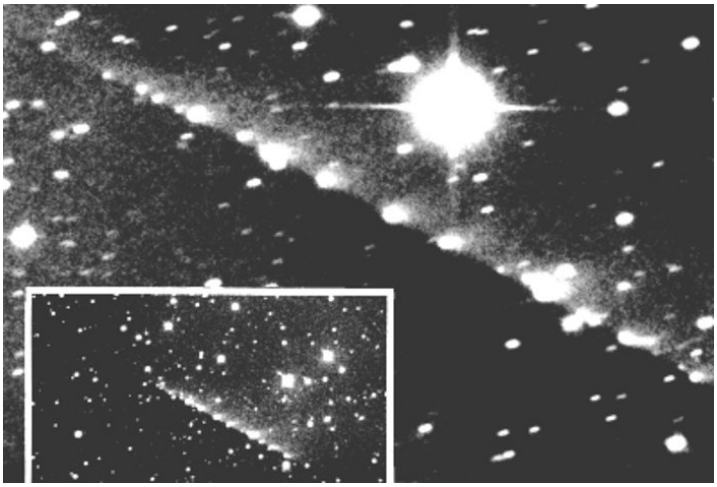


Abb. 3.2: Einschlag des Kometen Shoemaker-Levy 9 auf Jupiter im Jahr 1994 [**?**].

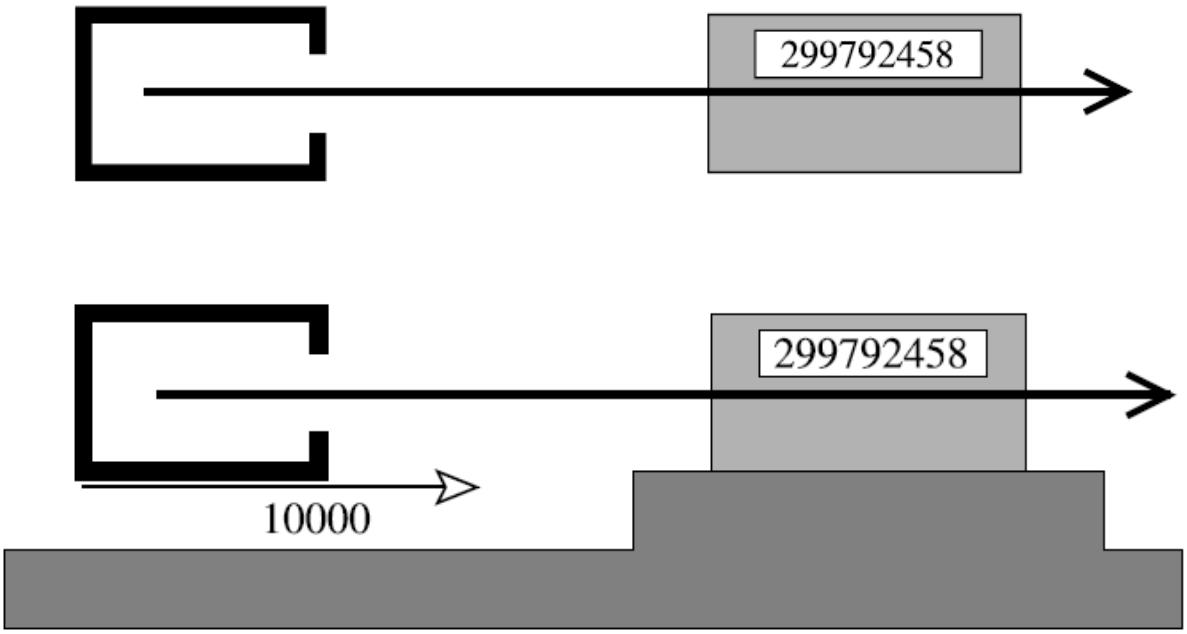


Abb. 3.3: *oben:* Ein Lichtstrahl bewegt sich von links nach rechts. Links steht der Sender, der Lichtsignale aussendet. Der Detektor rechts zeigt an, wie schnell sich der Lichtstrahl bewegt; *unten:* Der Absender bewegt sich mit 10^5 m/s zum Boden. Die Anzeige des Detektors bezüglich der Ausbreitungsgeschwindigkeit bleibt unverändert [**?**].

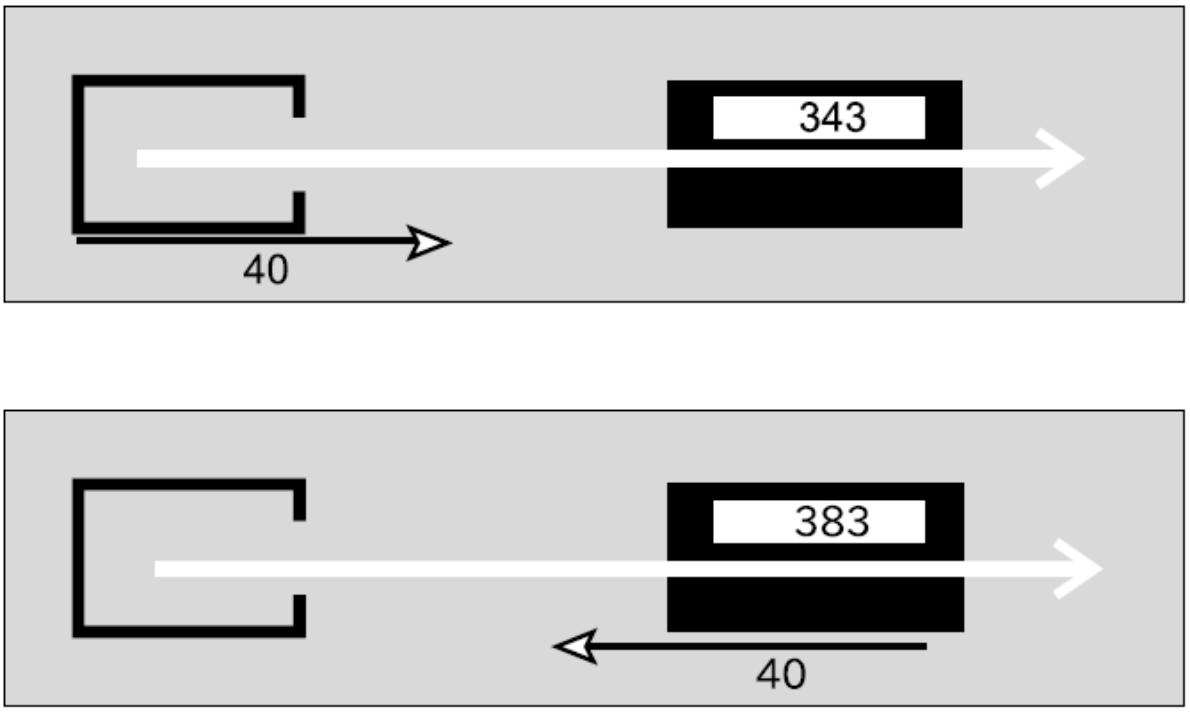


Abb. 3.4: Wie Abb. 3.3 nur mit dem Unterschied, dass jetzt ein akustisches Signal betrachtet wird. *oben:* Ein Lautsprecher bewegt sich laut Detektor mit 40 m/s. Unabhängig davon, ob der Sender ruht oder sich bewegt, bestimmt der Detektor dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit; *unten:* Wenn sich der Detektor auf die Quelle der Signale zubewegt bewegt, bestimmt der Detektor eine höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit [**?**].

Licht-Experiment 1:
Die Lichtquelle ruht in Bezug auf auf den Geschwindigkeitsmesser, siehe Abb. 3.3, oben. Der Beobachter bestimmt die Geschwindigkeit des Lichts mit c.

Licht-Experiment 2:
Der Geschwindigkeitsmesser bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 10 000 m/s auf die Lichtquelle zu, siehe Abb. 3.3, unten. Der Beobachter bestimmt die Geschwindigkeit des Lichts mit c. Das Zweite Postulat der Speziellen Relativitätstheorie besagt, dass sowohl ruhende als auch bewegte Beobachter bei einer Messung immer den Wert der Lichtgeschwindigkeit mit c bestimmen. Dieser Umstand hat Auswirkung auf unsere Zeitmessung und sorgt dafür, dass unter Umständen Uhren anders gehen. Wir werden herausarbeiten, warum dies unvermeidlich ist.

Die Aussage über die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erscheint auf den ersten Blick harmlos. Testen wir die Auswirkungen und ersetzen in einem Gedankenexperiment die Lichtquelle durch einen Lautsprecher. Nun wiederholen wir das Experiment. Die Schall-

geschwindigkeit in Luft ist mit 343 m/s ebenfalls konstant. In sofern könnte man erwarten, dass wir zu einem vergleichbaren Ergebnis kommen.

Akustik-Experiment 1:
Die Schallquelle bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 40 m/s auf den Geschwindigkeitsmesser zu, siehe 3.4, oben. Der Experimentator bestimmt die Schallgeschwindigkeit mit 343 m/s.

Akustik-Experiment 2:
Der Geschwindigkeitsmesser bewegt sich mit einer Tempo von 40 m/s auf die Schallquelle zu. Jetzt bewegt sich der Detektor relativ zur Schallquelle mit einer Geschwindigkeit von 40 m/s auf den Lautsprecher zu, siehe Abb. 3.4, unten. Die Messung ergibt (343 m/s+40 m/s)=383 m/s.

Die gemessene Schallgeschwindigkeit hängt davon ab, ob sich die Quelle oder der Beobachter bewegt. Man vergleiche dazu auch das Zitat von Roman Sexl zu Beginn des Kapitels [**?**]. In diesem Fall kann man die Akteure nicht austauschen. Ein sich bewegender Geschwindigkeitsmesser bestimmt eine viel zu hohe Schallgeschwindigkeit. Die Betrachtung von Ereignissen in unterschiedlichen Bezugssystemen führt also unter Umständen zu komplexen Situationen. Das Beispiel zeigt, dass durch die relative Bewegung Messprobleme auftreten können. Im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie werden wir solchen Szenarien nachgehen.

My beautiful new watch had run eighteen months without losing or gaining, and without breaking any part of its machinery or stopping. I had come to believe it infallible in its judgments about the time of day, and to consider its constitution and its anatomy imperishable. But at last, one night, I let it run down. I grieved about it as if it were a recognized messenger and forerunner of calamity.... It gained faster and faster day by day. Within the week it sickened to a raging fever, and its pulse went up to a hundred and fifty in the shade. At the end of two months it had left all the timepieces of the town far in the rear, and was a fraction over thirteen days ahead of the almanac. It was away into November enjoying the snow, while the October leaves were still turning. It hurried up house rent, bills payable, and such things, in such a ruinous way that I could not abide it.... I began to be left by trains, I failed all appointments, I got to missing my dinner; my watch strung out three days' grace to four and let me go to protest; I gradually drifted back into yesterday, then day before, then into last week, and by and by the comprehension came upon me that all solitary and alone I was lingering along in week before last, and the world was out of sight.

Mark Twain - My watch (1870)

Relativität der Gleichzeitigkeit

The observer cannot know whether he is at rest or in absolute motion.

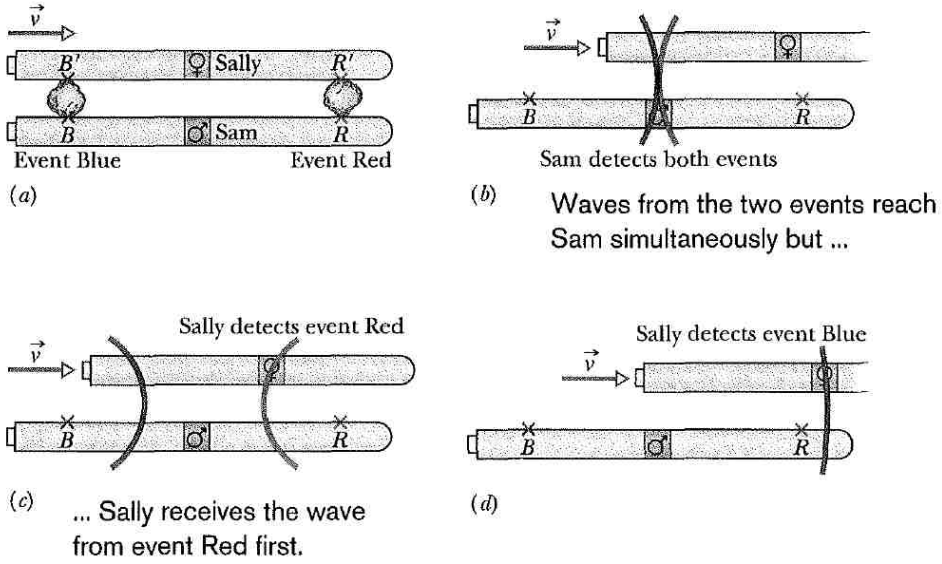


Abb. 3.5: Das Raumschiffe von Sally fliegt mit einer Geschwindigkeit v an und Sam vorbei. (a) Das Ereignis R tritt an den Positionen R, R' und das Ereignis B an den Positionen B, B'. In beiden Fällen wird ein Lichtsignal ausgesendet. (b) Sam empfängt die Signale GLEICHZEITIG. (c) Sally beobachtet das Licht des Ereignisses R zuerst und erst später (d) das Signal von Ereignisses B [**?**].

Henri Poincaré (1904)

Zunächst ist es notwendig sich den Begriff Gleichzeitigkeit[3] physikalisch klarzumachen. Betrachten wir zwei Explosionen, die zur selben Zeit an unterschiedlichen Orten stattfinden. Wer entscheidet, dass die Ereignisse gleichzeitig stattfinden? Man erkennt vielleicht, dass es tatsächlich auf den Informationsfluss ankommt. Wie erfährt man von den Ereignissen? Je nachdem, wo sich der Beobachter befindet, nimmt er die Lichtblitze zu unterschiedlichen Zeiten wahr. Ein Astronom beispielsweise beobachtet die Explosion einer Supernova und gleichzeitig schaltet jemand aus Versehen das Licht in der Kuppel der Sternwarte an. Für den Astronomen erfolgen die Ereignisse gleichzeitig, obwohl der Stern schon vor langer Zeit explodierte. Abb. 3.5 illustriert, dass simultane Ereignisse für Beobachter in anderen Inertialsystemen in der Regel nicht simultan sind. Überraschender Weise kommt man zu dem Schluss: Beide Beobachter haben recht!

Wenn ich die Folgen geahnt hätte, wäre ich Uhrmacher geworden.

Albert Einstein

[3] *Lexikon:* Der Begriff der **Gleichzeitigkeit** ist ein zentrales Konzept der Physik. Alle Informationen über den zeitlichen Ablauf von Experimenten fußen auf einem Vergleich von Zeitmarken. Mit der **Relativität der Gleichzeitigkeit** ist gemeint, dass es keine allgemeingültige Antwort auf die Frage gibt, ob für unterschiedliche Beobachter Ereignisse an verschiedenen Orten gleichzeitig oder zu verschiedenen Zeiten stattfinden.



Abb. 3.6: Zeitball des Royal Greenwich Observatory [?].

Referenzuhr

Ein Zeitball [?] (Abb. 3.6) ist ein weithin sichtbarer Signalball, der zu einem festgelegten Zeitpunkt fallen gelassen wird. Dies erlaubte es Seeleuten, mit Hilfe dieses optischen Signals, ihre Schiffschronometer auf die Sekunde genau zu kalibrieren. Die genaue Uhrzeit war im 19. Jahrhundert unabdingbar, um auf See die Position eines Schiffes bezüglich des Längengrad exakt zu bestimmen.

Wie kann man das Problem der Synchronisation von Uhren an unterschiedlichen Orten lösen? Man pflastert sein Inertialsystem mit Uhren und bestimmt vor Ort den Zeitpunkt eines Ereignisses, siehe Abb. 3.7. Ein sehr aufwendiges Verfahren, aber in einem Gedankenexperiment ist vieles möglich, was technisch kaum zu realisieren ist. Man benötigt für solch ein engmaschiges Netz an Zeitmessern an jedem Raumpunkt eine genau gehende Uhr. Dann stellt sich nur noch die Frage, wie man die Uhren synchronisiert. Da man die Uhren nicht abstimmen und dann verteilen kann (beschleunigtes Bezugssystem), übernehmen lichtschnelle Impulse die Aufgabe, überall verteilte Uhren mit der eigenen Armbanduhr (Referenzuhr) zu synchronisieren. So könnte man im Prinzip vorgehen. Auch wenn das Verfahren etwas umständlich erscheint, hätte man an jedem Raumpunkt eine verlässliche Uhrzeit. Beobachter, die sich im selben Inertialsystem befinden, lesen an ihrer synchronisierten Uhr den Zeitpunkt eines Ereignisses statt. Im Folgenden wollen wir betrachten, was passiert, wenn sich Beobachter nicht im selben Bezugssystem befinden, sondern sich zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Hat dies

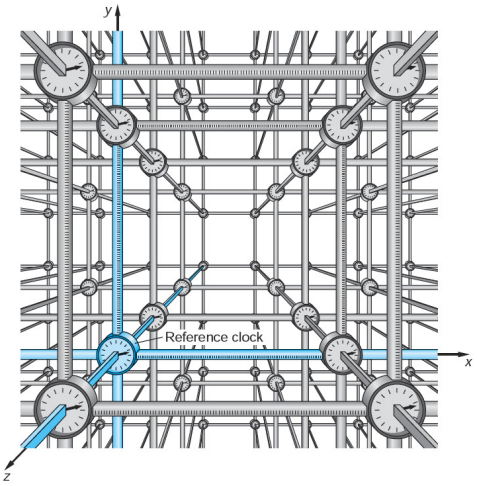


Abb. 3.7: Referenzsystem aus einem dreidimensionalen Gitternetzwerk von abgestimmten Uhren. Die Uhren werden anhand einer Referenzuhr synchronisiert. Die Zeitachse ist durch die Anzeige auf den Uhren realisiert [**?**].



Abb. 3.8: Ein Charlie Brown Cartoon.

Auswirkungen auf die Zeitmessung? JA! . . . meint im übrigen auch Lucy (Abb. 3.8).

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 3.1: Ein Astronom betrachtet -eher aus Langeweile- mit seinem Teleskop Uhren an entfernten Wohnmobilen. Diese wurden in ihrem eigenen Ruhesystem mit der Uhr des Forschers synchronisiert. In Bezug auf die Uhren unter Beobachtung ist der forsche Beobachter in Ruhe. Der ambitionierte Forscher stellt fest, dass die Uhren unterschiedliche Zeiten anzeigen. Die Ursache ist:[4]

(a) Zeitdilatation!

(b) Längenkontraktion!

(c) Die Relativität der Gleichzeitigkeit!

(d) Nichts von alledem!

Aufgabe 3.2: Zwei Ereignisse sind so voneinander getrennt, dass ein Beobachter bei beiden Ereignissen dabei sein kann. Welche allgemeine Aussagen über die beiden Ereignisse machen sich auch alle anderen Beobachter zu eigen?[5]

(a) Eine Aussage über die Zeitspanne zwischen den Ereignissen!

(b) Eine Aussage über den räumlichen Abstand zwischen den beiden Ereignissen!

(c) Eine Aussage über die Reihenfolge, in der die Ereignisse stattfinden!

(d) Keine der oben gemachten Aussagen kann getroffen werden!

Aufgabe 3.3: Zwei Ereignisse sind räumlich so weit von einander entfernt, dass keiner der Beobachter bei den beiden Ereignissen anwesend sein kann. Welche allgemeine Aussagen über die beiden Ereignisse machen sich alle Beobachter zu eigenoder anderes gefragt: Welche Beziehung(en) zwischen den beiden Ereignissen sind für alle Beobachter gleich?[6]

(a) Eine Aussage über die Zeitspanne zwischen den Ereignissen!

(b) Eine Aussage über den räumlichen Abstand zwischen den beiden Ereignissen!

(c) Eine Aussage über die Reihenfolge, in der die Ereignisse stattfinden!

(d) Keine der oben gemachten Aussagen kann getroffen werden!

[4] Antwort: (d)
[5] Antwort: (c)
[6] Antwort: (d)

Aufgabe 3.4: Was mit dem Satz *Gleichzeitigkeit ist nicht absolut* gemeint?[7]

(a) Ereignisse können gleichzeitig in allen Bezugssystemen stattfinden.

(b) Ereignisse sind in unterschiedlichen Bezugssystemen möglicherweise nicht gleichzeitig .

(c) Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Bezugssystemen unterschiedlich.

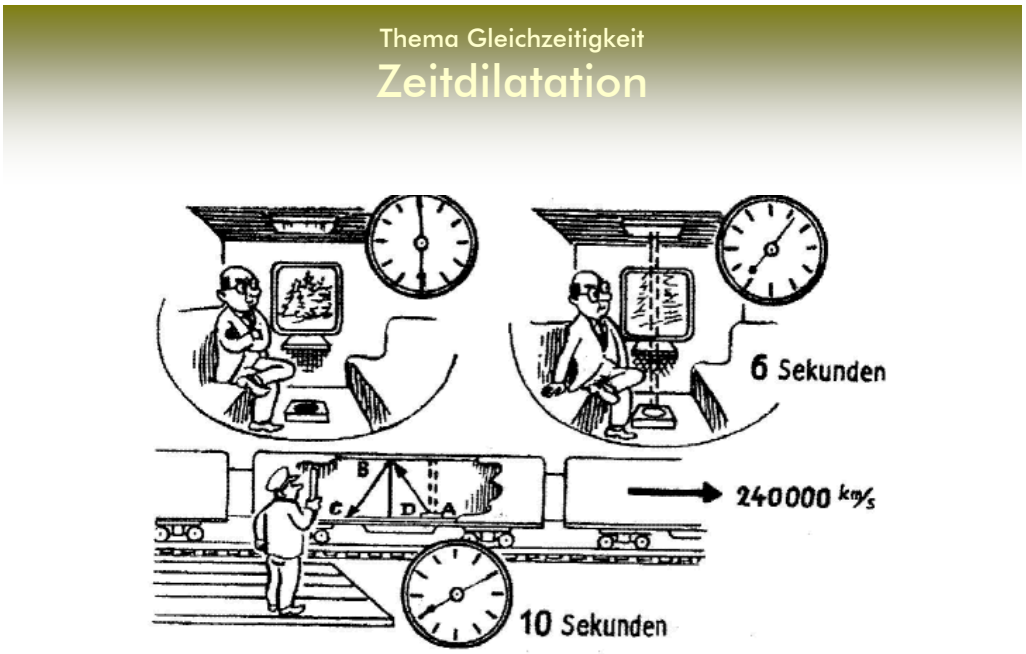
(d) Die Gesetze der Physik können in unterschiedlichen Bezugssystemen verschieden sein.

[7] Antwort: (b)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Bedeutung hat Shoemaker-Levy-9 für die Astrophysik?
2. Wie lauten die Einsteinschen Postulat?
3. Welche Bedeutung hat das Einsteinsche Postulat: Die Lichtgeschwindigkeit ist endlich?
4. Wie synchronisiert man Uhren im eigenen Bezugssystemen?
5. Wie synchronisiert man Uhren in unterschiedlichen Bezugssystemen?
6. Was bedeutet Gleichzeitigkeit?
7. Bei welchen zwei Ereignisse stimmen Beobachter in relativer Bewegung in Bezug auf den Zeitpunkt immer überein?
8. Was besagt das Kausalitätsprinzip?
9. Zwei Hochzeitsgäste (Alice, Bob) an entgegengesetzten Seiten einer Kirche machen Blitzlichtaufnahmen eines Hochzeitspaares. Was würde ein Beobachter, der von Alice zu Bob hinüber geht, über die Reihenfolge der Blitzlichter aussagen?

3.2 Zeitdilatation



Wenn ich die Folgen geahnt hätte, wäre ich Uhrmacher geworden
Albert Einstein

In classical physics it was always assumed that clocks in motion and at rest have the same rhythm, that rods in motion and at rest have the same length. If the velocity of light is the same in all coordinate systems, if the relativity theory is valid, then we must sacrifice this assumption. It is difficult to get rid of deep-rooted preducides, but there is no other way [**?**].

Albert Einstein, 1938

Warum gehen Uhren in bewegten Bezugssystemen anders, wie in dem Cartoon dargestellt? Dafür ist es notwendig, eine möglichst genau arbeitende Uhr zu konstruieren. Diese Präzisionsuhr schleudert Lichtblitze hin- und her, denn wie schon oft erwähnt: Die Lichtgeschwindigkeit c ist in allen Inertialsystemen dieselbe, also kann c als eine präzise Zeitbasis dienen. Die weitere Analyse ist wieder ein Gedankenexperiment, siehe Abb 3.9.

In Bayern gehen die Uhren anders!

Phillip Rössler[8] zur Landtagswahl in Bayern 2013

[8]Phillip Rössler: Zwischen 2009 und 2017 u.a. Bundesgesundheitsminister, Bundeswirtschaftsminister, Vizekanzler und FDP-Bundesvorsitzender



Abb. 3.9: Ein Einstein Cartoon.

Es bedarf einer Definition. Salopp mit Einstein gesprochen:

Zeit ist das, was man an der Uhr abliest.

Albert Einstein

Eigenzeit ist die Zeit, die für einen Körper in seinem Ruhesystem vergeht.

Was ist nun Gleichzeitigkeit? Dazu bemüht man in nahezu allen Lehrbüchern ein Szenarium, indem ein Personenzug an einem Bahnhof vorbeifährt, siehe Abb. 3.10. Zwei Personen (hier Mary und Frank) beobachten Ereignisse. Eine Person steht auf dem Bahnsteig und die Andere fährt im Zug mit. Zu einem bestimmten Zeitpunkt befinden sich Frank und Mary an derselben Stelle ($x = 0$). Auf dem Bahnhof wird in diesem Moment an zwei Stellen in jeweils einem Meter Entfernung ein Lichtblitz ausgesendet. Da Frank sich genau mittig zwischen den beiden Lichtquellen befindet und sich nicht bewegt, erreichen die Lichtimpulse ihn gleichzeitig. Im Zug beobachtet Mary denselben Vorgang, stellt aber fest, dass der rechte Lichtblitz sie eher erreicht. Der Grund ist, dass sie sich auf diese Lichtquelle zubewegt. Da Mary sich gleichzeitig von der linken Lichtquelle entfernt, erreicht sie dieser Lichtblitz später. Mary würde feststellen, das das rechte Licht früher angegangen ist als das linke Licht. Für Mary sind die Ereignisse also nicht gleichzeitig. Mehr noch, Mary ist sich sicher, dass das rechte Licht viel früher angeht, als Frank behauptet. Ereignisse, die in einem bestimmten Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, geschehen in einem anderen Bezugssystem also im allgemeinen nicht gleichzeitig und zu unterschiedlichen Zeiten. Vielleicht kann man es so ausdrücken:

Zwei an getrennten Orten stattfindende Ereignisse erfolgen für einen Beobachter in einem Inertialsystem **zur gleichen Zeit**, wenn die zum Zeitpunkt der Ereignisse ausgesendeten Lichtimpulse gleichzeitig am Ort des Beobachters eintreffen.

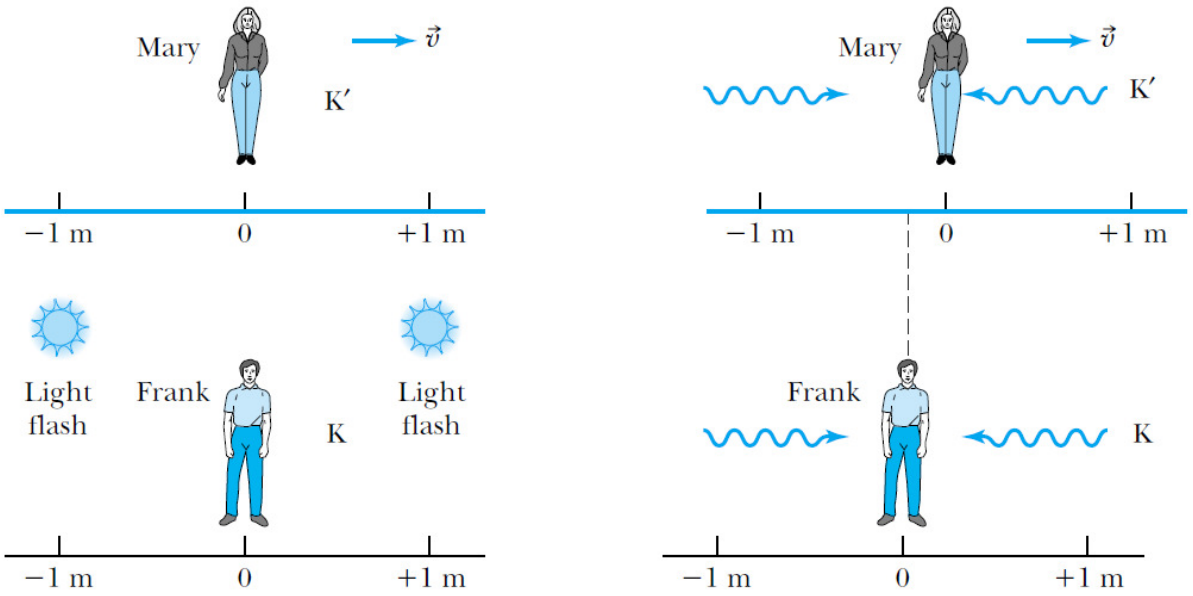


Abb. 3.10: *links:* Mary bewegt sich in Bezug auf Frank mit einer Geschwindigkeit v nach rechts. *rechts:* Im Bezugssystem K werden in einem Meter Abstand zu Frank Blitzlichter gleichzeitig gezündet. Für Frank kommen die Lichtblitze zur selben Zeit bei ihm an. Mary im Bezugssystem K' beobachtet, dass die Lichtblitze bei ihr nicht gleichzeitig ankommen, da sie sich in der Zeit, in der sich die Blitze ausbreiten, bewegt hat [**?**].

Fazit: In unterschiedlichen Bezugssystemen werden dieselben Ereignisse unterschiedlich wahrgenommen. Letztendlich vergleichen wir den Gang von Uhren in unterschiedlichen Inertialsystemen. Jetzt geht es darum, festzustellen, wie man Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, in ein anderes Bezugssystem umrechnet. Die Betrachtung führt auf das Phänomen Zeitdilatation.

If we have a set of *strange* ideas, such as that time goes slower when one moves, and so forth, whether we like them or not is an irrelevant question. The only relevant question is whether the ideas are consistent with what is found experimentally. In other words, the *strange* ideas need only agree with experiment, and the only reason that we have to discuss the behaviour of clocks and so forth is to demonstrate that although the notion of the time dilation is strange, it is consistent with the way we measure time [**?**].

Richard Feynman

Lichtuhr

Wenn ich die Folgen geahnt hätte, wäre ich Uhrmacher geworden.

Albert Einstein

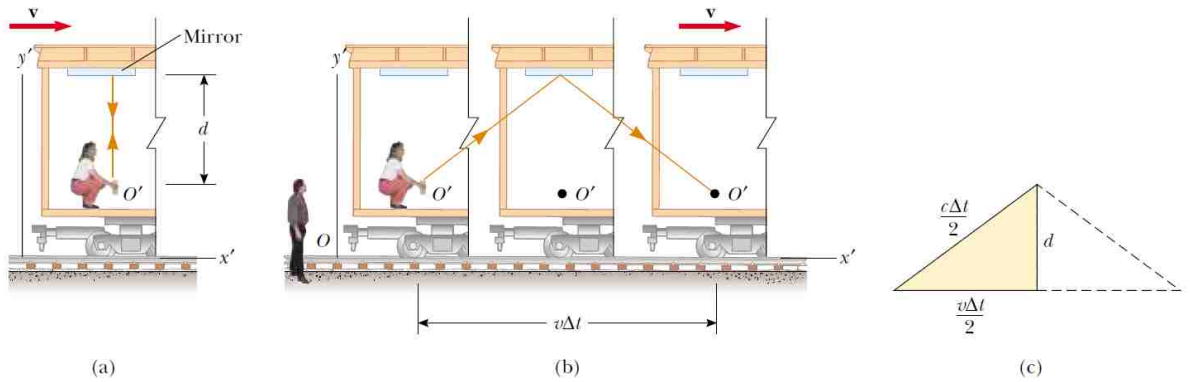


Abb. 3.11: (a) In einem fahrenden Waggon wird ein Lichtimpuls von einem Passagier in Richtung eines im Abstand d an der Decke befindlichen Spiegel ausgesendet. (b) Bezogen auf einen am Bahnsteig stehenden Bahnbeamter, bewegen sich Spiegel und Bahnreisender mit der Geschwindigkeit v. Die von Bahnbeamter gemessene Strecke, die der Lichtimpuls nach Reflektion zurücklegt ist größer als $2d$. (c) Anhand des Dreiecks können die Laufzeiten berechnet werden [**?**].

Dazu baut man im Zug eine so genannte Lichtuhr auf. Diese Uhr ist einfach aufgebaut. Ein Lichtblitz geht an die Decke (Deckenhöhe d) und wird von einem Spiegel reflektiert. Man beachte, dass der Lichtweg senkrecht zur Bewegungsrichtung des Zuges verläuft. Den Abstand zum Spiegel kann man einfach bestimmen und der Wert für c ist bekannt. Damit hat Alice eine verlässliche Zeitbasis. Immer wenn der Lichtpuls unten ankommt, macht es KLICK (Abb. 3.12). Die Zeitspanne ist

$$\begin{aligned} \Delta t_{Alice} &= \frac{2\,d}{c} \\ d &= \frac{1}{2}\,c \cdot \Delta t_{Alice} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nun schwenkt man um zu Bob, der vom Bahnsteig aus den Lichtpuls beobachtet. Da sich der Zug bewegt, ist für ihn der Lichtweg länger. Da auch für Bob die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts c ist, bestimmt er aber eine längere Zeit für die Strecke zum Spiegel und zurück.

$$\Delta t_{Bob} = \frac{2\,D}{c} \tag{3.2}$$

Wir berechnen die Lichtwege im ruhenden und bewegten System nach Pythagoras:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\,c \cdot \Delta t_{bob}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2} v_{train} \cdot \Delta t_{bob}\right) 2 + \left(\frac{1}{2}\,c \cdot \Delta t_{alice}\right)^2 \\ c^2 \cdot \Delta t_{bob}^2 &= v_{train}^2 \cdot \Delta t_{bob}^2 + c^2 \cdot \Delta t_{alice}^2 \\ \Delta t_{bob}^2 \cdot (c^2 - v_{train}^2) &= c^2 \cdot \Delta t_{alice}^2 \\ \frac{t_{alice}^2}{\Delta t_{bob}^2} &= \frac{c^2 - v_{train}^2}{c^2} = 1 - \frac{v_{train}^2}{c^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

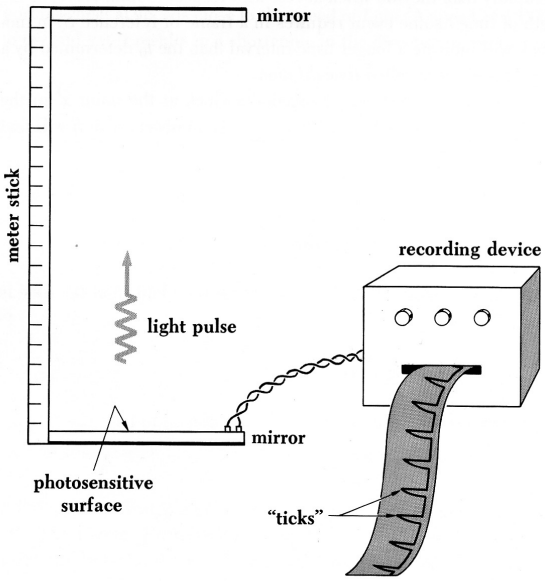


Abb. 3.12: Eine einfach aufgebaute Lichtuhr. Jedes Ticken der Uhren bezieht sich auf die Weg zum gegenüberliegenden Spiegel und zurück [**?**].

Damit ergibt sich als Ergebnis die Formel für die Zeitdilatation:

$$\Delta t_{Bob} = \frac{\Delta t_{Alice}}{\sqrt{1 - v_{train}^2/c^2}} \tag{3.4}$$

Wenn der Zug steht ist v=0 und $\Delta t_{Bob} = \Delta t_{Alice}$ und für normale Geschwindigkeiten ist der Effekt vernachlässigbar klein. Zur weiteren Erläuterung betrachten wir zwei Ereignisse, die am selben Ort, aber zu unterschiedlichen Zeiten, stattfinden. Im Zug wird zuerst ein roter Ball und kurze Zeit später ein blauer Ball fallen gelassen. In dem Moment in dem der erste Ball auf dem Boden landet wird ein Lichtsignal ausgesendet und an einem entfernten Spiegel reflektiert. In dem Moment an dem der baue Ball landet, trifft der Lichtstrahl wieder am Ausgangsort ein. Durch die Gleichung kann man die Zeitspanne in den unterschiedlichen Bezugssystemen bestimmen. Das Ergebnis hängt aber nicht davon ab, ob ein Lichtstrahl ausgesendet wurde. Man kann diese Überlegung verallgemeinern und kommt zu dem Schluss, dass die Gleichung für beliebige Ereignisse angewendet werden, die im Zug am selben Ort geschehen. Gleichung 3.4 taucht in Lehrbüchern in kompakter Weise auf.

- β-Parameter:

$$\beta = v/c \tag{3.5}$$

- γ-Parameter (Lorentzfaktor):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \tag{3.6}$$

Damit kann man die Gleichungen so aufschreiben:

$$\begin{aligned} \Delta t_{ruhend} &= \gamma \cdot \Delta t_{bewegt} \\ \Delta t_{bewegt} &= \frac{\Delta t_{ruhend}}{\gamma} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wegen der Grenzgeschwindigkeit c ergibt sich stets $\beta \leq 1$ und $\gamma \geq 1$. Machen wir uns die Konsequenzen an einfachen Beispielen klar:

- Wir beobachten der Uhr an unserem Handgelenk. Wie lange dauert es, bis der Sekundenzeiger einmal die Runde gemacht hat? Da die relative Geschwindigkeit zwischen uns und der Uhr NULL ist ergibt sich

$$t_{ruhend} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} t_{bewegt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}} t_{bewegt} = t_{bewegt} \tag{3.8}$$

  Wir tragen die Uhr am Handgelenk. In sofern ist es nicht verwunderlich, dass keine Zeitdilatation auftritt.

- Was passiert, wenn sich die Uhr mit Lichtgeschwindigkeit c bewegt?

$$t_{ruhend} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} t_{bewegt} = \frac{1}{\sqrt{1-1}} t_{bewegt} \to \infty \tag{3.9}$$

  Man würde also praktisch unendlich lange warten müssen, bis der Zeiger einmal rundum läuft. Anhand der Gleichung realisieren Supermann und Flash, dass es für sie unmöglich sein wird, sich mit Lichtgeschwindigkeit zu bewegen.

- Bewegt sich die Uhr mit 50%c, vergehen 1.15 Minuten, bis auf der Uhr eine Minute vergangen ist. Bei 87% Lichtgeschwindigkeit dauert es schon zwei Minuten.

Abb. 3.13 demonstriert, wie sich γ als Funktion der Geschwindigkeit in Einheiten von v/c entwickelt. Wir werden diese Ausdrücke im Weiteren häufig verwenden.

Bob kann sich seine Beobachtung nur erklären, indem er feststellt, dass die Armbanduhr von Alice wohl langsamer geht. Bei der Verwendung der Gleichung sollte man sich über die Akteure klar sein. Wer ist der Beobachter und wer wird beobachtet? Generell ergibt sich für einen Beobachter wie Bob also, dass Uhren in einem zum eigenen Inertialsystem bewegten Bezugssystemen stets langsamer gehen. Das heißt aber auch, dass Alice ähnliches feststellen müsste! Relativ zu Alice bewegt sich Bob mit der Geschwindigkeit $-v$. Das erscheint verwirrend, streicht aber noch einmal heraus, das es kein absolutes Bezugssystem und damit auch keinen ausgezeichneten Beobachter gibt. Kann man den Effekt der Zeitdilatation experimentell belegen? Im Ives-Stilwell-Experiment wurde die Zeitdilatation in Studien zur Dopplerverschiebung des Lichts erstmals nachgewiesen [**?**].

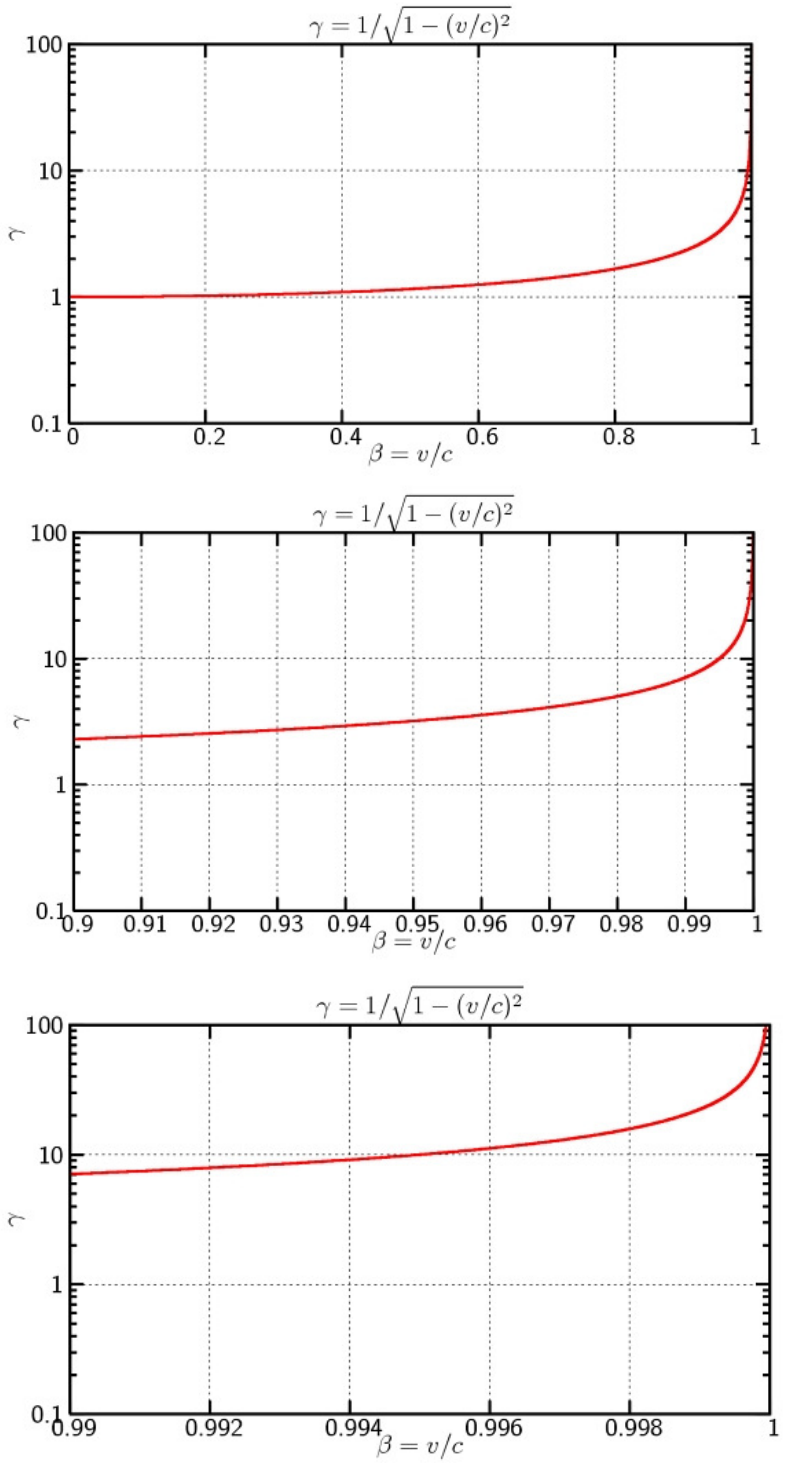


Abb. 3.13: Entwicklung des γ-Faktors, wenn sich die Geschwindigkeit des Objekts der Lichtgeschwindigkeit annähert.

Optical Clocks and Relativity [?]: Observers in relative motion or at different gravitational potentials measure disparate clock rates. These predictions of relativity have previously been observed with atomic clocks at high velocities and with large changes in elevation. We observed time dilation from relative speeds of less than 10 meters per second by comparing two optical atomic clocks connected by a 75-meter length of optical fiber. We can now also detect time dilation due to a change in height near Earth's surface of less than 1 meter. This technique may be extended to the field of geodesy, with applications in geophysics and hydrology as well as in space-based tests of fundamental physics.

The most difficult part ... is abandoning some of the important old concepts. Any good physicist would be willing to acquire new concepts but even the best physicists are sometimes quite unwilling to leave some of the old and apparently safe concepts ... and even nowadays there are papers appearing here and there in which people just refuse to understand the theory of special relativity. They cannot understand it because they are not able to go away from the old concept of *simultaneous events [?].*

Werner Heisenberg, 1963

Lichtuhr reloaded I

Befinden sich in A zwei synchrone Uhren und bewegt man die eine derselben auf einer geschlossenen Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie wieder nach A zurückkehrt, was t Sek. dauern möge, so geht die letztere Uhr bei ihrer Ankunft in A gegenüber der unbewegt gebliebenen um 1/2·t·(v/c) Sekunden nach. Man schließt daraus, daß eine am Erdäquator befindliche Unruheuhr um einen sehr kleinen Betrag (10^{-7} s pro Umlauf) langsamer laufen muss als eine genau gleich beschaffene, sonst gleichen Bedingungen unterworfene, an einem Erdpole befindliche Uhr [?].

Alber Einstein, 1905

Um die Erkenntnisse zu vertiefen, weitere Überlegungen: Dieses Gedankenexperiment wird in zwei Etappen durchgeführt, siehe Abb. 3.14. Im ersten Schritt (A) ergibt sich nochmal das Phänomen der Zeitdilatation aus der Betrachtung von Zeitabständen. Wie lange dauert ein Ereignis in unterschiedlichen Bezugssystemen? Wichtig für die spätere Analyse ist der Ausdruck, der den Lichtweg mit der Laufzeit des Lichtpulses verbindet. Die später folgende Analyse des Experiments führt zur Gleichung für die Längenkontraktion. Beide Beobachter bewegen sich mit demselben Tempo ($|v|$) auf die Lichtuhr zu. Betrachten wir zunächst die Situation aus dem Blickwinkel eines Beobachters im Bezugssystem A. Abb. 3.15 zeigt, was diese Person beobachtet. Eine weitere Information steht uns noch zur Verfügung: In der Zeitspanne T_A bewegt sich der Spiegel nach rechts, und zwar um:

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{2 \cdot x_A}{v_A} \\ v_A \cdot T_A &= 2 \cdot x_A \end{aligned} \tag{3.10}$$

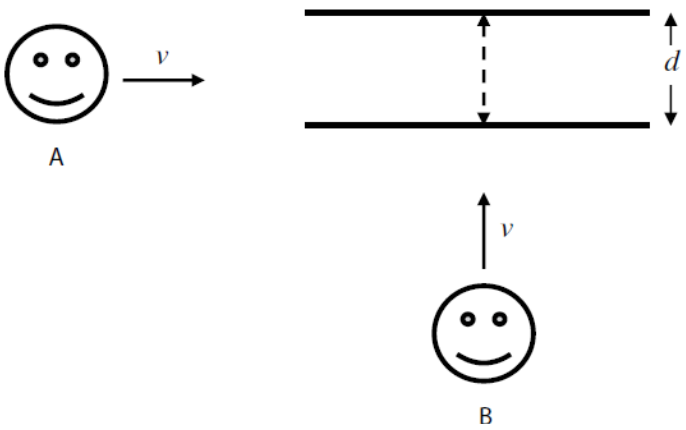


Abb. 3.14: In einer Lichtuhr bewegt sich ein Lichtblitz zwischen zwei parallelen Spiegeln im Abstand d hin und her. Die sich daraus ergebende Taktperiode ist $T_{clock} = 2\,d/c$. Die Beobachter in den Bezugssystemen A und B bewegen sich relativ in Bezug auf die Lichtuhr mit der Geschwindigkeit $|v|$. Allerdings bewegen sie sich von unterschiedlichen Richtungen auf die Lichtuhr zu [**?**].

Wir nutzen wieder Pythagoras:

$$\begin{aligned} D_A^2 &= d^2 + x_A^2 \\ D_A^2 &= d^2 + \left(\frac{v_A \cdot T_A}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Man kann sich klarmachen, dass es auch einen Zusammenhang zwischen T_A und D gibt, siehe Abb. 3.15:

$$T_A = \frac{2 \cdot D}{c} \tag{3.12}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} T_A^2 &= \frac{4\,d^2}{c^2} + \frac{4}{c^2}\frac{v_A^2 \cdot T_A^2}{4} \\ T_A^2 &= \frac{4\,d^2}{c^2} + \frac{v_A^2 \cdot T_A^2}{c^2} \\ T_A^2 - \frac{T_A^2 \cdot v_A^2}{c^2} &= \frac{4\,d^2}{c^2} \\ T_A^2\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) &= \frac{4\,d^2}{c^2} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Berücksichtigt man den Takt der Lichtuhr $T_{clock} = 2\,d/c$,

$$T_A^2\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) = \frac{4\,d^2}{c^2} = T_{clock}^2 \tag{3.14}$$

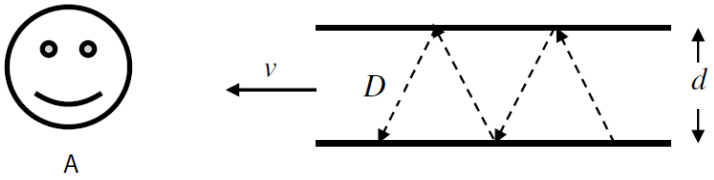


Abb. 3.15: Beobachter im Bezugssystem A beobachtet, wie sich die Lichtuhr mit der Geschwindigkeit auf ihn zubewegt [**?**].

findet man -nicht überraschend- wieder die Gleichung für die Zeitdilatation:

$$T_A = \frac{T_{clock}}{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} \tag{3.15}$$

Die Lichtuhr geht für einen Beobachter im Bezugssystem im Bezugssystem A langsamer. Was aber passiert wenn wir uns die Uhr aus der Sicht eines Beobachter im Bezugssystem B anschauen? Die Antwort kommt später, aber Sie können schon mal überlegen, was sich ändert. In Tabelle 3.1 ist berechnet, wie sich der Wert von γ ändert, wenn die Geschwindigkeit des Objekts der Lichtgeschwindigkeit nahekommt. Andererseits bemerkt man, dass im ganz normalen Leben, der Faktor γ keine Rolle spielt, d.h. $\gamma \approx 1$ für $v \ll c$. Den Effekt der Zeitdilatation kann man normalerweise -also im Rahmen der Newtonschen Mechanik- vernachlässigen. Die Rechnungen vereinfachen sich, wenn man die Geschwindigkeit der Objekte in Relation zur Lichtgeschwindigkeit angibt. Beispielsweise ergibt sich für β und γ bei einem Wert von v=$0.8 \cdot c$:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} \\ \beta^2 &= \frac{(0.8 \cdot c)^2}{c^2} = (0.8)^2 = 0.64 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Für den γ-Faktor ergibt sich:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{2}}} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - 0.64}} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{0.36}} \\ \gamma &= \frac{1}{0.6} \\ \gamma &= 1.67 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Relativ zu einem ruhenden Beobachter gehen bewegte Uhren langsamer.

Geschwindigkeit	Lorentzfaktor	äquivalente Zeitspanne zu 1 s auf der Erde
$0.009\,c$	1.00008	1.00008 s
$0.09\,c$	1.008	1.008 s
$0.9\,c$	2.29	2.29 s
$0.99\,c$	7.09	7.09 s
$0.999\,c$	22.37	22.37 s
$0.9999\,c$	70.71	1 m 11 s
$0.99999\,c$	223.62	3 m 44 s
$0.999999\,c$	707.11	11 m 47 s
$0.9999999\,c$	2236.07	37 m 16 s
$0.99999999\,c$	7071.07	1 hr 58 m
$0.999999999\,c$	22360.68	6 hr 12 m

Tab. 3.1: Auswirkung der Zeitdilatation auf den Gang von Uhren bei $v \to c$.

Dies ist ein Merksatz, der Aussagen über bewegte Uhren macht. Der Effekt ist nicht auf Lichtuhren beschränkt, sondern gilt für alle Zeitmesser, chemische Reaktionen, den radioaktiven Zerfall und auch für biologische Uhren. Warum muss das so sein? Stellen Sie sich vor, eine Lichtuhr und ihre eigene Uhr befinden sich zueinander in Ruhe. Beide Uhren zeigen gerade 12 Uhr an, sind also synchronisiert. Nun werden die Uhren mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt. Sie stellen fest, dass im Gegensatz zu ihrer mechanischen Uhr die Lichtuhr plötzlich langsamer geht. Eine solche Beobachtung widerspräche dem Relativitätsprinzip (Kapitel *Äther*)! Warum? Man hätte eine einfache Methode gefunden, den Bewegungszustand zu bestimmen. Stimmen die Uhren weiter überein, ruhen die Uhren. Wenn die Lichtuhr langsamer geht, wird sie bewegt.

Measurement of the Relativistic Doppler Shift in Neon [?]: The relativistic Doppler shift is measured by the counting of the frequency difference between two cw dye lasers. One laser is locked to a two-photon transition in a fast beam of neon, and the other is locked to the same two-photon transition in thermal neon. The experimental result is compared to the prediction of special relativity. The result is in excellent agreement with this theory. An accuracy of $4 \cdot 10^{?5}$ is obtained, which provides the most accurate direct verification of time dilatation to date.

Stimmen diese Überlegungen zur Zeitdilatation auch für Betrachtungen zu mechanischen Uhren? Die Antwort ist JA. Wenn zwei Uhren in ihrem Gang auf der Erde übereinstimmen und an Bord einer Rakete nicht, dann hätte man eine Möglichkeit gefunden, den Bewegungszustand des Raumschiff unabhängig von einem anderen Bezugssystem zu bestimmen. Dies widerspricht aber dem Postulat, dass alle Bewegung relativ ist.

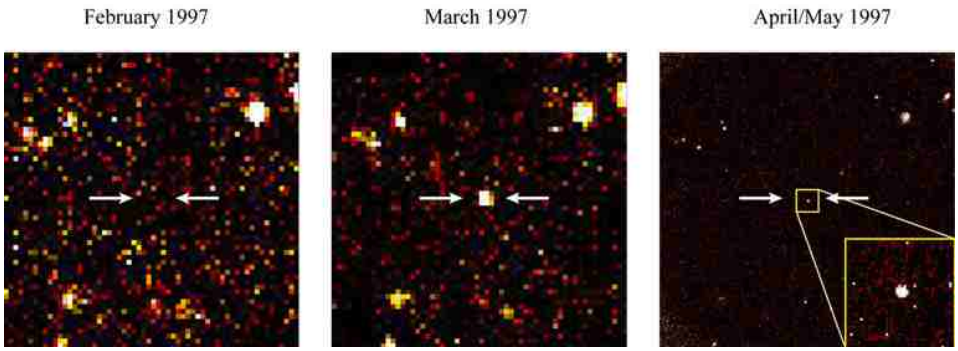


Abb. 3.16: Aufnahmen von SN1997ap vor (Links) und nach (Mitte) der Supernova Explosion. Das rechte Bild zeigt eine Aufnahme mit verbesserter Auflösung [**?**].

Anwendungen

Oh dicker Verstand. Oh blinde Beobachter des Himmels.[9]

Tycho Brahe, 1573

Supernova-Explosionen sind großes kosmisches Kino und Astronomen sind stets auf der Suche noch solchen Ereignissen, weil sich anhand der Dynamik viele der ablaufenden Prozesse studieren lassen [**?**], siehe Abb.3.16. Interessant wird es für die Astrophysik, wenn man einen Beobachter in der Nähe eines möglichen Kandidaten entdeckt. So kürzlich geschehen bei der Riesensonne μ^2 Scorpii [**?**]. Diese hat die 9-fache Masse der Sonne und wird umkreist von zwei Riesenplaneten. Der eine Exoplanet hat die 14-fache, der Andere die 18-fache Masse von Jupiter. Damit ist ein erstes Sonnensystem mit Planeten gefunden, wobei klar ist, dass der Heimatstern als Supernova endet. Was lernt man, wenn sich zwei Sterne umkreisen?

Ein Beispiel aus der Astrophysik

Die Zeitdilatation hat Einfluss auf astronomische Beobachtungen. Man betrachtet, wie bei Schoemaker-Levy 9 astrophysikalische Großereignisse. Dazu gehören die Explosionen

[9] Die Bemerkung bezieht sich auf die Astronomen (Anhänger des Ptolemäischen Weltbildes), die an der Bedeutung von Brahes Entdeckung eine Supernova für die Astronomie zweifelten. Tycho Brahe hat übrigens seinen Nasenrücken in einem Schwertduell, während seines Studiums an der Universität Rostock im Jahr 1566 verloren und trug für den Rest seines Lebens eine Prothese. Tycho Brahes Entdeckung inspirierte auch Edgar Allen Poe zu seinem Gedicht *Al Aaraaf*.

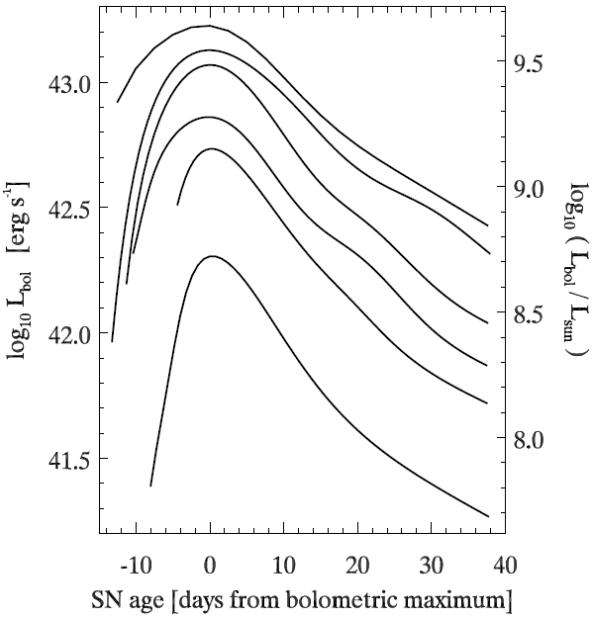


Abb. 3.17: Bolometrische Lichtkurven von sechs Ia Supernovas Explosionen, die in unterschiedlicher Entfernung von der Erde beobachtet wurden. Von oben nach unten: SNe 1991T, 1999ee, 1994D, 1992A, 1993H und 1991bg [**?**].

von Supernovae. Man unterscheidet zwischen Typ I[10] und Typ II.[11] Wilson vermutete, dass man Effekte der Zeitdilatation in den Lichtkurven von Typ I Supernova beobachten könnte [**?**]. Für diesen Typ einer Sternexplosion sind die Modelle weit fortgeschritten und weitestgehend verstanden. Man kann ziemlich genau vorhersagen, wie ein solcher Sternkollaps abläuft. Zum Beispiel ist bekannt, wie hell die Nova im Nachhinein leuchtet. Genauer gesagt, die über die Zeit aufgenommene Helligkeitskurve ist eine genau gehende Uhr, vergleichbar der Lichtuhr im vorherigen Gedankenexperiment. Abb. 3.17 zeigt Beispiele von Supernova-Lichtkurven [**? ?**].

[10] *Lexikon:* **Typ Ia Supernova** Explosionen beobachtet man bei Weißen Zwergen, die Teil eines binären Systems sind. Das Schicksal des Begleitsterns ist, dass er Masse an den Weißen Zwerg abgibt. Wenn der Weiße Zwerg eine kritische Masse (etwa 1.4 Sonnenmassen) erreicht, explodiert der Weiße Zwerg in einer Supernova Explosion. Dabei wird ungefähr eine Sonnenmasse in Form von Kohlenstoff und Sauerstoff in Nickel-56 umgewandelt. Im anschließenden radioaktiven Zerfall entstehen Kobalt-56 und Eisen-56. Der Ausbruch ist extrem hell und über Milliarden von Lichtjahren entfernt zu beobachten. Die Leuchtkraft von Typ Ia Supernova Explosionen nimmt exponentiell mit einer Halbwertszeit von 60 Tagen ab, so dass diese kosmischen Ereignisse leicht zu identifizieren sind. Sie eignen sich deshalb als astronomische Standardkerzen und damit als Entfernungsmaßstab. Der Vollständigkeit halber noch die Charakterisierung weiterer Spielarten von Supernova-Explosionen vom Typ I:

- **Typ Ib Supernova** Kernkollaps einer Sonne, der seine äußere Hülle aus Wasserstoff verloren hat.
- **Typ Ic Supernova** Kernkollaps einer Sonne, der sowohl seine äußere Hülle aus Wasserstoff als aus Helium verloren hat.

[11] *Lexikon:* Supernova Explosionen vom **Typ II** erhöhen ihre Helligkeit um einen Faktor 10^9, was einer Erhöhung ihrer Leuchtkraft um 23 Größenordnung entspricht. Damit erhöht sich sich ihre optische Sichtbarkeit um einen Faktor 30 000. Das macht sie ebenfalls zu Standardkerzen, mit der Entfernungen bis 10^3 Mpc bestimmt werden können.

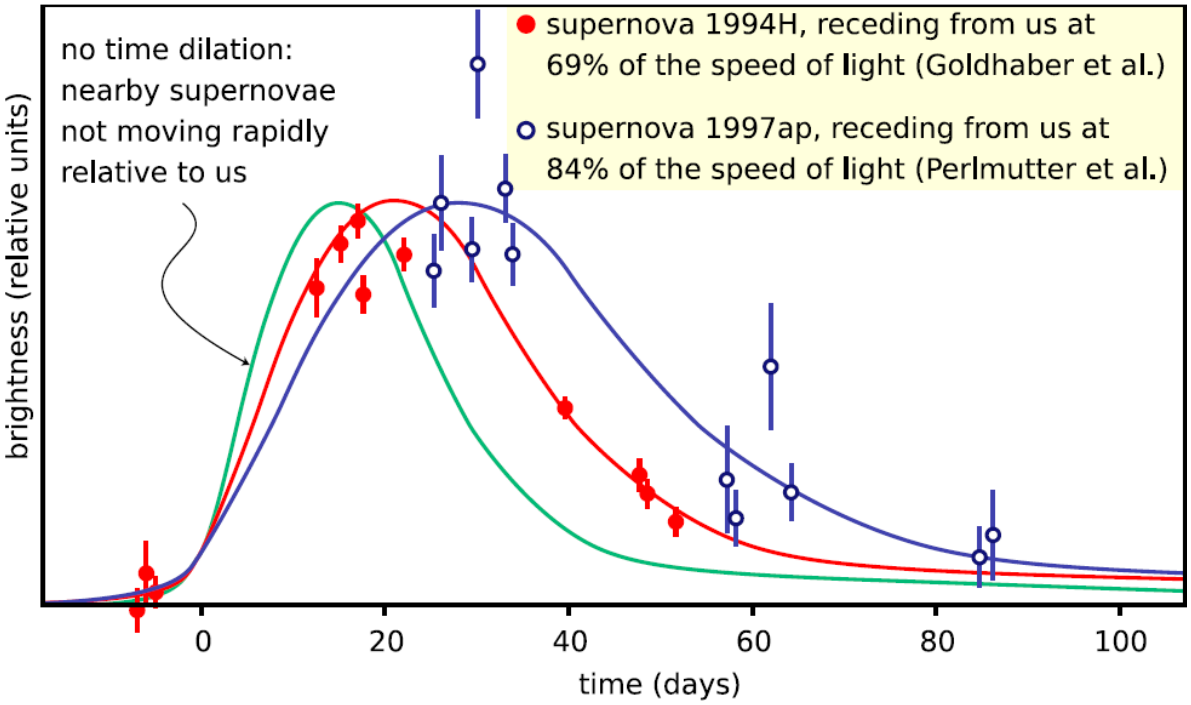


Abb. 3.18: Die Lichtkurven zeigt das Phänomen der Zeitdilatation, weil sich die Supernovae relativ zu uns bewegen [**?**].

Cosmological time dilation using type Ia supernovae as clocks [**?**]**:** Although there is little doubt at present that the redshift of distant galaxies is due to an expansion of the universe, we present in this paper a direct confirmation for the cosmological expansion. This work is based on the first results from a systematic search for high redshift Type Ia supernovae. We discovered over twenty seven SNe, before or at maximum light. In this paper we report on the first seven of these, with redshift z=0.35-0.46. Type Ia SNe are known to be a homogeneous group of SNe, to first order, with very similar light curves, spectra and peak luminosities. In this paper we report that the light curves we observe are all broadened (time dilated) as expected from the expanding universe hypothesis. Small variations from the expected $1+z$ broadening of the light curve widths can be attributed to a width-brightness correlation that has been observed for nearby SNe ($z < 0.1$). We show in this paper the first clear observation of the cosmological time dilation for macroscopic objects.

Bestimmt man die Helligkeitskurven unterschiedlicher Nova-Explosionen (siehe Abb. 3.18) stellt man fest, dass es Unterschiede im Zeitablauf gibt, die man nur dadurch erklären kann, dass die Uhr im Bezugssystem Nova für einen Astronomen auf der Erde langsamer geht [**?**].[12] Rechnet man zurück, ergibt sich, dass sich die Sterne mit erheblicher

[12] The Nobel Prize in Physics 2011 was divided, one half awarded to Saul Perlmutter, the other half jointly to Brian P. Schmidt and Adam G. Riess *for the discovery of the accelerating expansion of*

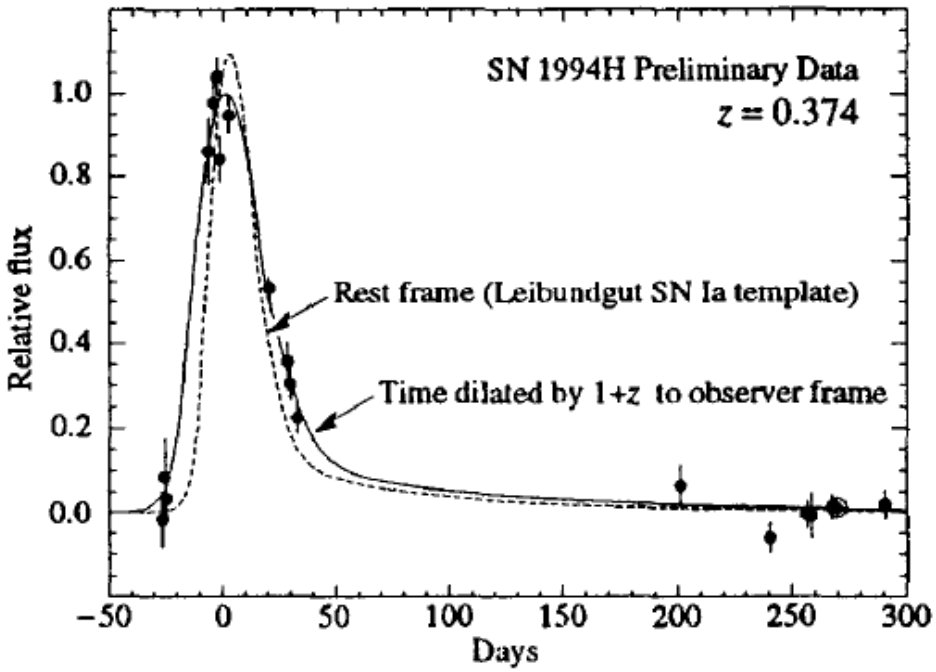


Abb. 3.19: Lichtanpassungskurve für SN94H unter der Hypothese $d = 1$ gestrichelte Kurve und $d = 1 + z$ durchgezogene Kurve, wobei die kosmologische Rotverschiebung $z = 0.374$ beträgt [**?**].

Geschwindigkeit von uns entfernen. Abb. 3.19 zeigt ein Beispiel.[13] Mehr dazu im Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt.*

Moving clocks run slow!

Ein Beispiel aus der Meteorologie

During October, 1971, four cesium atomic beam clocks were flown on regularly scheduled commercial jet flights around the world twice, once eastward and once westward, to test Einstein's theory of relativity with macroscopic clocks (Fig. 3.20). ... Relative to the atomic time scale of the U.S. Naval Observatory, the flying clocks lost 59 ± 10 nanoseconds during the eastward trip and gained 273 ± 7 nanosecond during the westward trip, where the errors are the corresponding standard deviations. These results provide an unambiguous empirical resolution of the famous clock *paradox* with macroscopic clocks [**?**].

Ein Experiment auf der Erde hat ebenfalls nachgewiesen, dass bewegte Uhren lang-

the Universe through observations of distant supernovae

[13] *Lexikon:* Die **Kosmologische Rotverschiebung** wird in der Astrophysik mit der dimensionslosen Größe z angegeben. Sie berechnet sich aus der Verschiebung der Wellenlänge einer charakteristischen Emission eines entfernten Objekts $\lambda_{entfernt}$ im Vergleich zur der Wellenlänge λ_{Erde}, die man auf der Erde messen würde ($z = \lambda_{entfernt}/\lambda_{Erde} - 1$).



Abb. 3.20: Hafele und Keating mit Atomuhr im Flugzeug beim Flug um den Erdball.

samer gehen. Dazu sind die Forscher mit einer ziemlich genau gehenden Atomuhr in einem Flugzeug um die Erde herumgeflogen. Mal in östlicher und mal in westlicher Richtung. Danach wurde die Uhrzeit mit einer ruhenden Atomuhr verglichen und tatsächlich konnte der Effekt der Zeitdilatation nachgewiesen werden. Rechnerisch sind die Apollo-Astronauten bei ihrem acht Tage dauernden Flug zum Mond im Vergleich zu ihren Kollegen am Boden um 250 μs weniger gealtert. Es sei angemerkt, dass, z.B. aufgrund des Flugzeugstarts, Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie ebenfalls berücksichtigt werden mussten. Das ist aber ein anderes Thema.

Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities [**?**]**:** Time dilation is one of the most fascinating aspects of special relativity as it abolishes the notion of absolute time. It was first observed experimentally by Ives and Stilwell in 1938 using the Doppler effect. Here we report on a method, based on fast optical atomic clocks with large, but different Lorentz boosts, that tests relativistic time dilation with unprecedented precision. The approach combines ion storage and cooling with optical frequency counting using a frequency comb. 7Li+ ions are prepared at 6.4% and 3.0% of the speed of light in a storage ring, and their time is read with an accuracy of 2×10?10 using laser saturation spectroscopy. The comparison of the Doppler shifts yields a time dilation measurement represented by a Mansouri–Sexl parameter , consistent with special relativity. This constrains the existence of a preferred cosmological reference frame and CPT- and Lorentz-violating 'new' physics beyond the standard model.

Inzwischen ist es gelungen den Effekt der Zeitdilatation bei alltäglichen Geschwindigkeiten mit Hilfe von Atomuhren nachzuweisen, siehe Abb. 3.21. Einzelnes ^{27}Al-Ionen werden in einer Paul-Falle gespeichert. Die zwei Atomuhren, 75 m voneinander getrennt, sind mit einem Lichtwellenleiter optisch verbunden und tauschen Zeitsignale aus. Die Signale liegen im Bereich von 10^{15} Hz und haben Frequenzunsicherheiten im Bereich von 10^{-17}. Es war möglich, eine Frequenzverschiebung aufgrund der Zeitdilatation von $\sim 10^{-16}$ bei Geschwindigkeiten unter 10 m/s nachzuweisen [**?**].

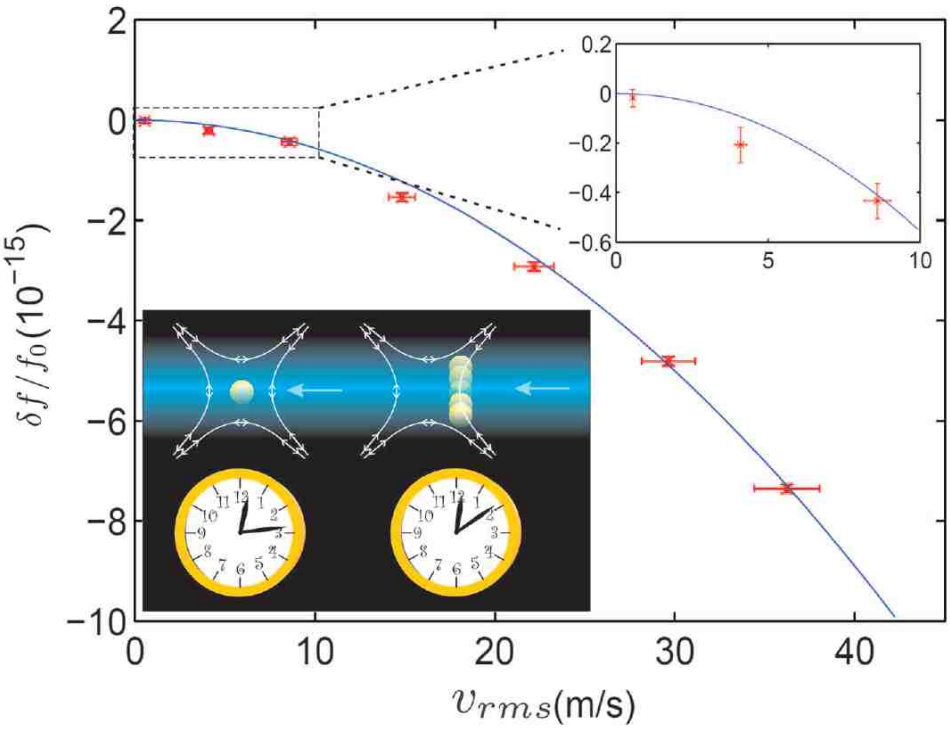


Abb. 3.21: Relativistische Zeitdilatation bei alltäglichen Geschwindigkeiten (10 m/s=36 km/h). (Unterer linker Einschub) Wenn das Aluminiumion in einer der Zwillingsuhren aus dem Zentrum des einschließenden Hochfrequenz-Quadrupolfelds (weiße Feldlinien) verschoben wird, führt das Ion eine harmonische Bewegung aus und erfährt eine relativistische Zeitdilatation. In der Abbildung ist die Frequenzdifferenz zwischen der bewegten und der ruhenden Uhr aufgetragen. Die durchgezogene Kurve zeigt die gute Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Relativitätstheorie [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Welcher Wert von γ ergibt sich für $v{=}0.65c$?

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.65\cdot)^2}{c^2}}}\\ \gamma &= 1.32\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2: Bob steht auf einem kleinen Asteroiden. Alice fliegt mit ihrem Raumschiff vorbei. In dem Moment, in dem die Rakete den Asteroiden passiert, sendet Alice zwei Lichtpulse im Abstand von 1 ns. Welchen Zeitabstand der Pulse bestimmt Bob?[14]

(a) Größer als eine Nanosekunde!

(b) Genau eine Nanosekunde!

(c) Kleiner als eine Nanosekunde

Aufgabe 2.3: Die Hansa4Ever fliegt mit $0.9c$ an der Erde vorbei. Ein Fan auf der Erde bemerkt: *Eure Uhr geht falsch!*. Rückfrage: *Um wieviel?*

$$\begin{aligned}t_{rocket} &= \gamma \cdot t_{earth}\\ \frac{t_{rocket}}{t_{earth}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{rocket}^2}{c^2}}}\\ \frac{t_{rocket}}{t_{earth}} &= \frac{1}{\sqrt{1-(0.9)^2}}\\ \frac{t_{rocket}}{t_{earth}} &= \frac{1}{\sqrt{1-0.81}}\\ \frac{t_{rocket}}{t_{earth}} &= \frac{1}{\sqrt{0.19}}\\ \frac{t_{rocket}}{t_{earth}} &= \frac{1}{0.436}\\ \frac{t_{rocket}}{t_{earth}} &= 2.3\end{aligned}$$

Aufgabe 2.4: Wenn das Raumschiff von Alice an Bob vorbei fliegt, sendet Bob zwei Lichtpulse an Alice im Abstand von einer Nanosekunde ($10^{?9}$ s) gemäß seiner Uhr. Welchen Zeitabstand stellt Alice fest?[15]

[14] Antwort: (a)
[15] Antwort: (a)

(a) Größer als eine Nanosekunde!

(b) Genau eine Nanosekunde!

(c) Kleiner als eine Nanosekunde

Aufgabe 2.5: Ein außerirdischer Fußballfan beobachtet die vier Wochen dauernden Spiele der Fußball -Weltmeisterschaft von seinem rasenden Raumschiff Hansa4Ever. Die Rakete bewegt sich mit hoher Geschwindigkeit relativ zur Erde. Wie lang dauert die Weltmeisterschaft für den Fan? Wir lassen mal außer acht, wann der Fan die Spiele anschaut.[16]

(a) Länger als 4 Wochen!

(b) Genau 4 Wochen!

(c) Kürzer als 4 Wochen!

Aufgabe 2.6: Ein freies Neutron - also nicht am Kern gebunden (Siehe Kapitel *Kerne*)- zerfällt in seinem Ruhesystem innerhalb von $\tau_{neutron}$=15 Minuten[17] in ein Elektron, ein Proton und ein Neutrino. Wie hoch muss die Anfangsgeschwindigkeit des Neutrons sein, damit es, von der Sonne kommend, die Erde vor seinem Zerfall erreicht?

Der Abstand zur Sonne beträgt d_{sun}=$11 \cdot 10^{10}$ m. Umgerechnet auf Sekunden ergibt sich eine Zerfallszeit von $\tau_{neutron}$=900 s. Das Neutron hat -von der Erde aus betrachtet- eine Flugzeit von

$$\begin{aligned} t_{earth} &= \frac{d_{sun}}{v_{neutron}} \\ t_{earth} &= \frac{11 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}}{v_{neutron}} \end{aligned}$$

Die Lebensdauer τ_{earth} des fliegenden Neutrons wird von einem Beobachter auf der Erde mit

$$\begin{aligned} t_{earth} &= \frac{t_{neutron}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t_{earth} &= \frac{900\,\mathrm{s}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

[16] Antwort: (a)

[17] Wie man im nächsten Kapitel (*Zerfall des Myons*) feststellen wird, ist die angegebene Zeitspanne die mittlere Zerfallszeit der Neutronen.

bestimmt. Setzt man beide Gleichungen zusammen, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{d_{sun}}{v_{neutron}} &= \frac{t_{neutron}}{\sqrt{1 - v_{neutron}^2/c^2}} \\
\frac{v_{neutron}}{\sqrt{1 - v_{neutron}^2/c^2}} &= \frac{d_{sun}}{t_{neutron}} \\
\frac{v_{neutron}}{1 - v_{neutron}^2/c^2} &= \left(\frac{d_{sun}}{t_{neutron}}\right)^2 \\
\frac{v_{neutron}^2}{1 - v_{neutron}^2/c^2} &= \left(\frac{11 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}}{900\,\mathrm{s}}\right)^2 \\
\frac{v_{neutron}^2}{1 - v_{neutron}^2/c^2} &= 1.49 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = a \\
v_{neutron}^2 &= a \cdot (1 - v_{neutron}^2/c^2) \\
v_{neutron}^2 &= a - \frac{a \cdot v_{neutron}^2}{c^2} \\
v_{neutron}^2 \cdot \left(1 + \frac{a}{c^2}\right) &= a \\
v_{neutron}^2 &= \frac{a}{1 + \frac{a}{c^2}} \\
v_{neutron} &= \sqrt{\frac{a}{1 + \frac{d \cdot a}{c^2}}} \\
v_{neutron} &= 1.047 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.7: Alice fährt im Hochgeschwindigkeitszug ICC. Ist die folgende Aussage richtig oder falsch: *Wenn man bei dieser Geschwindigkeit den Gang seiner Uhr kontrolliert, erhält Sie einen anderen Wert, als wenn der Zug am Bahnsteig steht.*[18]

(a) STIMMT!

(b) STIMMT NICHT!

Aufgabe 2.8: A rocket ship travels away from the earth at 300 m/sec. How many years must elapse before a clock in the ship and one on the ground differ by 1 sec?[19]

[18] Antwort: (b)
[19] Answer: $6.3 \cdot 10^4$ years

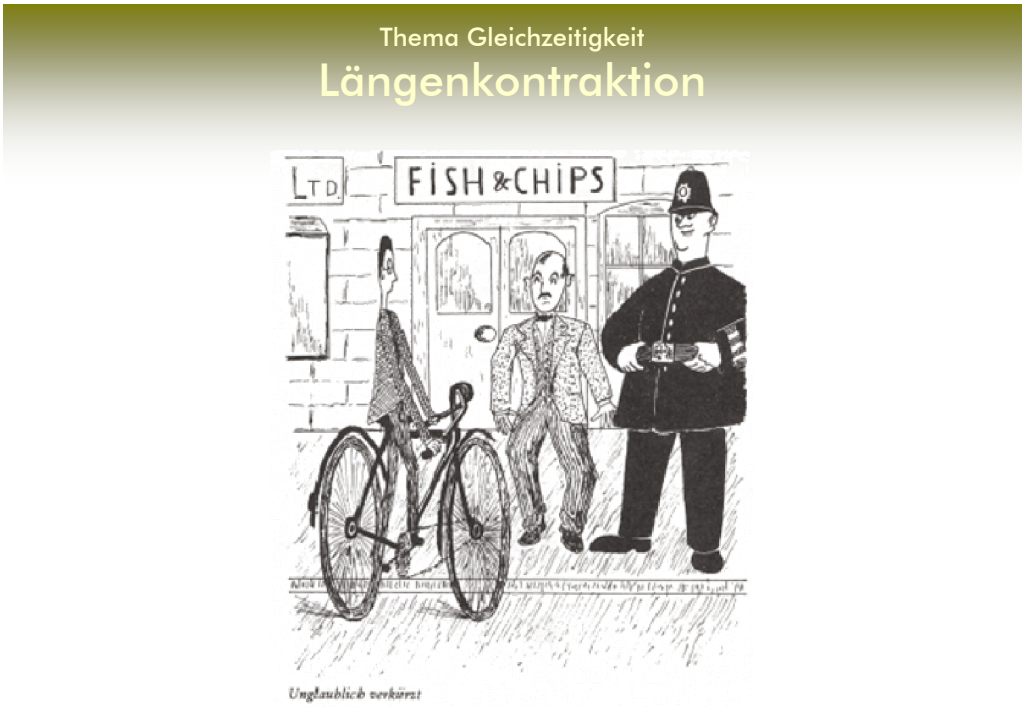
Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter Eigenzeit?
2. Beeinflusst Bewegung den Takt einer Uhr, wenn sich ein Beobachter mit der Uhr weiterbewegt?
3. Erscheint die verstrichene Zeit eines Vorgangs einem Beobachter länger, wenn er sich relativ zu dem Vorgang bewegt?
4. Die Andromedagalaxis ist 2 Millionen Lichtjahre entfernt. Kommt man auch in kürzerer Zeit dorthin?
5. Schlägt Ihr Herz langsamer oder schneller, wenn sie einen ultraschnellen Raumflug durchführen?
6. Beschreiben Sie das Phänomen der Zeitdilatation und erläutern Sie, unter welchen Bedingungen diese berücksichtigt werden muss?
7. Wem erscheint der Zeitablauf eines Prozesses länger. Einem Beobachter, der sich relativ zum Ereignis bewegt, oder einem Beobachter, der sich mitbewegt? Welcher der Beobachter misst die Eigenzeit?
8. Wem erscheint die Länge eines Objekts länger. Einem Beobachter, der sich relativ zum Körper bewegt, oder einem Beobachter, der sich mit dem Objekt mitbewegt? Welcher der Beobachter misst die Eigenlänge?
9. Hängt die Aussage *Bewegte Uhren gehen langsamer* von der Bewegungsrichtung ab?
10. Was ist das besondere an Typ 1A Supernova Explosionen?
11. Ein Astronaut in bester physischer Verfassung hat einen Ruhepuls von 52 bpm (Herzschlägen pro Minute). Angenommen, der Astronaut befindet sich in einem Raumschiff, dass sich mit 0.82c (γ=2) in Bezug auf die Erde bewegt. Welchen Puls misst er (52 bpm, 26 bpm, 104 bpm)?
12. Eine Person sendet einen Lichtimpuls aus. Das Licht trifft auf einen Spiegel und kehrt wieder an den Ausgangspunkt zurück. Für die Person dauert der Vorgang einen Zeit Δt. Welche Zeitdauer misst ein Beobachter auf einem vorbeifahrenden Zug?
13. Ändert sich der Gang einer Uhr für einen mitbewegten Beobachter?
14. Zwei Uhren werden synchronisiert. Eine der Uhren verbleibt am Standort, während die andere in einen Orbit um die Erde geschickt wird. Welche Uhr läuft langsamer. Sind die Uhren wieder synchron, wenn die Uhr aus dem Orbit zurückgebracht wird?

15. Wie kann man in die Zukunft reisen ohne zu altern?

16. Wenn wir 100 Lichtjahre weit weg reisen würden, würden wir die Erde wirklich so sehen, wie sie vor 100 Jahren war?

3.3 Längenkontraktion



There once was a young man named Fisk,
Whose fencing was extremely brisk,
So fast was his action,
The Lorentz contraction,
Foreshortened his foil to a disk.

Limerick von George Gamow [**?**]

Das Titelbild bezieht sich auf eine Buchreihe *Mr. Tompkins seltsame Reisen durch Kosmos und Mikrokosmos* in der George Gamov den Leser in Welten entführt, in denen die Naturkonstanten grob unterschiedliche Werte annehmen [**?**]. Hier zum Beispiel spielt der Autor durch, was passieren würde, wenn die Lichtgeschwindigkeit nur 10 m/s wäre, siehe Abb. 3.22. George Gamov wird ihnen im Rahmen der Vorlesung nochmals in den Kapiteln *Tunneleffekt* und *Kerne* begegnen. Er ist einer der Urväter der Big Bang Theorie und erklärte den α-Zerfall auf der Basis des quantenmechanischen Tunneleffekts. Die

A science fantasy book called *Mr Tompkins in Wonderland* (1940), by physicist George Gamow, imagined a world in which the speed of light was only 10 m/s (20 mi/h). Mr Tompkins had studied relativity and when he began "speeding" on a bicycle, he "expected that he would be immediately shortened, and was very happy about it as his increasing figure had lately caused him some anxiety. To his great surprise, however, nothing happened to him or to his cycle. On the other hand, the picture around him completely changed. The streets grew shorter, the windows of the shops began to look like narrow slits, and the policeman on the corner became the thinnest man he had ever seen. 'By Jove!' exclaimed Mr Tompkins excitedly, 'I see the trick now. This is where the word *relativity* comes in.'"

Relativity does indeed predict that objects moving relative to us at high speed, close to the speed of light c, are shortened in length. We don't notice it as Mr Tompkins did, because $c = 3 \times 10^8$ m/s is incredibly fast. We will study length contraction, time dilation, simultaneity non-agreement, and how energy and mass are equivalent ($E = mc^2$).



Abb. 3.22: Auszug aus Gamows Buch *Mr. Tompkins in Wonderland*[**?**].

Texte werden heutzutage immer noch gelesen, wie der Nobelpreis für Chemie 2017[20] dokumentiert:

In 1968, George Gamow, a physicist, and Martynas Ycas, a microbiologist, published a popularscience book, Mr. Tompkins Inside Himself: Adventures in the New Biology, which tells a story about Mr. Tompkins as he explores the cellular architecture of his body on a dream journey through his bloodstream, guided by his doctor. While inspecting the structural details of single cells and organelles, Mr. Tompkins' guide enthusiastically informs him that this knowledge is based on studies using the electron microscope.

Ein weiteres Problem, dass mit dem Postulat endlicher Lichtgeschwindigkeit verbunden ist, bezieht sich auf die Bestimmung von Abständen, siehe Abb. 3.23. Kann man gleichzeitig Kopf und Flosse eines schwimmenden Fisches bestimmen? Wie bei der Zeitmessung muss man akzeptieren, das die Übertragung der Informationen Zeit kostet und die Messung aufgrund der Bewegung des Fisches falsch sein könnte.

Um die Problematik zu erfassen stellen wir uns vor, dass Bob am Bahnsteig Alice im Zug

[20] The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award Jacques Dubochet, Joachim Frank and Richard Henderson the Nobel Prize for Chemistry 2017 for *developing cryoelectron microscopy for the high-resolution structure determination of biomolecules in solution*

dabei beobachtet, wie sie die Länge eines Zollstocks bestimmt, der sich mit einer gewissen Geschwindigkeit ($v_{Zollstock}$) relativ zu den beiden bewegt. Das Verfahren ist erprobt. Beide messen die Zeit, die vergeht, wenn der Zollstock an einer bestimmten Markierung vorbei fliegt. Bob führt dieses Experiment durch und misst die Länge des Zollstocks mit $L_{Bob} = v \cdot \Delta t_{Bob}$. Nun führt Alice ihre Messung durch und findet $L_{Alice} = v \cdot \Delta t_{Alice}$. Da Alice sich in Bezug auf Bob bewegt, stellt Bob fest, dass Alice Uhr um den Faktor γ langsamer geht.

$$\frac{L_{Bob}}{L_{Alice}} = \frac{v \cdot \Delta t_{Bob}}{v \cdot \Delta t_{Alice}} \tag{3.18}$$

$$\frac{L_{Bob}}{L_{Alice}} = \frac{\Delta t_{Bob}}{\gamma \cdot \Delta t_{Bob}} \tag{3.19}$$

$$\frac{L_{Bob}}{L_{Alice}} = \frac{1}{\gamma} \tag{3.20}$$

$$\frac{L_{Bob}}{L_{Alice}} > 1 \tag{3.21}$$

Wegen dem Faktor γ kommt Alice zu einem anderen Messergebnis, auch wenn man anmerkt, dass sich die Relativgeschwindigkeit ($v_{Zollstock} - v_{Alice}$) zwischen Beobachter und Zollstock ändert. Bob stellt fest, dass der Zollstock, den Alice ausgemessen hat, kürzer ist. Wie man weiterdenkt, kommt ein verblüffendes Ergebnis heraus. Jeder Beobachter ist davon überzeugt, dass die Messung der Länge des Stabes im bewegten Bezugssystem eine geringere Länge ergibt, der Zollstock also verkürzt ist. Diese Erkenntnis unterstreicht nochmal die Aussage des Relativitätsprinzips (Kapitel *Äther*). Beobachter können ihren Bewegungszustand stets nur relativ zu einem anderen Beobachter angeben.

Ein Beispiel aus der Welt der Superhelden[4LP]

Jedermann weiß, dass sich Superman mit (fast) Lichtgeschwindigkeit bewegen kann. Ein Astronom auf der Erde stellt fest, dass der Superheld aufgrund seiner hohen Geschwindigkeit eine gewisse Zeitspanne braucht, um zum Planeten Neptun zu gelangen. Der Astronom hat aber schon mal von der Speziellen Relativitätstheorie und Zeitdilatation gehört: Im Bezugssystem Supermann gehen die Uhren langsamer. Bei nahezu Lichtgeschwindigkeit ist die Reisedauer für den Superhelden deutlich verkürzt. Kurzentschlossen teil er Supermann seine Erkenntnis mit. Supermann bei seiner Ehre gepackt, besteht darauf, das er Einsteins Postulate natürlich kennt und sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt. Der Ausweg: Die Weg zum Neptun hat sich aus der Sicht des Astronomen für Supermann verkürzt. Damit kann Supermann leben. Und im normalen Leben? Teilchen der kosmischen Strahlung erreichen extrem hohe Geschwindigkeiten. Ein Flug nach Andromeda verkürzt sich aufgrund der Längenkontraktion drastisch.

Lichtuhr reloaded II

Nochmals das Gedankenexperiment mit der Lichtuhr. Zwei Beobachter, Alice und Bob bewegen sich auf die Lichtuhr zu, siehe Abb. 3.14. Die Richtung, aus der sie sich nähern ist unterschiedlich, aber die Relativgeschwindigkeit (Tempo) ist gleich.

$$|v_A| = |v_B| \tag{3.22}$$

Die Annäherung von Alice haben wir schon behandelt und die Gleichung für die Zeitdilatation gefunden. Diese ergab sich für den ruhenden Beobachter aus der geometrischen Verlängerung des Lichtweges. Nun betrachten wir, was Bob feststellt. Dazu legen wird fest, dass Bob in seinem Bezugssystem ruht. Dann bewegt sich die Lichtuhr mit einer Geschwindigkeit v_B auf ihn zu. Während der Lichtblitz zwischen den Spiegeln hin und her läuft, rast die Lichtuhr auf Bob zu, siehe Abb. 3.24. Der Abstand der Spiegel könnte sich also für Bob möglicherweise ändern. Ein vergleichbares Szenario ist schon aus der Vorlesung *Äther* bekannt. Ein Boot bewegt sich mal flussaufwärts und mal flussabwärts. Wir wiederholen also in gewisser Weise das Michelson-Morley Experiment. Analog berechnet man die Zeit, die ein Lichtstrahl für einen Durchlauf benötigt. Hin- und Rückweg des Lichtpulses sind unterschiedlich. Für den Takt der Uhr findet Bob folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{D_B}{c+v_B} + \frac{D_B}{c-v_B} \\ T_B &= D_B \left(\frac{c-v_b}{c^2-v_B^2} + \frac{c+v_B}{c^2-v_B^2} \right) \\ T_B &= \frac{2\,c \cdot D_B}{c^2-v_B^2} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Die Ankunftszeiten der Lichtpulse werden also durch die relative Bewegung verändert. Die Differenz $(c^2 - v_B^2)$ wird vernachlässigbar, wenn die Relativgeschwindigkeit gering ist. Der Ausdruck vereinfacht sich in dem Fall zu $T_B = 2 \cdot d_{mirror} / c$ (relativ zum Beobachter ruhende Uhr, $D_B \approx d_{mirror}$). Das Szenario mit Alice und Bob war so gewählt, dass die Relativgeschwindigkeit zwischen Lichtuhr und den beiden Beobachter gleich ist. Sie müssen deshalb in beiden Bezugssystemen dieselbe Taktrate der Lichtuhr messen, siehe Gl. 3.15. Nur die Richtung ist eine andere. Ausgehend von der Taktrate der Lichtuhr im Ruhesystem $T_{clock} = 2\,d_{mirror}/c$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_A = \frac{T_{clock}}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} &= \frac{2\,c \cdot D_B}{c^2-v_B^2} = T_B \\ T_A = \frac{2\,d_{mirror}}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} &= \frac{2\,c \cdot D_B}{c^2-v_B^2} = T_B \end{aligned} \tag{3.24}$$

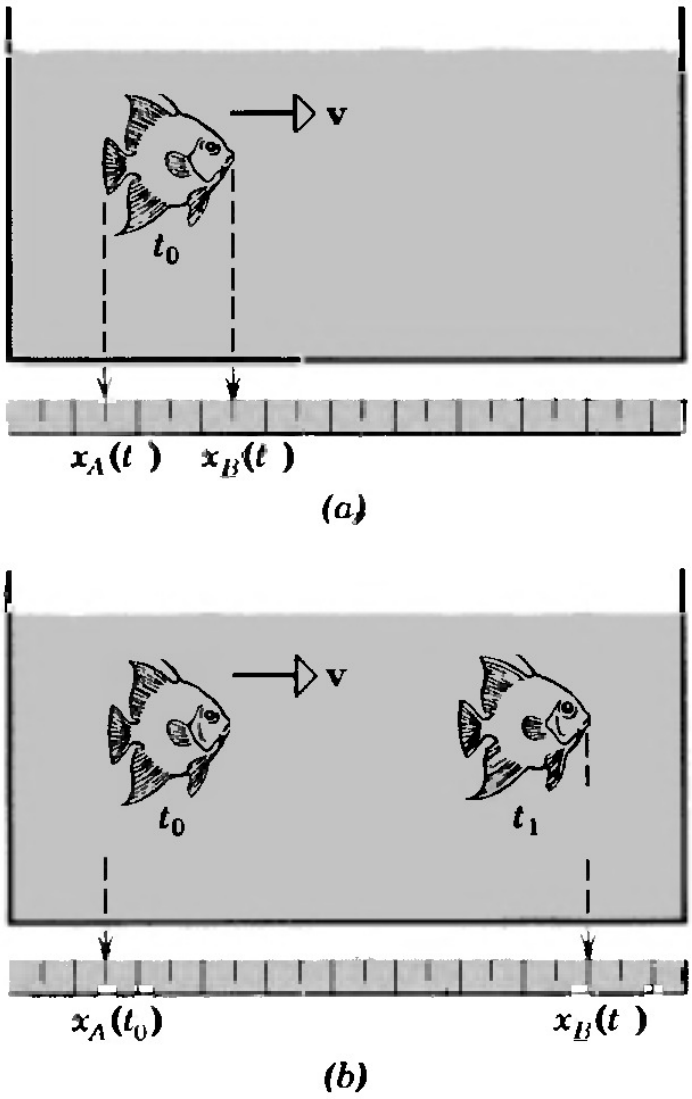


Abb. 3.23: *oben:* Um die Länge eines schwimmenden Fisches zu bestimmen, muss Maul und Schwanz gleichzeitig markieren. *rechts:* Es reicht nicht, die Werte nacheinander zu bestimmen [**?**].

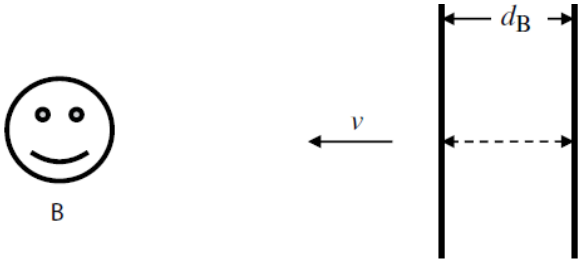


Abb. 3.24: Der Beobachter Bob im Bezugssystem B misst die Periode der Uhr, die sich mit einer Geschwindigkeit v_B auf ihn zubewegt [**?**].

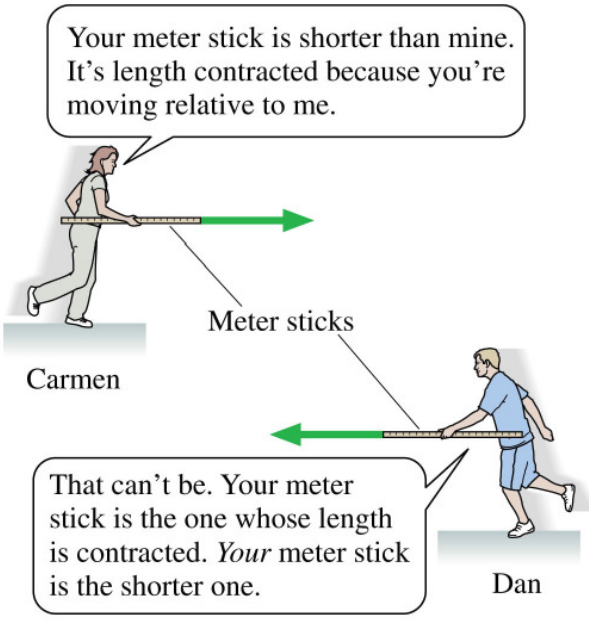


Abb. 3.25: Carmen und Dan vermessen die Stäbe des jeweils Anderen und kommen beide zu dem Schluss, dass der sich bewegende Stab verkürzt ist [**?**].

Aus diesem Ausdruck berechnen wir die Längenkontraktion:

$$\begin{aligned}
\frac{d_{mirror}}{D_B} &= \frac{c^2 \cdot \sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}{c^2 - v^2} \\
\frac{d_{mirror}}{D_B} &= \frac{c^2}{c^2} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}{c^2 \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \\
\frac{d_{mirror}}{D_B} &= \frac{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v_A^2}{c^2}\right)} \\
\frac{d_{mirror}}{D_B} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} \qquad (3.25) \\
D_B &= d_{mirror} \cdot \sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}} \\
D_B &= d_{mirror} \cdot \sqrt{1-\beta^2} \\
D_B &= d_{mirror}/\gamma \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Im Ruhesystem der Lichtuhr vergeht die Zeit mit der Periode $T_{clock} = 2 \cdot d_{clock}/\,c$. Es sollte keinen Unterschied machen, aus welcher Richtung sich das Objekt dem Beobachter nähert. Insofern sollten Alice und Bob zu demselben Ergebnis in Bezug auf den Gang der

Uhr im bewegten Bezugssystem kommen ($T_A = T_B$). Wertet man diese Gleichungen aus, ergibt sich, dass sich der Abstand der Spiegel im bewegten System für den Beobachter im ruhenden Bezugssystem um den Faktor d/γ verkürzt ist. Für Bob stellt sich die Situation also folgendermaßen dar. Die Uhr im bewegten System geht langsamer (Alice sieht das in Bezug auf Bob genauso) und gleichzeitig haben sich die Abstände verändert. Wie bei der Analyse der Zeitdilatation kommen wir auch hier zu einer ähnlichen Erkenntnis: Im bewegten Bezugssystem sind die Abstände stets kontrahiert. Damit haben wir die Gleichungen für die Längenkontraktion in unterschiedlichen Bezugssystemen gefunden. Die Analyse zeigt, dass nicht nur der Gang von Uhren, sondern auch Distanzmessungen betroffen sind. Man beachte, dass das Phänomen der Längenkontraktion für jeden Beobachter gilt, der ein sich bewegendes Bezugssystem beobachtet, siehe Abb. 3.25.

$$\begin{aligned} L_{bewegt} &= \frac{L_{ruhend}}{\gamma} = L_{ruhend} \cdot \sqrt{1-\beta} \\ L_{ruhend} &= \gamma \cdot L_{bewegt} = L_{bewegt}/\sqrt{1-\beta} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Die Verkürzung in der Länge eines bewegten Stabes, der in Bewegungsrichtung ausgerichtet ist, nennt man Fitzgerald-Lorentz-Kontraktion.

In seinem Ruhesystem hat ein Körper seine größte Länge, die so genannte **Eigenlänge**.

Die Entdeckung der Langsamkeit

Wie stark greift die relativistische Längenkontraktion in unser normales Leben ein?

Beispiel 1: Ein Bus, der sich mit 100 km/h an uns vorbei bewegt. Ist die Längenkontraktion ein merklicher Effekt? Die Antwort ist NEIN. Die Längenkontraktion ist so gering, dass man sie selbst mit den besten zur Verfügung stehenden Messapparaturen nicht nachweisen könnte.

Beispiel 2: Anders sieht die Situation aus, wenn man die kosmische Strahlung betrachtet. Die höchsten Geschwindigkeiten kosmischer Teilchen betragen stolze

$$0.999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,95c$$

Dadurch verkürzt sich der Durchmesser der Milchstraße (100 000 Lichtjahre) auf 10^{-6} Lichtjahre. Damit einher geht die Zeitdilatation. Für das Teilchen vergehen nur 31 Sekunden, um unsere Sterneninsel zu durchqueren.

Beispiel 3: Nochmal zurück zu Alice und Bob, siehe Ább. 3.26. Für Bob auf dem Bahnsteig schlagen gleichzeitig Blitze ins vordere und hintere Ende Zugs ein. Rußmarken beweisen unstrittig, an welcher Position sich der Zug befunden haben muss. Bob stellt fest, dass Zug eine Länge hat, die dem Abstand der Marken 1 und 2 entspricht. Alice -

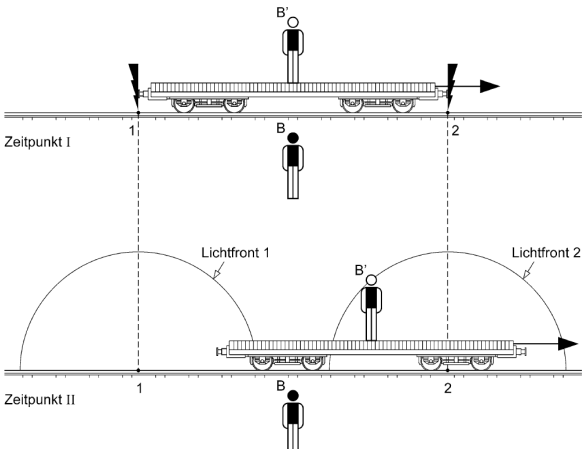


Abb. 3.26: Einschlag von Blitzen in einen fahrenden Waggon aus der Sicht unterschiedlicher Beobachter führt zum Phänomen Längenkontraktion [**?**].

mittig auf dem Waggon stehend- sieht dagegen zuerst den Lichtblitz von Marke 2 und kurze Zeit später den von Marke 1. Sie folgert, dass der Blitz zuerst bei Marke 2 und erst später an an Marke 1 eingeschlagen hat. Sie kommt zu dem Schluss: Da zwischen den Lichtsignalen eine gewissen Zeit verstrichen ist, hat der Zug Marke 2 schon passiert, als Blitzeinschlag an Marke 1 erfolgte. Im Vergleich zu Bob erscheint Alice der Zug länger als der Abstand der Marken oder umgekehrt: Im Vergleich zu Alice erscheint Bob der Zug kürzer!

Raumzeit-Intervall

Meine Herren! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

Hermann Minkowski 1908 in Köln

Die Effekte der Zeitdilatation und der Längenkontraktion wirft die Frage auf: Gibt es eine bestimmte physikalische Größe gibt, die sich bei der Analyse bewegter Inertialsysteme nicht ändert? Die Antwort lautet: JA! Dazu ein paar Vorüberlegungen. In der klassischen Physik treten die Effekte der Relativitätstheorie nicht auf. Deshalb sind Längen und Zeit in der klassischen Mechanik invariante Größen bezüglich einer Galilei-Transformation, siehe Kapitel *Beobachter*. Schauen wir uns eine andere Transformation $(A \rightarrow B)$ an. Charakterisieren Sie die Position (x, y) eines Körpers in unterschiedlich um den Ursprung gedrehten Koordinatensystemen $(A,\ B)$! Die entsprechenden Koordinaten des Objekts $(x_A,\ y_A)$, $(x_B,\ y_B)$ unterscheiden sich in den beiden Systemen, aber die Entfernung d zum gemeinsamen Ursprung ändert sich nicht. Die Größe d ist also eine invariante Größe bezüglich einer Koordinatendrehung.

$$d^2 = (\Delta x_A)^2 + (\Delta y_A)^2 = (\Delta x_B)^2 + (\Delta y_B)^2 \tag{3.28}$$

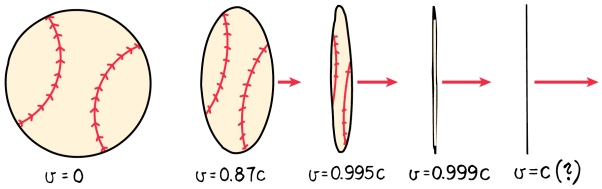


Abb. 3.27: Längenkontraktion beobachtet man nur entlang der Bewegungsrichtung des Objekts.

Für solche Koordinatensysteme bedeutet das, dass sich eine der physikalischen Größen, nämlich d, nicht ändert, wenn man das Koordinatensystem wechselt.

Der tiefere Grund für diese Betrachtung ist das

Prinzip der Kausalität:
Ein Ereignis kann ein anderes Ereignis nur dann beeinflussen,
wenn sich der auslösende Einfluss (Signal, Kraft etc.) mit $v \leq c$ überträgt.

Wenn Ereignis (1) ein Ereignis (2) hervorruft, so darf ein Wechsel des Bezugssystems keinen Einfluss auf die Abfolge der Ereignisse haben. In der Speziellen Relativitätstheorie wird diese Umstand durch die Einführung eines speziellen Abstandsbegriff erreicht, der, wie in der Vorbetrachtung, eine invariante Größe darstellt. Aber wie wir erfahren haben, sind bei einem Wechsel des Bezugssystem Länge und Zeit nicht erhalten. Die Veränderung dieser Größen drückt sich in den Phänomenen Zeitdilatation und Längenkontraktion aus. Tatsächlich gibt es in der Speziellen Relativitätstheorie aber eine invariante Größe, das so genannte Raumzeit-Intervall s. Sie ist die Grundlage für die Betrachtungen der Speziellen Relativitätstheorie im Minkowski-Raum.

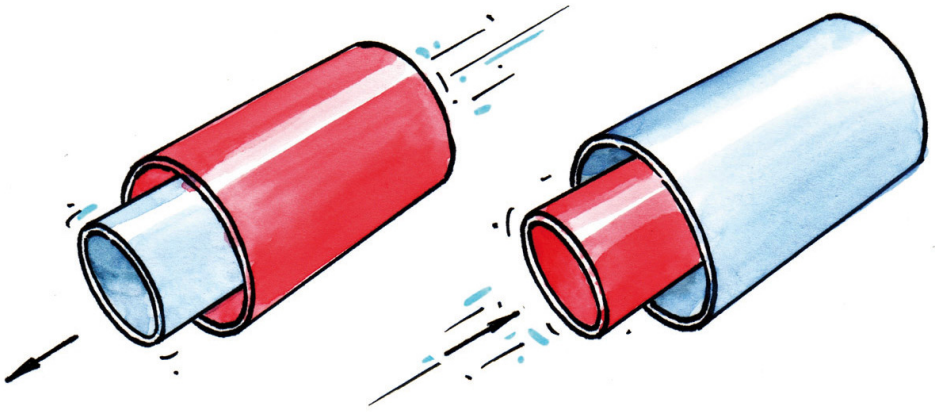
$$s^2 = (c \cdot \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{3.29}$$

Soviel zum Raumzeit-Intervall an dieser Stelle. Mehr dazu im nächsten Kapitel *Zerfall des Myons*

Querkontraktion

Es sei angemerkt, dass der Effekt der Längenkontraktion ausschließlich in Richtung der Bewegung auftritt. Senkrecht zu dieser Bewegungsrichtung ergibt sich keine Kontraktion der Abstände. Das hat Konsequenzen für die Figur wie man sieht. Hier sieht man auch den Unterschied zu den Erfahrungen von Alice und Bob. In Bewegungsrichtung beobachtet Bob eine Längenkontraktion. Senkrecht dazu betrachtet stellt er keinen solchen Effekt fest. Abb. 3.27 illustriert dies nochmal anhand eines relativistischen Baseballs.

Wenn sich die Geschwindigkeit eines Körpers der Lichtgeschwindigkeit nähert,
geht sein Volumen aufgrund der Längenkontraktion gegen NULL.



© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG | Big Bang 8 ōbv

Abb. 3.28: Die Annahme, dass auch senkrecht zur Bewegungsrichtung zu einer Kontraktion der Abmessungen kommt, führt zu widersprüchlichen Aussagen der Beteiligten. Ein rasender Zug würde entgleisen, weil sich für die ruhenden Schienen der Abstand Eisenbahnräder verringert. Für das Bezugssystem in dem der Zug ruht, verringert sich der Abstand der Schienen. In jedem Fall entgleist der Zug, aber die Unfallursache hängt vom Beobachter ab, ist also nicht-physikalisch!

Folgende Frage kann man sich stellen: Gibt es im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie auch eine Kontraktion quer zur Bewegungsrichtung? Dazu betrachten wir zwei Zylinder, siehe Abb. 3.28. Im Ruhe ist der Durchmesser des blauen Zylinders genauso groß wie der des roten Zylinders. Nun bewegt sich der blaue Zylinder in Bezug auf den Beobachter und den roten Zylinder. Aus der Sicht des ruhenden Beobachters schrumpft der blaue Zylinder und passt in den ruhenden roten Zylinder. Ein Beobachter, der sich mit dem blauen Zylinder mitbewegt, stellt etwas anderes fest. Nach seiner Beobachtung schrumpft der rote Zylinder und passt in den blauen Zylinder. Das kann nicht sein, denn dann wäre das Kausalitätsprinzip verletzt. Der Ausgang eines Experiments darf nicht vom Beobachter abhängen!

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Raumfahrt:

Wie weit kann man in seinem Leben reisen? Dazu bauen wir ein Raumschiff, dass mit einer angenehmen Beschleunigung von $9.81\,\mathrm{m/s^2}$ ins All fliegt. Bedingungen also wie Zuhause! Rechnet man nach, zeigt sich, dass man eine Geschwindigkeit nahe c innerhalb eines Jahres erreicht. Die meiste Zeit des Fluges ist die Geschwindigkeit also nahezu konstant. Um die Zeit t_{rocket} zu berechnen, die an Bord des Schiffes vergeht, wenn man

eine Strecke D geflogen ist, kann man folgende Gleichung verwenden [**?**]:

$$t_{rocket} = \left(\frac{2\,c}{g}\right) \cdot \ln\left(\frac{g \cdot D}{c^2}\right) \tag{3.30}$$

Wenn man ausnutzt, dass c/g =$(2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})/(10\,\mathrm{m/s^2})$=$3 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$=$1\,\mathrm{yr}$, g/c^2=$1/10^{16}\,\mathrm{m}$ und $10^{16}\,\mathrm{m}$ einem Lichtjahr (Lj) entspricht, vereinfacht sich die Gleichung auf:

$$t_{rocket} = 2\,\mathrm{yr} \cdot \ln\left(\frac{D}{\mathrm{Lj}}\right) \tag{3.31}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man nachprüfen, dass es tatsächlich nur ein Jahr dauert, bis man fast Lichtgeschwindigkeit erreicht. Weiter kann man berechnen, wie lange es dauern würde, bis man bestimmte astronomische Objekte erreicht. Tatsächlich sind die Flugzeiten aufgrund der erheblichen Zeitdilatation erstaunlich gering und innerhalb eines Generation zu schaffen. Beispielsweise dauert der Flug zur $2 \cdot 10^6$ Lj entfernen Andromeda Galaxis nur knapp 30 Jahre.

Ein Beispiel aus der Elementarteilchenphysik:

Wie wirkt sich die Längenkontraktion auf Stoßprozesse unter relativistischen Geschwindigkeiten aus? In Bewegungsrichtung ist die Ladungswolke für den Stoßpartner zusammengequetscht (und umgekehrt!). Würden die beiden Teilchen ruhen, sähe die Situation ganz anders aus. Man würde eine kugelförmige Ladungsverteilung beobachten. In diesem Zusammenhang eine historische Anmerkung: Der Ursprung der Überlegungen von Einstein waren nicht Uhren auf Zügen, sondern ein Problem aus der Elektrodynamik [**?**]. Diese Publikation hat alles ins Rollen gebracht. Ein ruhendes Elektron erzeugt kein Magnetfeld, ein bewegtes Elektron schon. Setzt man sich in das Bezugssystem des rasenden Elektrons verschwindet das magnetische Feld wieder. Ohne die Spezielle Relativitätstheorie kann man diesen Widerspruch nicht auflösen.

Die hohen relativen Geschwindigkeiten führen zu veränderten Stoßbedingungen, wenn z.B. ein schneller Kern auf ein ruhendes Objekt (Target) zufliegt, siehe Abb. 3.29. Die Ladungswolke des Targets ist für den Kern extrem zusammengepresst. Die Konzentration der Ladungen auf ein winziges Raumgebiet[21] lässt die Coulombkräfte enorm anwachsen. Das ruhende Target merkt davon gar nichts. Wichtige Anmerkung: Der Effekt ist für den Kern real und keine Einbildung! Im übrigen hat jeder der beiden Stoßpartner diesen Eindruck vom anderen Objekt. Als erster erkannte Richard Feynman,[22] dass dieser Effekt der Speziellen Relativitätstheorie berücksichtigt werden muss, um Hochenergie-Stoßexperimente zu erklären. In diesen Messungen wurde die Struktur

[21] Ladungsdichte=Anzahl der Ladungen pro Volumen

[22] The Nobel Prize in Physics 1965 was awarded jointly to Sin-Itiro Tomonaga, Julian Schwinger and Richard P. Feynman *for their fundamental work in quantum electrodynamics, with deep-ploughing consequences for the physics of elementary particles*

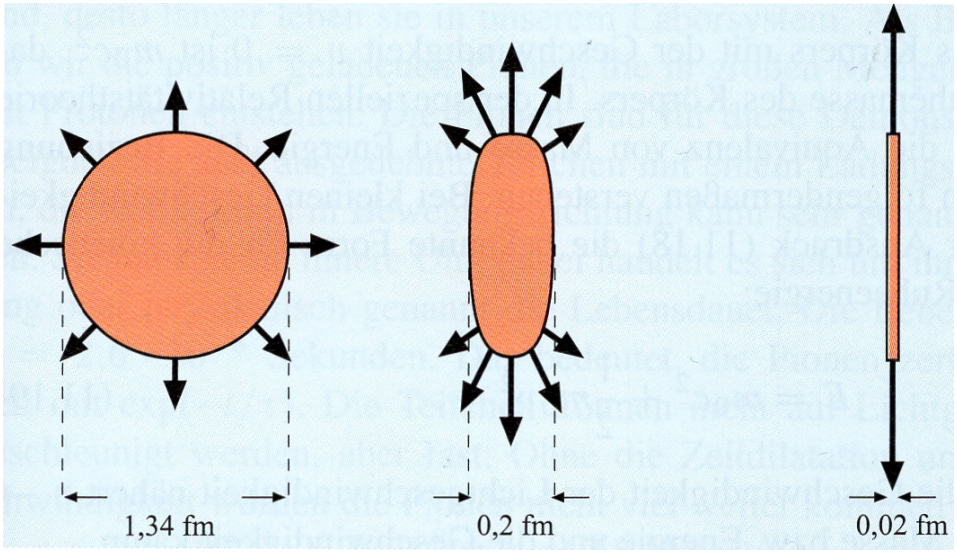


Abb. 3.29: Abhängigkeit der Form eines Pions[a] π^+ als Funktion der kinetischen Energie. Im Ruhesystem des Pions (links) hat das Elementarteilchen einen Durchmesser von 1.34 fm. Bei 10 GeV kontrahiert sich der Durchmesser in Bewegungsrichtung auf 0.2 fm (Mitte). Steigert man die kinetische Energie auf 100 GeV (rechts) reduziert sich der Durchmesser auf 0.02 fm, wodurch die die elektrische Feldstärke extrem zunimmt [**?**].

[a] Kurzlebiges Elementarteilchen (π^+, π^o, π^-) mit einer Masse von ungefähr $200 \cdot m_e$, das aus einem Quark-Antiquark Paar besteht.

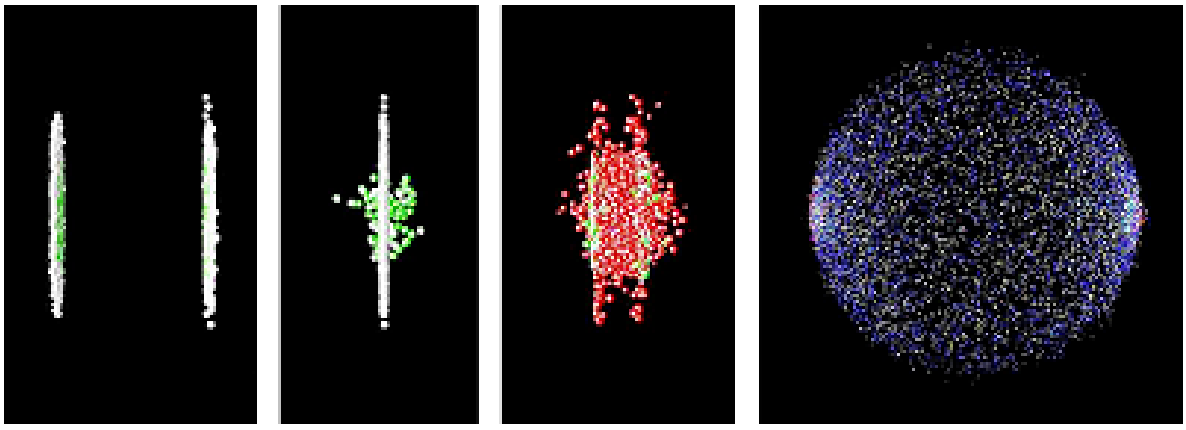


Abb. 3.30: Simulation der Längenkontraktion beim Stoß von zwei Goldkernen bei relativistischen Geschwindigkeiten. Im Stoßprozess bildet sich ein heißes Plasma, dass zur Bildung exotischer physikalischer Zustände führen könnte [**?**].

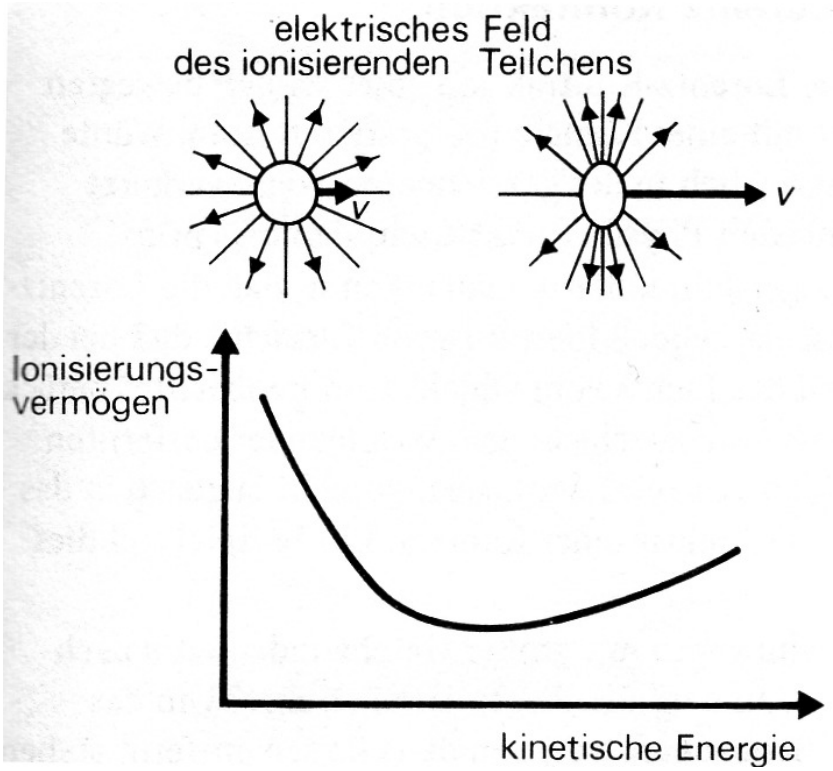


Abb. 3.31: Ionisationsvermögen eines Ladungsträgers als Funktion seiner Kinetischen Energie. Eine Erhöhung der Geschwindigkeit eines Ladungsträgers reduziert die Zeit, die eine Ladung in der Nähe eines Teilchens verbringt. In Folge verringert sich die Ionisationswahrscheinlichkeit immer mehr. Bei hohen Geschwindigkeiten führt die relativistische Längenkontraktion zu einer Erhöhung der Feldliniendichte und eine Ionisation wird wieder wahrscheinlicher [**?**].

des Protons untersucht. Dadurch verfestigte sich die Idee, dass Protonen, Neutronen und andere Teilchen aus Quarks bestehen.[23] Die Abb. 3.30 zeigt das Ergebnis einer Simulation. Die *verschärften* Stoßbedingungen helfen neue Materiezustände zu erzeugen, hier das Quark-Gluon Plasma,[24] auch *quark soup* genannt [**?**].

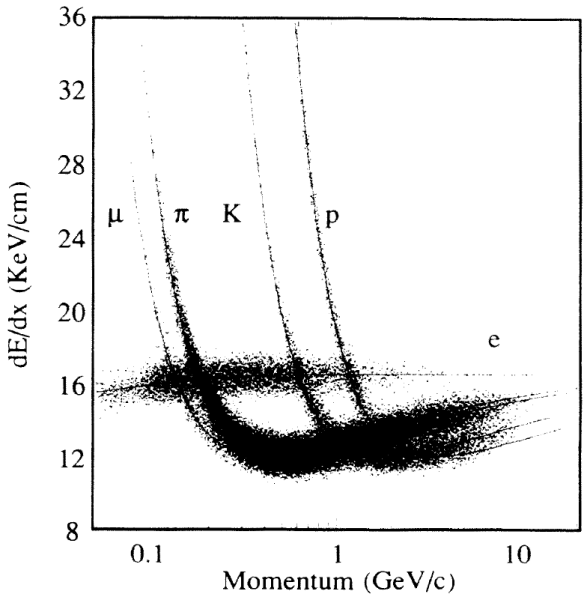


Abb. 3.32: Teilchen werden in Elektron-Positron-Stößen bei einer Schwerpunktsenergie von 29 GeV erzeugt. Die Ionisation erfolgt in einer $8.6 \cdot 10^5$ Pa Gasmischung aus 80% Ar und 20%C H_4. Die durchgezogenen Linien geben das erwartete Verhalten für Elektronen e, Myonen (μ), Pionen π, Kaonen (K) und Protonen (p) wieder [**?**].

Ein Beispiel aus der Atomphysik

In relativ zueinander bewegten Bezugssystemen beeinflussen statische elektrische Felder die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Ladungen. Als Beispiel betrachten wir die Ionisation von Atomen durch vorbeifliegende Ladungsträger. Das Coulombfeld des Teilchens übt eine Kraftwirkung auf die äußeren Elektronen aus und kann diese vom Atom ablösen. Steigert man die Geschwindigkeit reduziert sich die Zeitspanne, um diesen Prozess auszulösen und die Wahrscheinlichkeit für diesen Vorgang nimmt ab. Für ein ruhendes Teilchen ergeben sich elektrische Feldlinien, die nach außen zeigen. In jedem Abstand von der Ladung ist das elektrische Feld gleich hoch. Für höhere Geschwindigkeiten kommt es beim Vorbeiflug am ruhenden Atom zur Längenkontraktion. Das kugelsymmetrische Feld verformt sich und staucht sich in Bewegungsrichtung. Dadurch übt das elektrische Feld eine größere Kraft auf die Hüllenelektronen aus und die Ionisationswahrscheinlichkeit steigt wieder an, siehe Abb. 3.31. Alternativ kann man auch den Energieverlust $(-\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)$ betrachten, wenn hochenergetische Teilchen ein Medium durchqueren. Das Verhalten kann durch eine Gleichung beschrieben werden, die auf Bohr (1915) zurück geht [**?**]. Man nennt sie die Universelle $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ Kurve . Später hat Bethe die Gleichung erweitert, indem er die quantenphysikalische Wellennatur der Teilchen berücksichtigte. Der Korrekturwert fällt allerdings gering aus. Der Wert von $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ fällt als Funktion der Teilchenenergie zunächst ab und erreicht ein Minimum, wenn das Produkt $\beta \cdot \gamma$=3.5

[23] The Nobel Prize in Physics 1990 was awarded jointly to Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall and Richard E. Taylor *for their pioneering investigations concerning deep inelastic scattering of electrons on protons and bound neutrons, which have been of essential importance for the development of the quark model in particle physics*

[24] *Lexikon:* Das **Quark-Gluon Plasma** ist ein exotischer Zustand der Materie, der bei hohen Dichten (10^{15} g/cm^2) oder extremen Temperaturen (10^{12} K) auftritt. Normalerweise sind die Quarks über Gluonen miteinander verbunden. Unter extremen Bedingungen zeigen die Teilchen aber ein verändertes Verhalten. Sie wechselwirken miteinander, als wären sie plötzlich quasi-freie Teilchen.

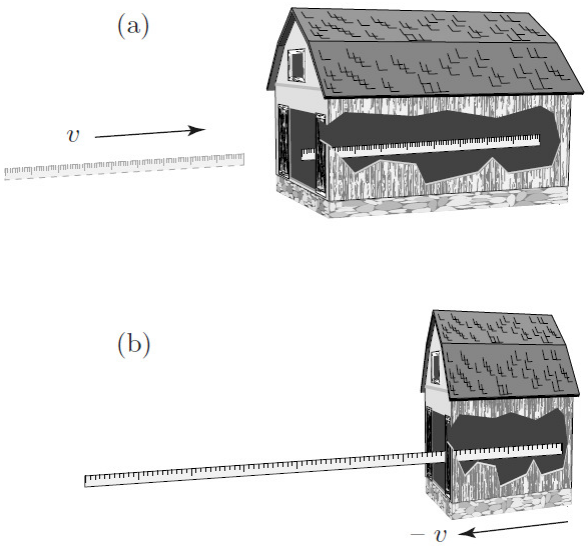


Abb. 3.33: Messlatte und eine Scheune mit einer Relativgeschwindigkeit von γ=2: (a) im Bezugssystem Scheune; (b) im Bezugssystem des Messlatte [**?**].

ist. Danach steigt der Wert aufgrund der relativistischen Effekte langsam wieder an. Abb. 3.32 zeigt, dass sich unabhängig von der Art der Teilchen ein Verhalten ergibt, dass durch die Universelle $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ Kurve beschrieben wird.

Es bleibt festzuhalten: Die Stauchung bewegter Objekte in Bewegungsrichtung gibt es tatsächlich. Längenkontraktion ist ein realer Prozess, keine Einbildung und vor allen Dingen keine optische Täuschung.

Garagenparadoxon

Zum Abschluss also nun ein *verrücktes* Einpark-Gedankenexperiment, siehe Abb. 3.33. Man stelle sich vor, dass sich ein großes Luxusauto (Länge 4.5 m) mit hoher Geschwindigkeit einer Garage (Länge 3.7 m) nähert. Für den ruhenden Garagenbesitzer ist eins klar: In seiner Trabigarage ist nicht genügend Platz. Dieser Wagen ist zu lang und passt nicht in die Garage. Längenkontraktion ist allerdings ein realer Effekt! Frage: Welche Geschwindigkeit muss das Auto haben, damit es, aufgrund der damit verbundenen Längenkontraktion, in die Garage passt?

$$\begin{aligned} v_{car} &= c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_0}\right)^2} \\ \beta &= \frac{v_{car}}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{3.7\,\mathrm{m}}{4.5\,\mathrm{m}}\right)^2} \\ \frac{v_{car}}{c} &= \sqrt{1 - 0.68} = \sqrt{0.32} = 0.57 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Als der ruhende Beobachter nachmisst, stellt er fest, dass der PKW aufgrund der hohen Geschwindigkeit deutlich kürzer geworden ist. Er teilt dem Autofahrer mit, welche Geschwindigkeit nicht unterschritten werden darf. Unter diesen Bedingungen passt der

Wagen in die Garage. Er lässt den Wagen einfahren und schließt das Garagentor. Der Autofahrer darf allerdings nicht abbremsen! Welche Länge hat die Garage eigentlich für den Autofahrer? Dass dieses Experiment tatsächlich klappen könnte, wird anhand der Lorentz-Transformation (Kapitel *Zerfall des Myons*) nachgewiesen.

Im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie sind weitere Paradoxa vorgestellt worden, die auf den ersten Blick den Vorhersagen der Theorie widersprechen. Wenn Sie Lust haben, stöbern sie mal nach

- **Rindlers Paradoxon**
  Length Contraction Paradox [?]: A certain man walks very fast - so fast that the relativistic length contraction makes him very thin. In the street he has to pass over a grid. A man standing at the grid fully expects the fast thin man to fall into the grid. Yet to the fast man the grid is much narrower even than to the stationary man, and he certainly does not expect to fall in. Which is correct? The answer hinges on the relativity of rigidity.

- **Supplees Paradoxon**
  Relativistic buoyancy [?]: Because of relativistic length concentration, the buoyant force on a submerged projectile depends on its velocity. How this affects the motion of a submerged projectile is considered here. The case considered is highly idealized, yielding a tractable conceptual problem in relativity.

- **Bellsches Raumschiffparadoxon**
  Note on Stress Effects due to Relativistic Contraction [?]: In this note a thought experiment will be used to show that relativistic contraction can introduce stress effects in a moving body.

- **Ehrenfests Paradoxon**
  Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie [?]: Bei dem Versuch, die Kinematik relativ-starrer Körper von der gleichförmigen, geradlinigen Translation auf beliebige Bewegungen zu verallgemeinern, gelangt man im Anschluß an Minkowskis Ideen zu folgendem Ansatz: Ein Körper verhält sich relativ-starr, heißt: er deformiert sich bei einer beliebigen Bewegung fortlaufend so, daß jedes seiner infinitesimalen Elemente in jedem Moment für einen ruhenden Beobachter gerade diejenige Lorentz-Kontraktion (gegenüber dem Ruhezustand) aufweist, welche der Momentan-Geschwindigkeit des Element-Mittelpunktes entspricht. Als ich mir vor einiger Zeit die Konsequenzen dieses Ansatzes veranschaulichen wollte, stieß ich auf Folgerungen, die zu zeigen scheinen, daß obiger Ansatz schon für einige sehr einfache Bewegungstypen zu Widersprüchen führt.

The **Relativity Train** is a realization of the famous Einstein thought experiments involving traveling trains carrying clocks and meter sticks. The demonstration is used to show how the preservation of the postulated constancy of physical laws and the speed of light in all inertial frames requires length contraction and time dilation in the train

frame relative to the lab frame of reference. The demonstration is, of course, not a real experiment but rather a visual means of showing (without using any equations) how length contraction and time dilation are necessary consequences of Einstein's two assumptions.

Link to video **Relativity Train**

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Alice fährt mal wieder Zug. Mit ausgebreiteten Armen erreicht Alice eine Spannweite von 1.8 m. Bob am Bahnsteig misst nach und erhält folgenden Wert:[25]

(a) Größer als 1.8 m.

(b) Genau 1.8 m.

(c) Kleiner als 1.8 m.

Aufgabe 3.2: Unsere Galaxie hat einen Durchmesser von etwa 10^5 Lichtjahren. Ein Raumschiff durchquert die Milchstraße mit einer Geschwindigkeit von nahezu c. Ist im Prinzip möglich, dass die Raumfahrer die Galaxie innerhalb ihrer Lebensspanne durchqueren?[26]

(a) JA

(b) NEIN

Aufgabe 3.3: Auf der Erde wird die Länge der Rakete LAIKA mit 100 m bestimmt. Die Messung beim Abflug von der Erde wird mit 99 m bestimmt. Wie hoch ist die Geschwindigkeit von LAIKA?

$$
\begin{aligned}
\ell_{space} &= \ell_{earth}\sqrt{1 - v_{LAIKA}^2/c^2} \\
\frac{\ell_{space}^2}{\ell_{earth}^2} &= 1 - \frac{v_{LAIKA}^2}{/c^2} \\
\frac{v_{LAIKA}^2}{c^2} &= 1 - \frac{\ell_{space}^2}{\ell_{earth}^2} \\
\frac{v_{LAIKA}}{c} &= \sqrt{1 - \frac{\ell_{space}^2}{\ell_{earth}^2}} \\
\frac{v_{LAIKA}}{c} &= 0.012 \\
v_{LAIKA}^2 &= 5.97 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.4: Man zeige, dass der Ausdruck $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ invariant ist, wenn man

[25] Antwort: (c)
[26] Antwort: (a)

folgende Transformation beim Wechsel des Bezugssystems verwendet:[27]

$$\begin{aligned} x_{ruhend} &= \frac{x_{bewegt} + v_{rel} \cdot t}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} \\ y_{ruhend} &= y_{bewegt} \\ z_{ruhend} &= z_{bewegt} \\ t_{ruhend} &= \frac{t_{bewegt} + \frac{x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung bestätigt die Vermutung:

$$\begin{aligned} x_{ruhend}^2 &+ y_{ruhend}^2 + z_{ruhend}^2 - c^2 t^2 \\ &= \frac{(x_{bewegt} + v_{rel} \cdot t)^2}{1 - v_{rel}^2/c^2} + y_{bewegt}^2 + z_{bewegt}^2 - \frac{c^2 \cdot \left(t_{bewegt} + \frac{x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}\right)^2}{1 - v_{rel}^2/c^2} \\ &= y_{bewegt}^2 + z_{bewegt}^2 \\ &\quad + \frac{1}{1 - v_{rel}^2/c^2}(x_{bewegt}^2 + 2\, x_{bewegt} \cdot v_{rel} \cdot t_{bewegt} + v_{rel}^2 \cdot t_{bewegt}^2) \\ &\quad - \frac{c^2}{1 - v_{rel}^2/c^2}\left(t_{bewegt}^2 + 2\frac{t_{bewegt} \cdot x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2} + \frac{x_{bewegt}^2 \cdot v_{rel}^2}{c^4}\right) \\ &= y_{bewegt}^2 + z_{bewegt}^2 \\ &\quad + \frac{1}{1 - v_{rel}^2/c^2}(x_{bewegt}^2 + 2\, x_{bewegt} \cdot v_{rel} \cdot t_{bewegt} + v_{rel}^2 \cdot t_{bewegt}^2) \\ &\quad - \frac{1}{1 - v_{rel}^2/c^2}\left(c^2 \cdot t_{bewegt}^2 + 2\, t_{bewegt} \cdot x_{bewegt} \cdot v_{rel} + \frac{x_{bewegt}^2 \cdot v_{rel}^2}{c^2}\right) \\ &= y_{bewegt}^2 + z_{bewegt}^2 \\ &\quad + \frac{1}{1 - v_{rel}^2/c^2}\left(x_{bewegt}^2 + v_{rel}^2 \cdot t_{bewegt}^2 - c^2 \cdot t_{bewegt}^2 - \frac{x_{bewegt}^2 \cdot v_{rel}^2}{c^2}\right) \\ &= y_{bewegt}^2 + z_{bewegt}^2 - \frac{1}{1 - v_{rel}^2/c^2}(c^2 \cdot t_{bewegt}^2 - x_{bewegt}^2) \cdot (1 - v_{rel}^2/c^2) \\ &= y_{bewegt}^2 + z_{bewegt}^2 - (c^2 \cdot t_{bewegt}^2 - x_{bewegt}^2) \\ x_{ruhend}^2 &+ y_{ruhend}^2 + z_{ruhend}^2 - c^2 t^2 = x_{bewegt}^2 + y_{bewegt}^2 + z_{bewegt}^2 - c^2 \cdot t_{bewegt}^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.5: Ein Feuerwerkskörper explodiert im Ursprung des Bezugssystems S. Zwei Mikrosekunde später explodiert ein weiterer Feuerwerkskörper -vom Ursprung von S gerechnet- im Abstand von Δx=300 m. Ein vorbeifliegender Astronaut (Bezugssystem S') bestimmt den Abstand der Explosionen mit $\Delta x'$=200 m. Wie groß ist der zeitliche Abstand der Explosionen im Bezugssystem S'?

[27] Man nennt diese Transformation die Lorentz-Transformation, die wir im Kapitel *Zerfall des Myons* kennenlernen werden.

Das Raumzeit-Intervall ist in beiden Bezugssystemen identisch. Damit lässt sich die Aufgabe in wenigen Zeilen lösen. Vereinfachend kommt hinzu, dass die Richtungen y und z für die Betrachtung keine Rolle spielen. Aus dem Zeitabstand der beiden Explosionen ergibt sich im Bezugssystem S:

$$c \cdot \Delta t = (2.998 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}) \cdot (2 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{s}) = 600 \,\mathrm{m}$$

Damit lässt sich das Raumzeit-Intervall in S berechnen.

$$\begin{aligned} s^2 &= (c \cdot \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \\ s^2 &= (600 \,\mathrm{m})^2 - (300 \,\mathrm{m})^2 \\ s^2 &= (2.7 \cdot 10^5 \,\mathrm{m})^2 \end{aligned}$$

Der Wert für das ermittelte Raumzeitintervall $(s)^2$ ist identisch mit dem Wert von $(s')^2$ im Bezugssystem S'.

$$\begin{aligned} (s)^2 &= (s')^2 \\ (s)^2 &= (c \cdot \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \\ (c \cdot \Delta t')^2 &= (s)^2 + (\Delta x')^2 \\ (c \cdot \Delta t')^2 &= (2.7 \cdot 10^5 \,\mathrm{m})^2 - (200 \,\mathrm{m})^2 \\ (c \cdot \Delta t')^2 &= 3.1 \cdot 10^5 \,\mathrm{m}^2 \\ c \cdot \Delta t' &= 5.57 \cdot 10^2 \,\mathrm{m} \\ \Delta t' &= 1.86 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Die beiden Ereignisse sind im Bezugssystem S' der Rakete sowohl zeitlich als auch räumlich enger beieinander.

Aufgabe 3.6: In einem ruhenden Koordinatensystem wird ein Stab gelegt, der mit einem Winkel von 60^o in Bezug auf die x-Achse geneigt ist. Die Eigenlänge eines Stabs ist ℓ_0. Nun entfernt sich der Stab entlang der x-Achse mit einer Geschwindigkeit von $0.8c$. Wie stark ist der Stab kontrahiert?

$$\begin{aligned} \ell_x^{bewegt} &= \ell_0 \cdot \cos 60^o \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ \ell_x^{bewegt} &= \frac{1}{2} \ell_0 \cdot \sqrt{1 - 0.64} \\ \ell_x^{bewegt} &= 0.3 \, \ell_0 \\ \ell_y^{bewegt} &= \ell_0 \cdot \sin 60^o \\ \ell_y^{bewegt} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ell_0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Länge des Stabs aus Sicht des ruhenden Beobachters

$$\begin{aligned} \ell^{bewegt} &= \sqrt{\left(\ell_x^{bewegt}\right)^2 + \left(\ell_y^{bewegt}\right)^2} \\ \ell^{bewegt} &= \sqrt{(0.3\,\ell_0)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell_0^2} \\ \ell^{bewegt} &= 0.917\,\ell_0 \\ \frac{\ell_0 - \ell^{bewegt}}{\ell_0} &= 0.083 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7: Alice fährt nochmal mit dem Zug am Bahnsteig vorbei. Die Körpergröße von Alice ist 1.80 m. Bob am Bahnsteig misst nach und erhält folgenden Wert:[28]

(a) Größer als 1.8 m.

(b) Genau 1.8 m.

(c) Kleiner als 1.8 m.

Aufgabe 3.8: Ein Elektron durchquert mit einer Geschwindigkeit von $0.3c$ ein 10 cm langes Magnetsegment eines Elektronenmikroskops (EM). Welche Länge hat der Abschnitt aus der Sicht des Elektrons?

$$\begin{aligned} \ell_{electron} &= \ell_{EM}\sqrt{1 - v_{electron}^2/c^2} \\ \ell_{electron} &= (0.1\,\mathrm{m})\sqrt{1 - (0.3)^2} \\ \ell_{electron} &= 0.091\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

In Elektronenmikroskopen sind solche Geschwindigkeiten üblich. Die Fokussierung des Elektronenstrahls erfolgt dabei mit Hilfe magnetischer Linsen. Aufgrund der Lorentzkraft ist die Ablenkung der Elektronen proportional zur Geschwindigkeit der Elektronen und der Abmessungen des Magnetfeldes. Deshalb müssen Effekte der Relativitätstheorie bei der Berechnung der Linsen berücksichtigt werden.

Aufgabe 3.9: Wie stark wird ein Raumschiff der L gestaut, dass sich mit halber Lichtgeschwindigkeit bewegt?

Ein Wert von $0.5c$ ist angenehm, denn $\sqrt{1-\beta^2}{=}\sqrt{3}/2$. Die Länge des Raumschiffs verkürzt sich damit für einen externen Beobachter auf $\sqrt{3}\cdot L/2$ also um circa 13.4%.

Aufgabe 3.10: Andi und Berta stehen entfernt von einander an der Startbahn für den Stabshochsprungwettbewerb. Bo Kanda Lita Baehre läuft erst an Andi und dann an Berta vorbei mit der Stabes in Bewegungsrichtung, sowie parallel zum Boden. Im Moment, in dem Lita Baehre an Andi vorbeiläuft, bestimmt jeder der drei die Länge des Stabes (L_A, L_B, L_L). Vergleichen Sie die Messungen.[29]

[28] Antwort: (b)
[29] Antwort: (a)

(a) $L_A > L_B > L_L$

(b) $L_L > L_A > L_B$

(c) $L_B > L_L > L_A$

(d) $L_A > L_L > L_B$

(e) $L_B > L_A > L_L$

(f) $L_L > L_B > L_A$

(g) $L_L > L_B = L_A$

(h) $L_L < L_B = L_A$

Aufgabe 3.11: If a space ship 50 m long were to pass the earth traveling at $2.4 \cdot 10^8$ m/ s, what would be its apparent length, assuming a Lorentz-Fitzgerald contraction?[30]

Aufgabe 3.12: A certain particle has a lifetime of 10^{-7} sec when measured at rest. How far does it go before decaying if its speed is $0.99c$ when it is created?[31]

[30] Answer: 30 m
[31] Answer: 213 m

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter Eigenlänge?
2. Was versteht man unter dem Kausalitätsprinzip?
3. Wem erscheint ein Objekt länger, einem Beobachter, der sich mit dem Objekt bewegt, oder einem Beobachter, der sich relativ zum Objekt bewegt?
4. Relativistische Effekte wie Zeitdilatation und Längenkontraktion gelten auch für Autos und Flugzeuge. Warum erscheinen uns diese Effekte so seltsam?
5. Ein Astronaut bewegt sich relativ zur Erde mit einer Geschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit.
   - Gehen seine Uhren langsamer?
   - Welche Änderung bei erdgebundenen Uhren beobachtet er?
   - Wirkt das Schiff für ihn verkürzt?
   - Er bestimmt seine Geschwindigkeit relativ zur Erde. War würde ein Beobachter auf der Erde behaupten?
   - Was ist mit der Entfernung zwischen zwei Sternen, die in seiner Bewegungsrichtung liegen?
6. Ein kugelförmiges Raumschiff passiert auf seinem Flug die Erde. Wie beschreibt ein Beobachter auf der Erde die Form des Raumschiffs?
7. Ein Raumfahrer bewegt mit hoher Geschwindigkeit von der Erde fort. Was beobachtet ein Bewohner der Erde in Bezug auf die Größe und Pulsrate des Astronauten? Stellt der Raumfahrer selbst Änderungen fest?
8. Wenn zwei Raumschiffe mit einem Tau verbunden sind und zum selben Zeitpunkt und mit derselben Beschleunigung starten, reißt dann die Verbindungsschnur?

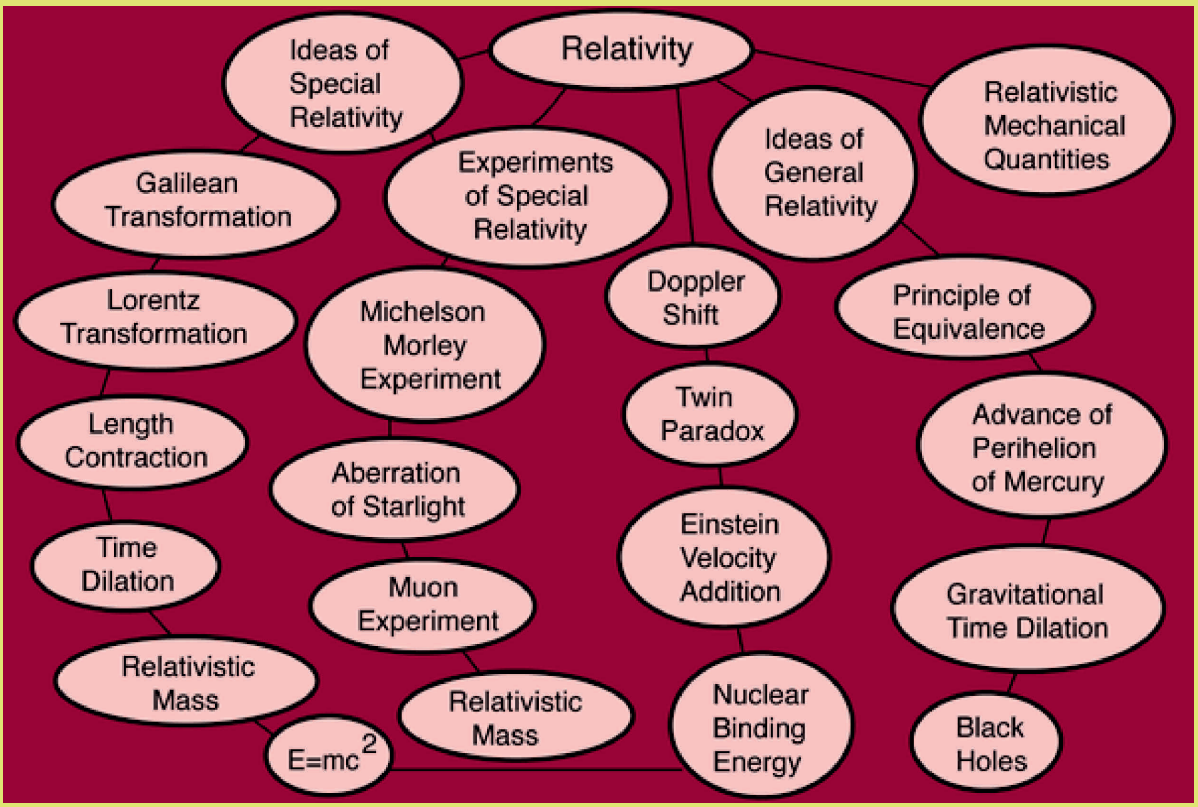


Abb. 3.34: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was ist relevant für die Klausur?

- Konzept der Relativität der Gleichzeitigkeit
- Arbeitsweise einer Lichtuhr
- Eigenzeit und Eigenlänge
- β-Parameter

$$\beta = \frac{v}{c}$$

- γ-Parameter

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- Zeitdilatation (Gl. 3.7):

$$\begin{aligned} \Delta t_{ruhend} &= \gamma \cdot \Delta t_{bewegt} \\ \Delta t_{bewegt} &= \frac{\Delta t_{ruhend}}{\gamma} \end{aligned}$$

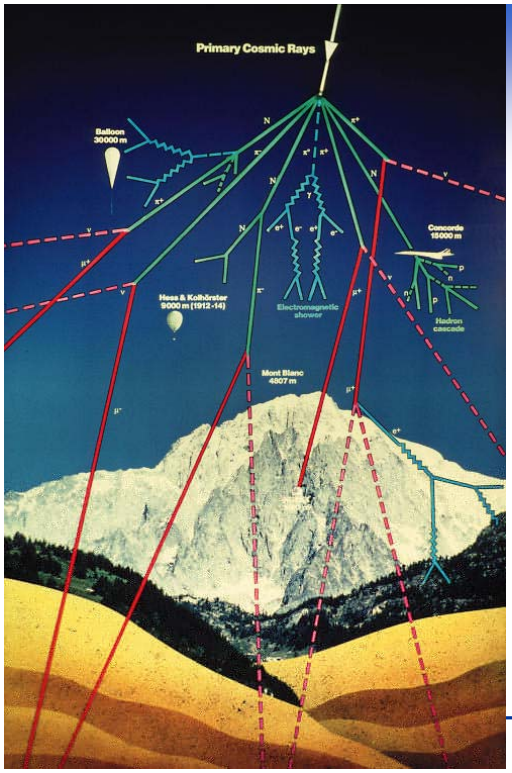
- Längenkontraktion (Gl. 3.27):

$$\begin{aligned} L_{ruhend} &= \gamma \cdot L_{bewegt} = L_{bewegt}/\sqrt{1-\beta^2} \\ L_{bewegt} &= \frac{L_{ruhend}}{\gamma} = L_{ruhend} \cdot \sqrt{1-\beta^2} \end{aligned}$$

- Raumzeit-Intervall (Gl. 3.29)

$$s^2 = (c \cdot \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

4 Zerfall des Myons



Zerfall des Myons

The attempts made so far therefore require either excluding the earth's crust, another source of gamma rays in the higher layers of air, or a much weaker absorption in the air than was previously thought.

Theodor Wulf, 1910

[1]Untersuchungen zur radioaktiven Strahlung durch Rutherford ergaben, dass hochenergetische γ-Strahlen[2] durch eine 1 km dicke Luftschicht zu 99% absorbiert werden. Anhand der ionisierenden Wirkung der Strahlung wurde versucht, den Ursprung der natürlichen γ-Strahlenbelastung einzugrenzen. Theodor Wulf führte zu diesem Zweck Experimente in Bergwerken, unter Wasser und in den Alpen durch. Die Forscher konnten keinen Anstieg der Ionisationsrate feststellen und vermuteten, dass die Strahlung aus radioaktiven

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.
[2]nicht zu verwechseln mit dem γ-Faktor der Speziellen Relativitätstheorie

Höhe	[m]	3 600	4 700	9 300
Ionisationsrate	$[\mathrm{cm}^{-3} \cdot s^{-1}]$	4-5	20-24	80

Tab. 4.1: Anstieg der Ionisationsrate durch kosmische Höhenstrahlung als Funktion der Höhe über Grund.

Substanzen stammt, die sich in Bodenschichten bis etwa einen Meter unter der Erdoberfläche befinden. Zur Überprüfung wurden Messungen auf dem Eiffelturm durchgeführt [**?**]. Die Forscher erwarteten einen Abfall der Ionisationsrate um etwa 75%. Tatsächlich ergab sich ein Wert von nur 13% Prozent.

Aufgrund dieser Resultate kam man zu der Erkenntnis, dass es einen atmosphärischen Beitrag zur ionisierenden Strahlung gibt. Weitere Messungen von Domenico Pacini unterstützen die Hypothese einer Strahlung, die aus dem Weltraum auf die Erde eindringt. Bei Ballonfahrten entdeckte Franz Hess, dass die Intensität der Strahlung nicht davon abhängt, ob es Tag oder Nacht ist. Damit konnte die Sonne als Quelle der Strahlung ausgeschlossen werden. In Höhen oberhalb 5 km stellte Hess fest, dass die Ionisationsrate anstieg, siehe auch Tab.4.1. Das war der entscheidende Hinweis auf die Existenz der Kosmischen Höhenstrahlung [**?**]. Der Name wurde von Robert Millikan[3] geprägt. Millikan war der Ansicht, dass es sich um elektromagnetische Strahlung handele [**?**]. Experimente von Compton[4], durchgeführt auf verschiedenen Breitengraden, zeigten aber, dass die Strahlung durch das Magnetfeld der Erde beeinflusst wurde, so dass man zu dem Schluss kam, das es sich um geladene Teilchen handelt [**?**].

Das Phänomen *Astronaut's eye* sind Lichtblitze, die von Raumfahrern während des Apollo-Programms außerhalb der Erdmagnetfelds wahrgenommen wurden. Manche Wissenschaftler vermuten, dass die Ursache in der kosmischen Strahlung zu suchen sind. Der zugrundeliegende Prozess könnte Tscherenkow-Strahlung (siehe Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*) [**?**], oder allgemein die Wechselwirkung von Strahlung mit der Retina sein.

Radiation-induced Light Flashes observed by Human Subjects in Fast Neutron X-ray and Positive Pion Beams [**?**]**:** Astronauts on Apollo 11, 12, and 13 observed a series of light flashes and streaks when they were in darkness at great distances from the Earth. Although it is well known that relatively low doses of X-rays impinging on the retina can cause light sensation and can alter the light sensitivity threshold, the astronauts' descriptions of discrete flashes and streaks do not conform with the homogeneous flood of light which is characteristic of X-ray phosphenes or the crescents and patterns of electrical or pressure phosphenes.

[3] The Nobel Prize in Physics 1923 was awarded to Robert Andrews Millikan *for his work on the elementary charge of electricity and on the photoelectric effect*

[4] The Nobel Prize in Physics 1927 was divided equally between Arthur Holly Compton *for his discovery of the effect named after him* and Charles Thomson Rees Wilson *for his method of making the paths of electrically charged particles visible by condensation of vapour.*

Was ist der Ursprung kosmischer Strahlung und warum sind die Teilchen so energiereich?
Das gemessene Spektrum der kosmischen Strahlung erstreckt sich bis zu Energien von mehr als 10^{20} eV [**?**],[5] siehe Abb. 4.1. Man kann die Strahlung wie folgt charakterisieren:

- Der Teilchenfluss ist zeitlich konstant in der Zeit, mit Ausnahme von Energien kleiner als 10 BeV.[6] In diesem Bereich trägt die Strahlung der Sonne bei.

- Der Energiefluss ist isotrop, dass heißt er hängt nicht von der Beobachtungsrichtung ab. Diese Beobachtung deutet darauf hin, dass die Partikel von Magnetfeldern auf ihrem Weg vom Ursprungsort abgelenkt wurden.

- Die Anzahl der Teilchen einer bestimmten Energie $N(E)$ pro Zeitintervall kann über ein Potenzgesetz beschrieben werden:

$$N(E) \propto 1/E^3 \tag{4.1}$$

  Die aktuelle Forschung versucht die Quellen für die hochenergetischen Teilchen zu identifizieren. Höchstwahrscheinlich sind es Supernova Explosionen. Enrico Fermi[7] vermutete, dass Schockfronten in magnetisierten Plasmen verantwortlich sein könnten.

- Kosmische Strahlung beinhaltet Protonen (87%), α-Teilchen(12%) und schwere Atome (1%).

Solche enorm hohen Energien können nicht thermischen Ursprungs sein. Der Urknall, als energiereichstes Ereignis in der Geschichte des Kosmos, scheidet aus. Aufgrund der tickenden Uhr, die die radioaktiven Kerne der kosmischen Strahlung zur Verfügung stellen, kann darauf schließen, dass die Strahlung ihren Ursprung in einer Entfernung von höchstens 10^6 Lj hat. Das bedeutet, dass der Hauptanteil des kosmischen Eintrags aus unserer eigenen Milchstraße stammt.

Ausnahme sind extrem hohen Energien, die wahrscheinlich aus fernen Galaxien stammen. Die Quellen dieser hochenergetischen Strahlung sind kosmische Beschleuniger und andere, bislang nicht identifizierte, exotischere Phänomene. Eine bis heute gültige Antwort bezüglich des Hauptmechanismus geht auf Fermi (1949) zurück. Danach sind die Ursachen starke magnetische Felder in kosmischen Wolken, an denen die schnellen Teilchen streuen. Das zugehörige Forschungsgebiet ist die Magnetohydrodynamik heißer Plasmen [**?**]. Partikel werden beschleunigt, wenn sich Teilchen und Wolke aufeinander zubewegen und abgebremst, wenn sie sich voneinander entfernen. Da der erste der beiden

[5] Einheit Elektronenvolt: $1\,\text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}$ J

[6] $1\,\text{BeV} = 10^9$ eV

[7] The Nobel Prize in Physics 1938 was awarded to Enrico Fermi *for his demonstrations of the existence of new radioactive elements produced by neutron irradiation, and for his related discovery of nuclear reactions brought about by slow neutrons.*

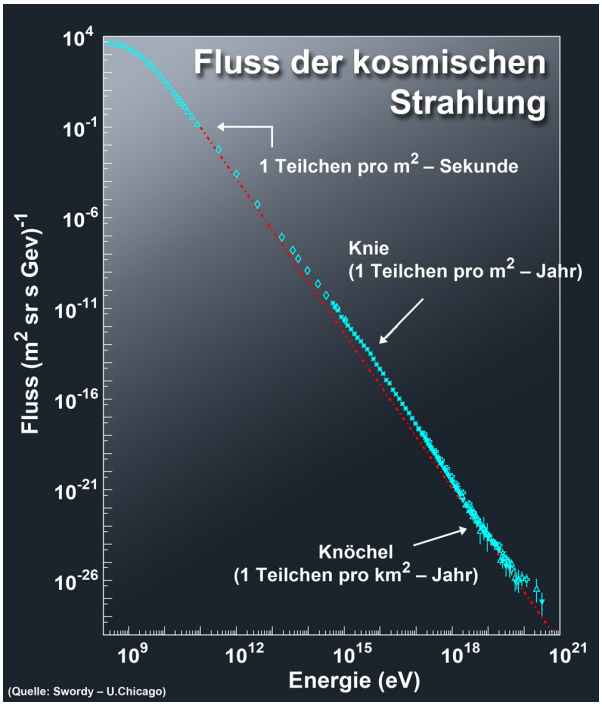


Abb. 4.1: Energiespektrum der kosmischen Strahlung [**?**].

Prozesse häufiger stattfindet, ergibt sich im Mittel eine Beschleunigung der Teilchen.

Ultrahigh-energy photons up to 1.4 petaelectronvolts from 12 γ-ray Galactic sources [?]: The extension of the cosmic-ray spectrum beyond 1 petaelectronvolt (PeV; 10^{15} electronvolts) indicates the existence of the so-called PeVatrons - cosmic-ray factories that accelerate particles to PeV energies. We need to locate and identify such objects to find the origin of Galactic cosmic rays. The principal signature of both electron and proton PeVatrons is ultrahigh-energy (exceeding 100 TeV) γ radiation. Evidence of the presence of a proton PeVatron has been found in the Galactic Centre, according to the detection of a hard-spectrum radiation extending to 0.04 PeV. Although γ-rays with energies slightly higher than 0.1 PeV have been reported from a few objects in the Galactic plane, unbiased identification and in-depth exploration of PeVatrons requires detection of γ-rays with energies well above 0.1 PeV. Here we report the detection of more than 530 photons at energies above 100 teraelectronvolts and up to 1.4 PeV from 12 ultrahigh-energy γ-ray sources with a statistical significance greater than seven standard deviations. Despite having several potential counterparts in their proximity, including pulsar wind nebulae, supernova remnants and star-forming regions, the PeVatrons responsible for the ultrahigh-energy γ-rays have not yet been firmly localized and identified (except for the Crab Nebula), leaving open the origin of these extreme accelerators.

Das Titelblatt zeigt Prozesse beim Eintritt kosmischer Strahlung, die in der oberen Atmosphäre in Höhen von etwa 20 km ablaufen. Die hochenergetischen Primärteilchen der kosmischen Höhenstrahlung erzeugen in der oberen Atmosphäre Teilchenschauer. Auf Meereshöhe werden, ausgelöst durch ein einziges kosmisches Teilchen, bis zu 10^{10}

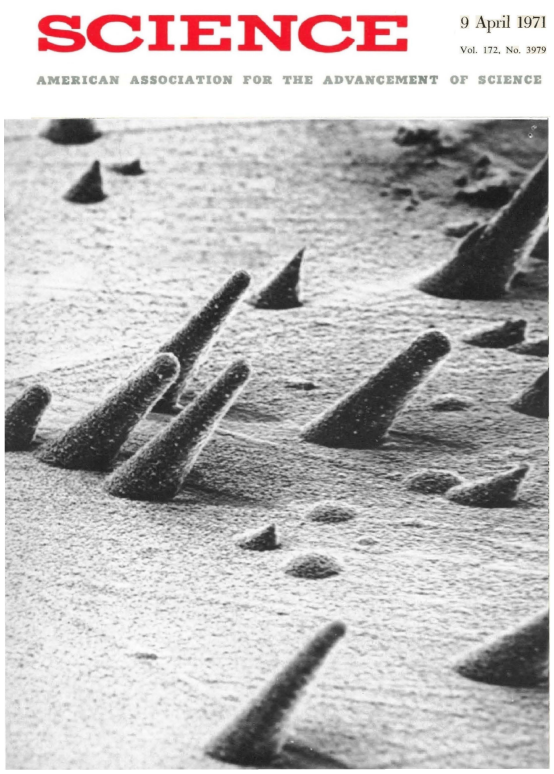


Abb. 4.2: Titelseite der Zeitschrift *Science* vom 9.4.1971. Einschläge von Schwefelionen in einem Apollo-Testhelm. Die Negativabdrücke der Spuren wurden verwendet, um die Helme für die Erkennung kosmischer Strahlung zu kalibrieren. Die unterschiedliche Länge der verschiedenen Einschlagkrater ist ein Maß für die Energie der Teilchen.

Sekundärteilchen beobachtet. Durch die energiereiche Strahlung werden Reaktionen ausgelöst, wie man sie sonst nur mit erheblichem Aufwand in großen Beschleunigern wie bei CERN beobachten kann. Einer dieser Elementarprozesse ist die Bildung von Myonen, die sich nach ihrer Erzeugung mit nahezu Lichtgeschwindigkeit der Erde nähern. Diese Teilchen sind sehr kurzlebig und man würde erwarten, dass kaum ein Myon die Erde erreicht. Tatsächlich stellt man fest, dass eine erhebliche Anzahl an Myonen von Detektoren auf dem Erdboden nachgewiesen werden. Die Rate liegt bei etwa 100 Myonen pro Quadratmeter und Sekunde. Das bedeutet, dass etwa 600 Myonen pro Sekunde den menschlichen Körper durchqueren. Erst die Spezielle Relativitätstheorie konnte diesen unerwarteten Befund erklären. Vorteilhaft für Experimente ist, dass in den oberen Schichten der Atmosphären andauernd eine ganz bestimmte Menge an Myonen erzeugt werden. Im Hintergrund erkennt man den Mont Blanc. Berge spielen bei der experimentellen Untersuchung eine wichtige Rolle.

Über einen interessanten Befund an den Helmen der Astronauten von Apollo 8 und Apollo 12 berichten Mitarbeiter des Forschungszentrums der Firma General Electric. Sie fanden, dass zahlreiche hochenergetische Partikel der kosmischen Strahlung die Helme aus Lexan-Polykarbonat durchschlagen haben, siehe Abb. 4.2. Jede dieser Spuren entspricht einem hochenergetischen Teilchen, das in die Hirnschale des Astronauten eindrang. Wenn auch die Zahl der kosmischen Geschosse ohne Gefährdung ist, so trifft dies auf einen Raumflug von 2 Jahren (zum Beispiel zum Mars) nicht mehr zu. Bei einem

langen Flug werden etwa 0,5% der Retina, 0,12% der Gehirnzellen und mehr als 1,6% der Riesenzellen des menschlichen Körpers irreparabel geschädigt (siehe auch Ref. [**?**]).

Naturwissenschaftliche Rundschau 10, 434 (1971)

Inhalt

Zerfall des Myons

- relativistische Uhren: Zerfall des Myon in unterschiedlichen Bezugssystemen
- relative Geschwindigkeiten in unterschiedlichen Bezugssystemen
- relativistische Elektronen als Lichtquelle für brillante Strahlung

Kapitel 1
Höhenstrahlung & Zerfallsgesetz
astro quantum nucleus

Kapitel 2
Lorentz-Transformation
optics

Kapitel 3
Relative Geschwindigkeit
astro

Kapitel 4
Synchrotron
electro optics

4.1 Kosmische Höhenstrahlung



Die Ergebnisse der vorliegenden Beobachtungen scheinen am ehesten durch die Annahme erklärt werden zu können, dass eine Strahlung von hoher Durchdringungskraft von oben her in unsere Atmosphäre eindringt, und auch noch in deren untersten Schichten einen Teil der in geschlossenen Gefäßen beobachteten Ionisation hervorruft.

Franz Hess, 7. August 1912

Wie in den vorangegangenen Experimenten kommt es im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie darauf an, eine möglichst genaue Uhr bereitzustellen. In diesem Fall ist die Zeitbasis der Zerfall eines Elementarteilchens. Da dies ein statistischer Vorgang ist, wird es notwendig sein, sich zunächst mit der mathematischen Beschreibung, dem radioaktiven Zerfallsgesetz, auseinander zu setzen. Der sich ergebende zeitliche Verlauf bei solchen Prozessen -ein exponentielles Verhalten- ist charakteristisch für viele in der Natur ablaufende Prozesse. Wie sich herausstellt sind Vorgänge, die sich in solcher Weise abspielen, nicht die Ausnahme, sondern eher die Regel. Dabei kann die Dynamik in beide Richtungen führen, nämlich exponentielle Abnahme als auch exponentielle Zunahme von Ereignissen. Ein Beispiel ist -hochaktuell- die Entwicklung der Fallzahlen der Ebola Epidemie und der Corona Pandemie. Die Dramatik exponentiellen Verhaltens zeigt sich in diesem Video am Beispiel eines Experiments mit Mausefallen und Tennisbällen.

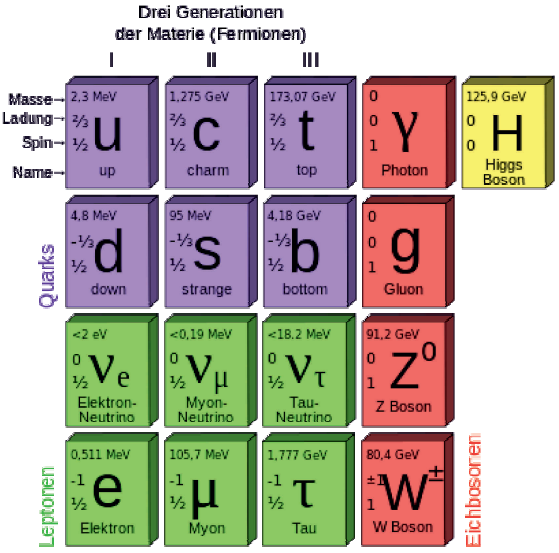


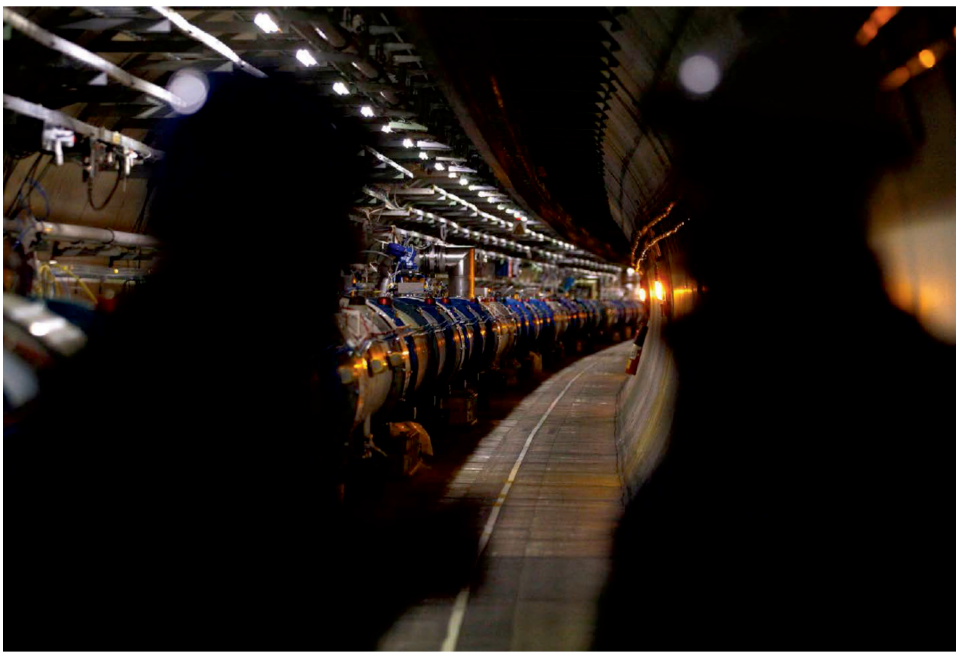
Abb. 4.3: Standardmodell der Elementarteilchenphysik

Link to video **Exponential Growth**

Im Jahr 1937 fanden Anderson[8] und Neddermeyer in Blasenkammeraufnahmen (Kapitel *Ionisierende Strahlung*) kosmischer Strahlung ein neues geladenes Teilchen mit einer erheblichen Masse ($1.88 \cdot 10^{-28}$ kg) und einer Ladung von entweder (+) oder (-). Die Masse entsprach der des Yukawa-Teilchens, dass die Wechselwirkung der Nukleonen im Kern vermittelt (Kapitel *Heisenbergsche Unschärferelation*). Stimmte aber nicht. Im Gegensatz zur Erwartung, wechselwirkte das Teilchen nämlich nur schwach mit den Kernbausteinen. Beispielsweise beobachtete man, dass das vermeintlich Yukawa-Teilchen mit negativer Ladung atomare Orbitale besetzen konnten. Man erwartete, dass die Teilchen durch die Starke Wechselwirkung (Kapitel *Kerne*) unmittelbar vom Kern absorbiert würden. Dieser Vorgang wurde nicht beobachtet und tatsächlich sind die Teilchen quasi immun gegenüber der starken Wechselwirkung. Aus diesem Grund nannte man die Teilchen Myonen, oder abgekürzt μ.[9]

[8] The Nobel Prize in Physics 1936 was divided equally between Victor Franz Hess *for his discovery of cosmic radiation* and Carl David Anderson *for his discovery of the positron.*

[9] *Lexikon:* Das **Myon** ist ein negativ geladenes Elementarteilchen mit einer gegenüber dem Elektron 200-fach höheren Masse. Es gehört zur Klasse der so genannten Leptonen (Kapitel *Elementarteilchen*), siehe Abb. 4.3.[10] Im Gegensatz zum Elektron ist dieses Teilchen nicht stabil, sondern wandelt sich nach im Mittel 2 μs in ein Elektron und zwei Neutrinos um. Zum Vergleich: In einer μs legt Licht nur etwa 300 m zurück. Die Reichweite der Teilchen ist also auch bei hohen Geschwindigkeiten $v \approx c$ scheinbar gering. Kürzlich durchgeführte Messungen haben demonstriert, dass das magnetische Moment ungewöhnlich hoch ist [**?**]. Die Forscher sehen dies als Indiz, dass die Teilchenphysik möglicherweise kurz davor steht, neue Elementarteilchen zu entdecken. Weiter gibt es Pläne einen Myonen-Collider zu bauen, siehe Abb. 4.4. Allerdings wird der Beschleuniger, wenn er überhaupt gebaut wird, erst 2040 fertig gestellt [**?**].



There are several possible particle accelerators that could follow the Large Hadron Collider.

PHYSICISTS WANT TO BUILD THE WORLD'S FIRST MUON COLLIDER

The accelerator would smash together this heavier version of the electron and perhaps find new particles.

Abb. 4.4: Die Kurzlebigkeit von Myonen macht den Bau eines Colliders technisch anspruchsvoll. Der Vorteil besteht darin, dass die Maschine kleiner und vielleicht auch preiswerter sein könnte, als andere Collider-Designs [**?**].

Who ordered that?[11] [12] *4LP*

In die Erdatmosphäre dringen ständig hochenergetische Teilchen ein und wechselwirken dort mit den Atomen und Molekülen. Dabei entstehen in der Reaktion aufgrund der hohen Anfangsenergie viele neue Teilchen. Man spricht von Teilchenschauern, siehe Abb. 4.5. Die Bestimmung der Eigenschaften dieser Teilchen erlaubt es der Astrophysik, Erkenntnisse über Prozesse im Universum zu gewinnen. Zum Beispiel; Woher kommen diese Teilchen? Die nachgewiesenen Energien sind dabei deutlich höher als die, die man

[11] Da das Myon keine Rolle bei der nuklearen Wechselwirkung spielt, veranlasste es Isidor Isaac Rabi zu dieser flapsigen Frage

[12] The Nobel Prize in Physics 1944 was awarded to Isidor Isaac Rabi *for his resonance method for recording the magnetic properties of atomic nuclei.*

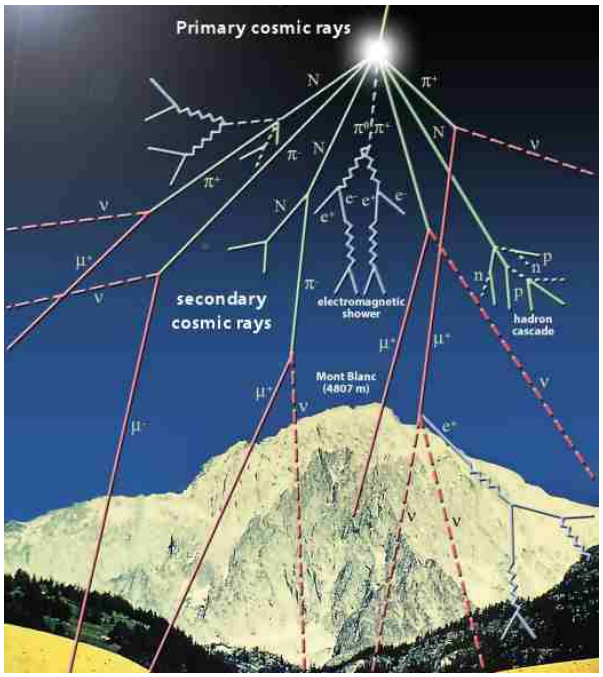


Abb. 4.5: Bei den hochenergetischen kosmischen Teilchen handelt es sich um Protonen (89%), Helium (10%) und schwereren Kernen (1%). Durch Stöße mit Atomen in der oberen Atmosphäre werden hauptsächlich Pionen erzeugt, die in Myonen zerfallen [**?**].

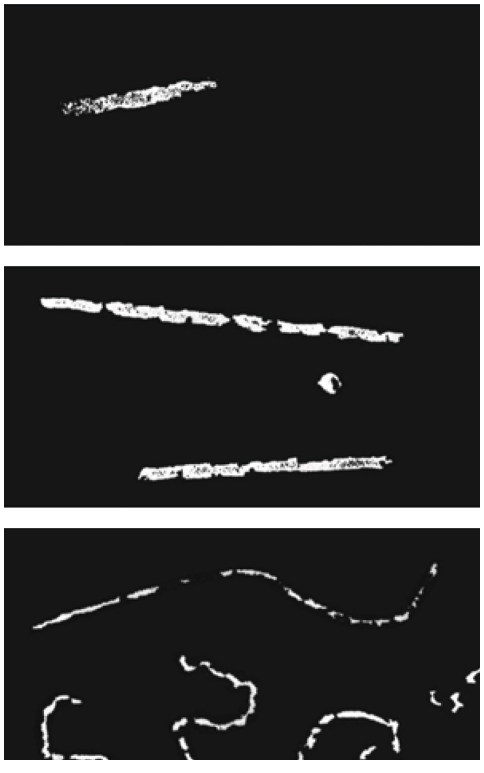


Abb. 4.6: Spuren hochenergetischer Teilchen in einer Nebelkammer 1: *Oben:* α-Teilchen; *Mitte:* Protonen; *Unten:* Elektronen [**?**].

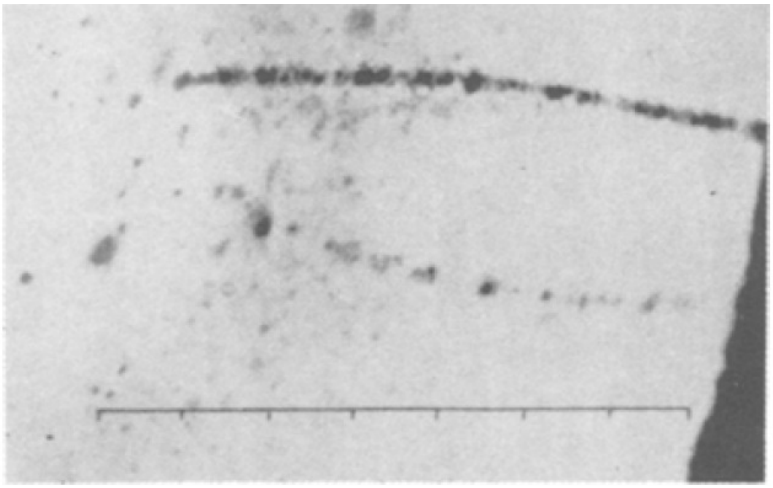


Fig. 5.
Doppelspur als Resultat einer vermutlichen Kernexplosion. 7-fache Vergrößerung. Untere Spur = Elektron von 37 000 000 V. Natur der oberen positiven Korpuskel nicht sicher bekannt.

Abb. 4.7: Rostocker Nachweis des Myons durch Paul Kunze im Jahr 1933 [**?**].

in Beschleunigern wie bei CERN erreicht. Die kosmische Höhenstrahlung stellt damit ein natürliches Laboratorium für die Teilchenphysik dar.[13] Wie weist man solche Teilchen im Labor nach. Eine Möglichkeit ist die photographische Methode,[14] die Teilchenspuren mit Hilfe photographischer Emulsionen aufzeichnet [**?**]. Ein anderes Nachweisinstrument ist die Wilson-Kammer.[15]. Abb. 4.6 zeigt die Spuren hochenergetischer Teilchen (Oben: α-Teilchen, Mitte: Protonen; Unten: Elektronen) in solch einer Nebelkammer (siehe Kapitel *Ionisierende Strahlung*). Eines der Teilchen aus der kosmischen Höhenstrahlung ist das Myon [**?**], dass uns im Weiteren interessieren wird.

Wichtig für die weitere Analyse ist, dass das Myon in einer mittlere Zeitspanne von 2.2 μs zerfällt. Für die experimentelle Messung im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie ist der Zerfall von μ^- von Bedeutung.

$$\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu \tag{4.2}$$
$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu \tag{4.3}$$

Der erste Nachweis der Myons erfolgte übrigens 1933 durch Paul Kunze in Rostock [**?**], siehe Abb. 4.7. Leider hat er die nobelpreisträchtige Bedeutung seiner Entdeckung nicht

[13] Informationen zur Geschichte der Erforschung der Höhenstrahlung findet man in [**? ? ? ? ?**].

[14] The Nobel Prize in Physics 1950 was awarded to Cecil Frank Powell "*for his development of the photographic method of studying nuclear processes and his discoveries regarding mesons made with this method.*

[15] siehe Fußnote 9

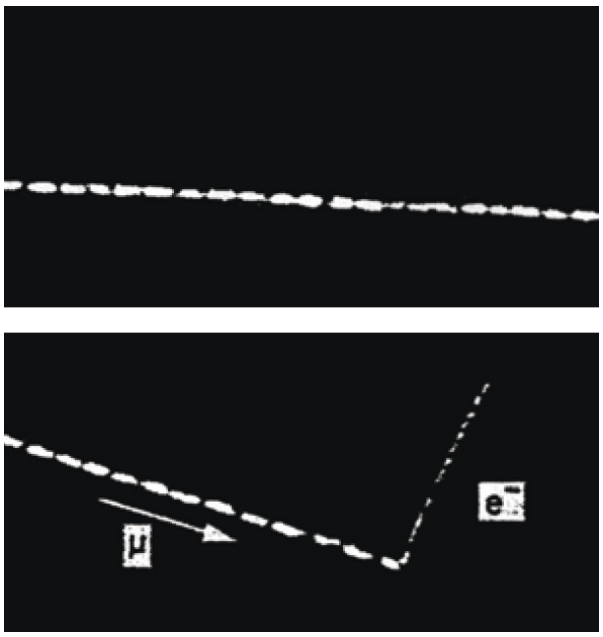


Abb. 4.8: Spuren hochenergetischer Teilchen in einer Nebelkammer 2: *Oben:* Myon; *Unten:* Zerfall eines Myons in ein Elektron. Das Abknicken der Bahn deutet darauf hin, dass im Zerfall noch ein weiteres, nicht sichtbares Teilchen beteiligt ist [**?**].

erkannt! Abb. 4.8 zeigt Nebelkammerspuren von Myonen (siehe Kapitel *Ionisierende Strahlung*). In der Aufnahme wird der Zerfall des Myons in ein Elektron beobachtet. Die Myonen werden in der oberen Atmosphäre erzeugt und müssen bis zum Nachweis auf der Erdoberfläche die Atmosphäre durchqueren. Ballonmessungen von Viktor Hess[16] ergaben, dass die Höhenstrahlung mit der Steighöhe des Ballons zunahmen. Weiter ergab sich, dass der Beobachtungswinkel, unter dem die Strahlung beobachtet wird, eine Rolle spielt (Abb. 4.9). Der Weg, den die Myonen zurück legen, muss also berücksichtigt werden. Man kann daraus den Schluss ziehen, dass entweder die Strahlung durch die Wechselwirkung mit der Atmosphäre abgeschwächt wird, oder ein Zerfall der Teilchen die Intensität der Strahlung herabsetzt. Wie sich herausstellt, zerfällt das Myon. Diese Erkenntnis erlaubt eine direkte Überprüfung der Speziellen Relativitätstheorie. Dazu bestimmt man die Anzahl der Myonen in unterschiedlichen Höhen, siehe Abb. 4.10.

Rossi and Hall Experiment

Das Zerfallsgesetz gibt Auskunft darüber, wie viele der Myonen, die in der oberen Atmosphäre erzeugt wurden, zu einem bestimmten späteren Zeitpunkt noch vorhanden sind. Die Durchführung eines solchen Experiments ist nahezu unmöglich. Experimentell ist es sehr umständlich, einen Detektor in dieser Höhe zu verankern. Man müsste in 20 km Höhe die Anzahl an Myonen bestimmen, vorausfliegen, am Erdboden auf die ankommenden Myonen warten und ihre Anzahl nochmal bestimmen. Es ist nicht bekannt, wie viele Myonen in der oberen Atmosphäre erzeugt werden. Wie schon erwähnt, ist die Erzeugungsrate an Myonen durch die kosmische Strahlung im Mittel konstant. Ein stetiger Strom an Myonen prasselt also pro Sekunde auf die Erde. Trotzdem ist es notwendig, die

[16]The Nobel Prize in Physics 1936 was divided equally between Victor Franz Hess *for his discovery of cosmic radiation* and Carl David Anderson *for his discovery of the positron.*

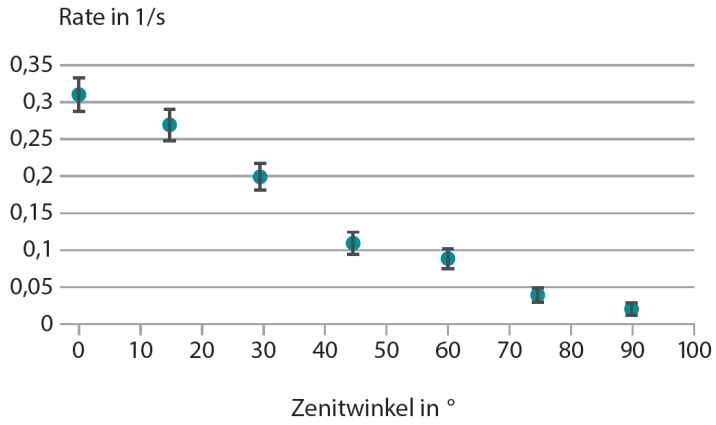


Abb. 4.9: Rate der Myonen in Abhängigkeit des Zenitwinkels.[a] Die Rate der vertikal einfallenden Myonen ist am höchsten. Die Rate der aus horizontaler Richtung einfallenden Myonen ist dagegen deutlich geringer [**?**].

[a] Senkrecht nach oben blickt man in Richtung Zenit. Von hier gemessen, ergibt sich der Zenitwinkel. Für die waagrechte Richtung, also den Horizont, wäre der Zenitwinkel 90°.

Anzahl der Myonen zu unterschiedlichen Zeitpunkten t zu erfassen. Aufgrund der nahezu konstanten Geschwindigkeit der Myonen v_{myon}, kann man Messungen zu unterschiedlichen Zeiten umdeuten in Messungen bei unterschiedlichen Höhen h ($h = v_{myon} \cdot t$). Was ist also zu tun? Der experimentelle Aufbau wird an zwei Orten mit unterschiedlicher Höhenlage aufgebaut und jeweils die Anzahl an Ereignissen, verursacht durch Myonen, bestimmt. Ein solches Experiment haben Rossi und Hall in den 50er Jahren am Mount Washington durchgeführt [**?**]. Der Film von Frisch und Smith *Time Dilatation: An Experimente with μ-Mesons (1962)* zeigt im Detail, wie die Forscher vorgegangen sind, siehe auch [**?**]:

Using the radioactive decay of cosmic ray mu-mesons shows the dilation of time in a filmed experiment which takes place on top of Mt. Washington, N.H. and at M.I.T. in Cambridge, Mass. Explains how data are taken to determine the time distribution of the decays of mu-mesons at rest. Determines the counting rate for mu-mesons with speeds of about 0.99 the speed of light which arrive on top of Mt. Washington and measures the number that survive to reach sea level. Deduces from the experimental results that the mesons, moving at 0.99c, keep time at about 1/9th the rest rate.

Link to video **Time Dilation. An Experiment With Mu Mesons**

Man kann das Experiment von Fritsch und Smith auch mit Hilfe des Raumzeit-Intervalls Δs^2 auswerten. Aus der Sicht des ruhenden Myons (Bezugssystem S') findet die Wechselwirkung mit den beiden Detektoren kurz hintereinander ($\Delta t' \neq 0$) an ein und demselben Ort ($\Delta x'$=0) statt, da sich die Detektoren auf das ruhende Myon zubewegen. Das Raumzeit-Intervall Δs^2 ist deshalb:

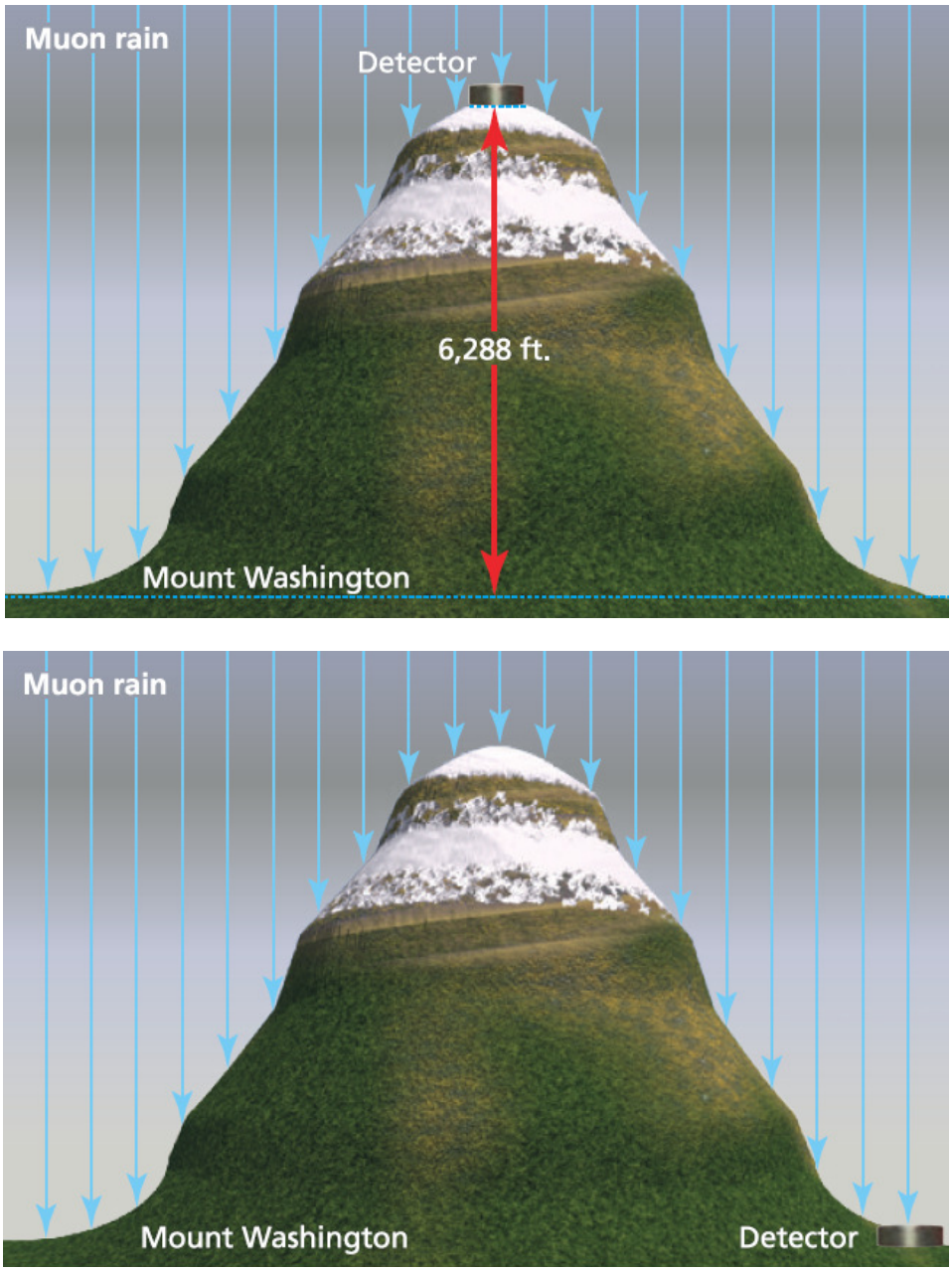


Abb. 4.10: Myonen, entstanden in der oberen Atmosphäre erreichen den Erdboden. Dadurch den Zerfall der Myonen auf ihrer Bahn stellt man einen Unterschied in der Zählrate auf einem Berg wie Mount Washington (1917 m) und Meereshöhe fest.

$$\Delta s^2 = c \cdot (\Delta t')^2 \tag{4.4}$$

Aus der Sicht eines Beobachters auf der Erde (Bezugssystem S) sind die Ereignisse sowohl im Raum als auch in der Zeit separiert ($\Delta t \neq 0$, $\Delta x \neq 0$). Für den im Experiment sich ergebenen Höhenunterschied von 1900 m, ergibt sich bei einer Geschwindigkeit der Myonen von $0.9952c$ eine Flugzeit von $6.4 \cdot 10^{-6}$ s. Damit berechnet sich das Raumzeit-Intervall zu:

$$\Delta s^2 = c^2 \cdot (6.4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})^2 - (1900\,\mathrm{m})^2 = 4.98 \cdot 10^4\,\mathrm{m} \tag{4.5}$$

Auswerten der beiden Gleichungen ergibt $\Delta t'$. Setzt man diesen Wert in das Zerfallsgesetz ein, ergibt sich:

$$\Delta t' = 7.4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} \tag{4.6}$$

Zeitintervalle und Entfernungen sind in unterschiedlichen Bezugssystem unterschiedlich. Beide Beobachter haben aber in ihrer Beurteilung der Situation recht. Oder mit Einstein ausgedrückt: Es gibt kein ausgezeichnetes Bezugssystem! Übertragen Sie das Ergebnis auf das Experiment zum Myon aus der Höhenstrahlung!

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Archäologie

Myonen haben wie das Elektron eine elektrische Ladung e. Das bedeutet, dass sie über die elektrostatische Wechselwirkung mit Materie wechselwirken. Es kommt aber nicht zu einer Wechselwirkung über die Starke Wechselwirkung.[17] Das bedeutet, dass die Wechselwirkung hochenergetischer Myonen mit Atomkernen vergleichsweise gering ist. Da die Emission von Bremsstrahlung (siehe Kapitel *Röntgen*) proportional zu m^{-6} ist, ist die Energieabgabe im Vergleich zum Elektron um einen Faktor 10^{14} geringer. Bremsstrahlung ist deshalb kein relevanter Reaktionskanal. Aufgrund dieser geringen Energieverluste dringen Myonen tief in Materie ein. Beispielsweise ist der Energieverlust in Fels nur etwa 4 MeV/cm, was dazu führt, dass 10 GeV Myonen mehr als 20 Meter Gestein durchdringen können.

Im Jahr 1965 schlug Luis Alvarez[18] vor, kosmische Myonen als Werkzeug für die Altertumsforschung einzusetzen [**?**]. Man wollte die Eigenschaft der Teilchen nutzen, Materie -ähnlich wie Röntgenstrahlen einen menschlichen Körper- gut zu durchdringen. In beiden Fällen wird auf dem Weg durch die Materie ein Teil der Strahlung absorbiert und

[17] Tatsächlich wurde das Myon, als es entdeckt wurde, für das gesuchte Yukawa-Teilchen, dem Träger der Starken Wechselwirkung gehalten.

[18] The Nobel Prize in Physics 1968 was awarded to Luis Walter Alvarez *for his decisive contributions to elementary particle physics, in particular the discovery of a large number of resonance states, made possible through his development of the technique of using hydrogen bubble chamber and data analysis.*

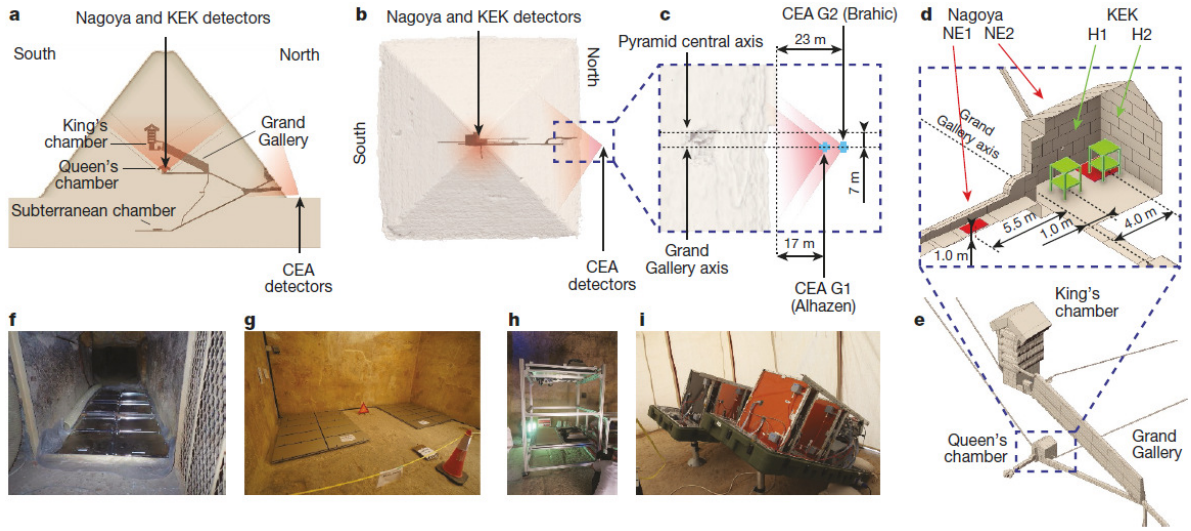


Abb. 4.11: (a) A cross-sectional schematic view of a nuclear emulsion. (b) Enlarged schematic view of the emulsion layer. Silver bromide crystals are dispersed in gelatin. The red dashed arrow shows the trajectory of the charged particle. (c) After the photographic development process, silver grains are aligned along the trajectory (track) of the charged particle. (d) An optical microscopic photograph of the track of a minimum ionizing particle recorded in a nuclear emulsion. (e) A nuclear emulsion after development. (f) A vacuum-packed nuclear emulsion. (g) Schematic view of the detector configuration: six packed nuclear emulsion films with a detection area of 30 cm·25 cm each (yellow) are fixed between aluminium supporting plates (honeycomb plate, in grey). Two films stacked on top of each other are pressed with a rubber sheet (black) by four short screws. Three additional long screws are used as legs to correct the inclination of the detector. (h) Cross-sectional schematic view of the nuclear emulsion detector as shown in (g) Two packed films are stacked between two honeycomb plates and rubber sheet [**?**].

es entsteht ein Schattenbild des Objekts. Durchqueren die Myonen auf ihrem Weg einen Hohlraum, werden weniger Myonen abgefangen und dies hat Einfluss auf die Zählrate der Myonen. Da die Myonen aus unterschiedlichsten Winkeln auf dem Erdboden einschlagen, sind auch tomographische Aufnahmen möglich. Um dieses Verfahren erfolgreich anzuwenden, bedarf es hochsensibler Teilchendetektoren, um die Myonen effizient nachzuweisen. Die Erfindung der Funkenkammern gestattete es, Untersuchungen in dieser Richtung durchzuführen. Als Untersuchungsobjekt wurde die Chephren-Pyramide in Gizeh untersucht, mit der Hoffnung, möglicherweise bislang noch nicht entdeckte Grabkammern zu finden. Die erste Suche war ergebnislos. Später entdeckten japanische Wissenschaftler unter anderem unter Verwendung der Myonen-Tomographie einen großen Hohlraum über der Königskammer [**?**]. Abb. 4.11 zeigt wie die Forscher ihre Nachweisinstrumente verteilt haben, um Informationen über die innere Struktur der Pyramide

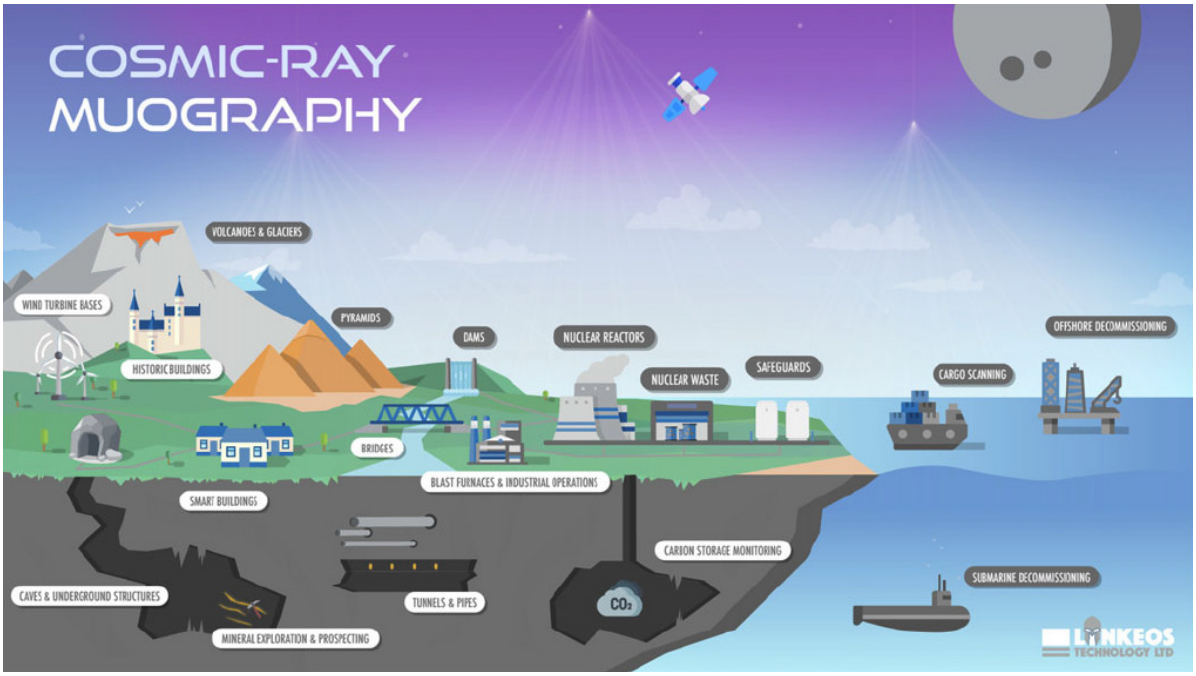


Abb. 4.12: Übersicht über Anwendungen der Myonen-Tomographie [**?**].

zu gewinnen. Es gibt Pläne (Projekt *Explore the Great Pyramid*), ein Myonenteleskop zu bauen, das 100-mal leistungsfähiger ist als die bisherigen Instrumente [**?**].

Discovery of a big void in Khufu's Pyramid by observation of cosmic-ray muons [**?**]**:** The Great Pyramid, or Khufu's Pyramid, was built on the Giza plateau in Egypt during the fourth dynasty by the pharaoh Khufu (Cheops), who reigned from 2509 bc to 2483 bc. Despite being one of the oldest and largest monuments on Earth, there is no consensus about how it was built. To understand its internal structure better, we imaged the pyramid using muons, which are by-products of cosmic rays that are only partially absorbed by stone. The resulting cosmic-ray muon radiography allows us to visualize the known and any unknown voids in the pyramid in a non-invasive way. Here we report the discovery of a large void (with a cross-section similar to that of the Grand Gallery and a minimum length of 30 metres) situated above the Grand Gallery. This constitutes the first major inner structure found in the Great Pyramid since the nineteenth century. The void, named ScanPyramids' Big Void, was first observed with nuclear emulsion films installed in the Queen's chamber, then confirmed with scintillator hodoscopes set up in the same chamber and finally re-confirmed with gas detectors outside the pyramid. This large void has therefore been detected with high confidence by three different muon detection technologies and three independent analyses. These results constitute a breakthrough for the understanding of the internal structure of Khufu's Pyramid. Although there is currently no information about the intended purpose of this void, these findings show how modern particle physics can shed new light on the

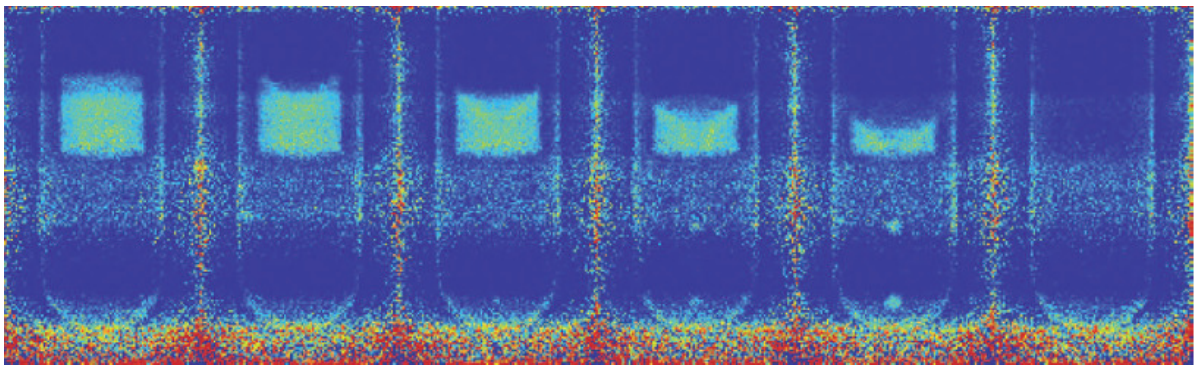


Abb. 4.13: Ergebnisse der Simulationen für Block 2 in *Fukushima Daiichi*. Die Simulationen wurden mit intaktem Kern (links), 10%-, 30%-, 50%-, 70%-geschmolzenem Kern und ohne Kern (rechts) durchgeführt. Zur Kontrolle wurden zwei kugelförmige Körper mit je 20 cm Durchmesser unterhalb des zu 10% geschmolzenem Kerns und 20 cm, 30 cm und 40 cm unterhalb des zu 70% geschmolzenem Kerns des Reaktorkerns platziert [**?**].

world's archaeological heritage.

Die Myonen-Tomographie kann auch in unterschiedlichsten Zusammenhängen eingesetzt werden [**?**]. Jüngste Beispiele sind Untersuchungen zu Wetterphänomenen [**? ?**]. Die Möglichkeiten zeigt Abb. 4.12. Die hohe Energie der Myonen von 3 GeV führt zu nahezu geraden Bahnen im Erdmagnetfeld. Der geringe Myonenfluss von 100 Teilchen pro Sekunde und Quadratmeter stellt keine Herausforderung für heutige Nachweissysteme dar und aussagekräftige Daten können erhoben werden. Der erste bekannte Anwendung der Methode erfolgte im Jahr 1955, in dem die Eisdecke oberhalb eines Tunnels bestimmt wurde [**?**]. In vielen Experiment der Elementarteilchenphysik wird der Schatten des Mondes im *Myonenschauer* zur Kalibrierung der Ortsauflösung der Teilchendetektoren, wie beispielsweise IceCube [**?**] (Kapitel *Materiewellen*), eingesetzt. Myonen-Tomographie kann beim Erkunden der inneren Struktur von Vulkanen helfen [**? ?**] oder beschädigte Installationen in Gebäuden [**?**] oder im Erdboden ausfindig machen. Kürzlich gelang, die Basis eines Gletschers im Jungfraugebiet im Zentrum der Alpen zu vermessen [**?**]. Dazu wurden im Tunnel der Jungfraubahnen eine Reihe von Myonen-Detektoren installiert. Die Fragen, die die Forscher umtreibt sind: Welche Erosionsstrukturen hinterlassen Gletscher? Wird der Fels durch die Bewegung geglättet oder bilden sich Stufen? Für weitere Beispiele aus den Geowissenschaften, siehe [**?**].

Ein Beispiel aus der Reaktortechnologie

Eine interessante Weiterentwicklung der Methode ist die Nutzung der Elementabhängigkeit der Myonenstreuung in Materie [**?**]. Dazu wird vor und hinter dem Objekt der Myonenfluss bestimmt. Mehrfach-Coulombstreuung des negativen Myons führt zu einer räumlichen Ausdehnung der Signale auf dem zweiten Detektor. Nach dem Reak-

torunglück von Fukushima war es mit dieser Technik möglich, das Innere der radioaktiv verseuchten Reaktoren zu erkunden [**?**]. Für die Messung nutzte man aus, dass die Elemente merklich unterschiedliche Streulängen haben (Wasser 39.3 cm, Beton 11.6 cm, Stahl 1.76 cm, Uran 0.317 cm). Das macht die Methode äußerst empfindlich, um Uran in Objekten, die hauptsächlich leichte Elemente enthalten, ortsaufgelöst nachzuweisen. Abb. 4.13 zeigt das Ergebnis einer Simulation zur *Fukushima Daiichi, Block 2*. Das Reaktormodell umfasste alle Hauptstrukturen des Blocks. Das Material des Simulationsvolumens hatte eine durchschnittliche Dichte von 4.3 g/cm^3, bestehend aus Urandioxid (60.5%), Zirkonium (22%), Edelstahl (2%) und Wasser (15.5%). Der verseuchte Bereich hat eine Dichte von 8.2 g/cm^3 und bestand aus Uran (70%), Zirkonium (14%), Sauerstoff (13%) und Edelstahl (3%). Für die Zusammensetzung griffen die Forscher auf Erfahrungen aus dem Reaktorunfalls von *Three Mile Island* zurück.[19]

Atmospheric muography for imaging and monitoring tropic cyclones [?]: Large–scale solid bodies on Earth such as volcanoes and man-made pyramids have been visualized with solid earth muography, and the recently invented technique, acqueous muography, has already demonstrated its capability to visualize ocean tides and tsunami. In this work, atmospheric muography, a technique to visualize and monitor the vertical profile of tropic cyclones (TCs) is presented for the first time. The density distribution and time-dependent behavior of several TCs which had approached Kagoshima, Japan, has been investigated with muography. The resultant time-sequential images captured their warm cores, and their movements were consistent with the TC trails and barometric pressure variations observed at meteorological stations. By combining multidirectional muographic images with barometric data, we anticipate that muography will become a useful tool to monitor the three-dimensional density distribution of a targeted mesoscale convective system.

Ein Beispiel aus der Welt historischer Gebäude

Kosmischer Myonen können auch zur statischen Überwachung historischer Gebäude eingesetzt werden. Verformungen können hier über einen Zeitraum von Monaten oder Jahren auftreten. Für den *Palazzo della Loggia* in der italienischen Stadt Brescia wurde ein entsprechendes Detektorsystem zur Überwachung des Holzgewölbes eingesetzt. Ein Myonen-Teleskop befindet sich im festen Teil des Gebäudes. Kosmische Myonen, die beide Detektoren durchqueren, registrieren im Vergleich der Signale Verschiebungen im Millimeterbereich. Die erreichte Genauigkeit in der Messung sollte ausreichen, um jahreszeitliche Verformungen zu verfolgen und Verformungstrends zu erkennen [**?**].

Ein Beispiel aus der Welt der Kunstgeschichte

Schon vor mehr als 50 Jahren wurde diskutiert, so genannte myonische Röntgenstrahlen einzusetzen, um archäologische Artefakte zu untersuchen. Die Idee, ist zur Anregung von

[19] Beim *Three Mile Island* Reaktorunfall am 28. März 1979 in Pennsylvania (USA) kam es zu einer partiellen Kernschmelze des Blocks 2.

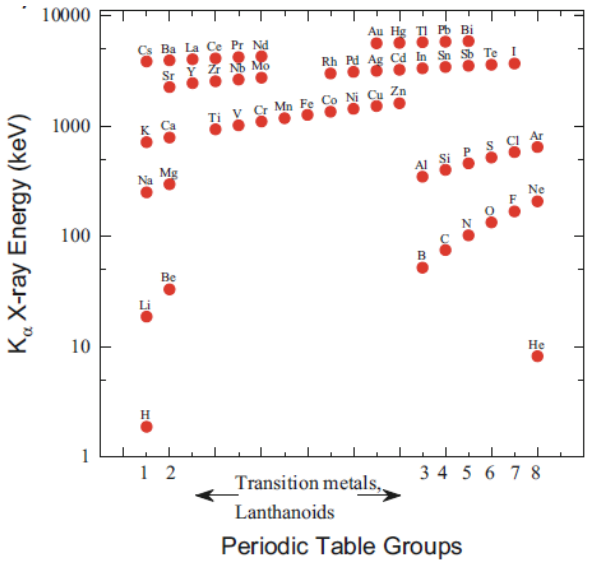


Abb. 4.14: K_α-Röntgenstrahlung der Elemente des Periodensystems [**?**].

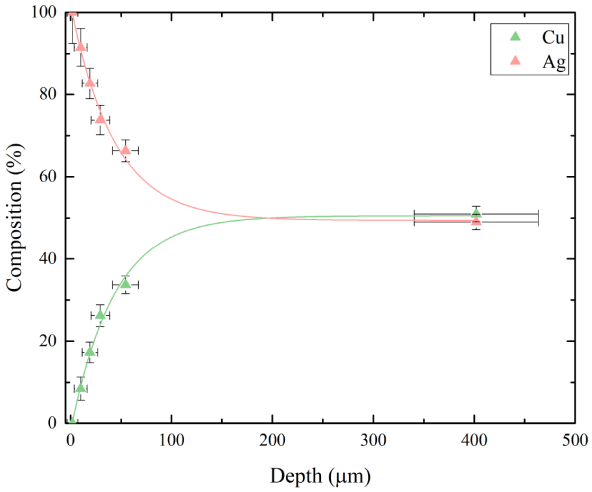


Abb. 4.15: Silber und Kupfer Tiefenzusammensetzung der Julia-Domna-Denar-Münze [**?**].

Röntgenfluoreszenz (Kapitel *Röntgendiagnostik*) statt Elektronen Myonen zu verwenden. Beim Wechsel zwischen den Energieniveaus im Atom wird Strahlung frei. Aufgrund der deutlich höheren Myonenmasse im Vergleich zum Elektronen ($m_\mu = 200 \cdot m_e$) hat das Röntgenlicht einen höhere Photonenenergie. Typisch sind 6 MeV, siehe Abb. 4.14. Wie bei konventioneller Anregung durch Elektronen gibt das Röntgenlicht über die Charakteristische Strahlung Auskunft über die Elementzusammensetzung. Der Vorteil für die Untersuchungen ist, dass das Licht kaum mit Materie wechselwirkt und deshalb die Emission aus tieferen Schichten beobachtet werden kann. Durch die Entwicklung leistungsstarker Beschleuniger ist es heutzutage möglich, Untersuchungen auf der Grundlage dieser Diagnostik in größerem Umfang durchzuführen. Anlagen stehen in Japan (J-PARC), und Großbritannien (ISIS).

Die Finanzstärke einer antiken Nation lässt sich in vielen Fällen an der Qualität der Münzen erkennen. Ein gutes Beispiel sind römische Silbermünzen. Diese Münzen wur-

den aus einer Silber-Kupfer-Legierung hergestellt. Durch Erhitzen wurde versucht, den Silberanteil an der Oberfläche anzureichern, was in der Tiefe zu Unterschieden in der Legierung führte. Herkömmliche Methoden beruhen auf mechanischer Bearbeitung, wodurch das Objekt in der Regel zerstört wird. Myon-Röntgenfluoreszenz erlaubt es, ohne Schädigung der Münze, die Tiefenzusammensetzung der Ag/Cu-Legierung zu bestimmen, wie man an einer Julia-Domna-Münze aus der Zeit 211-217 n. Chr. zeigen konnte [**?**], siehe Abb. 4.15. Experimente an Münzen unterschiedlicher Epochen des Römischen Reiches können offenbaren, ob der Silberanteil in den Münzen mit Zeiten von Instabilität und geringeren Staatseinnahmen korreliert.

Aufgaben

Aufgabe 1.1: Wie lange dauert für einen Beobachter auf der Erde und für den Astronauten an Bord des Raumschiffs Hansa4Ever (Reisegeschwindigkeit $0.95c$) ein Flug nach α-Centauri.

Der Stern α-Centauri ist von der Erde d=4.5 Lichtjahre[20] entfernt. Für den Astronomen auf der Erde dauert der Flug:

$$\begin{aligned}
\Delta t_{earth} &= \frac{d}{v_{ship}} \\
\Delta t_{earth} &= \frac{4.3\,\mathrm{Lj}}{0.95 \cdot c} \\
\Delta t_{earth} &= \frac{4.3 \cdot 9.46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}}{0.95 \cdot 2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}} \\
\Delta t_{earth} &= 4.5\,\mathrm{a}
\end{aligned}$$

Im Bezugssystem des Astronauten vergeht weniger Zeit:

$$\begin{aligned}
\Delta t_{ship} &= \frac{\Delta t_{earth}}{\gamma} \\
\Delta t_{ship} &= \sqrt{1-(0.95)^2} \cdot 4.5\,\mathrm{a} \\
\Delta t_{ship} &= 1.4\,\mathrm{a}
\end{aligned}$$

Gleichzeitig schrumpft für den Astronauten die Entfernung zu α-Centauri auf:

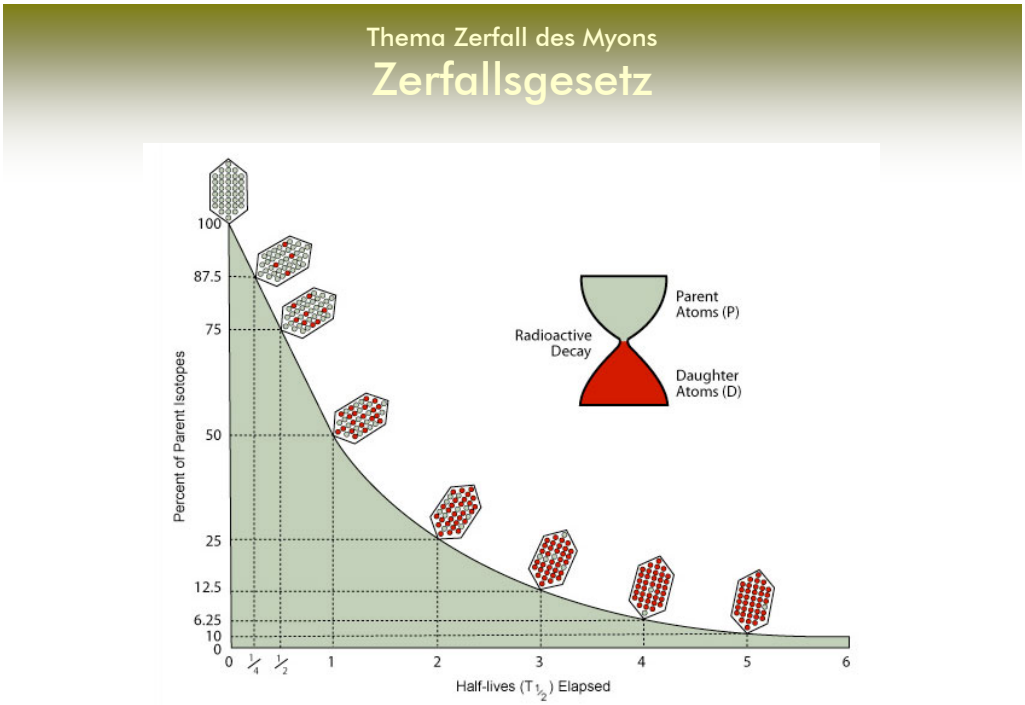
$$\begin{aligned}
\Delta d_{ship} &= v \cdot \Delta t_{ship} \\
\Delta d_{ship} &= 0.95\,c \cdot 1.4\,\mathrm{a} \\
\Delta d_{ship} &= 1.3\,\mathrm{Lj}
\end{aligned}$$

[20] Einheit Lichtjahr: $1\,\mathrm{Lj}=9.46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter Kosmischer Höhenstrahlung?
2. Warum wurde die Kosmische Höhenstrahlung erst bei Ballonfahrten entdeckt?
3. Ist das Myon ein Elementarteilchen?
4. Welche Eigenschaften hat das Myon?

4.2 Radioaktives Zerfallsgesetz



Die Bildung eines Reaktionsproduktes (*daughter atom*) durch den Zerfall eines radioaktiven Stoffes (*parent atom*) kann durch das Zerfallsgesetz beschrieben werden. An dieser Stelle wird nur die Formel vorgestellt. Die ausführlich Behandlung erfolgt in Kapitel *Ionisierende Strahlung*. Für die weitere Behandlung im Rahmen des Myon-Experiments reicht dies vollkommen aus. Wir postulieren, dass sich das Zeitverhalten der Myonen durch das Zerfallsgesetz beschreiben lässt.
Die Gleichung

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda_{decay} \cdot t} \tag{4.7}$$

beschreibt am Beispiel des radioaktiven Zerfalls, wie viele ($N(t)$) der anfänglich vorhandenen radioaktiven Atome N_0 nach einer bestimmen Zeit t noch vorhanden sind. Eine dazu notwendige Information ist die Zerfallskonstante λ_{decay}, die die Zerfallsdynamik charakterisiert. Abb. 4.16 verdeutlicht, wie sich λ_{decay} auf den Zerfallsprozess auswirkt. Die SI-Einheit von λ_{decay} ist -offensichtlich- $[s^{-1}]$. Warum offensichtlich?[21] Der Kehrwert t_{decay}=$1/\lambda_{decay}$ gibt die Zerfallszeit an. Das ist die Zeitspanne, die vergeht, bis der

[21] Man sollte sich klar machen, dass der Eintrag in der Exponentialfunktion dimensionslos sein muss!

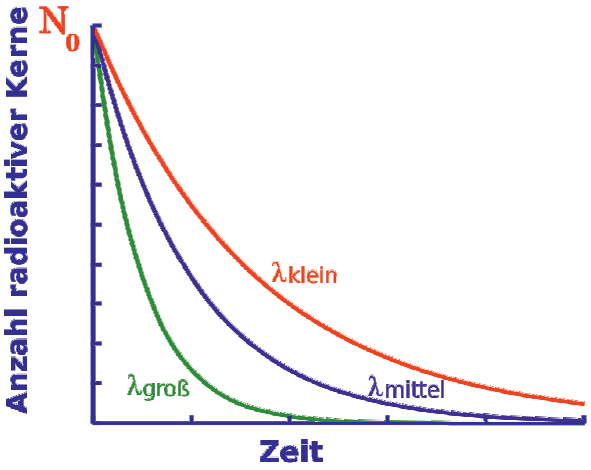


Abb. 4.16: Abfall der Anzahl radioaktiver Kerne in Abhängigkeit der Zerfallskonstante λ_{decay}.

Anfangswert auf $1/e$ abgenommen hat. Abbildung 4.17 zeigt den Zerfall des Isotops ^{99m}Tc, eines in der Nuklearmedizin häufig verwendeten radioaktiven Markers (Kapitel *Bildgebende Verfahren*). In dieser Abbildung erkennt man, dass der Zerfall in Einheiten der Größe Halbwertszeit $t_{1/2}$ aufgetragen ist. Aus der Zerfallskonstanten λ_{decay} kann die Halbwertszeit $t_{1/2}$ berechnet werden. Der Umrechnungsfaktor $\ln 2$ ergibt sich aus dem Faktor $1/2$.

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_{decay}} \tag{4.8}$$

Die Abbildung verdeutlicht, wie die Anzahl der anfänglich vorhandenen Mutteratome mit der Zeit überproportional abnimmt. Tatsächlich ergibt sich eine Exponentialfunktion, siehe Gl. 4.7. Wichtige Zeitabschnitte sind schon angedeutet. Nach der Zeitspanne $t_{1/2}$ haben sich die Hälfte der Mutteratome umgewandelt. Nach drei Halbwertszeiten sind nur noch $N_0/8$ der Mutteratome vorhanden.

Das Zerfallsgesetz lässt sich auf unterschiedliche Weise im Unterricht demonstrieren, beispielsweise über das langsame Abfließen einer Flüssigkeit aus einem Loch am unteren Ende eines Behälters oder über die Entladung eines Kondensators. Anregungen findet man in [**? ? ?**].

Blickwinkel

Der Zerfall der Myonen liefert die verlangte Präzisionsuhr. Die Zerfallskonstante für das Myon ist von der Natur vorgegeben und kann nicht geändert werden! Im Ruhesystem des Myons beträgt die Halbwertszeit des Myons $t_{1/2} = 1.56 \cdot 10^{-6}\mu$s. Zunächst eine Betrachtung im Rahmen der Klassischen Physik. Wir berechnen, den Fall, dass Myonen in einer Höhe von 10 km über Warnemünde erzeugt werden. Die Geschwindigkeit der

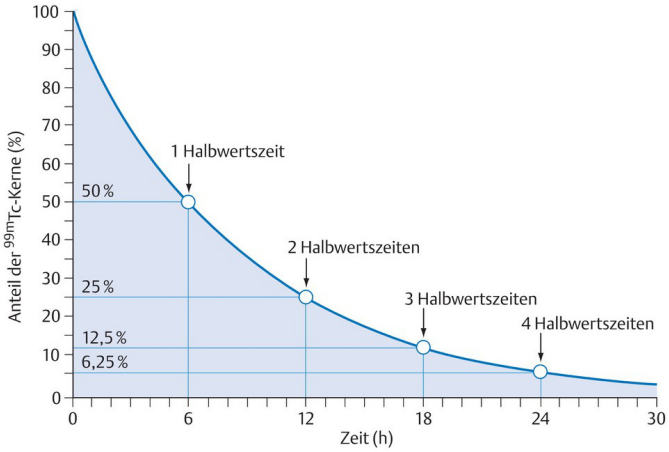


Abb. 4.17: Abnahme der Anzahl der radioaktiven Kerne in einer ^{99m}Tc-Probe in Einheiten der Halbwertszeit.

Myonen beträgt $0.98c$. Daraus ergibt sich eine Flugzeit von

$$t_{Myon} = \frac{1 \cdot 10^4\,\mathrm{m}}{0.98\,c} = \frac{1 \cdot 10^4\,\mathrm{m}}{0.98 \cdot 2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 34 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \tag{4.9}$$

Die Halbwertszeit des Myons beträgt $t_{1/2}$=$1.56 \cdot 10^{-6}$ s. Daraus errechnet sich eine Zerfallskonstante in Höhe von

$$\lambda_{decay} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}^{ruhend}} = \frac{\ln 2}{1.56 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} = 4.44 \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1} \tag{4.10}$$

Wie viele Ereignisse erwartet man im Vergleich Berg-zu-Tal?

$$\begin{aligned} \frac{N_{Tal}}{N_{Berg}} &= \exp(-\lambda_{decay} \cdot t_{Myon}) \\ \frac{N_{Tal}}{N_{Berg}} &= \exp\big(-(4.44 \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot (34 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})\big) \\ \frac{N_{Tal}}{N_{Berg}} &= 2.7 \cdot 10^{-7} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die Analyse ergibt, dass die Rate an Ereignissen verschwindend klein sein sollte, da kaum ein Myon den Erdboden erreicht. Tatsächlich berechnen wir an dieser Stelle nur das Verhältnis für einen Höhenunterschied von 10 km. Die Teilchen werden aber in einer Höhe von 20 km erzeugt. Das würde bedeuten, das bei doppelter Wegstrecke nur eins von 10^{13} Myonen auf der Erde ankommt. Die hohe Geschwindigkeit reicht also nicht aus, um die Natur auszutricksen. Die vermutlich geringe Rate würde eine erhebliche experimentelle Herausforderung an die Diagnostik stellen. Nun kommen die Effekte der Speziellen Relativitätstheorie zum tragen, nämlich Zeitdilatation und Längenkontraktion. Wir beobachten den Weg der Myonen durch die Atmosphäre. Die Geschwindigkeit

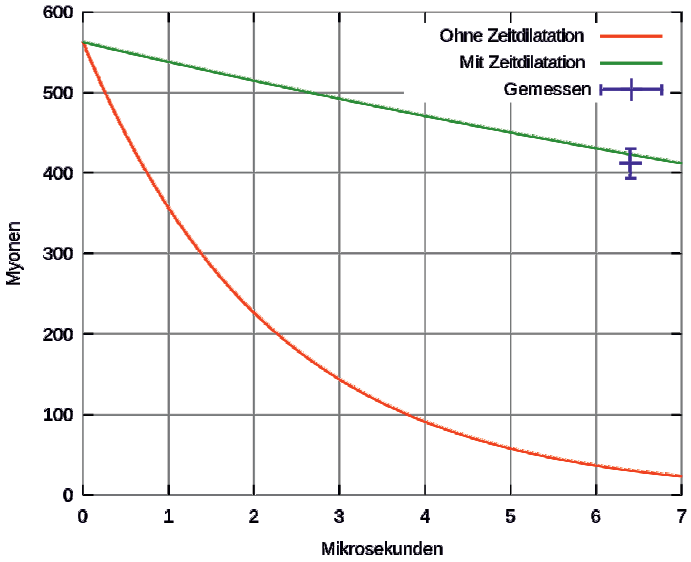


Abb. 4.18: Ergebnis des Frisch-Smith-Experiments [**?**] im Vergleich zur klassischen Rechnung und zum Verhalten im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie [**?**].

der Myonen ist mit $\beta = 0.98$ so hoch, dass man Effekte der Speziellen Relativitätstheorie nicht vernachlässigen kann. Auf den nächsten Folien wird zunächst durchgespielt, was ein ruhenden Beobachter auf der Erde beobachtet. Im zweiten Schritt wird betrachtet, wie sich derselbe Vorgang im Ruhesystem des Myons darstellt.

Ruhesystem des Beobachters auf der Erde

Zunächst benötigen wir den γ-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 5.03 \tag{4.12}$$

Durch den Effekt der Zeitdilatation erhöht sich die Halbwertszeit um diesen Faktor.

$$\begin{aligned} t_{1/2}^{SRT} &= \gamma \cdot t_{1/2} \\ t_{1/2}^{SRT} &= 5.03 \cdot (1.56 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}) \\ t_{1/2}^{SRT} &= 7.85 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Das führt zu einer Zerfallskonstanten von

$$\lambda_{decay}^{SRT} = \frac{\ln 2}{\gamma \cdot t_{1/2}^{SRT}} = 8.83 \cdot 10^{5}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{4.14}$$

Der Wert der Zerfallskonstanten hat sich durch die relativistische Betrachtung stark

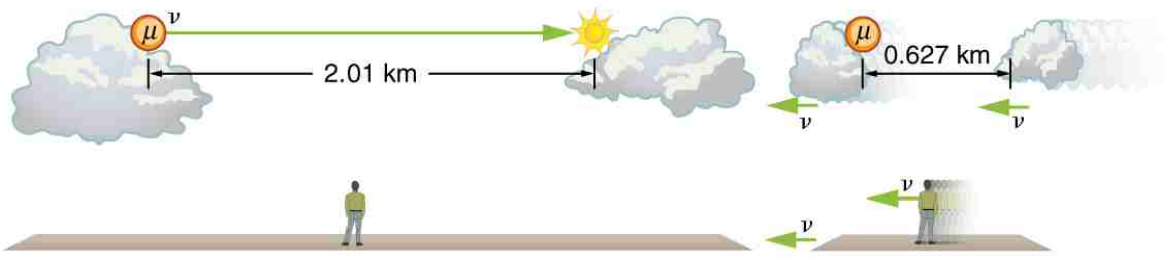


Abb. 4.19: (a) Ein Beobachter auf der Erde beobachtet ein Myon, wie es eine Strecke von 2.01 km fliegt. (b) Für das Myon in seinem Ruhesystem ist die Strecke stark verkürzt [**?**].

verringert. Wie ändert sich das Berg-zu-Tal Verhältnis?

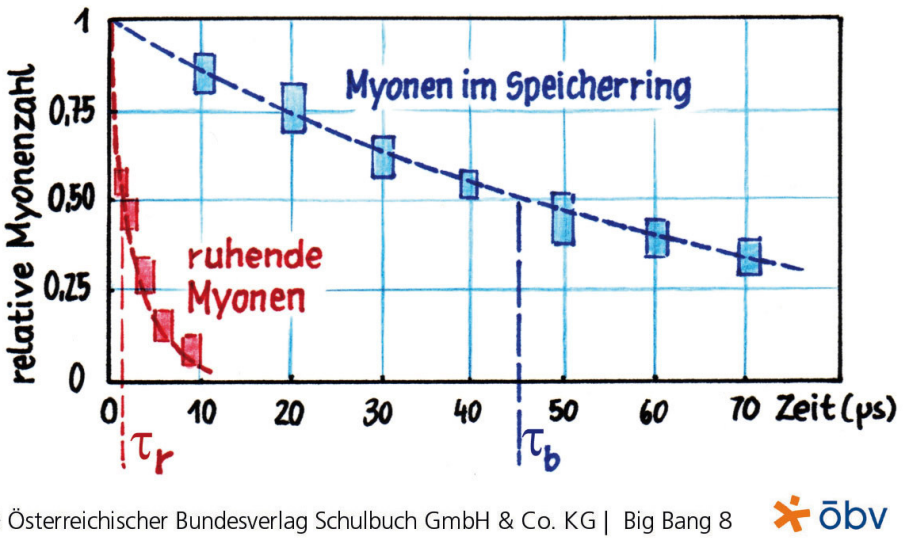
$$\begin{aligned} \frac{N_{Tal}}{N_{Berg}} &= \exp\left(-\lambda_{decay}^{SRT} \cdot t_{Myon}\right) \\ \frac{N_{Tal}}{N_{Berg}} &= \exp\left(-(8.83 \cdot 10^5\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot (34 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})\right) \\ \frac{N_{Tal}}{N_{Berg}} &= 0.05 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Mehr Myonen als erwartet werden am Fuß des Berges detektiert. Man könnte vermuten, dass das Myon seine Halbwertszeit aktiv verändert hat. Eine geringere Zerfallskonstante hätte tatsächlich zur Folge, dass sich der Zerfall verlangsamt und so könnte man sich das Ergebnis der Messung erklären. Das geht aber nicht, da der Wert von λ_{decay} eine unveränderbare Eigenschaft des Myons darstellt. Diese gilt aber NUR im Ruhesystem des Myons. Berücksichtigt man den Effekt der Zeitdilatation, wird klar, warum mehr Myonen als erwartet ankommen. Da die Uhren im bewegten Bezugssystem für den ruhenden Beobachter langsamer gehen, sind kaum Myonen zerfallen. Es ist einfach noch nicht viel Zeit vergangen, sagt der Beobachter auf der Erde. Es ergibt sich ein Wert von $N_{Tal}/N_{Berg} = 0.05$ als Unterschied in der Anzahl der Ereignisse zwischen den beiden Messpunkten. Abbildung 4.18 vergleicht die erwartete Anzahl an Myonen mit und ohne Berücksichtigung der Speziellen Relativitätstheorie. Das experimentelle Ergebnis ist mit der klassischen Physik, das heißt ohne Berücksichtigung der Zeitdilatation, nicht nachzuvollziehen.

Ruhesystem des Elementarteilchens

Die Uhr läuft normal und die Halbwertszeit beträgt, da das Teilchen ruht, $t_{1/2} = 1.56 \cdot 10^{-6}$s. Für das Myon rast allerdings -relativ betrachtet- der Erdboden mit nahezu Lichtgeschwindigkeit auf das Teilchen zu. Der Effekt der Längenkontraktion muss also berücksichtigt werden, siehe Abb. 4.19. Am γ-Faktor ändert sich nichts, da wir stets Geschwindigkeiten relativ zueinander betrachten. Die Längenkontraktion liefert

$$L_{Myon}^{SRT} = \frac{L_{Myon}}{\gamma} = \frac{10^4\,\mathrm{m}}{5.03} = 1988\,\mathrm{m} \tag{4.16}$$



© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG | Big Bang 8 obv

Abb. 4.20: Vergleich der Zerfallskurven für ruhende und bewegte Myonen.

Damit benötigt das Myon bei seiner Reisegeschwindigkeit nur noch

$$t_{Myon}^{SRT} = \frac{L_{Myon}^{SRT}}{\beta \cdot c} = \frac{1988\,\mathrm{m}}{0.98 \cdot \cdot (2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})} = 6.76 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \tag{4.17}$$

Das ist deutlich kürzer als in der klassischen Rechnung. Wir berechnen den Zerfall im Ruhesystem des Myons. Dies liefert unter Berücksichtigung der Zerfallskonstanten λ=$8.83 \cdot 10^5\,\mathrm{s}^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{N_{Tal}}{N_{Berg}} &= \exp\left(-\lambda_{decay} \cdot t_{Myon}^{SRT}\right) \\ \frac{N_{Tal}}{N_{Berg}} &= \exp\left(-(4.44 \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot (6.76 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})\right) \\ \frac{N_{Tal}}{N_{Berg}} &= 0.05 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Berechnet man nun die Anzahl der zerfallenden Myonen ohne Zeitdilatation (Myon ist in Ruhe), aber unter Berücksichtigung der Längenkontraktion, ergibt sich im Vergleich zum Beobachter im Bezugssystem Erde, genau der gleiche Wert für $N_{Tal}/\,N_{Berg}$, nämlich 0.05.

Fazit

Beide Beobachter erhalten in ihren jeweiligen Ruhesystemen ein und dasselbe Ergebnis.

Kann man diese Experiment auch im Labor durchführen? Dazu benötigt man Anlagen, die Myonen viele Halbwertszeiten einsperren können. Die technische Lösung sind Spei-

cherringe. Die Teilchen werden auf Kreisbahnen geschickt, die sie immer wieder durchfliegen. Ausgehend von einer anfänglichen Anzahl an Myonen bestimmt man von Zeit zu Zeit die übrig gebliebenen Teilchen und bestimmt daraus die Lebensdauer. Der Vorteil dieser Methode ist, dass man die Geschwindigkeit der Myonen einstellen kann und damit die relativistischen Effekte. Abb. 4.20 zeigt Ergebnisse. Das Experiment [**?**] ergab eine Lebensdauer von 44.05 μs in guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Speziellen Relativitätstheorie. In Messungen an unterschiedlichsten Systemen wurde diese Analyse bestätigt [**? ? ? ?**].

Anwendungen[4LP]

Beispiele aus der Elementarteilchenphysik

Pionen (π^+, π^-) sind Elementarteilchen die in ihrem Ruhesystem mit einer Zerfallszeit von etwa $t_{pion} = 2.5 \cdot 10^{-8}$ s zerfallen.[22] In Experimenten wird die Anzahl relativistischer Pionen (v_{pion}=0.91c) im Abstand zur Quelle bestimmt. Nach der Zeit t ist die Anzahl der Pionen abgesunken auf:

$$N(t) = N_0 \exp(-t/t_{decay}) \tag{4.19}$$

Aufgrund der bekannten Geschwindigkeit v_{pion} entspricht dies einer Entfernung von $x = v_{pion} \cdot t$. Damit kann man $N(t)$ auch in Abhängigkeit von x angegeben:

$$N(x) = N_0 \exp\left(-\frac{x}{v_{pion} \cdot t_{decay}}\right) \tag{4.20}$$

Für das Verhältnis $R = N(x)/N_0$ ergibt sich

$$R(x) = \exp\left(-\frac{x}{v_{pion} \cdot t_{decay}}\right) \tag{4.21}$$

In einer halblogarithmischen Darstellung (x, $\log_{10}(R(x))$) sollte sich aus den Messwerten eine Gerade mit der Steigung -$(v_{pion} \cdot t_{decay})^{-1}$ ergeben. Im Experiment ergab sich [**?**]:

$$t^{\pi^+}_{decay} = 2.44 \cdot 10^{-8}\,\text{s} \tag{4.22}$$

$$t^{\pi^-}_{decay} = 2.55 \cdot 10^{-8}\,\text{s} \tag{4.23}$$

[22] Der Zerfall der geladenen Pionen beinhaltet die Erzeugung von Neutrinos, unterliegt also der Schwachen Wechselwirkung

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu \end{aligned}$$

Das neutrale Pion dagegen zerfällt aufgrund der Elektromagnetischen Wechselwirkung

$$\pi^0 \rightarrow 2\,\gamma$$

und hat deswegen eine deutlich kürzere Halbwertszeit von $1.8 \cdot 10^{-18}$ s

Als Kontrolle kann man die Lebensdauer im Ruhesystem ausnutzen und erhält den γ-Faktor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{pion}^2}{c^2}}} = 2.41 \tag{4.24}$$

Auflösen nach v_{pion} liefert $0.91c$, was gut mit dem experimentellen Ergebnis übereinstimmt.

Die Änderung der Zerfallszeit schneller Teilchen hat erhebliche Bedeutung für das Design von Experimenten. Beim Stoß energiereicher Protonen mit Materie werden K^+ Mesonen mit einem Impuls von 3 GeV/c erzeugt. Diese bewegen sich mit $0.98645c$ Die Wechselwirkung mit Protonen findet in einer Blasenkammer (Kapitel *Ionisierende Strahlung*) statt, die etwa 100 m entfernt steht. Die Zerfallszeit im Bezugssystem des K^+ beträgt $1.23 \cdot 10^{-8}$ s. Im Laborsystem ergibt sich $7.5 \cdot 10^{-8}$ s. Das führt dazu, dass 10^{-2} der erzeugten Teilchen die Blasenkammer erreichen. Ohne Zeitdilatation wären es nur $1.2 \cdot 10^{-12}$. Das wären schlechte Bedingungen, um ein erfolgreiches Experiment durchzuführen. Experimente an K^+ und K^- bei Kinetischen Energien im Bereich 1 GeV bestätigen den Effekt der Zeitdilatation mit einer Genauigkeit von 5% [**?**].

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 2.1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein radioaktiver Kern über 10 Halbwertszeiten nicht zerfällt?[23]

Aufgabe 2.2: Stimmen mittlere Lebensdauer und Halbwertszeit eines radioaktiven Kerns überein?[24]

(a) Ja!

(b) Nein!

Aufgabe 2.3: Der rote und der grüne Leuchtturm in Warnemünde geben jeweils ein Lichtsignal ab. Ein entfernt stehender Tourist sieht, dass das Licht gleichzeitig ausgestrahlt wird. Allein daraus kann man schließen:[25]

(a) Für alle Touristen strahlen die Leuchttürme gleichzeitig auf.

(b) Die Blitze treffen nur für diesen Beobachter und nur an diesem Ort gleichzeitig auf.

(c) Die Blitze treten gleichzeitig den Touristen, der sich relativ zu den Leuchttürmen bewegt.

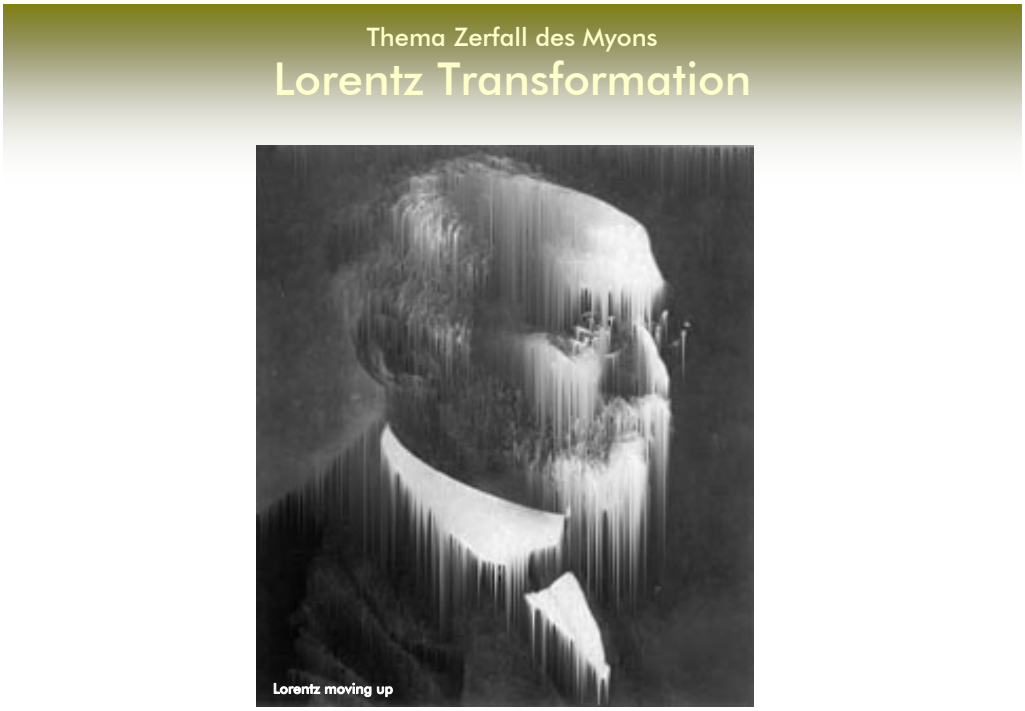
(d) Es ist nicht möglich, eine der obigen Schlussfolgerungen zu ziehen.

[23] Antwort: $(1/2)^{10}=1/1024$
[24] Antwort: (b)
[25] Antwort: (d)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Kann man den Zerfall eines radioaktiven Nuklids beliebig verlangsamen?
2. Kann man den Zerfall eines radioaktiven Nuklids beschleunigen?
3. Kennen Sie Prozesse in der Natur, die dem Zerfallsgesetz gehorchen?
4. Wie muss man Messergebnisse auftragen, damit man sofort erkennt, dass es sich um einen Prozess handelt, der dem Zerfallsgesetz gehorcht?
5. Aus der Speziellen Relativitätstheorie ist bekannt, das bewegte radioaktive Kerne langsamer zerfallen. Wie erfahren die Kerne, dass sie sich bewegen und deshalb langsamer zerfallen?
6. Lagerstätten für radioaktiven Abfall sollen für mindestens 10 000 Jahre sicher sein. Was meinen Sie?

4.3 Lorentz-Transformation



Wir sehen also, dass wir dem Begriffe der Gleichzeitigkeit keine absolute Bedeutung beimessen dürfen, sondern dass zwei Ereignisse, welche, von einem Koordinatensystem aus betrachtet, gleichzeitig sind, von einem relativ zu diesem System bewegten System aus betrachtet, nicht mehr als gleichzeitige Ereignisse aufzufassen sind [**?**].

Albert Einstein, 1905

Die mathematischen Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie wurden schon vor Einstein durch Hendrik Antoon Lorentz[26] erarbeitet. Kennzeichnend für die Lorentz-Transformation ist, dass, im Gegensatz zur klassischen Physik, der Zeitablauf beim Wechsel zwischen Inertialsystemen (IS_1, IS_2) ebenfalls transformiert wird. Im Rahmen der Galilei-Transformation galt:

[26]The Nobel Prize in Physics 1902 was awarded jointly to Hendrik Antoon Lorentz and Pieter Zeeman *in recognition of the extraordinary service they rendered by their researches into the influence of magnetism upon radiation phenomena.*

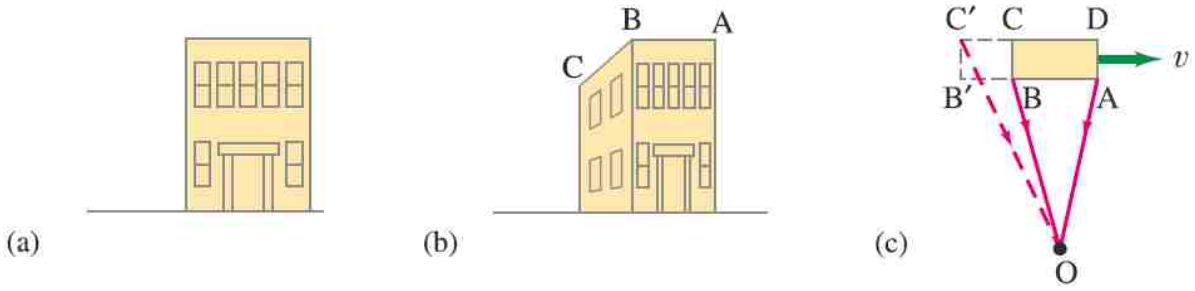


Abb. 4.21: Gebäude in Ruhe (a) und (b) gesehen mit hoher Geschwindigkeit gesehen. (c) Erläuterung, weshalb die Seite des Gebäudes zu sehen ist [**?**].

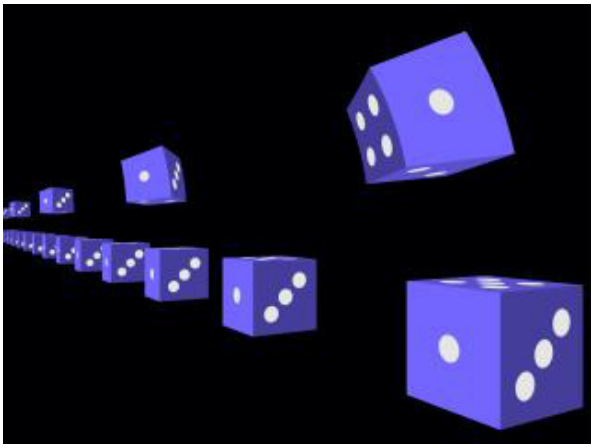


Abb. 4.22: Der Terrell-Effekt ist eine optische Verzerrung, die ein schneller Körper scheinbar erleidet. Das Phänomen wurde zuerst von Lampa [**?**] und später von Penrose [**?**] und Terrell [**?**] beschrieben.

$$\begin{aligned} t_2^{IS} &= t_1^{IS} & t_1^{IS} &= t_2^{IS} \\ x_2^{IS} &= x_1^{IS} - v \cdot t & x_1^{IS} &= x_2^{IS} + v \cdot t \\ y_2^{IS} &= y_1^{IS} & y_1^{IS} &= y_2^{IS} \\ z_2^{IS} &= z_1^{IS} & z_1^{IS} &= z_2^{IS} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Wie könnte die relativistische Variante aussehen?

Terrell-Effekt^{4LP}

Als Einstieg wird die Verzerrung eines Objektes bei einem schnellen Vorbeiflug betrachtet [**?**]. Dabei scheint sich der Körper auch zu drehen, siehe Abb. 4.21. Merkwürdiger Effekt, nicht wahr? Die Rotation des Körpers resultiert allein aus der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit. Betrachten Sie die hintere Ecke (C) des dargestellten Hauses. Aufgrund des längeren Lichtwege wird die Information über den Punkt (C) verspätet wahrgenommen werden. Dadurch erscheint dem Beobachter das Objekt (Haus) nicht nur gestaucht (Längenkontraktion), sondern auch gedreht. Abb. 4.22 zeigt das Phänomen der Terrell-Rotation am Beispiel eines mit relativistischer Geschwindigkeit fliegenden Würfels.

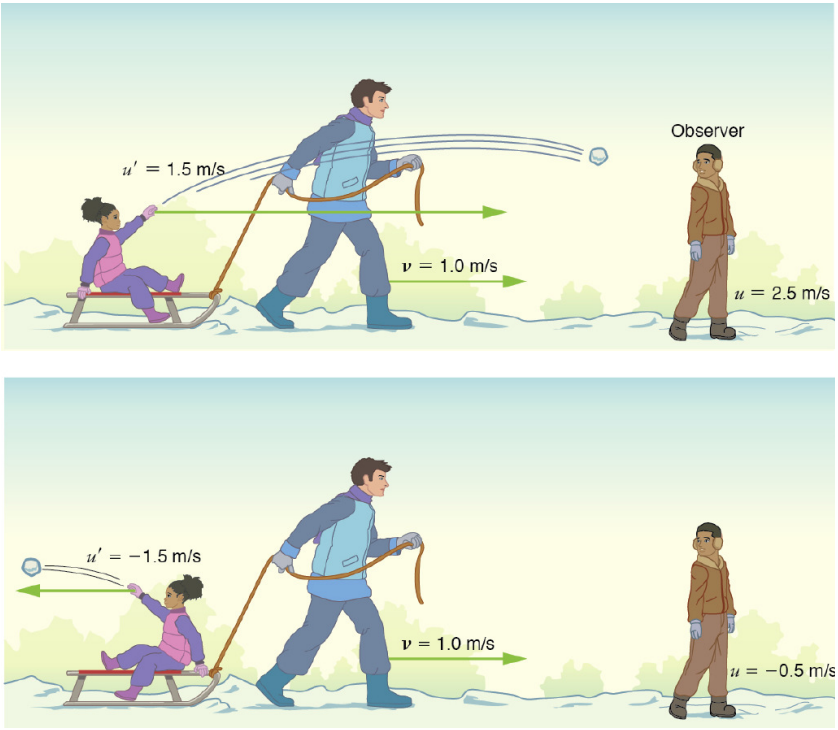


Abb. 4.23: Klassisch addieren sich Geschwindigkeiten, hier gezeigt für eine eindimensionale Bewegung. Ein Mädchen auf einem Schlitten wirft einen Schneeball in Vorwärts- bzw. in Rückwärtsrichtung. Relativ zum Erdboden ist die Geschwindigkeit des Schlittens v=1 m/s. Die Geschwindigkeit des Schneeballs relativ zum Bezugssystem Schlitten ist u'=±1.5 m/s. Relativ zu Boden ist die Geschwindigkeit u=–0.5 m/s beziehungsweise 2.5 m/s [**?**].

Galilei- vs Lorentz-Transformation

H. A. Lorentz to have seen that the fundamental equations of electromagnetism admit a group of transformations which enables them to have the same form when one passes from one frame of reference to another; this new transformation has the most profound implications for the transformations of space and time

Paul Langevin, 1911

Wie ändert sich die Beschreibung von Raum und Zeit in unterschiedlichen Inertialsystemen, wenn man statt der Galilei-Transformation die Transformationsgleichungen der Spezielle Relativitätstheorie verwendet?

Die Maxwellschen Gleichungen sind invariant unter einer Lorentz-Transformation. Das heißt, dass die Gleichungen in jedem beliebigen Bezugssystem die gleiche Form haben, speziell auch für hohe Geschwindigkeiten. Was erreicht man mit der Lorentz-Transformation?

- Die Lorentz-Transformation ist eine Funktion, die linear in x und t ist.
- Die Lorentz-Transformation ändert nicht die y- und z-Koordinaten.
- Die Lorentz-Transformation ändert nicht die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Lichtwelle.
- Führt man bei einer Geschwindigkeit v eine zweite Lorentz-Transformation in der minus x-Richtung aus, ergeben sich die anfänglichen Bedingungen.
- Die Lorentz-Transformation reduziert sich zur Galilei-Transformation bei geringe Geschwindigkeiten $v \ll c$.

Abb. 4.23 zeigt die klassische Herangehensweise. Ein Schlitten wird von einem Mann gezogen. Die Geschwindigkeit in Bezug auf die Erde ist v=1 m/s. Das Mädchen auf dem Schlitten wirft Schneebälle mit einer Geschwindigkeit u'=±1.5 m/s in Bezug auf die Bewegung des Schlittens. Die Addition der Geschwindigkeiten ergibt nach Galilei $u = v \pm u'$. So ermittelt dies der am Rand des Bildes stehende Beobachter. Die Lorentz-Transformation berücksichtigt die Effekte der Zeitdilatation und der Längenkontraktion. Da Uhren in bewegten Bezugssystemen stets langsamer gehen, stimmt beispielsweise die Annahme t_{ruhend}=t_{bewegt}, die man in der Galilei-Transformation macht, nicht mehr. Auch die Koordinatentransformation in Bewegungsrichtung ändert sich und wird durch den Faktor γ ergänzt.

Wir sehen also, dass wir dem Begriffe der Gleichzeitigkeit keine absolute Bedeutung beimessen dürfen, sondern dass zwei Ereignisse, welche, von einem Koordinatensystem aus betrachtet, gleichzeitig sind, von einem relativ zu diesem System bewegten System aus betrachtet, nicht mehr als gleichzeitige Ereignisse aufzufassen sind [**?**].

Albert Einstein

Berechnung von Orten und Zeiten im bewegten Bezugssystem, wobei v_{rel} die relative Geschwindigkeit zwischen beiden Inertialsystemen ist:

$$\begin{aligned} x_{bewegt} &= \gamma \cdot (x_{ruhend} - v_{rel} \cdot t) \\ t_{bewegt} &= \gamma \left(t_{ruhend} - \frac{x_{ruhend} \cdot v_{rel}}{c^2} \right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Berechnung von Orten und Zeiten im ruhenden Bezugssystem:

$$\begin{aligned} x_{ruhend} &= \gamma \cdot (x_{bewegt} + v_{rel} \cdot t_{bewegt}) \\ t_{ruhend} &= \gamma \left(t_{bewegt} + \frac{x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2} \right) \end{aligned} \tag{4.27}$$

Da die relativistischen Effekte nur in Bewegungsrichtung auftreten, gilt:

$$\begin{aligned} y_{ruhend} &= y_{bewegt} \\ z_{ruhend} &= z_{bewegt} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Aus den obigen Gleichungen lassen sich auch Orts- und Zeitabstände in unterschiedlichen Inertialsystemen berechnen. Vom ruhenden zum bewegten Bezugssystem

$$\begin{aligned} \Delta x_{bewegt} &= \gamma \cdot (\Delta x_{ruhend} - v_{rel} \cdot \Delta t_{ruhend}) \\ \Delta t_{bewegt} &= \gamma \left(\Delta t_{ruhend} - \frac{\Delta x_{ruhend} \cdot v_{rel}}{c^2} \right) \end{aligned} \tag{4.29}$$

oder umgekehrt vom bewegten in ruhende Bezugssystem:

$$\begin{aligned} \Delta x_{ruhend} &= \gamma \cdot (\Delta x_{bewegt} + v_{rel} \cdot \Delta t_{bewegt}) \\ \Delta t_{ruhend} &= \gamma \left(\Delta t_{bewegt} + \frac{\Delta x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2} \right) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Die Lorentz-Transformation[27] unterscheidet sich aufgrund des γ-Faktors und seine Auswirkungen auf Raum und Zeit merklich von der Galilei-Transformation. Zusammenfassend kann man folgende Schlüsse aus der Lorentz-Transformation ziehen:

- Für Relativgeschwindigkeiten $v > c$ wird der Zähler in der Transformationsgleichung negativ und die Gleichung wird unphysikalisch. Konsequenz ist, dass sich Objekte nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen können. Damit ist ausgeschlossen, dass massebehaftete Körper und elektromagnetische Strahlung Energie und Informationen mit einer Übertragungsgeschwindigkeit größer c übertragen können.
- In allen Bezugssystemen ergibt sich für die Lichtgeschwindigkeit c ein und derselbe Wert.
- Für eine Relativgeschwindigkeit $v{=}c$ wird der Zähler NULL. Das bedeutet, dass es kein Bezugssystem gibt, in dem die Geschwindigkeit des Lichts NULL ist.
- Die Änderung in den Zeitintervallen der unterschiedlichen Bezugssysteme hat Auswirkungen auf die Zeitrechnung in allen Raumrichtungen.
- Für geringe Geschwindigkeiten ($v \ll c$) ergibt sich die Galilei-Transformation aus der Lorentz-Transformation.

(i) Was bedeutet *gleichzeitig am verschiedenen Ort im bewegten Bezugssystem* für einen ruhenden Experimentator?

$$\Delta t_{ruhend} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{bewegt} + \frac{\Delta x_{bewegt} \cdot v}{c^2} \right) \tag{4.31}$$

[27] *Lexikon:* Die **Lorentz-Transformationen** verbinden in der Speziellen Relativitätstheorie die Zeit- und Ortskoordinaten, mit denen geradlinig gleichförmig bewegte Beobachter angeben, wann und wo Ereignisse stattfinden. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist Ausgangspunkt der Lorentz-Transformation.

Der Vorfall ereignet sich im bewegten Bezugssystem zum selben Zeitpunkt, aber an unterschiedlichen Orten:

$$\Delta t_{bewegt} = 0.0\,\mathrm{s} \tag{4.32}$$
$$\Delta x_{bewegt} \neq 0.0\,\mathrm{s} \tag{4.33}$$

Im ruhenden Bezugssystem findet das Ereignis nicht zum selben Zeit statt, da

$$\Delta t_{ruhend} = \gamma \cdot \left(\frac{\Delta x_{bewegt} \cdot v}{c^2} \right) \neq 0.0\,\mathrm{s} \tag{4.34}$$

(ii) Was beobachtet eine ruhende Person, wenn in einem bewegten Bezugssystem eine Lichtquelle an und wieder abgeschaltet wird?

Es gilt in diesem Fall:

$$\Delta t_{bewegt} \neq 0.0\,\mathrm{s} \tag{4.35}$$
$$\Delta x_{bewegt} = 0.0\,\mathrm{s} \tag{4.36}$$

Setzt man diese Erkenntnisse ein, ergibt sich die Gleichung für die Zeitdilatation:

$$\Delta t_{bewegt} = \gamma \cdot \Delta t_{ruhend} \tag{4.37}$$

Der Beobachter nimmt also einen geänderten Zeitablauf wahr.

(iii) Wie nimmt ein bewegter Beobachter die Länge eines Objektes wahr, deren Abmessungen gleichzeitig gemessen wurde?

Das bedeutet, dass

$$\Delta t_{bewegt} = 0.0\,\mathrm{s} \tag{4.38}$$

Eingesetzt ergibt sich eine weitere Gleichung, die wir schon kennengelernt haben, nämlich die für die Längenkontraktion:

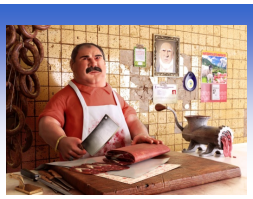
$$\Delta x_{bewegt} = \frac{\Delta x_{ruhend}}{\gamma} \tag{4.39}$$

Die Lorentz-Transformation liefert also ebenfalls die Erkenntnisse, die wir schon im Kapitel *Gleichzeitigkeit* kennengelernt haben.

example

car-in-the-garage Paradoxon

Relativistischer Hundertfüßler 1



Symptome
- relativistischer Hundertfüßler läuft über Schlachtbank
- Länge im Ruhesystem des Gliederfüßlers beträgt 10 cm
- mitfühlender Schlachter hält zwei Hackbeile im Abstand von 9 cm
- in Bezugssystem Metzger (Markierung auf Schlachtbank) hat Centipede Länge von nur 8 cm

Kontrahierte Länge des Hunderfüßlers für den Metzger

$$\lambda_{SRT} = \frac{\lambda_0}{\gamma_{SRT}}$$

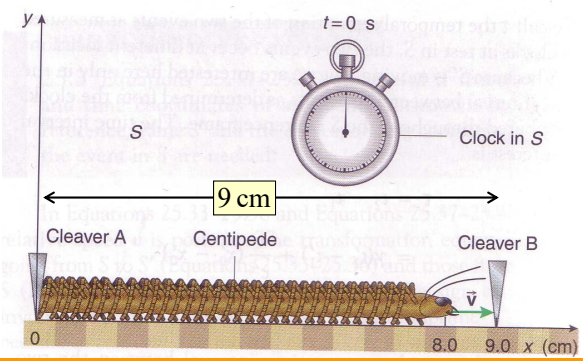
$$\gamma_{SRT} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{SRT}} = \frac{10\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = 1.25$$

Geschwindigkeit des Hundertfüßlers

$$\gamma_{SRT} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma_{SRT}^2}$$

$$\beta_{SRT} = \frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_{SRT}^2}} = 0.6$$

Wie schnell bewegt sich der Hundertfüßler?



Diagnose
Relativistische Geschwindigkeit des Hundertfüßlers beträgt beeindruckende 0.6c

Garagenparadoxon reloaded

Anhand der Beispiele zeigt sich, dass die Lorentz-Transformation die Basiseffekte der Spezielle Relativitätstheorie gut wiedergibt. Damit können nun komplexere Situationen durchgespielt werden, beispielsweise das in der Vorlesung *Gleichzeitigkeit* vorgestellte Garagenexperiment. Auf den folgenden Folien betrachten wir unter Verwendung der Transformationsgleichungen einen vergleichbaren Vorgang. Die Analyse zeigt, warum das rasende Auto in dem damals vorgestellten Gedankenexperiment in die Garage passt. Tatsächlich zeigt sich, dass die Garage einen zweiten Ausgang besitzen muss, um eine Abbremsung des Autos zu vermeiden. Zur Erinnerung: Die Spezielle Relativitätstheorie gilt nur für Inertialsysteme.

example

car-in-the-garage Paradoxon

Relativistischer Hundertfüßler 2

Symptome

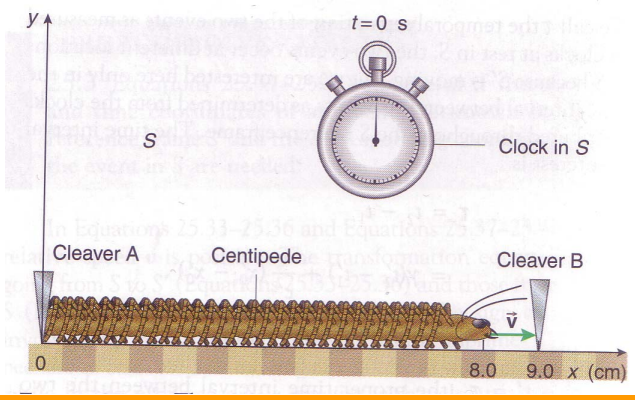
- Schlachter sengt beide Hackbeile GLEICHZEITIG im Abstand 9 cm kurz auf Schlachtbank
- für Metzger scheint Situation für Hundertfüßler harmlos, da er Länge von 8 cm bestimmt hat

Und wie sieht das die Centipede in ihrem Ruhesystem?

Kontrahierte Abstand der Hackbeile für Hunderfüßler

$$\lambda_{SRT} = \frac{\lambda_0}{\gamma_{SRT}} = \frac{9\ \text{cm}}{1.25} = 7.2\ \text{cm}$$





Diagnose

- für Gliederflüßler nähern sich Schlachter und Hackbeile mit relativistischer Geschwindigkeit
- Hundertfüßler sieht Abstand der Hackbeile relativistisch auf 7.2 cm kontrahiert
- LEIDER ist er sich bewusst, dass er selbst 10 cm lang ist

example

car-in-the-garage Paradoxon

Relativistischer Hundertfüßler 3

Symptome

Im Ruhesystem Schlachters ist Aufschlag Hackbeile gleichzeitig, aber an unterschiedlichen Orten

Ruhesystem des Schlachters
Hackbeil (links) schlägt auf

$$x_{links}^{butcher} = 0.0\,\mathrm{m}$$

$$t_{links}^{butcher} = 0.0\,\mathrm{s}$$



Ruhesystem des Schlachters
Hackbeil (rechts) schlägt auf

$$x_{rechts}^{butcher} = 0.09\,\mathrm{m}$$

$$t_{rechts}^{butcher} = 0.0\,\mathrm{s}$$



Ruhesystem des Hunderfüßlers
Hackbeil (links) schlägt auf

$$x_{links}^{Centipede} = \gamma_{SRT}\left(x_{links}^{butcher} - \mathrm{v}_{\mathrm{rel}}t\right)$$

$$x_{links}^{Centipede} = 1.25\cdot\left(0.0\,\mathrm{m} - \mathrm{v}_{\mathrm{rel}}\left(0.0\,\mathrm{s}\right)\right) = 0.0\,\mathrm{m}$$

$$t_{links}^{Centipede} = \gamma_{SRT}\left(t_{links}^{butcher} - \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{rel}}}{c^2}x_{links}^{butcher}\right)$$

$$t_{links}^{Centipede} = 1.25\cdot\left(0.0\,\mathrm{s} - \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{rel}}}{c^2}\left(0.0\,\mathrm{m}\right)\right) = 0.0\,\mathrm{s}$$

Diagnose

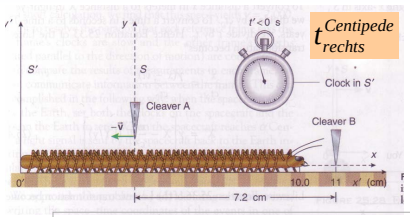
Für Hundertfüßler erfolgt Einschlag des vorderen Hackbeils am Ort x=0 m zum Zeitpunkt t=0 s

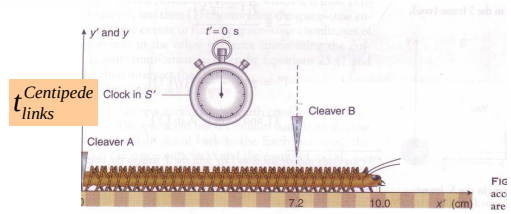
example

car-in-the-garage Paradon

Relativistischer Hundertfüßler 4

Symptome
Aufschlag der Hackbeile erfolgt für Hundertfüßler zu unterschiedlichen Zeiten







Ruhesystem des Hunderfüßlers
Hackbeil (B) schlägt auf

$$x^{Centipede}_{rechts} = \gamma_{SRT}\left(x^{butcher}_{rechts} - v_{rel}t\right)$$

$$x^{Centipede}_{rechts} = 1.25\cdot\left(0.09\,\text{m} - v(0.0\,\text{s})\right) = 0.11\,\text{m}$$

$$t^{Centipede}_{rechts} = \gamma_{SRT}\left(t^{butcher}_{rechts} - \frac{v_{rel}}{c^2}x^{butcher}_{2}\right)$$

$$t^{Centipede}_{rechts} = 1.25\cdot\left(0.0\,\text{s} - \frac{v_{rel}}{c^2}(0.09\,\text{m})\right) = 1.25\cdot\left(0.0\,\text{s} - \frac{0.6\cdot 0.09\,\text{m}}{c}\right) = -2.3\cdot 10^{-10}\,\text{s}$$

Diagnose
- im Ruhesystem Hunderfüßler sind Ereignisse NICHT gleichzeitig
- Hackbeil (rechts) schlägt für Centipede kurz vorher (Minuszeichen) auf, also Glück gehabt

Was zeigt die Analyse? Ereignisse, die im Ruhesystem eines Beobachters gleichzeitig ablaufen, finden im Bezugssystem eines ruhenden externen Beobachters zu unterschiedlichen Zeiten statt (Prinzip der Relativität der Gleichzeitigkeit). Mehr noch, Ereignisse können sich für manchen Beobachter verfrüht einstellen. Die Endlichkeit der Informationsübertragung (Naturkonstante c) macht es möglich!

Weltlinien^{4LP}

Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

Hermann Minkowski (1908)

Die Auswirkung der Lorentz-Transformation kann man durch ein Minkowski-Diagramm[28] illustrieren, siehe Abb. 4.24. Ein Inertialsystem S wird durch ein Koordinatensystem

[28] *Lexikon:* Auf der Grundlage von Einsteins Erkenntnissen stellte Minkowski eine geometrische Vereinigung von Raum und Zeit vor, die Raumzeit. Einen Punkt in diesem vierdimensionalen Minkowski-Raum nennt man ein Ereignis. Teilchen oder Lichtsignale beschreiben Minkowski-Raum!Weltlinien in der Raumzeit. Abstände sind entweder im Minkowski-Raum können raumartig, zeitartigoder licht-

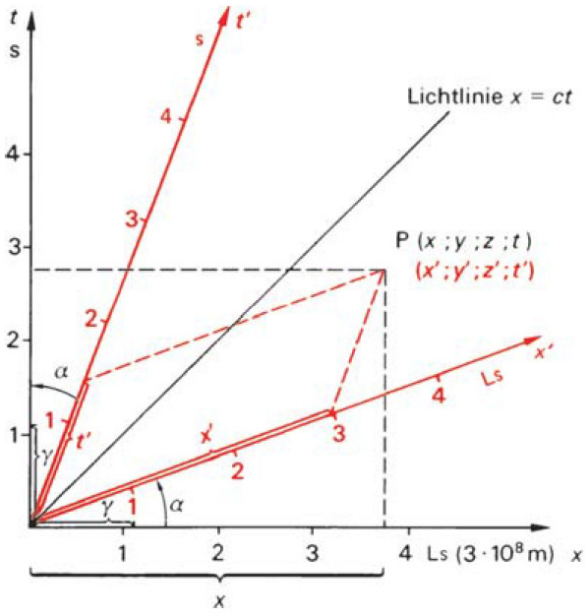


Abb. 4.24: Minkowski-Diagramm [**?**]

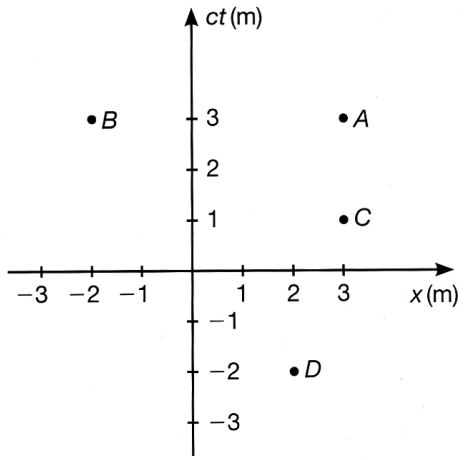


Abb. 4.25: Raumzeitdiagramm mit vier Ereignissen im Koordinatensystem (x, ct). Man beachte, dass beide Achse die Einheit Meter aufweisen [**?**].

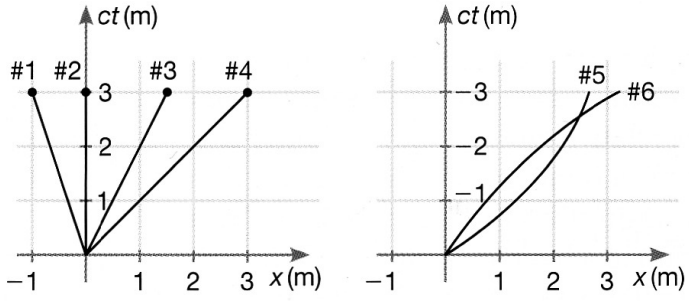


Abb. 4.26: Weltlinien von Teilchen, (i) die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen *(links)* (ii) die beschleunigen *(rechts)* [**?**].

Ereignis	Zeit	Ort [cm]
A	3	3
B	3	-2
C	1	3
D	-2	2

Tab. 4.2: Tabelle zu Abb. 4.25.

$(t,\, x)$ dargestellt. Man wählt für die beiden Koordinatenachsen die Einheit Meter. Das bedeutet, dass wir für die Zeitachse die Zeit mit c multiplizieren $(c \cdot t)$. Im Hinblick auf die erheblichen Geschwindigkeiten macht die sich daraus ergebende Einheit Lichtsekunde ebenfalls Sinn. Die Zeit in der Einheit Meter ist also die Entfernung, die ein Lichtstrahl in der Zeit t zurücklegt. Die Bahn eines Lichtstrahls ist daher in diesem Diagramm die Winkelhalbierende. Ein Ereignis ist ein Punkt $(t_S,\, x_S)$ in diesem Diagramm und als Bewegung von Körpern ergeben sich Weltlinien. Die Geschwindigkeit eines Teilchens ist invers proportional Steigung der Weltlinie:

$$u_x = c \cdot \frac{\Delta x}{\Delta c} = \frac{c}{Steigung} \tag{4.40}$$

Ein anderes Inertialsystem S', dass sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v bewegt, wobei der Einfachheit angenommen wird, dass beide Bezugssysteme denselben Koordinatenursprung haben. Anhand der Lorentztransformation können die zugehörigen Koordinaten $(t_{S'},\, x_{S'})$ in S' berechnet werden. Aus der Lorentz-Transformation ergibt sich für $x' = 0$, dass $x = v \cdot t$. Für die t'-Achse $(t' = 0)$ findet man $t = (v/c^2) \cdot x$. Der Transformationsmaßstab ist jeweils γ, woraus folgt, das die Kippwinkel α in Bezug auf die Achsen identisch sind.

Die Lorentz-Transformation verbindet Raum- und Zeitkoordinaten unterschiedlicher Bezugssysteme. Die Schwierigkeit besteht darin, dass wir nicht geübt sind, in vier Dimensionen $(t,\, \vec{r})$ zu denken. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, sich auf zwei Dimensionen $(t,\, x)$ zu beschränken. Das macht Sinn, da die gleichmäßige Bewegung der beiden betrachteten Bezugssysteme untereinander nur entlang einer bestimmten Achse erfolgt. Abb. 4.25 zeigt vier Ereignisse (A-D), wobei A und B zur selben Zeit $c \cdot t$=3 cm und A, C am selben Ort (x=3 cm) passieren. Die genauen Koordinaten sind in Tab. 4.2 zusammengefasst. Diagramme dieser Art nennt man Raumzeit-Diagramme und die Bewegung eines Körpers die Weltlinie.[29] Wie stellt sich die Bewegung von Teilchen in einem solchen

artig. In Bezug auf einen ausgewählten Bezugspunkt teilt der Lichtkegel die Raumzeit in Vergangenheit und Zukunft. Bereiche außerhalb der Lichtkegels haben keine kausalen Zusammenhang zum gewählten Bezugspunkt.

[29] *Lexikon:* Als Weltlinie bezeichnet die Trajektorie eines Objekts in der Raumzeit. Weltlinien sind für masselose Teilchen lichtartig und für massebehaftete Objekte zeitartig. Zwei Ereignisse (1, 2) haben einen raumartigen btw. lichtartigen Abstand, wenn für das Raumzeitintervall s_{12} gilt: $(s_{12})^2 > 0$ bzw. $s_{12}=0$. Dahinter steckt die Überlegung, ob es zwischen Ereignissen kausale Zusammenhänge gibt.

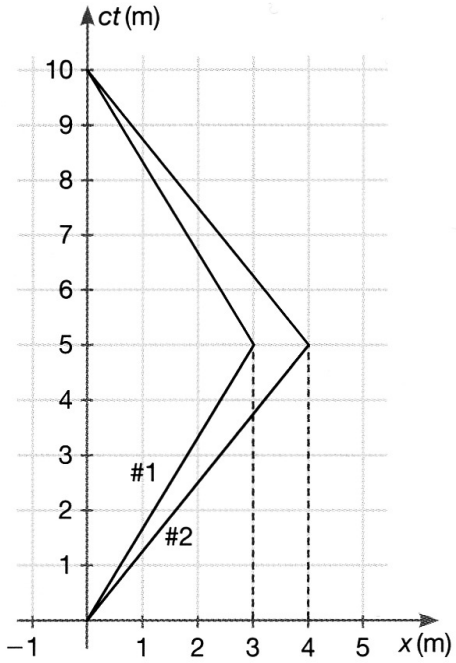


Abb. 4.27: Weltlinie zweier Teilchen , die sich mit konstanter Geschwindigkeit in positiver x-Richtung bewegen und dann umkehren [**?**].

Diagramm dar? Die Weltlinie von Teilchen, die in einer Sekunde eine Entfernung von einer Lichtsekunde zurücklegen, erscheinen im Raumzeitdiagramm als Winkelhalbierende. Die Steigung der Weltlinie ist $\Delta(c \cdot t)/\Delta(x)$. Abb. 4.26 zeigt Teilchen, die sich konstanter Geschwindigkeit (links) oder beschleunigt (rechts) bewegen. Die Steigung spiegelt die Art der Bewegung wieder (1-4: konstante Geschwindigkeit; 5: beschleunigte Bewegung; 6: abgebremste Bewegung). Wie hoch ist die Geschwindigkeit von Teilchen 3 in der Abbildung?

$$\Delta t = 3.0\,\mathrm{m} - 0.0\,\mathrm{m} = 3.0\,\mathrm{m} \tag{4.41}$$

$$\Delta x = 1.5\,\mathrm{m} - 0.0\,\mathrm{m} = 1.5\,\mathrm{m} \tag{4.42}$$

$$\frac{\Delta(c \cdot t)}{\Delta x} = c \cdot \frac{1}{\Delta x/\Delta t}$$

$$\frac{\Delta(c \cdot t)}{\Delta x} = \frac{c}{v}$$

$$\frac{\Delta(c \cdot t)}{\Delta x} = 2.0 \tag{4.43}$$

Die Geschwindigkeit des Teilchen beträgt also halbe Lichtgeschwindigkeit. Wie analysiert man eine beschleunigte Bewegung? Abb. 4.27 zeigt zwei Teilchen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit von einer bestimmen Position fortbewegen und nach einer bestimmten

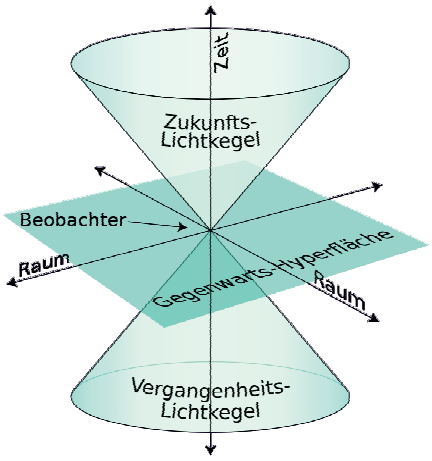


Abb. 4.28: Lichtkegel [**?**]

Zeit umkehren und an ihren Ursprungsort zurückkehren. Am Umkehrpunkt erfahren die Teilchen eine erheblich Beschleunigung. Im Laborsystem (x=0 m) vergeht bis zur Rückkehr der Teilchen die Zeitspanne 10 m. Das Raumzeitintervall berechnet sich mit

$$s_1^2 = (5\,\mathrm{m})^2 - (3\,\mathrm{m})^2 = (4\,\mathrm{m})^2 \tag{4.44}$$
$$s_2^2 = (5\,\mathrm{m})^2 - (4\,\mathrm{m})^2 = (3\,\mathrm{m})^2 \tag{4.45}$$

Man kann die geometrische Betrachtung noch um eine Ortsdimension erweitern, wobei die vertikale Achse die Entwicklung in der Zeit abbildet, also $c \cdot t$. Wenn ein Ereignis stattfindet, breitet sich die Information in der Zeitspanne Δt mit $c \cdot \Delta t$ auf der Zeitachse und mit $c \cdot \Delta t$ im Raum aus. Der zu Verfügung stehende Bereich in dem die Information abgerufen werden kann ist deshalb ein Kegel mit einem Öffnungswinkel von 45^o. Man nennt ihn den Lichtkegel, siehe Abb. 4.28. Die Bewegung eines Teilchens, die Weltlinie, muss, da die Geschwindigkeit geringer ist als c, innerhalb dieses Kegels stattfinden. Wenn man ein Ereignis in den Ursprung des Koordinatensystems verlegt und man weitere Ereignisse im Diagramm einzeichnet, kann man den Abstand in der Raumzeit bestimmten Bedingungen zuordnen, nämlich als lichtartig, zeitartig oder raumartig. Die entsprechenden Gleichungen ergeben sich mit:

- Ein Ereignis liegt auf dem Lichtkegel.

$$(lichtartig)^2 = (c \cdot (Zeitabstand))^2 - (Ortsabstand)^2 = 0 \tag{4.46}$$

- Ein Ereignis liegt innerhalb des Lichtkegel.

$$(raumartig)^2 = (c \cdot (Zeitabstand))^2 - (Ortsabstand)^2 > 0 \tag{4.47}$$

- Ein Ereignis liegt außerhalb des Lichtkegel.

$$(zeitartig)^2 = (c \cdot (Zeitabstand))^2 - (Ortsabstand)^2 < 0 \tag{4.48}$$

Ein Beobachter kann unter Umständen nicht verhindern, dass das ein Ereignis eintritt. Er erfährt erst später davon und zwar frühestens, wenn die sich die jeweiligen Lichtkegel schneiden.

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Alice unternimmt eine Reise im neuen Hochgeschwindigkeitszug der deutschen Bahn. Stimmt folgende Aussage: Wenn Alice die Länge des Zugabteils bestimmt, erhält Sie andere Werte, als wenn der Zug im Bahnhof steht.[30]

(a) Ja!

(b) Nein!

Aufgabe 3.2: Dem vorbeifliegenden Raumschiff Hansa4Ever wird mit Hilfe der neu zur Verfügung stehenden *ultrafast-print* Technik der Name aufgedruckt. Die Länge der Aufschrift ist nach Auskunft des Operateurs auf der Raumstation L. Nach einiger Zeit kehrt das Raumschiff zurück zur Basis und der Operateur kontrolliert die Aufschrift. Was stellt er fest?[31]

(a) Der Schriftzug ist länger als beim Druckvorgang!

(b) Die Länge des Schriftzugs hat sich nicht verändert!

(c) Der Schriftzug ist kürzer!

Aufgabe 3.3: Man zeige, dass man dieselben Raumzeit-Koordinaten erhält, wenn man zuerst eine Lorentz-Transformation in der x-Richtung und dann in der ($-x$)-Richtung ausführt.

Die erste Transformation ergibt:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{x \cdot v}{c^2}\right) \\ x' &= \gamma(x - v \cdot t) \end{aligned}$$

wobei die Koordinaten y und z sich nicht ändern. Die zweite Transformation $(t', x', y', z') \rightarrow$ (t",x",y",z") liefert für die Zeit im neuen Bezugssystem:

$$\begin{aligned} t'' &= \gamma\left(t' + \frac{x' \cdot v}{c^2}\right) \\ t'' &= \gamma\left(\left(\gamma\left(t - \frac{x \cdot v}{c^2}\right)\right)\right) - \frac{(\gamma(x - v \cdot t)) \cdot v}{c^2} \\ t'' &= \gamma^2 \cdot t - \frac{\gamma^2 \cdot x \cdot v}{c^2} + \frac{\gamma^2 \cdot x \cdot v}{c^2} - \frac{\gamma^2 \cdot t \cdot v^2}{c^2} \\ t'' &= \gamma^2\left(t - \frac{x \cdot v}{c^2}\right) \cdot t \\ t'' &= t \end{aligned}$$

[30] Antwort: (b)
[31] Antwort: (a)

Für die x''-Koordinate ergibt sich:

$$\begin{aligned}
x'' &= \gamma(x' + v \cdot t') \\
x'' &= \gamma\left((\gamma(x - v \cdot t)) - v \cdot \left(\gamma\left(t - \frac{x \cdot v}{c^2}\right)\right)\right) \\
x'' &= \gamma^2 \cdot v \cdot t - \frac{\gamma^2 \cdot x \cdot v^2}{c^2} + \gamma^2 \cdot x - \gamma^2 \cdot v \cdot t \\
x'' &= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot x \\
x'' &= x
\end{aligned}$$

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Ist die Galilei-Transformation vereinbar mit den Einsteinschen Postulaten?
2. Erläutern Sie anhand der Lorentz-Transformation die Effekte der Zeitdilatation und der Längenkontraktion!
3. Wie kann man herausfinden, ob zwei Ereignisse zum selben Zeitpunkt stattgefunden haben?
4. Zwei Ereignisse geschehen gleichzeitig am selben Ort in einem gewählten Bezugssystem. Ist es möglich, dass die Ereignisse in einem anderen Bezugssystem zu unterschiedlichen Zeiten stattfinden?
5. Just as observers in different places have different spatial perspectives of the universe, so observers with different velocities have different temporal perspectives (G.J. Whitrow, British mathematician, cosmologist and science historian).
6. Erläutern Sie in eigenen Worten die Problematik des Garagenparadoxons?
7. Was versteht man unter einer Weltlinie?
8. Was ist der Lichtkegel?

4.4 Relative Geschwindigkeit



In der Physik beschreiben wir Situationen relativ zu einem externen Beobachter. Es kann von Vorteil sein, die relative Geschwindigkeit eines Körpers zu kennen. Ein viel verwendetes Beispiel ist die Berechnung, wie lange es dauert, bis zwei PKW, die sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit auf einer Straße bewegen, kollidieren. Mit den Gleichungen der Lorentz-Transformation lässt sich jetzt auch für die Spezielle Relativitätstheorie klären, was Beobachter als relative Geschwindigkeit wahrnehmen, wenn sie sich mit jeweils fast Lichtgeschwindigkeit annähern.[32]

Die Gleichungen der Lorentz-Transformation verknüpfen zunächst nur Orte und Zeiten in unterschiedlichen Inertialsystemen. Es ist aber nur ein kleiner Schritt durch Differenzenbildung Ausdrücke für die zugehörigen Geschwindigkeiten zu erhalten. Man betrachte dazu die Situation, die wir schon in der ersten Vorlesung *Beobachter* im Rahmen der Galilei-Transformation analysiert haben. Aus der Lorentztransformation lassen sich Zeit- und Ortsabstände in unterschiedlichen Inertialsystemen berechnen. Für die Umrechnung aus dem bewegten in das ruhende Bezugssystem ergibt sich beispielsweise:

[32]Das Bild von Mark Johnson trägt den Namen *Relative Speed*.

$$\begin{aligned} \Delta x_{ruhend} &= \gamma(\Delta x_{bewegt} + v_{rel} \cdot \Delta t_{bewegt}) \\ \Delta t_{ruhend} &= \gamma \left(\Delta t_{bewegt} + \frac{\Delta x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2} \right) \end{aligned} \tag{4.49}$$

Aus dem Kapitel *Kinematik* ist bekannt, dass sich Geschwindigkeiten aus $\Delta x/\Delta t$ oder dx/dt ergeben. Damit ergibt sich für die Berechnungen von Geschwindigkeiten in einem ruhenden (u_{ruhend}) und in einem dazu bewegten (u_{bewegt}) Inertialsystem im Rahmen der Lorentztransformation:

$$\begin{aligned} u_{ruhend} &= \frac{\Delta x_{ruhend}}{\Delta t_{ruhend}} \\ u_{ruhend} &= \frac{\Delta x_{bewegt} + v_{rel} \cdot \Delta t_{bewegt}}{\Delta t_{bewegt} + \frac{\Delta x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \\ u_{ruhend} &= \frac{\frac{\Delta x_{bewegt}}{\Delta t_{bewegt}} + v_{rel} \cdot \frac{\Delta t_{bewegt}}{\Delta t_{bewegt}}}{\frac{\Delta t_{bewegt}}{\Delta t_{bewegt}} + \frac{\Delta x_{bewegt}}{\Delta t_{bewegt}} \cdot \frac{v_{rel}}{c^2}} \\ u_{ruhend} &= \frac{u_{bewegt} + v_{rel}}{1 + \frac{u_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \end{aligned} \tag{4.50}$$

Für die inverse Transformation ersetzen wir ruhend durch bewegt und v_{rel} durch $-v_{rel}$ und erhalten:

$$u_{bewegt} = \frac{u_{ruhend} - v_{rel}}{1 - \frac{u_{ruhend} \cdot v_{rel}}{c^2}} \tag{4.51}$$

Diese wichtigen Gleichungen beschreiben, welche Geschwindigkeiten Beobachter in unterschiedlichen Inertialsystemen messen.

In einem Experiment, deren Aufbau vergleichbar zum Michelson Experiment war, siehe Abb. 4.29, haben Kennedy und Thorndike die Orbitalbewegung der Erde um die Sonne ausgenutzt, um die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zu überprüfen [**?**]. Die Erde bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 30 km/s um die Sonne. Damit unterscheidet sich die Relativgeschwindigkeit zwischen Sommer und Winter um 60 km/s. Die Forscher ermittelten einen Unterschied von weniger als 2 m/s zwischen Januar und Juli.

Experimental Establishment of the Relativity of Time [**?**]**:** None of the fundamental experiments on which the restricted principle of relativity is based requires for their explanation that the classical concept of absolute time be modified; the present experiment was devised to test directly whether time satisfies the requirements of relativity. It depends on the fact that if a pencil of homogeneous light is split into two

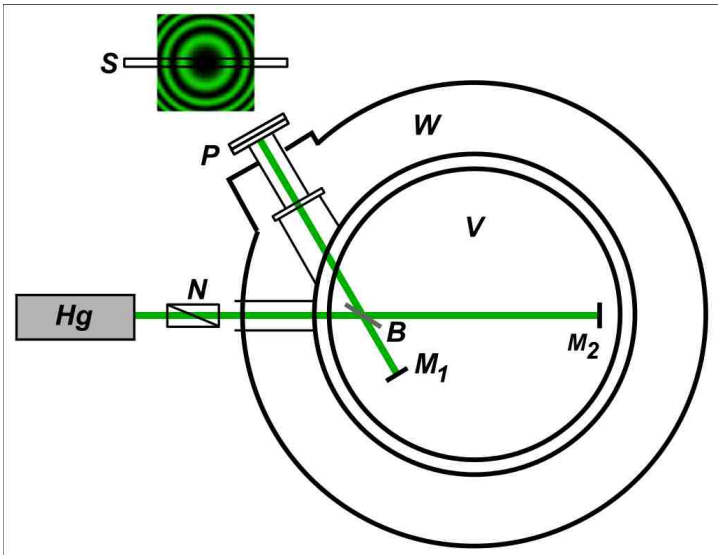


Abb. 4.29: Das Kennedy-Thorndike-Experiment [**?**],[a] ähnlich aufgebaut wie das Michelson-Morley Experiment, sollte nachweisen, ob die Geschwindigkeitsänderung eines Beobachters in verschiedenen Inertialsystemen einen Einfluss auf die Ausbreitung des Lichts hat. Das durchgeführte Experiment lieferte in Übereinstimmung mit der Speziellen Relativitätstheorie ein Nullresultat und bestätigte man für eine richtige Beschreibung sowohl die Längenkontraktion als auch die Zeitdilatation berücksichtigen muss [**?**].

[a] Hg: Quecksilberdampflampe; P, S: Photoplatte, Belichtungsschlitz; V: Vakuumkammer; W: Temperaturstabilisierung; N: Nicolsches Prisma; B: Strahlteiler; M1, M2: Spiegel

components which are made to interfere after traversing paths of different length, their relative phases will depend on the translational velocity of the optical system unless the Lorentz-Einstein transformation equations are valid. Hence, such a system at a point on the earth should give rise to an interference pattern which varies periodically as the velocity of the point changes in consequence of the rotation and revolution of the earth. The effect to be expected for a small velocity is so very small that it has been necessary to devise a special source of light, an interferometer of great stability and a refinement of the technic of measuring displacements in the interference pattern. With the apparatus finally employed, we have shown that there is no effect corresponding to absolute time unless the velocity of the solar system in space is no more than about half that of the earth in its orbit. Using this null result and that of the Michelson-Morley experiment we derive the Lorentz-Einstein transformations, which are tantamount to the relativity principle.

Der Vollständigkeit halber noch die Gleichungen bezüglich der Lorentztransformation in den Raumrichtungen x, y, z. Ausgehend von den Gleichungen durch Ort und Zeit

$$\begin{aligned}
\Delta t_{ruhend} &= \gamma\left(\Delta t_{bewegt} + \frac{\Delta x_{bewegt} \cdot \cdot v_{rel}}{c^2}\right) \\
\Delta x_{ruhend} &= \gamma(\Delta x_{bewegt} + v_{rel} \cdot \Delta t_{bewegt}) \\
\Delta y_{ruhend} &= \Delta y_{bewegt} \\
\Delta z_{ruhend} &= \Delta z_{bewegt}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Damit können die Geschwindigkeiten ($\Delta x \to dx$, $\Delta y \to dy$, $\Delta z \to dz$) in den unterschiedlichen Richtungen berechnet werden. Zunächst in Richtung der Bewegungsachse x:

$$u_x^{ruhend} = \frac{u_x^{bewegt} + v_{rel}}{1 + \frac{u_x^{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \tag{4.53}$$

Analog ergeben sich die Gleichungen für die dazu senkrechten Richtungen y und z:

$$\begin{aligned}
u_y^{ruhend} &= \frac{\Delta y_{ruhend}}{\Delta t} \\
u_y^{ruhend} &= \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\Delta y_{bewegt}}{\Delta t_{bewegt} + \frac{\Delta x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \\
u_y^{ruhend} &= \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\frac{\Delta y_{bewegt}}{\Delta t_{bewegt}}}{1 + \frac{v_{rel}}{c^2}\frac{\Delta x_{bewegt}}{\Delta t_{bewegt}}} \\
u_y^{ruhend} &= \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{u_y^{bewegt}}{1 + \frac{u_x^{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \qquad (4.54) \\
u_z^{ruhend} &= \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{u_z^{bewegt}}{1 + \frac{u_x^{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

Ein Beispiel aus der Zukunft

In diesem Szenario stellt sich die Frage nach der Annäherungsgeschwindigkeit. Dazu ist es notwendig, die soeben vorgestellte Gleichung nach v_{rel} aufzulösen. Die Raumschiffe bestimmen die Geschwindigkeit in ihren jeweiligen Bezugssystemen mit $+0.9c$ (Raumschiff Enterprise) und $-0.65c$ (Raumschiff der Klingonen). Das Vorzeichen berücksichtigt, dass sich die Schiffe aufeinander zubewegen.

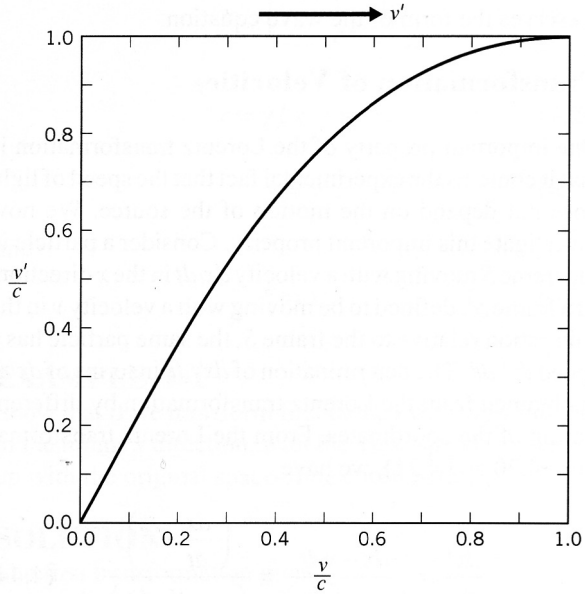


Abb. 4.30: Zwei Raketen, die sich mit einer Geschwindigkeit v bewegen, rasen aufeinander zu. Wie hoch ist die Geschwindigkeit des zweiten Körpers im Ruhesystem der anderen Rakete[**?**]?

$$
\begin{aligned}
v_{rel} &= \frac{u_{Enterprise} - u_{Klingonen}}{1 - \frac{u_{Enterprise} \cdot u_{Klingonen}}{c^2}} \\
v_{rel} &= \frac{0.90\,c - (-0.65\,c)}{1 - \frac{0.90\,c \cdot (-0.65\,c)}{c^2}} \\
v_{rel} &= \frac{1.55\,c}{1 + 0.58} \\
v_{rel} &= \frac{1.55\,c}{1.58} \\
v_{rel} &= 0.98\,c
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Das Ergebnis zeigt, dass die Annäherung zweier sich bewegender Körper zu einer Erhöhung der Relativgeschwindigkeit führt. Den genauen Zusammenhang zeigt Abb. 4.30. Weiter wird die Aussage des zweiten Einsteinschen Postulats bestätigt, dass kein Körper die Lichtgeschwindigkeit überschreiten kann.

Superluminale Bewegung[4LP]

This was a truly monstrous explosion, a hundred times more energetic than a typical supernova, said Nathan Smith of the University of California at Berkeley, who led a team of astronomers from California and the University of Texas in Austin. *That means the star that exploded might have been as massive as a star can get, about 150 times that of our sun. We've never seen that before.*

Ist es denkbar, dass sich Informationen mit einer Geschwindigkeit verbreiten, die höher ist als die Lichtgeschwindigkeit? Dazu ein Gedankenexperiment. Nehmen wir an, die Enterprise und das Raumschiff der Klingonen sind 10^5 m von der Erde entfernt und haben zueinander einen Abstand von $6 \cdot 10^8$ m. Ein Rennen soll ausgetragen werden und der Start erfolgt, wenn ein Lichtstrahl von der Erde die Raumschiffe erreicht. Ein Laserleuchtturm (Winkelgeschwindigkeit 1 rad/s) auf der Erde sendet einen Lichtstrahl als Startimpuls in Richtung der Schiffe. Rechnet man nach, ergibt sich, dass der Strahl die Entfernung zwischen den Raumschiffen mit zweifacher Lichtgeschwindigkeit überbrückt hat. Berechtigte Einwände bezüglich unterschiedlicher Startzeiten lassen wir nicht gelten. Kann sich der Lichtstrahl mit $2\,c$ bewegen und stimmt das zweite Einsteinsche Postulat trotzdem? Im folgenden Abschnitt finden Sie die Antwort!

Optical superluminal motion measurement in the neutron-star merger GW170817 [?]: The afterglow of the binary neutron-star merger GW1708171 gave evidence for a structured relativistic jet and a link between such mergers and short gamma-ray bursts. Superluminal motion, found using radio very long baseline interferometry (VLBI), together with the afterglow light curve provided constraints on the viewing angle (14-28 degrees), the opening angle of the jet core (less than 5 degrees) and a modest limit on the initial Lorentz factor of the jet core (more than 4). Here we report on another superluminal motion measurement, at seven times the speed of light, leveraging Hubble Space Telescope precision astrometry and previous radio VLBI data for GW170817. We thereby obtain a measurement of the Lorentz factor of the wing of the structured jet, as well as substantially improved constraints on the viewing angle (19-25 degrees) and the initial Lorentz factor of the jet core (more than 40).

An object moving relativistically in suitable directions may appear to a distant observer to have a transverse velocity much greater than the velocity of light [?].

Martin Rees, 1966

Ein Beispiel aus der Astronomie[4LP]

Abb. 4.31 zeigt Aufnahmen eines Sternenbereichs im Optischen (links) und im Bereich der Röntgenstrahlung (rechts). Es handelt sich um Explosion der die Supernova SN 2006gy. Links unten sieht man den Kernbereich der Galaxis in der das Ereignis auftrat. Rechts oben erkennt man deutlich die Strahlung der explodieren Supernova. Die freigesetzte Energiemenge ist vergleichbar zur Gesamtemission der Wirtsgalaxis [?]. Insgesamt wurde eine Energie von 10^{44} J freigesetzt. Das sind 400-mal mehr als bei der Beobachtung der Supernova Explosion SN 1987A. Die nach der Explosion gemessene Strahlungskurve (Abb. 4.32) macht deutlich, wie heftig die Supernova Explosion gewesen sein muss. Die Explosion einer Supernova führt zu einer gewaltigen Ausdehnung von Materie, die Astronomen mit Hilfe von Teleskopen in ihrer zeitlichen Entwicklung beobachten können. Die Expansionsgeschwindigkeit, der durch den Kollaps verursachten Schockfront, erreicht, aufgrund der enormen Energiefreisetzung, extrem



Abb. 4.31: Optische (links) und Röntgenaufnahme (rechts) der Supernova SN 2006gy zum Zeitpunkt der ersten Beobachtung [**?**].

hohe Werte, siehe z.B. [**?**]. Tatsächlich wurden weit entfernte Radioquellen entdeckt, die dieses Phänomen aufwiesen. Ermöglicht wurden diese Beobachtungen durch die Entwicklung der Very Long Baseline Interferometry [**?**],[33] womit Sternpositionen mit Millibogensekunden-Genauigkeit bestimmt werden konnten. Abb. 4.33 zeigt als Beispiel den Jet der Radiogalaxie 3C 120.

A superluminal source in the Galaxy [**?**]**:** Apparent velocities greater than the speed of light (superluminal motion) have been inferred for radio-emitting components in a number of distant quasars and active galactic nuclei. These components move away from the central sources (generally thought to be super-massive black holes) at rates that seem to imply velocities greater than *c*. The accepted explanation is that clouds of plasma are ejected in opposite directions from the central source at speeds close to (but less than) that of light, and that relativistic effects lead to the apparent superluminal motion. But the extreme distance of the objects observed so far introduces many uncertainties into this interpretation. Here we present observations of the first apparent superluminal motion ever detected in a source within our own Galaxy. The optical, infrared and X-ray properties of the counterpart suggest that the source is either a neutron star or a black hole that is ejecting matter in a process similar to, but on a smaller scale than that seen in quasars. Because of its relative proximity, this superluminal microquasar may offer the best opportunity to gain a general understanding of relativistic ejections seen elsewhere in the Universe.

Überraschenderweise ergeben sich Werte, die auf Ausbreitungsgeschwindigkeiten hindeuten, die einer mehrfachen Lichtgeschwindigkeit entsprechen [**? ? ?**], siehe Abb. 4.35! Das hat die Astronomen zunächst irritiert [**?**].

[33] *Lexikon:* Die Strahlung von Radioquellen erreicht nach etwa 10^6 Jahren die Erde. Radioteleskope auf unterschiedlichen Kontinenten (baseline) zeichnen die Signale auf. Zwischen der Registrierung durch die Teleskope liegt ein kleiner Zeitunterschied von etwa einer Millisekunde, der aber genau vermessen werden kann, siehe Abb. 4.34. Unter Berücksichtigung der Lichtgeschwindigkeit kann man den Abstand des Objekts mittels Trigonometrie berechnen.

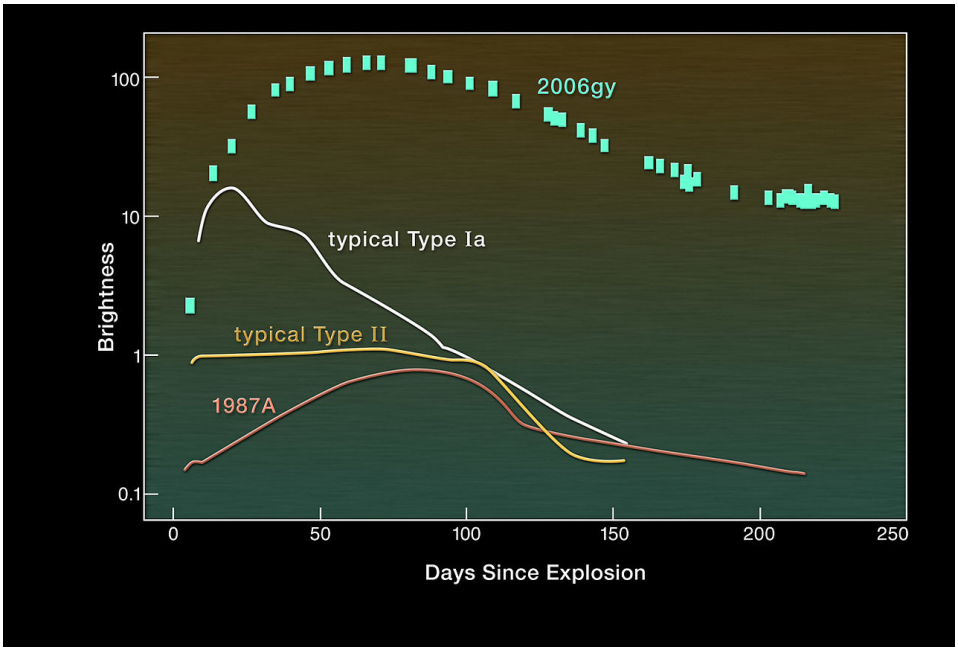


Abb. 4.32: Helligkeitskurve von SN 2006gy. Zum Vergleich sind die Helligkeitskurven für Supernovae vom Typ Ia und II, sowie die der Supernova SN 1987A eingezeichnet [**?**].

Ist damit das 2. Postulat der Spezielle Relativitätstheorie damit widerlegt?

Man muss sich klarmachen, dass man es hier mit *drei* statt *zwei* Inertialsystemen zu tun hat: Beobachter auf der Erde, kollabierter Stern, Schockwelle. Zuschauer können also bei der Beobachtung der Bewegung anderer Objekte Geschwindigkeiten messen, die die Lichtgeschwindigkeit übersteigt. Eine Einzelbetrachtung wie (kollabierter Stern versus Schockwelle) wird stets eine Relativgeschwindigkeit kleiner c ergeben. Das Resultat hängt auch davon ab, in welcher Richtung wir diese kosmischen Jets beobachten, siehe Abb. 4.36. Je nach Blickwinkel ergeben sich unterschiedliche scheinbare Geschwindigkeit dieser Jets. Die Analyse liefert ein überraschendes Ergebnis. Man könnte vermuten, dass diese Geschwindigkeitsänderung nur vom Winkel abhängt. Tatsächlich ergibt sich zusätzlich eine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Jets, siehe Abb. 4.37. Die Zeitentwicklung der Jets zeigt eine Besonderheit, genannt jet-break, der die Vermutung bestätigt, dass es sich bei den Strahlungsausbrüchen tatsächlich um einen gerichteten Ausstoß von Materie (Jets) handelt. Was würde man erwarten, wenn es sich bei dem Ereignis um eine isotrope Expansion handeln würde? Die Analyse ergibt, dass es einen Unterschied in der Zeitentwicklung der Leuchtstärke gibt, je nachdem, ob man die isotrope Expansion einer Sterns oder die Ausbreitung eines gerichteten Jets mit den Teleskopen beobachtet. Abb. 4.38 zeigt den Knick in der Leuchtstärkekurve des γ-Strahlungsausbruchs von GRB 990510, der darauf hinweist, dass Materie über einen Jet ausgestoßen wird.

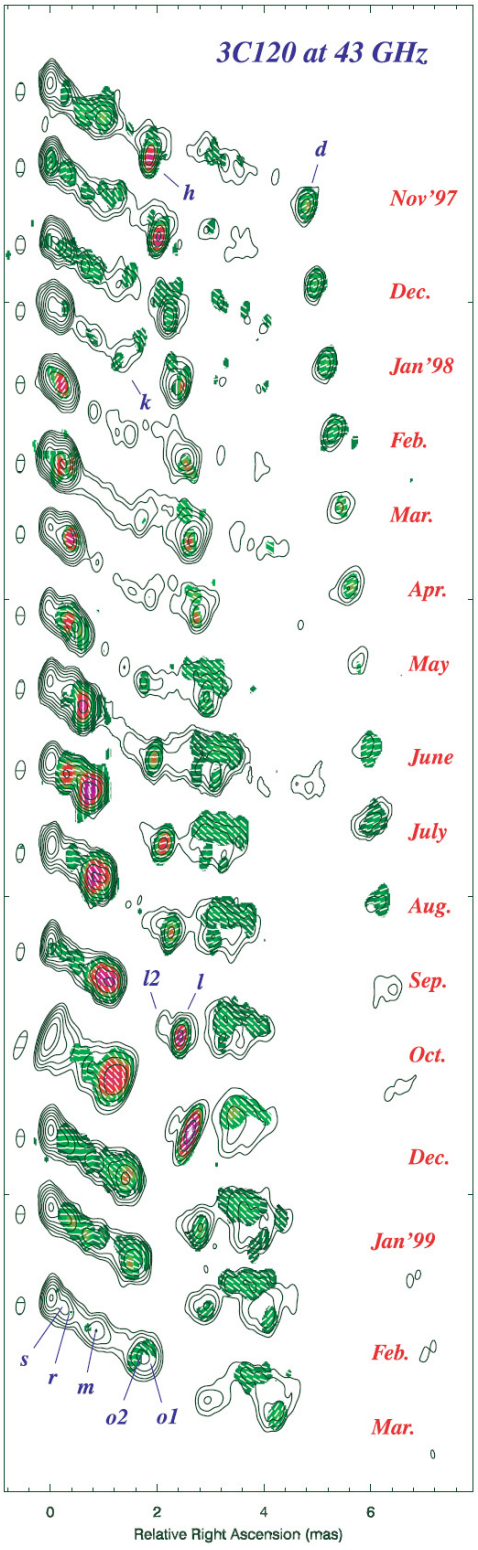


Abb. 4.33: Zeitreihen von *Very Long Baseline Array*-Bildern des Jets der Radiogalaxie 3C 120 (Entfernung $420 \cdot 10^6$ Lj). Die Konturen geben die Gesamtintensität an [**?**].

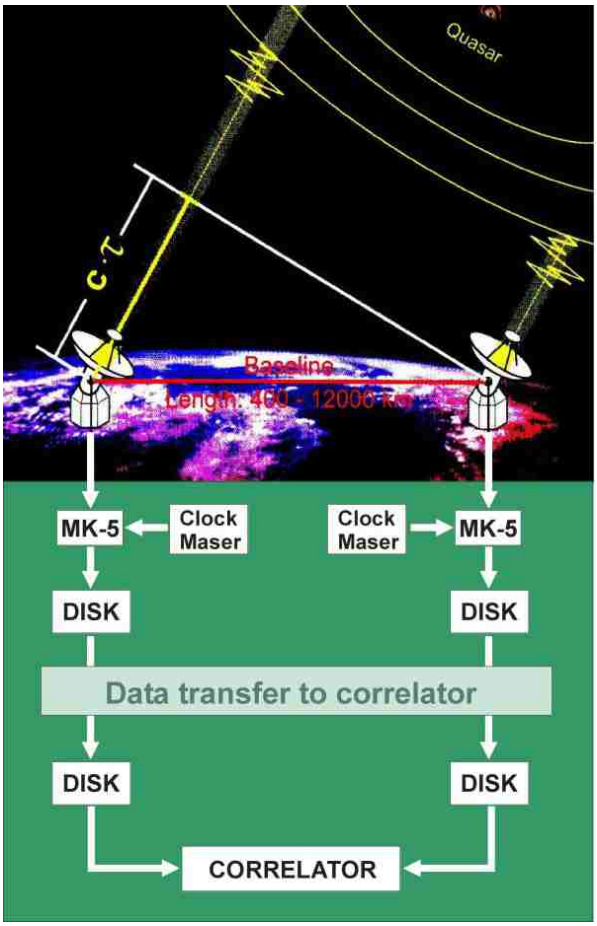


Abb. 4.34: Die Strahlung einer Radioquelle wird von den beiden Radioteleskopen nachgewiesen. Die geringe Zeitunterschied in der Ankunftszeit der Signale aufgrund der leicht unterschiedlichen Entfernung wird ausgewertet und mit der Information über gegenseitigen Abstand über einfache Trigonometrie zur Entfernungsmessung verwendet [**?**].

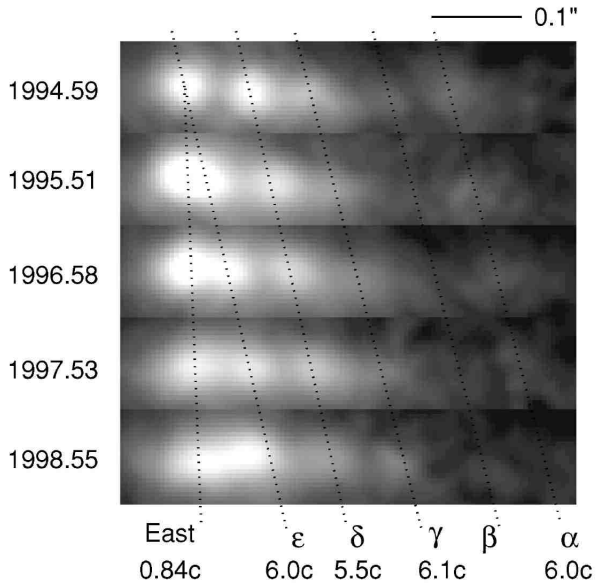


Abb. 4.35: Sequenz von Bildern, die die Entwicklung des M87 Jets zwischen 1994 und 1998 zeigt. Die scheinbare Geschwindigkeit des Jets ist ortsaufgelöst in Einheiten von c angegeben [**?**].

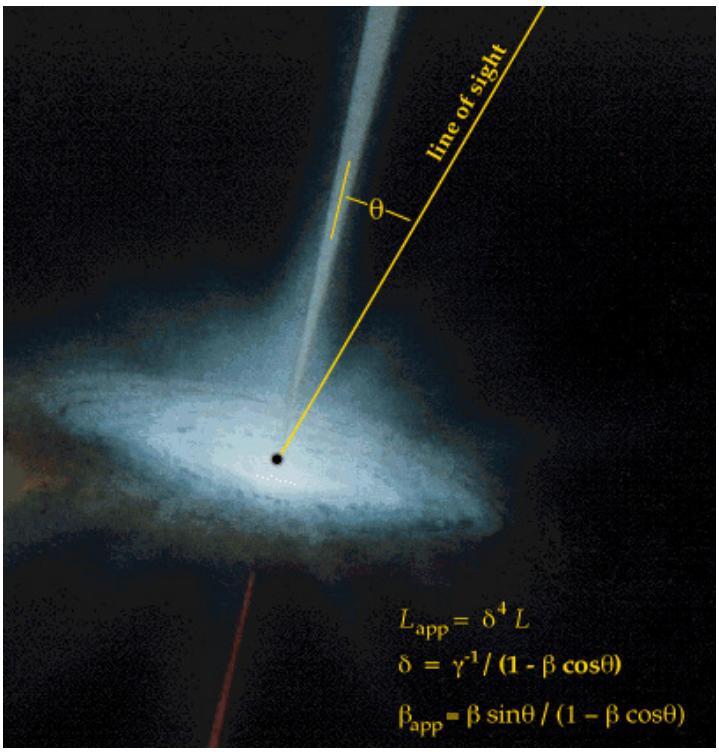


Abb. 4.36: Superluminale Geschwindigkeiten treten auf, wenn sich ein Objekt mit nahezu Lichtgeschwindigkeit auf uns zubewegt [**?**].

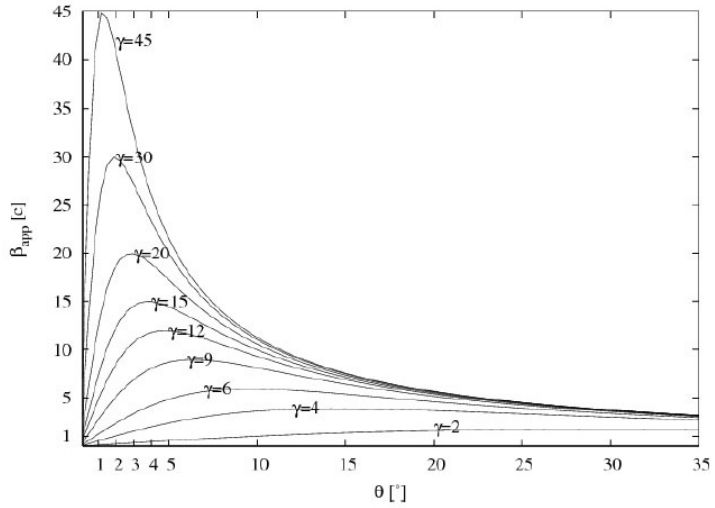


Abb. 4.37: Darstellung der Abhängigkeit der scheinbaren Geschwindigkeit des Jets in Abhängigkeit vom Betrachtungswinkel und tatsächlichen Geschwindigkeit des Jets [**?**].

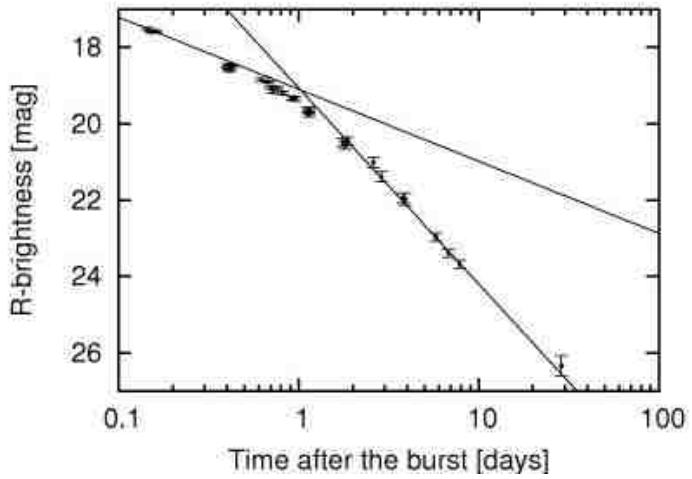


Abb. 4.38: Lichtkurve des γ-bursts GRB 990510 zeigt zu Beginn eine langsame und dann schnellere Abnahme der Intensität. Der Knick in der Lichtkurve, genannt *Jet-Break*, deutet darauf hin, dass diese Strahlung durch einen Jet ausgesendet wird [**?**].

Wie bearbeitet man Aufgaben zum Thema Lorentz-Transformation?

- Fertigen Sie eine Zeichnung an, die die beiden Bezugssystemen (A, B) beinhaltet. Markieren Sie die jeweiligen Geschwindigkeiten, so dass klar ist, welche Geschwindigkeit aus welchem Bezugssystem heraus bestimmt wurde.

- Die Transformationsgleichung hat Einträge, die sich auf bestimmte Bewegungsrichtungen beziehen. Denken Sie an die Vorzeichen und mögliche Vorzeichenwechsel beim Wechsel zwischen den Bezugssystemen. Wenn das Bezugssystem A sich in Bezug auf Bezugssystem B mit $+v$ bewegt, bewegt sich Bezugssystem B im Bezug auf Bezugssystem A mit $-v$, also $v_{AB} = -v_{BA}$.

- Überprüfen Sie, dass in der Transformationsgleichung auf jeder Seite nur die Einträge stehen, die für das jeweilige Bezugssystem gelten.

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Das Raumschiff Hansa4Ever entfernt sich mit einer Geschwindigkeit von $0.9c$ von der Erde. Die Rakete HABDICH überholt Hansa4Ever. Die Besatzung des Raumschiffs bestimmt die Geschwindigkeit von HABDICH mit $0.5c$. Wie hoch ist die Geschwindigkeit der Rakete aus der Sicht eines Beobachters auf der Erde?

Nach der klassischen Physik wäre die Geschwindigkeit von HABDICH $1.4c$, also größer als die Lichtgeschwindigkeit. Das geht nach Einstein natürlich nicht. Wir identifizieren die für die Lösung entscheidenden Größen:

- Gefragt ist die Geschwindigkeit u_{ruhend}, die ein ruhender Beobachter auf der Erde ermitteln würde.

- v_{rel} ist die relative Geschwindigkeit zwischen den beiden Bezugssystem Erde und Rakete. Dieser Wert ist beträgt v_{rel}=0.9c.

- u_{bewegt} ist die Geschwindigkeit der Rakete aus Sicht der Besatzung von Hansa4Ever. Für die Geschwindigkeit von HABDICH wird ein Wert von u_{bewegt}=$0.5c$ ermittelt.

$$
\begin{aligned}
u_{ruhend} &= \frac{u_{bewegt} + v_{rel}}{1 + \frac{u_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \\
u_{ruhend} &= \frac{0.5c + 0.9c}{1 + \frac{0.5c \cdot 0.9c}{c^2}} \\
u_{ruhend} &= 0.9655c
\end{aligned}
$$

Eine 10% höhere Geschwindigkeit reicht also aus, um zu erreichen, dass die Rakete mit halber Lichtgeschwindigkeit an Hansa4Ever vorbeifliegt. So vermerkt im Bericht des Reporters auf der Erde.

Aufgabe 4.2: Überprüfen Sie, ob die Lorentztransformation das 2. Einsteinsche Postulat erfüllt!

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht ist in allen Bezugssystemen c. Dazu setzten wir in die Transformationsgleichung $u_{bewegt} = c$

$$
\begin{aligned}
u_{ruhend} &= \frac{u_{bewegt} + v_{rel}}{1 + \frac{u_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \\
u_{ruhend} &= \frac{c + v_{rel}}{1 + \frac{c \cdot v_{rel}}{c^2}} \\
u_{ruhend} &= \frac{c + v_{rel}}{1 + \frac{v_{rel}}{c}} \\
u_{ruhend} &= c \cdot \left(\frac{1 + \frac{v_{rel}}{c}}{1 + \frac{v_{rel}}{c}} \right) \\
u_{ruhend} &= c
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.3: Alice und Bob besteigen ihre Raumschiffe und entfernen sich mit jeweils $0.75c$ in entgegengesetzte Richtungen von der Erde. Alice bestimmt die Geschwindigkeit v, mit der die Distanz zu Bob zunimmt und findet einen Wert von:[34]

(a) Genau $1.5c$

(b) $c < v < 1.5\,c$

(c) Genau c

(d) $0.75\,c < v < c$

(e) Genau $0.75c$

Aufgabe 4.4: Alice und Bob besteigen ihre Raumschiffe und entfernen sich mit jeweils $0.75c$ in entgegengesetzte Richtungen von der Erde. Wenn Carol auf der Erde die Geschwindigkeit v bestimmt, mit der die Distanz zwischen Alice und Bob zunimmt, findet sie einen Wert von:[35]

[34] Antwort: (d)
[35] Antwort: (a)

(a) Genau $1.5c$

(b) $c < v < 1.5\,c$

(c) Genau c

(d) $0.75\,c < v < c$

(e) Genau $0.75c$

Aufgabe 4.5: Alice fährt wieder Zug und Bob winkt, wenn der Zug mit hoher Geschwindigkeit am Bahnsteig vorbeifährt. Als Alice auf gleicher Höhe mit Bob ist, lässt sie zwei Bälle mit weit seitwärts ausgestreckten Armen aus dem Zugfenster fallen. Bob beobachtet den Fall der Bälle. Wenn man von dem Zeitunterschied durch einen unterschiedlichen Lichtweg absieht: In welcher Reihenfolge treffen die Bälle aus Sicht von Bob auf dem Boden auf?[36]

(a) Zur gleichen Zeit!

(b) Einer nach dem anderen!

Aufgabe 4.6: Carol ist neben Alice eine weitere Person im Zug. Wenn man von dem Zeitunterschied durch einen unterschiedlichen Lichtweg absieht: In welcher Reihenfolge fallen nach Carols Meinung die Bälle auf dem Boden auf?[37]

(i) Gleichzeitig!

(ii) Nacheinander!

Aufgabe 4.7: Im bewegten Bezugssystem propagiert ein Lichtimpuls in y-Richtung, d.h. $u^y_{bewegt} = c$. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Lichtimpuls im ruhenden Bezugssystem?

Im ruhenden Bezugssystem hat der Lichtstrahl einen andere Richtung. Für die Lösung nutzen wir u.a. Gl. 4.54

$$
\begin{aligned}
u^x_{ruhend} &= v_{rel} \\
u^y_{ruhend} &= \frac{u^y_{bewegt} \cdot \sqrt{1 - v^2_{rel}/c^2}}{1 + \dfrac{u^y_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \\
u^y_{ruhend} &= \frac{c \cdot \sqrt{1 - v^2_{rel}/c^2}}{1 + \dfrac{v_{rel}}{c}} \\
u^y_{ruhend} &= c \cdot \sqrt{1 - v^2_{rel}/c^2} \\
u^z_{ruhend} &= 0
\end{aligned}
$$

[36] Antwort: (b)
[37] Antwort: (i)

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit $|v_c|$ ergibt sich, in Übereinstimmung mit dem Zweiten Einsteinschen Postulat c:

$$\begin{aligned} |v_c| &= \sqrt{(u^x_{ruhend})^2 + (u^y_{ruhend})^2} \\ |v_c| &= \sqrt{(v^2_{rel} + c^2 \cdot (1 - v^2_{rel}/c^2)} \\ |v_c| &= \sqrt{(v^2_{rel} + cr - c^2 \cdot v^2_{rel}/c^2)} \\ |v_c| &= c \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis der Änderung der Richtung eines Lichtstrahls liefert eine Erklärung für die Aberration von Sternenlicht (Kapitel *Äther*) für Beobachter auf der um die Sonne kreisenden Erde.

Aufgabe 4.8: Was ergibt die Gleichung für die Lorentztransformation in Bezug auf u_{bewegt}, wenn man als Geschwindigkeit u_{ruhend} im ruhenden System die Lichtgeschwindigkeit c einsetzt?

$$\begin{aligned} u_{bewegt} &= \frac{u_{ruhend} - v_{rel}}{1 - \frac{u_{ruhend} \cdot v_{rel}}{c^2}} \\ u_{bewegt} &= \frac{c - v_{rel}}{1 - \frac{c \cdot v_{rel}}{c^2}} \\ u_{bewegt} &= \frac{c \cdot (1 - v_{rel}/c)}{(1 - v_{rel}/c)} \\ u_{bewegt} &= c \end{aligned}$$

Ein Objekt, dass sich aus Sicht eines ruhenden Beobachters mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, hat in jedem dazu bewegten Bezugssystem auch eine Geschwindigkeit c. Führen sie sich in diesem Zusammenhang nochmal das zweite Einsteinsche Postulat vor Augen (Kapitel *Äther*). Erkennen Sie den Zusammenhang?

Aufgabe 4.9: An observer on the earth sees a space ship, receding from the earth at $2.0 \cdot 10^5$ m/s, launch a projectile ahead of $2.25 \cdot 10^8$ m/s. What is the velocity of the projectile with respect to the space ship as seen from (a) the space ship, and (b) the earth?[38]

Aufgabe 4.10: Two space ships are observed from the earth to be approaching each other, each with a velocity of 2/3 the speed of light. With what velocity is each space ship approaching the other, as seen from either ship?[39]

[38] Answer: (a) $0.5 \cdot 10^8$ m/s, (b) $2.25 \cdot 10^8$ m/s
[39] Answer: $2.77 \cdot 10^8$ m/s, or $0.92c$

Aufgabe 4.11: A space ship P takes off from the earth and heads for a distant planet. Sometime still later, space ship Q takes off for the same planet. Sometime still later, space ship Q is observed from the earth to be receding at a speed of 3/4 the speed of light. Space ship P as observed from ship Q is observed to be receding at 3/4 the speed of light. With what speed is P receding from the earth? Assume all bodies lie along the same straight line. Solve the problem, if the two observed speeds are 2/3 the speed of light.[40]

[40] Answer: $2.77 \cdot 10^8$ m/s

Konzeptionelle und andere Fragen

1. In relativ zueinander bewegten Inertialsystemen sind Abstände, gemessen in Richtung senkrecht zur Bewegungsrichtung gleich. Das gilt aber nicht für die gemessenen Geschwindigkeiten. Warum?

2. Ein Elektron wird mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung geschossen. Kurze Zeit später feuert man ein weiteres Elektron in y-Richtung ab. Hängt die relative Geschwindigkeit der beiden Elektronen vom Zeitabstand ab?

3. Was lernt man aus der Ableitung der Kurve in Abb. 4.30?

4. Zwei Teilchen bewegen sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit zueinander. Was ergibt sich, wenn sich das eine Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit bewegt?

5. Was versteht man unter einer superluminare Geschwindigkeit?

6. Bewegen sich kosmische Jets mit Überlichtgeschwindigkeit?

7. Sie verwenden ein Teleskop, um einen Laserstrahl auf den Mond zu schicken. Wie sich herausstellt, können sie den Auftreffpunkt mit einer Geschwindigkeit über die Mondoberfläche bewegen, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit. Verletzt dieses Experiment das Konzept der Relativitätstheorie?

Synchrotron[4LP]



On April 24, Langmuir and I were running the machine and as usual were trying to push the electron gun and its associated pulse transformer to the limit. Some intermittent sparking had occurred and we asked the technician to observe with a mirror around the protective concrete wall. He immediately signaled to turn off the synchrotron as *he saw an arc in the tube*. The vacuum was still excellent, so Langmuir and I came to the end of the wall and observed. At first we thought it might be due to Cherenkov radiation, but it soon became clearer that we were seeing Ivanenko and Pomeranchuk radiation.

Herbert Pollock, 1947

Im Jahr 1933 baute Karl Jansky bei Bell Labs eine Antenne, um Radiowellen bei 20.5 MHz zu detektieren. Dabei entdeckte er am Himmel eine kontinuierliche Quelle von Radiostrahlung. Im Vergleich mit astronomischen Daten fand er, dass die Milchstraße die Quelle der Strahlung war und die stärkste Quelle Sagittarius im galaktischen Zentrum, siehe Abb. 4.39. Alfven und Herlofsen vermuteten, dass die mysteriösen Radiosterne Radiowellen über Synchrotronlicht emittieren [**?**]. Wie sich herausstellt ist die galaktische Radioemission darauf zurückzuführen, dass Elektronen Synchrotronstrahlung abgeben, weil sie sich in galaktischen Magnetfeldern bewegen [**?**]. Typische Magnetfelder astrophysikalischer Objekte sind in Tab. 4.3. Man weiß inzwischen, dass Synchrotronstrahlung einer der dominierenden Strahlungsquellen in Universum ist.



VOL. LXXXII....No. 27,495.

NEW RADIO WAVES TRACED TO CENTRE OF THE MILKY WAY

Mysterious Static, Reported by K. G. Jansky, Held to Differ From Cosmic Ray.

DIRECTION IS UNCHANGING

Recorded and Tested for More Than Year to Identify It as From Earth's Galaxy.

ITS INTENSITY IS LOW

Only Delicate Receiver Is Able to Register—No Evidence of Interstellar Signaling.

Flier Asks Blame in C
But Inquest Absol

By The Canadian Pr
LONDON, May 4.—
rous attempt to assume
bility for the fatal cr
Royal Air Force plane
1, in which Viscount K
pilot, and Aircraftman
lost their lives, was
Flight Lieutenant Eri
at the inquest today
Lieutenant Hobson's
verdict of "death due
venture" was returned
Lieutenant Hobson,
of the section of
Knebworth was a m
scribed how he un
lost his height and at
2,000-foot dive got
near the ground.
"The error in ju
certainly not due to
or recklessness," sai
Hobson, adding that
worth was "absolut
for what had happe
simply followed him
orders."

KIDNAPPERS
TO ANSWE

Abb. 4.39: New York Times, 5. Mai 1933

Die kosmische Höhenstrahlung beinhaltet auch einen Anteil relativistischer Elektronen. Der zugehörige Teilchenfluss beträgt einige Prozent der Menge an Protonen. Abb. 4.40 zeigt das zugehörige Energiespektrum. Ihre Relevanz ergibt aus der Abstrahlung von Licht, wenn sich die Teilchen in einem magnetischen Feld bewegen. Starke Magnetfelder gibt es in Neutronensternen[41] Abhängig von der Stärke des Magnetfeldes B_M und der ki-

[41]Es mag erstaunen klingen, dass Sterne, die quasi nur aus Neutonen bestehen, solche starke Magnetfelder erzeugen. Tatsächlich vermutet man, dass der Aufbau eines Neutronensterns komplex ist und supraleitende Lagen aus Protonen und Elektronen enthält, die Magnetfelder generieren. Hinzu kommt der Effekt des *magentic flux freezing*. Da es aufgrund der Supraleitung keinen spezifischen

Objekt	Magnetfeld [Gs]
Interstellares Medium	10^{-6}
Krebsnebel	10^{-6}
Umwelt	0.3
Erde am Pol	0.5
Jupiter am Pol	14
Sonnenfleck	$1.5 \cdot 10^3$
Brauner Zwerg	$5 \cdot 10^3$
Starker Labormagnet	10^6
Weißer Zwerg	bis 10^9
Neutronenstern	bis 10^{15}

Tab. 4.3: Magnetfelder astrophysikalischer Objekte ($1\,\mathrm{Gs}=10^{-4}\,\mathrm{T}$)

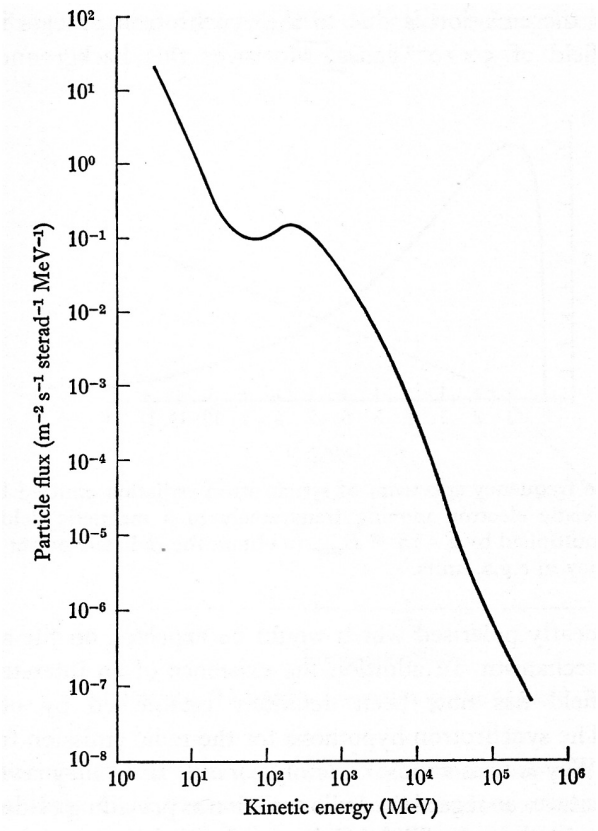


Abb. 4.40: Energiespektrum kosmischer Elektronen. Man beachte die doppelt logarithmische Darstellung, siehe auch [**?**].

netischen Energie E_{kin} zeigt das Spektrum eines relativistischen Elektrons ein Maximum bei einer Frequenz ν von:

$$\nu_{\max} \propto \frac{1}{10} \left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} \right)^2 \cdot \frac{e \cdot B_M}{m_0 \cdot c^2} \tag{4.57}$$

Für ein 1 BeV Elektron, dass sich in einem magnetischen Feld der Stärke 10^{-9} T liegt das Maximum der Lichtemission bei etwa 50 MHz, was gut mit dem Radiospektrum der Milchstraße überein stimmt.

Es liegt nahe, diesen Effekt für technische Anwendungen, wie beispielsweise die Materialforschung zu nutzen. Historisch betrachtet sagt schon die klassische Elektrodynamik voraus, dass eine beschleunigte Ladung Licht abstrahlt. Das Phänomen wurde 1898 von Lienard berechnet. Zu diesem Zeitpunkt war die erreichbaren Elektronenenergien nur etwa 100 keV und damit nicht ausreichend, um kurzwellige Strahlung zu erzeugen. Ein geeigneter 70 MeV Beschleuniger wurde erst 1947 gebaut. Beschleunigung bedeutet in diesem Zusammenhang auch, dass die Teilchen, ohne dass sich seine Geschwindigkeit verändert, in eine andere Richtung gelenkt werden. Typischerweise verwendet man

elektrischen Widerstand gibt, bleiben die Magnetfelder, die bei der Entstehung eines Neutronensterns vorhanden sind, bestehen. Die Stärke des Magnetfeldes erhöht sich dabei proportional zum Quadrat des inversen Radius, was die enormen Werte erklärt.

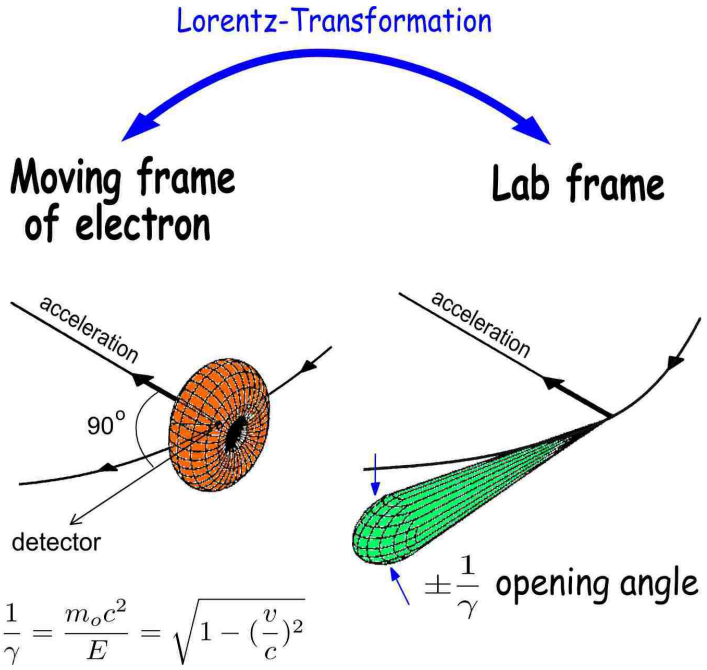


Abb. 4.41: Entstehung des Lichtkegels bei relativistischer Bewegung von Ladungen in einem Synchrotron [**?**].

schnelle Elektronen, die man mit Hilfe geeigneter elektrischer und magnetischer Felder auf Kreisbahnen bringt. Es sei angemerkt, dass uns dieser Effekt im Zusammenhang mit dem Thema Bohrsches Atommodell nochmals beschäftigen wird. Beschleunigte Ladungen senden elektromagnetische Strahlung aus. Beim Synchrotron [**? ? ? ?**] bewegen sich geladener Teilchen mit relativistischer Geschwindigkeit und werden senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung beschleunigt. Die abgestrahlte Leistung kann man mit Hilfe der Larmor-Formel ermitteln:

$$P = \frac{\gamma^4}{6\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q^2 \cdot a^2}{c^3} \tag{4.58}$$

wobei q Ladung des Teilchens und a die Beschleunigung der Ladung ist. In einem magnetischen Feld, wie es in Synchrotrons verwendet wird, erfährt eine Ladung eine Beschleunigung. Protonen anstatt von Elektronen einzusetzen wäre ineffektiv. Im Vergleich zum Elektron ist die resultierende Beschleunigung aufgrund des Massenunterschieds 1800-mal geringer. Daher ist die abgestrahlte Leistung, wie die Gleichung liefert, um einen Faktor $(1/1800)^2$ geringer. Die Abstrahlung elektromagnetischer Strahlung führt zu einem Verlust an kinetischer Energie. Pro Umlauf ergibt sich bei einer Kreisbahn mit Radius r ein Energieverlust der Elektronen von:

$$\Delta E_{kin} = \frac{e^2}{3\,\varepsilon_0 \cdot r} \left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} \right)^4 \tag{4.59}$$

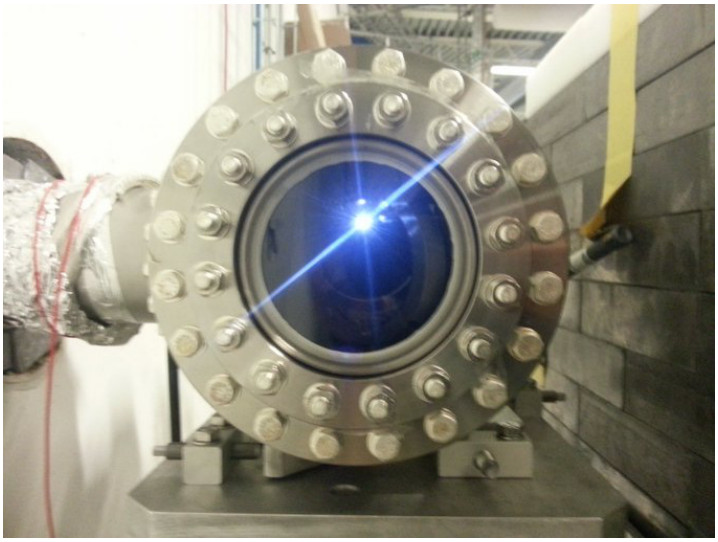


Abb. 4.42: Aufnahme der Lichtemission an einem Elektronen-Speicherring. Zu sehen ist das für das Auge sichtbare Synchrotronlicht [**?**].

Man erkennt, dass insbesondere bei Elektronen der Energieverlust erheblich ist. Bei einem Radius der Elektronenbahn von r=100 m ist bei einer Energie von 10 GeV der Verlust 8.85 MeV. Das von den Elektronen abgestrahlte elektromagnetische Feld hat im Normalfall ($v_e \ll c$) einen Dipolcharakter (Kapitel *Elektromagnetische Strahlung*, Beispiel: Radiosender). Bei hohen Geschwindigkeiten allerdings staucht die Längenkontraktion die Feldlinien in Bewegungsrichtung, siehe Abb. 4.41. Dadurch verursacht, ändert sich die Abstrahlcharakteristik und ein scharf gebündelter und damit intensiver Lichtstrahl wird in Vorwärtsrichtung emittiert, siehe Abb. 4.42. Wie sich herausstellt, ist der Öffnungswinkel des gebündelten Strahl Θ_{cone} vom γ-Faktor abhängig.

$$\frac{\Theta_{cone}}{2} = \frac{1}{\gamma} \tag{4.60}$$

Ist es schwierig einen fast lichtschnellen Elektronenstrahl zu führen? Der Aufwand ist geringer als man denkt. Beispielsweise ist der Linearbeschleuniger am Forschungsinstitut SLAC 3 km lang. Für die schnellen Elektronen ist er dagegen nur 0.5 m lang.

Brillanz

Die so arbeitenden Maschinen nennt man Synchrotron. Durch technische Raffinessen ist es gelungen, brillante Lichtquellen[42] für Röntgenstrahlung zu realisieren. Abb. 4.43 zeigt

[42] *Lexikon:* When comparing x-ray sources, an important measure of quality of the source is called **brilliance**. The greater the brilliance, the more photons of a given wavelength and direction are concentrated on a spot per unit of time. Brilliance takes into account:

1. Number of photons produced per second
2. The angular divergence of the photons, or how fast the beam spreads

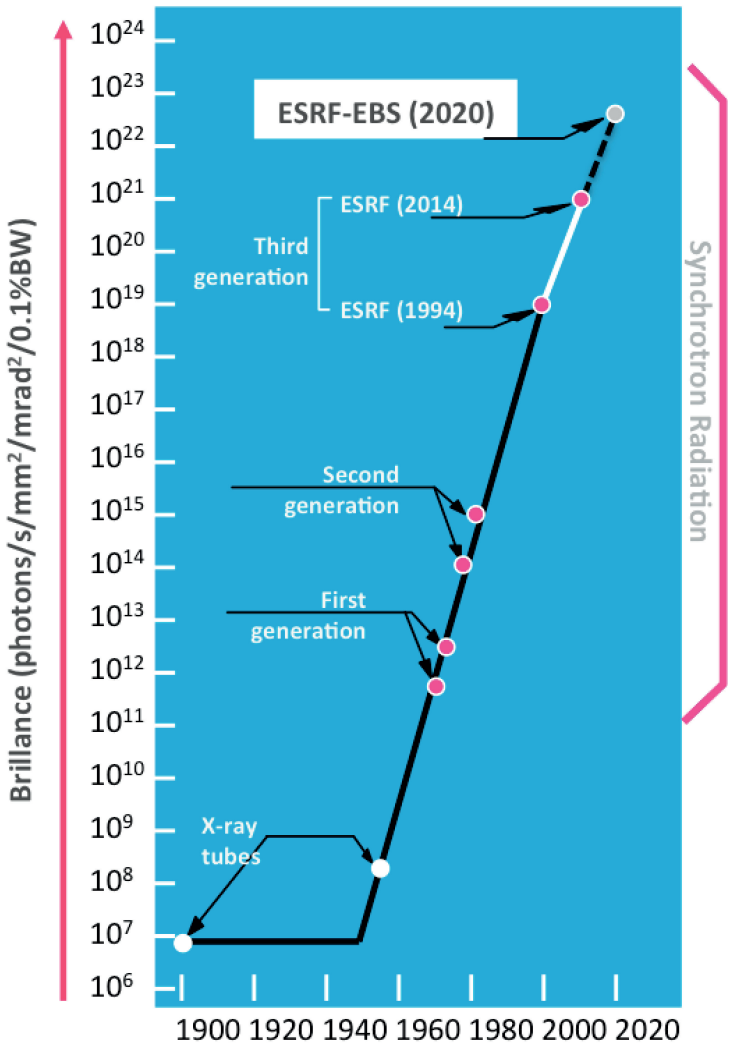


Abb. 4.43: Entwicklung der Brillianz von Lichtquellen im Röntgenbereich 1. Röntgen- im Vergleich zu Synchrotron-Strahlungsquellen [**?**].

die rasante Entwicklung in der Leistungsfähigkeit der Synchrotron-Lichtquellen in den letzten Jahrzehnten. Man beachte die logarithmische Skalierung der y-Achse. Gegenüber den kommerziellen Röntgenquellen, wie sie auch in der Medzin eingesetzt werden, erreichen Synchrotrons eine um 15 Größenordnungen höhere Brillianz. Abb. 4.44 zeigt, welche Photonenenergien von Synchrotrons bereitgestellt werden können. Eine noch höhere Brillanz erreichen Freie-Elektronenlaser.

out

3. The cross-sectional area of the beam
4. The photons falling within a bandwidth (BW) of 0.1% of the central wavelength or frequency

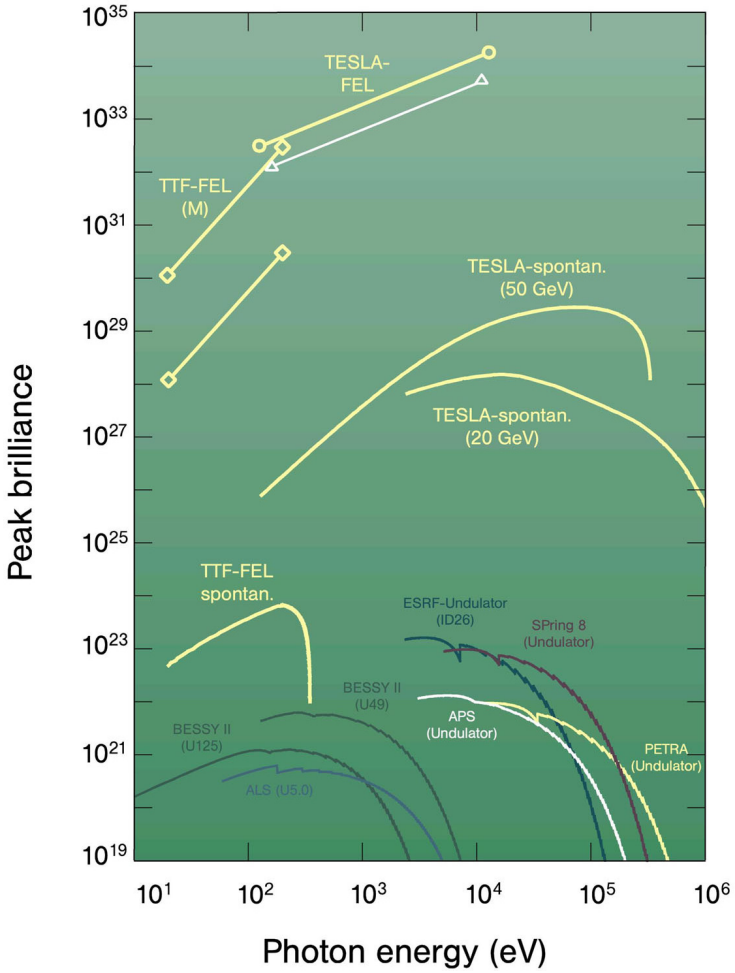


Abb. 4.44: Entwicklung der Brillianz von Lichtquellen im Röntgenbereich 2. Synchrotron- im Vergleich Freie-Elektronenlaser Strahlungsquellen. Man beachte, dass die Brillianz nochmal um 10 Größenordnungen ansteigt [**?**].

Die Theorie des Freie-Elektronen-Lasers (FEL) stammt aus dem Jahr 1971 [**?**]. In zwei Schritten konnten diese Überlegungen experimentell belegt werden. In Experimenten wurde gezeigt, dass die Intensität von Infrarot-Laserstrahlung zunahm, wenn der Strahl sich entlang eines Elektronenstrahls in einem periodischen Magnetfeld bewegt [**? ?**]. In dieser Weise gelang es schmalbandige Strahlung bei hoher Spitzenleistung zu erzeugen.

Beispiele für Laserstrahlung aus Synchrotrons im Röntgenbereich findet man in den Kapiteln *Röntgendiagnostik* und *Laser*. Beispiele sind SLAC[43] in Kalifornien und der European XFEL[44] in Hamburg. Hier ist die Brillanz sogar 26 Größenordnungen höher. Es sollte klar sein, dass eine solche Steigerung der Effizienz der Forschung ungeahnte Möglichkeiten für Experimente bietet.

[43]SLAC: Stanford Linear Accelerator Center
[44]XFEL: X-Ray Free-Electron Laser

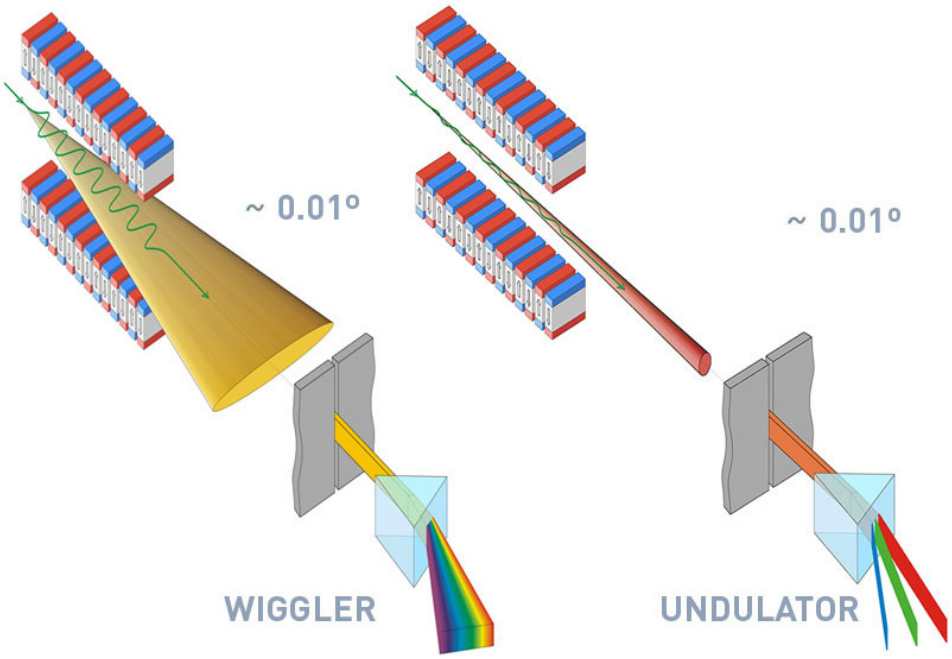


Abb. 4.45: Vergleich der Erzeugung von Röntgenlicht mit Wigglern und Undulatoren [**?**].

Synchrotron-Lichtquellen der ersten Generation (Dipol-Magnete) arbeiteten parasitär an bestehenden Einrichtungen der Teilchenphysik. Synchrotrons der zweiten Generation (z.B. Speicherring DORIS[45] beim DESY[46], Hamburg) verwendeten Elektronenspeicherringe, um das Synchrotronstrahlung für Experimente zu nutzen. In Synchrotron-Lichtquellen der dritten Generation wird die Intensität des Lichts optimiert. Dazu verwendet man lange gerade Abschnitte im Speicherring, um dort Wiggler[47] und Undulatoren[49] einzubauen, die Magnetstrukturen enthalten, die die Elektronen auf Bahnen zwingen, die in effizienter Weise Röntgenlicht erzeugen, siehe Abb. 4.45. Eine brillante Synchrotron-Lichtquelle ist die ESRF[51] in Grenoble. Der Umfang des Beschleu-

[45] DORIS: Double Ring Store

[46] DESY:Deutsches Elektronen-Synchrotron

[47] *Lexikon:* Bei Wigglern[48] wird lokal ein starkes in seiner Polarität abwechselndes Magnetfeld angelegt, um energiereiche Röntgenstrahlen zu erzeugen. Durch die unterschiedliche Polung der Magnete erhöht man die Wackelbewegung des Elektronenstrahls. Am Austritt eines Wigglers steht energiereiches und intensiven Licht für Experimente zur Verfügung. Durch die Elektronentrajektorien ist die erzeugte Strahlung aber noch spektral breit.

[49] *Lexikon:* Bei Undulatoren[50] geht man einen Schritt weiter und optimiert die Magentfeldstruktur. Hier interferiert das bei jedem Wackeln austretende Licht mit dem Licht, das in den anderen Bereichen des Undulators erzeugt wurde. Damit entsteht ein spezielles Interferenzmuster, das sowohl im Raum als auch in der Energie konzentriert ist. Das Licht ist daher intensiv bei gewählten Wellenlänge und räumlich in einem engen Raumwinkel konzentriert.

[51] ESRF: European Synchrotron Radiation Facility



Abb. 4.46: Photo des Elektronen-Synchrotrons PETRA III am DESY in Hamburg. In Blau sind die Bereiche markiert, in denen mit Hilfe der Röntgenstrahlung gefischt wird [**?**].

nigerrings beträgt 850 m. Um solche Anlagen zu betreiben, ist höchste Genauigkeit in der Positionierung der Komponenten vonnöten, um die gewünschten Eigenschaften des Elektronenstrahls zu erreichen: In der ERSF beispielsweise zirkuliert ein 2 μm hoher und 20 μm breiter Elektronenstrahl. Zur Illustration der Abmessungen heutiger Synchrotron-Strahlungsquellen zeigt Abb. 4.46 PETRA III auf dem Gelände des Deutschen-Elektronen-Synchrotrons (DESY) in Hamburg. Der Speicherring hat einen Umfang von 2.3 km. Blau markiert sind die Bereiche, an denen Röntgenstrahlung für Experimente verwendet wird. In der ersten Ausbauphase wurden an 23 Strahlrohren etwa 60 Messstationen installiert. Zu den ersten Erfolgen im Rahmen der Teilchenphysik zählte 1979 die direkte Beobachtung des Gluons.[52]

Die neuste Entwicklung sind Freie-Elektronenlaser (FEL), deren Helligkeiten gegenüber Synchrotrons wie PETRA III nochmal um Größenordnungen erhöht sind. Der ebenfalls in Hamburg aufgebaute European XFEL hat erst in 2017 Jahr seine Arbeit aufgenommen. Dieser FEL besteht aus einem 3.4 km langen Tunnel, mit der Laserstrahlung im Röntgenbereich mit Wellenlängen von 0.05 bis 4.7 nm erzeugt werden kann. Abb. 4.47 zeigt die Entwicklungsgeschichte der FELs. Die Besonderheit von FELs gegenüber Synchrotrons ist, dass das Elektronen auf dem Weg durch den Undulator zu kleinen Paketen zusammen gequetscht werden, wobei der Abstand der gewünschten Wellenlänge der Strahlung entspricht. Es kommt dabei zu einer Wechselwirkung der Elektronen untereinander und dadurch ausgelöst zu einem selbstverstärkenden Laserprozess (SASE),[53] der eine Strahlungslawine auslöst.

[52] Gluonen sind die Trägerteilchen der starken Kraft, die die Quarks bindet.
[53] SASE: self-amplified spontaneous emission

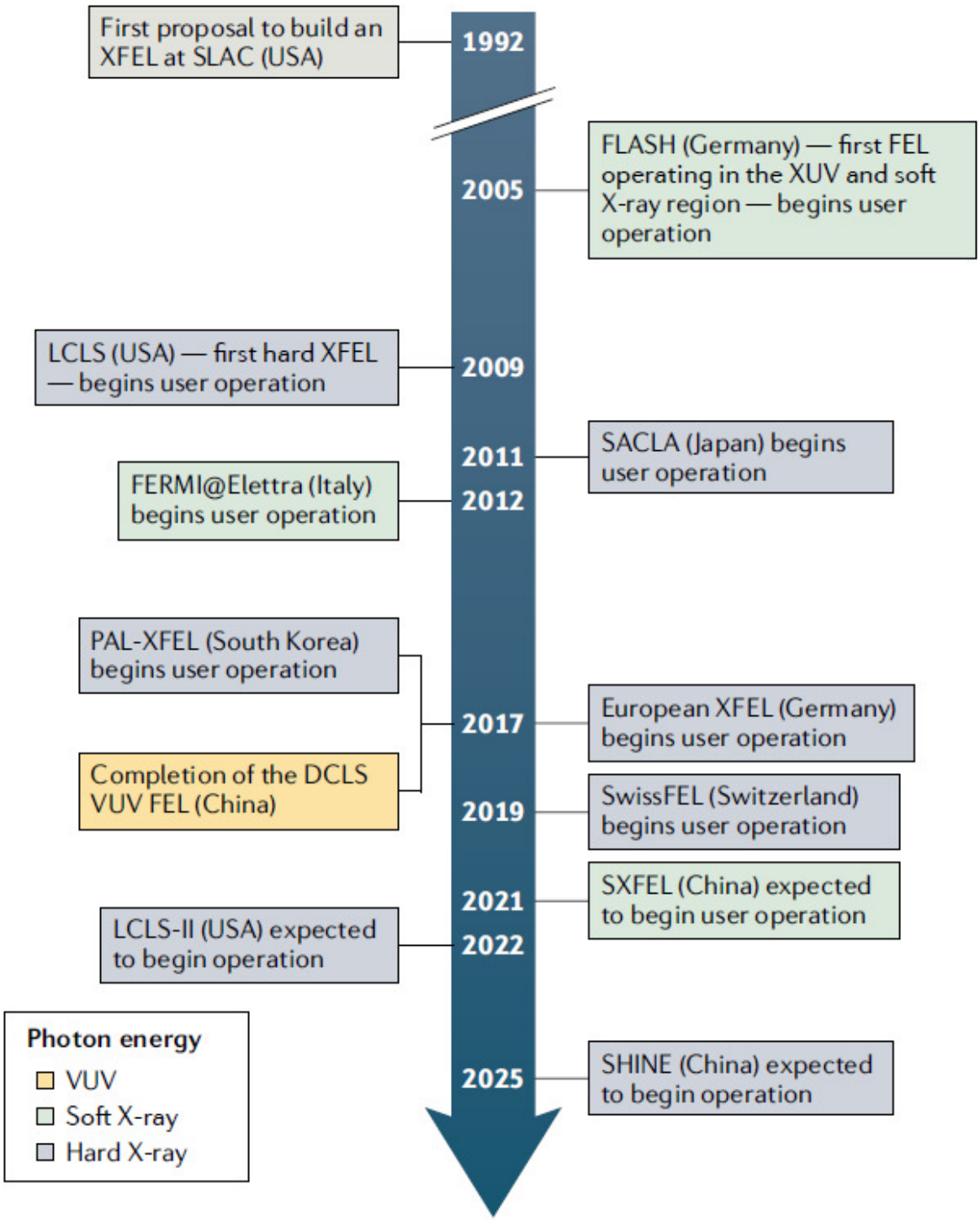


Abb. 4.47: Zeitachse, die die Entwicklung der Freie-Elektronenlaser darstellt [**?**].

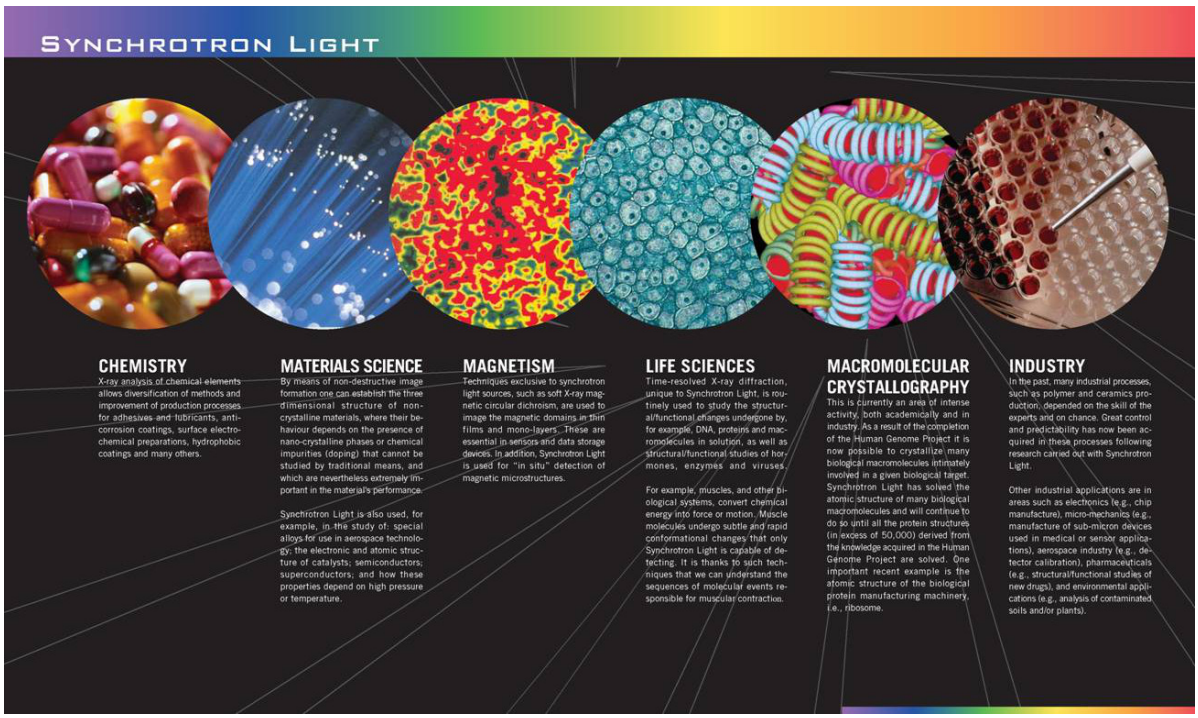


Abb. 4.48: Forschung mit Hilfe der Synchrotronforschung [**?**].

Anwendungen

Beispiele aus der Paläontologie

Erstes Urzeit-Gehirn entdeckt: *Nie zuvor wurde ein so altes Gehirn gefunden*, berichten Paläontologen. Entdeckt wurde das Fischhirn per Zufall: Die Forscher der naturhistorischen Museen in Paris und New York hatten an der Europäischen Synchrotronstrahlungsquelle ESRF in Grenoble einige gut erhaltene Schädel prähistorischer Fische durchleuchtet. Bei einem der Fische zeigte das gescannte Bild, dass im Inneren des Schädels noch ein versteinertes Organ erhalten war, siehe Abb. 4.49. Im fossilen Fischkopf, der aus dem amerikanischen Bundesstaat Kansas stammt, wurde bei der Synchrotron-Tomografie die Struktur von Weichteilen sichtbar. Eine dreidimensionale Rekonstruktion zeigte schließlich verschiedene Teile eines Gehirns, darunter das Kleinhirn (Cerebellum), Teile des Rückenmarks und verschiedene Hirnlappen. Der Fisch, der mit heutigen Haien und Seekatzen verwandt ist, lebte vermutlich in flachen, schlammigen Gewässern und wurde nicht größer als 50 Zentimeter [**?**].

Die Zeit 2.9.2009

Synchrotron tomography of a stem lizard elucidates early squamate anatomy [**?**]**:** Squamates (lizards and snakes) include more than 10,000 living species, descended from an ancestor that diverged more than 240 million years ago from that of their closest living relative, Sphenodon. However, a deficiency of fossil evidence, combined with serious conflicts between molecular and morphological accounts of squamate phylogeny,

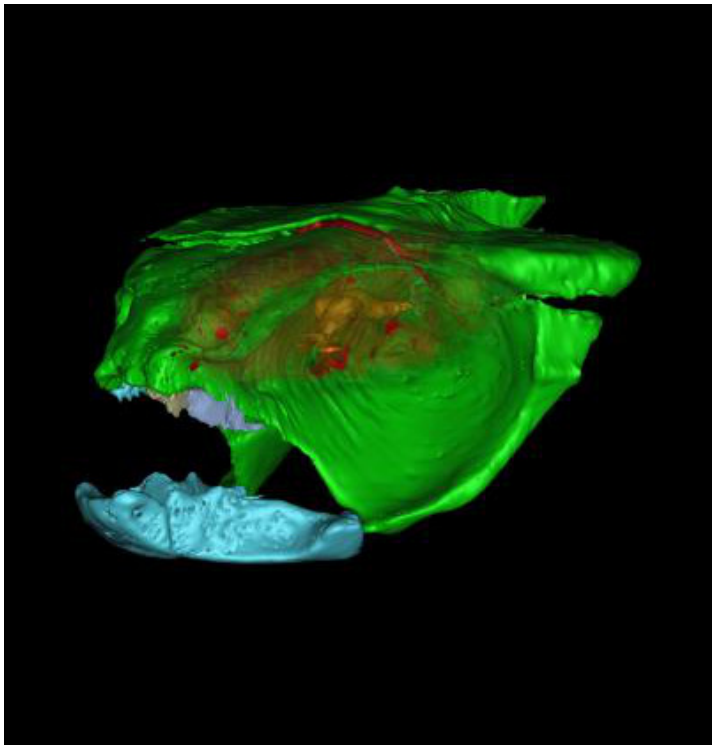


Abb. 4.49: Fossiler Fischkopf bei dem Teile eines Gehirns entdeckt wurde [**?**].

has caused uncertainty about the origins and evolutionary assembly of squamate anatomy. Here we report the near-complete skeleton of a stem squamate, Bellairsia gracilis, from the Middle Jurassic epoch of Scotland, documented using high-resolution synchrotron phase-contrast tomography.

Ein Beispiele aus der Batterietechnologie

Der zunehmende Einsatz von wiederaufladbaren Batterien in tragbaren elektronischen Geräten und neuere Entwicklungen in Transport und Energiespeicherung motivieren die Forschung an Hochleistungsbatterien mit erhöhter Energiedichte und Lebensdauer. Im Jahr 1991 brachte Sony die ersten Lithium-Ionen-Akkus auf den Markt. Seid damals hat sich die Energiedichte der Zellen mehr als verdoppelt (von 100 auf 240 Wh/kg) und die Kosten mehr als halbiert (von 1000 auf 300 $/kWh). Die Fortschritte sind zurückzuführen auf bessere Technik und Zelldesign, aber auch auf Verbesserungen in Bezug auf die verwendeten Materialien für Elektroden und Elektrolyte. Dies war möglich durch ein verbessertes Verständnis der elektrochemischen Reaktionen, die in der Elektrode ablaufen und an den Elektroden-Elektrolyt-Grenzflächen. Weitere Fortschritte bei wiederaufladbaren Batterien erfordern möglicherweise neue Chemikalien und ein besseres Verständnis der Materialelektrochemie in den verschiedenen Batterietechnologien. Fortschrittliche Analysetechniken erlauben die grundlegenden Mechanismen aufzude-

cken, der die Batterieleistung bestimmt. Allerdings ist aufgrund der komplexen Eigenschaften von Batteriesystemen die Analyse anspruchsvoll. Synchrotronstrahlung bietet hier besondere Vorteile um die elektronische und geometrische Struktur der Materialien aufzuklären und die Mechanismus zu verstehen, um so die Batterien technologisch weiterzuentwickeln. Insbesondere In-situ- und Operando-Techniken mit hoher räumlicher und zeitlicher Auflösung ermöglichen die zerstörungsfreie, dynamische Untersuchung der elektrochemischen Reaktion in Echtzeit und führen zu tiefgreifenden Einblicken in den Betriebsmechanismus einer Batterie.

Beispiele aus der Tumortherapie

Microbeam radiation therapy basiert auf der Bestrahlung einer Läsion mit eng gebündelter Röntgenstrahlen im Photonenenergienvon 50-150 keV. Typische Breiten der Mikrostrahlen 25 μm bei einem Abstand zwischen den Strahlen 200 μm [**?**]. Die Idee ist, beispielsweise Endotheliozyten in Blutgefäßen durch hohe absorbierte Dosen im Bereich der Mikrostrahlen zu zerstören und dass in den angrenzenden Segmenten derselben Blutgefäße zu einer Regeneration kommt. Ein weiteres Ziel der Entwicklung ist die Entwicklung einer Methode zur Radiochirurgie inoperabler Hirntumoren von Kleinkindern.

Microbeam radiation therapy [?]: It is proposed to carry out radiotherapy and radiosurgery for brain lesions by crossfiring an array of parallel, closely spaced microbeams of synchrotron-generated x-rays several times through an isocentric target, each microbeam in the array having an 25 μm-wide adjustable-height rectangular cross section. The following inferences from the known tissue sparing of 22 MeV deuteron microbeams in the mouse brain and the following exemplary Monte Carlo computations indicate that endothelial cells in the brain that are lethally irradiated by any microbeam in an array of adequately spaced microbeams outside an isocentric target will be replaced by endothelial cells regenerated from microscopically contiguous, minimally irradiated endothelium in intermicrobeam segments of brain vasculature. Endothelial regeneration will prevent necrosis of the nontargeted parenchymal tissue. However, neoplastic and/or nonneoplastic targeted tissues at the isocenter will be so severely depleted of potentially mitotic endothelial and parenchymal cells by multiple overlapping microbeams that necrosis will ensue. The Monte Carlo computations simulate microbeam irradiations of a 16 cm diameter, 16 cm-long cylindrical human head phantom using 50, 100, and 150 keV monochromatic x-rays.

Eine andere Methode nutzt Erhöhung der Strahlendosis mit einem Kontrastmittel [**?**]. Dazu wird ein herkömmlicher Computertomograph verwendet, um eine optimierte Dosisverteilung bei metastasierten Hirntumoren zu erzielen. Nach Einbringen eines Kontrastmittels wie Jod in das Tumorvolumen, kann der Tumor mithilfe eines Computertomographiesystems abgebildet werden. Sobald das Tumorvolumen definiert ist, leitet man Licht mit einer Photonenenergie oberhalb der Absorptionskante des Kontrastmittels und ausreichender Intensität auf den Tumor. Die Strahlendosis wird im tomographischen

Modus abgegeben, wodurch sich die Dosis auf das Nichttumorvolumen reduziert. Dies sorgt für eine Dosiserhöhung durch die Sekundärstrahlung und ausgelöste Elektronen.

Und in Zukunft?

Synchrotrons und FELs sind einzigartige Lichtquellen, die von den unterschiedlichsten wissenschaftlichen Fachdisziplinen und der Industrie intensiv genutzt werden. Die neuste Entwicklung ist, dass man versucht die hohe mittlere Leistung eines Synchrotrons mit der hohen Spitzenleistung der FELs zu verbinden:

Accelerator-based light sources get a boost [?]: For decades, particle accelerators have been used across a wide range of fields, enabling the study of matter in ever-increasing detail. Charged particles emit light when they are accelerated, and accelerators that exploit this phenomenon are among the brightest artificial sources of light available, allowing scientists to probe the properties of matter over unprecedentedly short scales of length and time. Deng et al. [?] report a proof-of-principle experiment on an accelerator that could extend the capabilities of these machines even further, potentially yielding applications in a next-generation chip-etching technology called extreme-ultraviolet litho-graphy and an advanced imaging method known as angle-resolved photoemission spectroscopy.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Unter welchen Bedingungen strahlen Teilchen Licht aus?
2. Wie arbeitet ein Synchrotron?
3. Worin bestehen die Unterschiede zwischen einr kommerziellen Röntgenröhre und einem Synchrotrons?
4. Was versteht man unter einem Wiggler?
5. Welche Vorteile hat ein Undulator?
6. Welchen Wellenlängenbereich wird von einem Synchrotron bereit gestellt?
7. Arbeitet ein Synchrotron kontinuierlich oder gepulst?
8. Was versteht man unter Brillianz?
9. Elektronen bewegen sich in einem Synchrotron mit nahezu Lichtgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit Radius 100 m. Wie viele Elektronen im Speicherring benötigt man für einen Strom von 1 A?

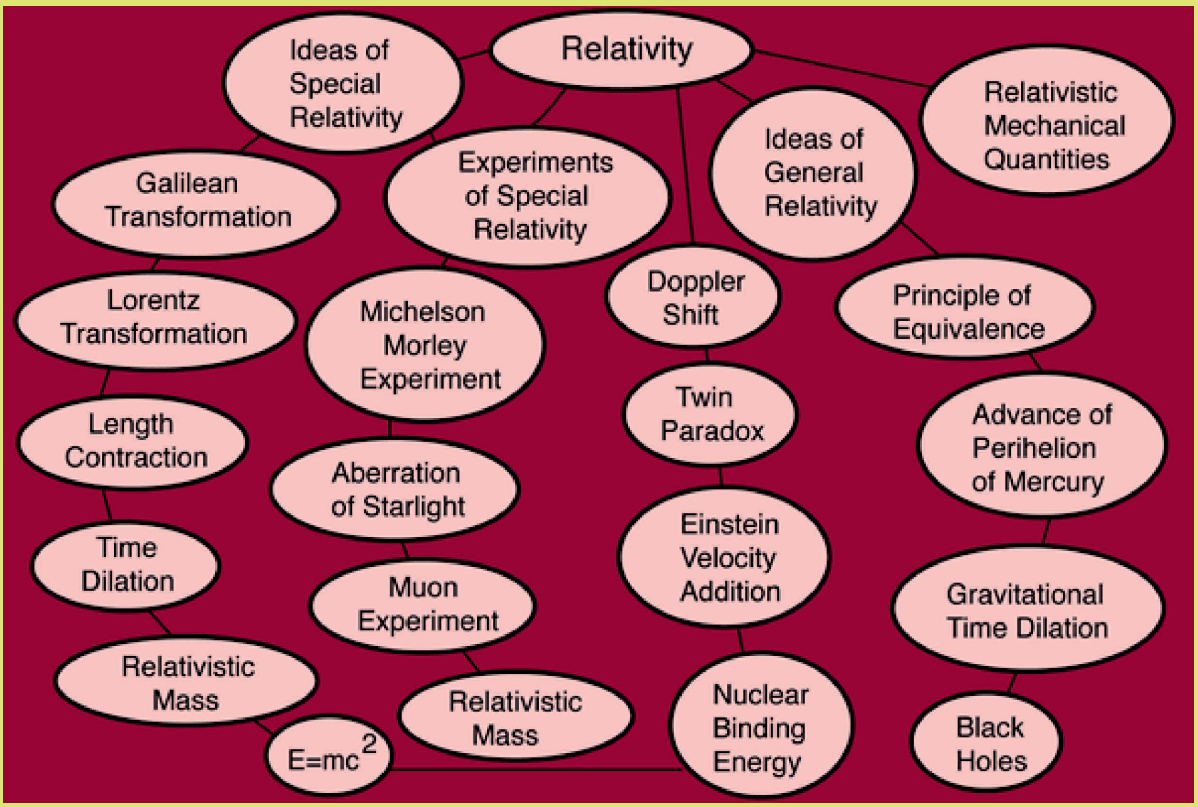


Abb. 4.50: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was ist relevant für die Klausur?

- Radioaktives Zerfallsgesetz (Gl. 4.7)

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda_{decay} \cdot t}$$

- Zerfallskonstante λ_{decay}, Lebensdauer t_{decay} und Halbwertszeit $t_{1/2}$ (Gl. 4.8)

$$\lambda_{decay} = \frac{1}{t_{decay}} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

- Zeitdilatation und Längenkontraktion bei kosmischen Myonen

- Relativität der Gleichzeitigkeit.

- Lorentztransformation (Gl. 4.26, Gl. 4.29, Gl. 4.27 und Gl. 4.30)

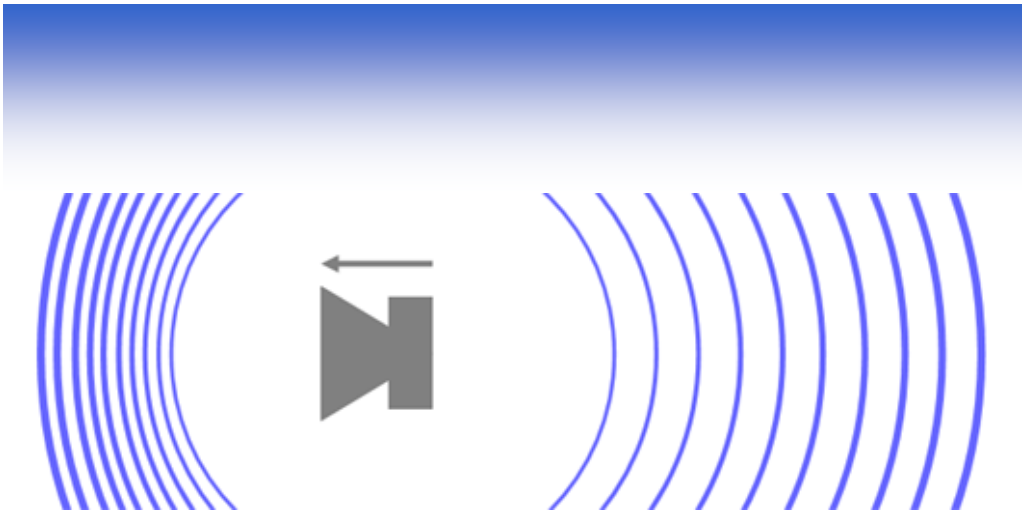
$$
\begin{aligned}
x_{bewegt} &= \gamma \cdot (x_{ruhend} - v_{rel} \cdot t) \\
\Delta x_{bewegt} &= \gamma \cdot (\Delta x_{ruhend} - v_{rel} \cdot \Delta t_{ruhend}) \\
t_{bewegt} &= \gamma \left(t_{ruhend} - \frac{x_{ruhend} \cdot v_{rel}}{c^2} \right) \\
\Delta t_{bewegt} &= \gamma \left(\Delta t_{ruhend} - \frac{\Delta x_{ruhend} \cdot v_{rel}}{c^2} \right) \\
x_{ruhend} &= \gamma \cdot (x_{bewegt} + v_{rel} \cdot t) \\
\Delta x_{ruhend} &= \gamma \cdot (\Delta x_{bewegt} + v_{rel} \cdot \Delta t_{bewegt}) \\
t_{ruhend} &= \gamma \left(t_{bewegt} + \frac{x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2} \right) \\
\Delta t_{ruhend} &= \gamma \left(\Delta t_{bewegt} + \frac{\Delta x_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2} \right)
\end{aligned}
$$

  Außerdem gilt:
  $y_{ruhend}=y_{bewegt}$, $\Delta y_{ruhend}=\Delta y_{bewegt}$, $z_{ruhend}=z_{bewegt}$ und $\Delta z_{ruhend}=\Delta z_{bewegt}$.

- Relative Geschwindigkeiten (Gl. 4.50 und Gl. 4.51)

$$
\begin{aligned}
u_{ruhend} &= \frac{u_{bewegt} + v_{rel}}{1 + \frac{u_{bewegt} \cdot v_{rel}}{c^2}} \\
u_{bewegt} &= \frac{u_{ruhend} - v_{rel}}{1 - \frac{u_{ruhend} \cdot v_{rel}}{c^2}}
\end{aligned}
$$

5 Relativistischer Dopplereffekt



Relativistischer Dopplereffekt

I have urged heard that if the number of fixt stars were more than finite, the whole superficies of their apparent sphere would be luminous.

Edmund Halley (1720)

[1]Das Phänomen, dass durch den akustischen Dopplereffekt beschrieben wird, begegnet uns oft im Alltag, wenn Einsatzfahrzeuge mit Sirenen an uns vorbeifahren. Die Änderung in der Frequenz des Signaltons wird durch die Relativbewegung zwischen Schallerzeuger und Zuhörer hervorgerufen. Die Veränderung der Tonhöhe für einen ruhenden Beobachter ist auf dem Titelblatt illustriert. Ein weiteres Phänomen, dass durch den Dopplereffekt verursacht wird, ist die Ausbildung eines Machkegels. Dieser entsteht, wenn die Geschwindigkeit des Schallverursachers die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.


Ueber das

farbige Licht der Doppelsterne

und einiger anderer

Gestirne des Himmels.

Versuch einer das Bradley'sche Aberrations-Theorem als integrirenden Theil in sich schliessenden allgemeineren Theorie.

Von

Christian Doppler,

Professor der Mathematik und praktischen Geometrie am technischen Institute und ausserordentl. Mitglied der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften.

Abb. 5.1: Hauptwerk von Christian Doppler [**?**]

übersteigt. Nahezu unbekannt ist, dass der Namensgeber Christian Doppler bei seinen Studien zu diesem Effekt nicht an schnell bewegte Schallquellen interessiert war, sondern am Einfluss der Relativgeschwindigkeit auf die optischen Spektren von Sternen. Sein Hauptwerk *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels* von 1842 verdeutlicht das (Abb. 5.1). Christian Doppler ist damit ein Vorreiter der Relativitätstheorie. Der optische Dopplereffekt gestattet es, die Entfernung entfernter astrophysikalischer Objekte aus der Frequenzverschiebung der Linienstrahlung der Elemente zu bestimmen. Abb. 5.2 demonstriert die Methode am Beispiel der Emission aus Kalzium. Die Überlegungen von Doppler haben deshalb nicht nur Relevanz für die Astronomie, wie unter anderem das Beispiel der Exoplaneten zeigt, sondern gegen weit darüber hinaus in Richtung Kosmologie.

Kennen Sie das Olberssche Paradoxon? [**?**] Stellen Sie sich vor, Sie stehen mitten in einem Wald. Wenn man in jede Richtung schaut, versperren in geringer Entfernung ein Baum oder Blätter die Sicht. Warum ist dass beim Blick in den Nachthimmel anders [**?**]. Unzählige Sterne, aber man kann scheinbar bis ins Unendliche schauen!

Sind wirklich im ganzen unendlichen Raum Sonnen vorhanden, sie mögen nun in ungefähr gleichen Abständen von einander, oder in Milchstrassen-Systeme vertheilt sein, so wird ihre Menge unendlich, und da müsste der ganze Himmel eben so hell sein wie

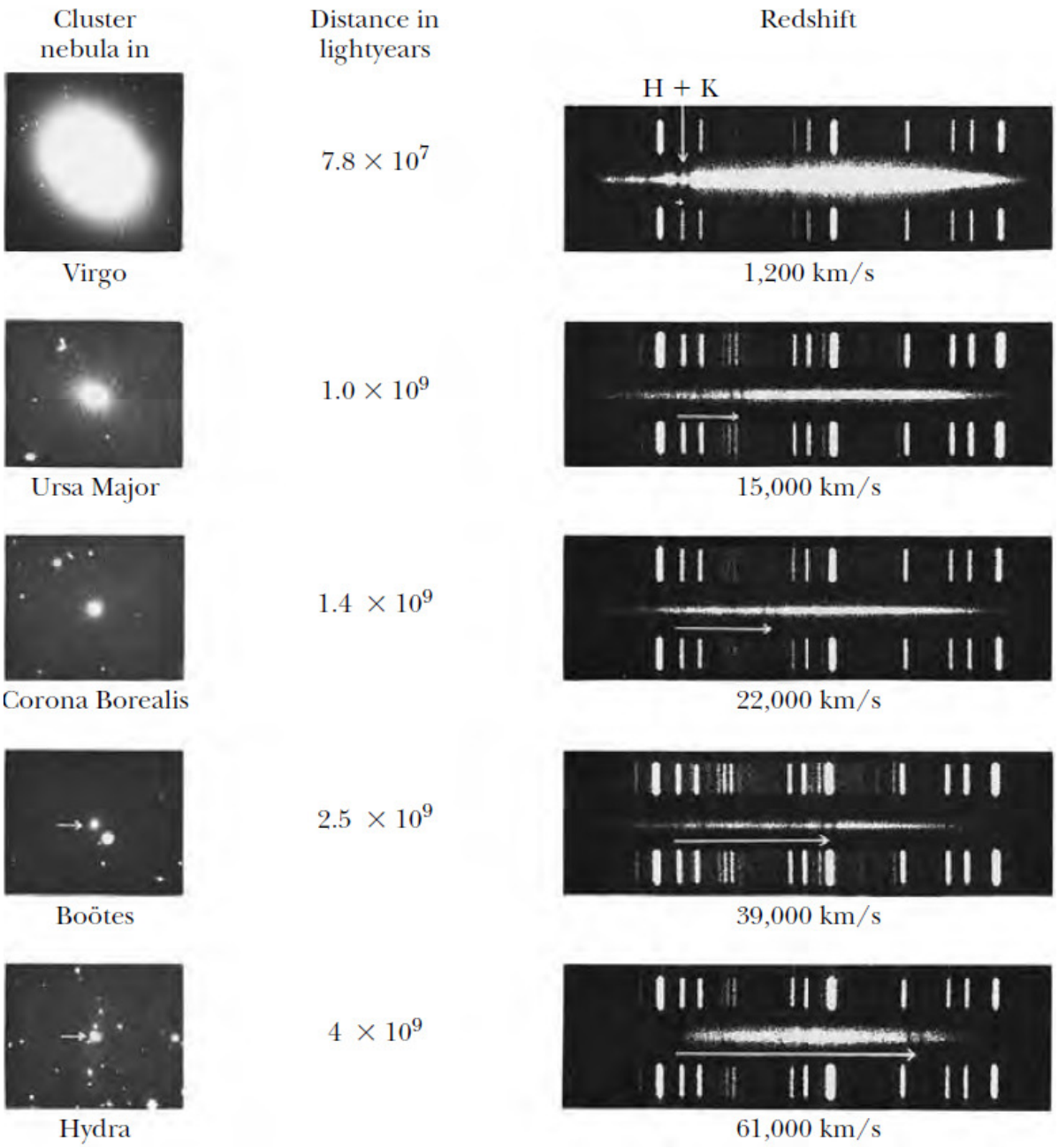


Abb. 5.2: Rotverschiebung verschiedener Galaxien umgerechnet in die Entfernung zur Erde, berechnet anhand des relativistischen Dopplereffekts. Das Spektrum der Galaxien erscheint im Spektrum als breites Band, das in der Mitte zwischen den Laborvergleichsspektren (jeweils unterhalb) liegt. Die relativistische Rotverschiebung der Absorptionslinien von Kalzium (393 nm, 397 nm) sind durch Pfeile hervorgehoben. Bei größerer Entfernung erhöht sich die Geschwindigkeit in Bezug auf die Erde, dargestellt durch die Länge des Pfeils. Die Daten liefern einen Hinweis darauf, dass sich das Universum ausdehnt [**?**].

die Sonne. Denn jede Linie, die ich mir von unserem Auge gezogen denken kann, wird nothwendig auf irgend einen Fixstern treffen, und also müsste uns jeder Punkt am Himmel Fixsternlicht, also Sonnenlicht zusenden.

Heinrich Wilhelm Olbers, 1823

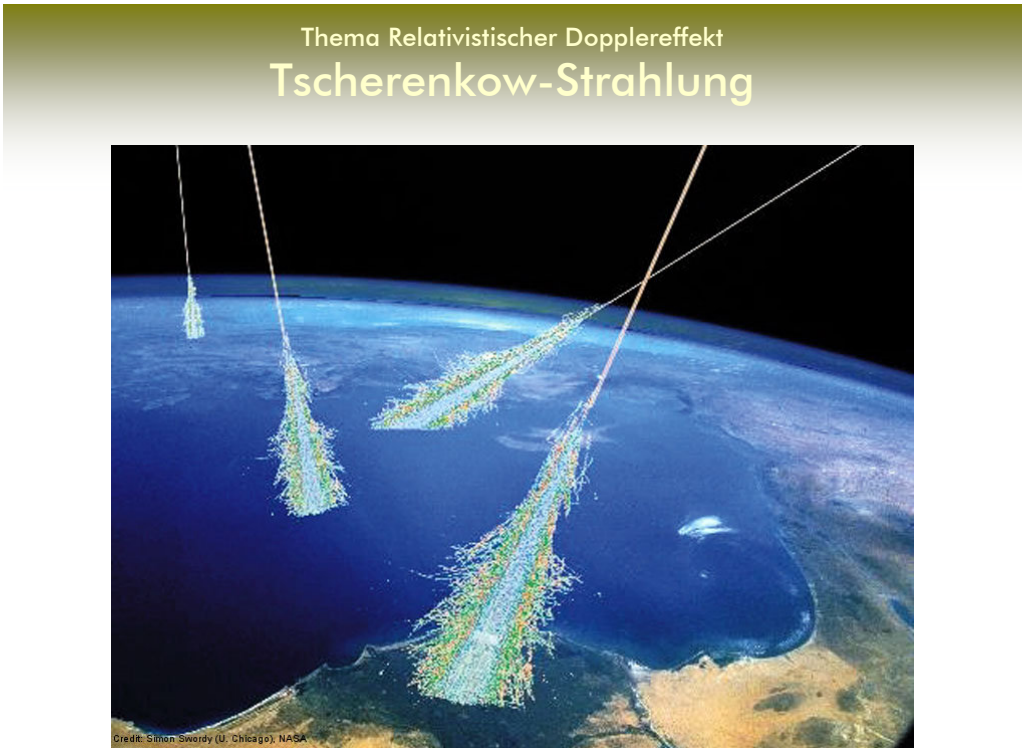
Die Frage ist also, wie das Licht der Sterne zur Helligkeit des Nachthimmels beiträgt? Bei einem statischen, endlos ausgedehnten, schon immer existierenden Universum, dass gleichmäßig mit Sternen besetzt ist, sollte der gesamte Himmel dieselbe Helligkeit pro Fläche haben wie die Sonne. Die Anzahl der Galaxien nimmt im Abstand r mit dem Faktor r^2 zu. Aus dem quadratischen Abstandgesetz wiederum ergibt sich, dass die Lichtstärke mit $1/r^2$ abnimmt. Der Beitrag zur Gesamthelligkeit ist also unabhängig vom Abstand und konstant. Entfernte Galaxien liefern daher einen erheblichen Anteil und Probleme in der Konvergenz ergeben sich, wenn man den Grenzfall $r \to \infty$ betrachtet. Tatsächlich ist das Alter des Universums etwa 10^{10} Jahre. Das von einem Stern emittierte Licht kann also maximal aus dieser Entfernung stammen. Diese Entfernung ist um viele Größenordnungen kleiner als unendlich. In sofern wäre nur ein geringer Anteil des Himmels mit Sternen besetzt. Hinzu kommt die Kosmologische Dopplerverschiebung. Diese Überlegungen lösen das Paradoxon, da es den Lichtbeitrag entfernter Galaxien reduziert. Warum? Durch die Rotverschiebung verschiebt sich das Spektrum in einen Bereich, der für das Auge nicht mehr sichtbar ist. Intuitiv kann man sich folgendes vorstellen: Der Helligkeitshintergrund errechnet sich adäquat durch eine Verteilung von Sternen ohne Berücksichtigung der Rotverschiebung, wobei nur Entfernungen berücksichtigt werden, die geringer sind als der kritische Abstand $c \cdot \tau_0$. Der Wert berechnet sich aus dem Hubble-Gesetz. Daraus ergibt sich ein Beitrag zum Sternenlicht von $10^{-2}\,\mathrm{eV/cm^3}$. Zum Vergleich liefert die Milchstraße $1\,\mathrm{eV/cm^3}$. Entfernte Galaxien liefern mit 1% also nur einen verschwindenden Anteil zur Helligkeit des Nachthimmels. Worin liegt die Bedeutung für die Kosmologie? Die Gesamtintensität des Lichts der Sterne ist eine wichtige Größe bei der Überprüfung kosmologischer Modelle.

Im Weiteren konzentrieren wir uns auf eine andere wichtige kosmologische Größe. Mit Hilfe der Hubble-Konstante gelingt es, die Zeitentwicklung des Universums zu verfolgen. Um diesen Aspekt zu verstehen, verlassen wir einen Moment die Spezielle Relativitätstheorie, da man diese Effekte nur auf der Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie erklären kann. Es geht um astronomische Abstände, die sich aufgrund der Ausdehnung des Raumes mit einer gewissen abstandsabhängigen Geschwindigkeit ändern. Wer Interesse an Festkörperphysik hat, sollte sich in diesem Zusammenhang den Mössbauer Effekt anschauen. Tatsächlich spielt die hier vorgestellte Mössbauer-Spektroskopie auch eine wichtige Rolle beim Nachweis der Gravitations-Rotverschiebung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Weiter ist die 21-cm-Linie des neutralem Wasserstoff interessant, da sich mit ihrer Hilfe kosmische Gaswolken entdecken und die Rotation von Galaxien im Hinblick auf Dunkle Materie untersuchen lässt. Neben dem Phänomens der Aberration geht es um relativistische Raumflüge und die Klärung des Zwillingsparadoxons. Das Kapitel beginnt mit der Fragestellung, die bestimmt schon im

Zusammenhang mit dem Thema *Akustik* angesprochen wurde und nun auf die Lichtausbreitung ausgeweitet wird. Kann Licht auch einen Machkegel erzeugen? Wir werden es im wahrsten Sinne sehen!


Inhalt
Relativistischer Dopplereffekt
- Teilchen, die sich schneller als Licht bewegen, senden Strahlung aus
- Charakteristische Emissionslinien von bewegten Sternen verschieben sich spektral
- Wie weisen Astronomen Exoplaneten nach?
- Bedeutung der 21cm Linie des Wasserstoff & die Entwicklung des Universums
- Phänomene bei relativistischen Flügen & Auflösung des Zwillingsparadoxon
Kapitel 1
Tscherenkow Strahlung
hydro
oscillations
astro
life sciences
Kapitel 2
Doppler-Effekt
hydro
oscillations
optics
astro
Kapitel 3
Exoplaneten & Hubble-Konstante
mechanics
thermo
quantum
astro
Kapitel 4
Relativistische Aberration
& Zwillingsparadoxon
electro
optics
life sciences

5.1 Tscherenkow Strahlung



If the speed of the motion exceeds that of light, the disturbances are wholly left behind the charge, and are confined within a cone [**?**].

Oliver Heaviside, 1888

Wie in der vorherigen Kapitel *Zerfall des Myons* startet dieser Abschnitt mit dem Eintrag kosmischer Strahlung in die obere Atmosphäre. Durch die hohen kinetischen Energien der einfallenden Teilchen wird beim Stoß mit den Luftmolekülen eine Vielzahl an Reaktionen ausgelöst. Erst wenn die Energie des Primärteilchens in dieser Kaskade aufgebraucht ist, kommt der Prozess zum Erliegen. Die Primärteilchen kommen dabei gar nicht auf der Erde an. Nun tritt ein interessantes optisches Phänomen auf, das durch die fast lichtschnelle Bewegung der schnellen Teilchen durch die Atmosphäre hervorgerufen wird, Tscherenkow-Strahlung, siehe Abb. 5.3. Dahinter verbirgt sich der aus der Akustik bekannte Machkegel, hier allerdings für optische Frequenzen. Tatsächlich wird der Haupt-



Abb. 5.3: User friendly comic by J. D. Frazer

teil der Strahlung im optischen Spektralbereich emittiert. Marie Curie[2] [3] beobachtete diese Strahlung. Das Licht stammte von Radiumsalzen, die in der Dunkelheit leuchteten. Tscherenkow-Strahlung wird zum Nachweis geringer Mengen an Biomolekülen verwendet [**?**]. Radioaktive Marker wie Phosphor-32 werden dazu an Biomoleküle geheftet und die Emission gibt Auskunft über biologische Vorgänge. Die Lichtemission kann weiter genutzt werden, um die Restradioaktivität abgebrannter Brennstäbe zu bestimmen [**?**].

On Cherenkov light production by irradiated nuclear fuel rods [**?**]**:** Safeguards verification of irradiated nuclear fuel assemblies in wet storage is frequently done by measuring the Cherenkov light in the surrounding water produced due to radioactive decays of fission products in the fuel. This paper accounts for the physical processes behind the Cherenkov light production caused by a single fuel rod in wet storage, and simulations are presented that investigate to what extent various properties of the rod affect the Cherenkov light production. The results show that the fuel properties have a noticeable effect on the Cherenkov light production, and thus that the prediction models for Cherenkov light production which are used in the safeguards verifications could potentially be improved by considering these properties. It is concluded that the dominating source of the Cherenkov light is gamma-ray interactions with electrons in the surrounding water. Electrons created from beta decay may also exit the fuel and produce Cherenkov light, and e.g. Y-90 was identified as a possible contributor to significant levels of the measurable Cherenkov light in long-cooled fuel. The results also show that

[2] The Nobel Prize in Physics 1903 was divided, one half awarded to Antoine Henri Becquerel *in recognition of the extraordinary services he has rendered by his discovery of spontaneous radioactivity*, the other half jointly to Pierre Curie and Marie Curie, née Sklodowska in recognition of the extraordinary services they have rendered by their joint researches on the radiation phenomena discovered by Professor Henri Becquerel

[3] The Nobel Prize in Chemistry 1911 was awarded to Marie Curie, née Sklodowska *in recognition of her services to the advancement of chemistry by the discovery of the elements radium and polonium, by the isolation of radium and the study of the nature and compounds of this remarkable element*

the cylindrical, elongated fuel rod geometry results in a non-isotropic Cherenkov light production, and the light component parallel to the rod's axis exhibits a dependence on gamma-ray energy that differs from the total intensity, which is of importance since the typical safeguards measurement situation observes the vertical light component. It is also concluded that the radial distributions of the radiation sources in a fuel rod will affect the Cherenkov light production.

Akustischer Machkegel[4LP]

Die Machzahl M_{Mach} ist eine Größe (Kapitel *Hydrodynamik*), die die Stärke der Trägheits- und elastischen Kräfte vergleicht. Gebräuchlich ist die Machzahl[4] in der Luftfahrt. Physikalisch sind diese dimensionslosen Größen wie M_{Mach} interessant, da sie es erlauben, scheinbar nicht vergleichbare Situationen in der Strömungsdynamik zu vergleichen. In der Hydrodynamik findet man eine ganze Reihe dieser dimensionslosen Größen. Sie kennen vermutlich die Reynoldszahl[5] R_e aus dem Physikalischen Praktikum. Sie erlaubt es, Messungen an größeren Objekten, wie beispielsweise Schiffen, an stark verkleinerten Modellen durchzuführen, wobei ρ die Dichte der Flüssigkeit, v die Strömungsgeschwindigkeit und d die charakteristische Länge des Körpers ist:

$$R_e = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} \tag{5.1}$$

Machen Sie einen Dimensionsanalyse und prüfen Sie nach, dass die Reynoldszahl ebenfalls eine dimensionslose Größe ist! Die Analyse ergibt, dass man M_{Mach} über die Geschwindigkeiten eines Objekts (v_{source}) in einem Fluid berechnen kann. Dabei ist das Medium durch die Geschwindigkeit charakterisiert, mit der sich Informationen (hier Schall) ausbreiten.

$$M_{Mach} = \frac{v_{source}}{v_{medium}} \tag{5.2}$$

Interessant für unsere weiteren Überlegungen sind die Fälle, in denen v_{source} größer ist als v_{medium}, siehe Abb. 5.4. Für Luft sind das $v_{medium} = 330\,\mathrm{m/s}$. Dann breitet sich eine Schockwelle im Medium aus, deren Ausbreitung durch den Machkegel charakterisiert ist. Den Winkel, unter dem sich der Machkegel im Medium ausbreitet, ergibt sich nach Pythagoras

$$\begin{aligned} \sin\Theta_{Mach} &= \frac{v_{medium} \cdot t}{v_{source} \cdot t} = \frac{v_{medium}}{v_{source}} \\ \Theta_{Mach} &= \arcsin\left(\frac{v_{medium}}{v_{source}}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

[4] *Lexikon:* Strömungen mit **gleicher Machzahl** verhalten sich ähnlich.
[5] *Lexikon:* Geometrisch ähnliche Körper erzeugen hydrodynamisch ähnliche Strömungen, wenn ihre **Reynoldszahlen** übereinstimmen.

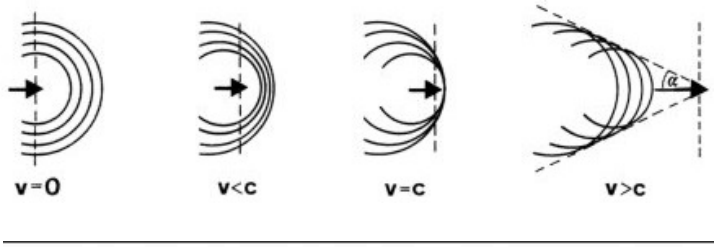


Abb. 5.4: Ausbildung eines Machkegels, wenn die Geschwindigkeit der Schallquelle die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls erreicht.

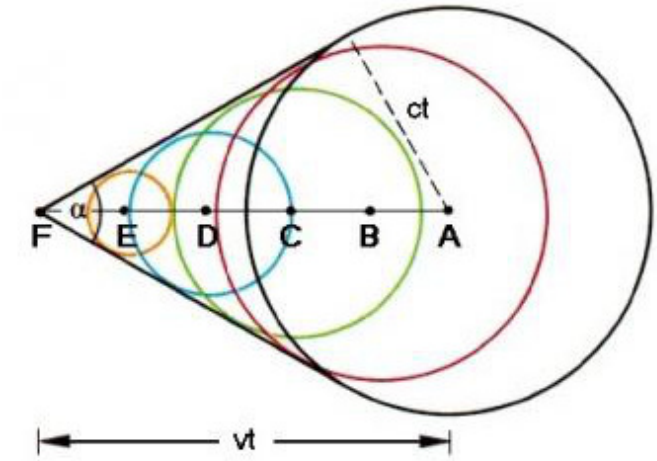


Abb. 5.5: Bestimmung des Öffnungswinkel eines Machkegels.

In Abb. 5.5 ist dies angedeutet. An jedem Punkt auf der Flugbahn wird eine Schallwelle ausgesendet. Der Radius entspricht der Entfernung, über die sich die Schallwelle in Bezug auf die momentane Position der Schallquelle (Spitze des Kegels) ausgebreitet hat. Wie man erkennt, hängt der Öffnungswinkel Θ des Machkegels vom Unterschied zwischen den beiden Ausbreitungsgeschwindigkeiten ab. Machkegel sind nicht nur auf schnelle Flugzeuge beschränkt, sondern treten auch in ganz alltäglichen Situationen auf. Ein Beispiel sind die Bugwellen von Schiffen, wenn die Geschwindigkeit der Boote die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wasserwellen übersteigt. Abb. 5.6 zeigt, dass auch eine schwimmende Ente dieses Phänomen hervorrufen kann. Wer sich für intensiver mit Bugwellen beschäftigen will, sollte sich diesen Artikel anschauen:

Ship Wakes: Kelvin or Mach Angle? [?]: From the analysis of a set of airborne images of ship wakes, we show that the wake angles decrease as U^{-1} at large velocities, in a way similar to the Mach cone for supersonic airplanes. This previously unnoticed Mach-like regime is in contradiction with the celebrated Kelvin prediction of a constant angle of 19.47^o independent of the ship's speed. We propose here a model, confirmed by numerical simulations, in which the finite size of the disturbance explains this transition between the Kelvin and Mach regimes at a Froude number $Fr = U/\sqrt{g \cdot L} \simeq 0.5$, where L is the hull ship length.

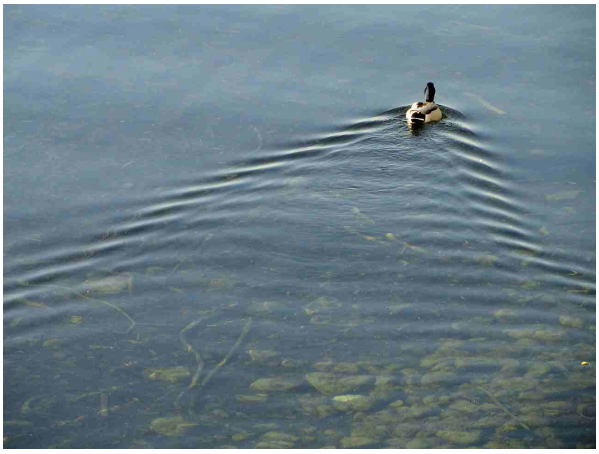


Abb. 5.6: Bugwelle einer schwimmenden Ente[**?**].

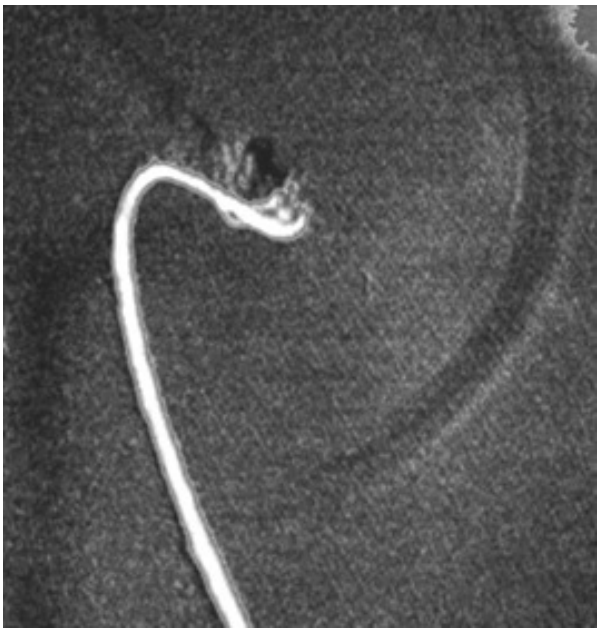


Abb. 5.7: Der Knall einer Peitsche entsteht durch die überschallschnelle Bewegung des Endes der Peitschenschnur. Das Photo zeigt die Wirbelspur des Schnurendes und die kugelförmige auslaufende Schockwelle.

Eine weitere Situation, bei der eine Stoßwelle ausgesendet wird, ist ein Peitschenknall. Eine Peitsche besteht aus einer langen Schnur. Charakteristisch ist, dass die Peitschenschnur zum Ende immer dünner wird. Wird die Peitsche geschwungen, muss zunächst die gesamte Masse in Bewegung gesetzt werden. Daher ist die anfänglich erreichte Geschwindigkeit gering. Im Laufe des Bewegungsablaufes kommen die schwereren Anteile der Peitsche zur Ruhe und nur noch die leichteren Teile am Ende werden beschleunigt. Aufgrund von Energie- und Impulserhaltung nimmt die Geschwindigkeit dabei extrem zu und übersteigt schließlich die Schallgeschwindigkeit. Dadurch wird ein Überschallknall ausgelöst, siehe die Schockfront in Abb. 5.7.

Link to video **Warum knallt eine Peitsche?**

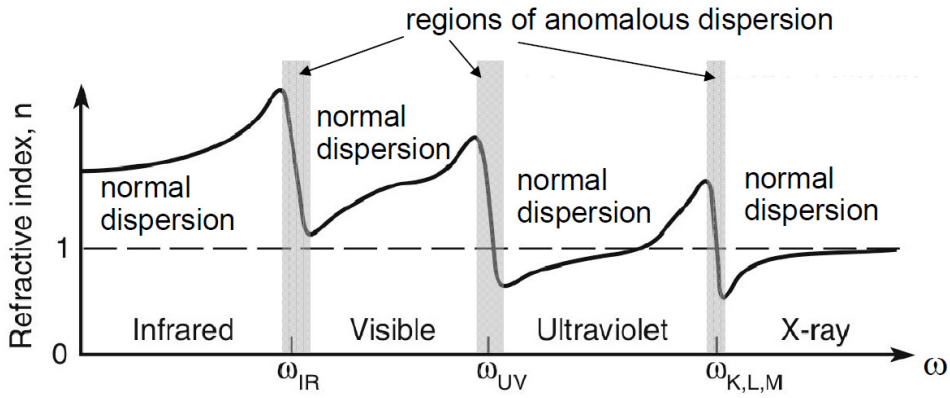


Abb. 5.8: Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge [**?**].

Optischer Machkegel

Lässt sich das Konzept des Machkegels auf optische Frequenzen übertragen? In einem Dielektrikum polarisiert ein geladenes Teilchen seine Umgebung. Bei der Bewegung der Ladung sind nur die hinter dem Teilchen befindlichen Atome polarisiert. Die Atome, die sich in Ausbreitungsrichtung vor dem Teilchen befinden, sind noch nicht beeinflusst, da sich die Wechselwirkung nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann (Kapitel *Gleichzeitigkeit*). Dies erzeugt ein sich räumlich und zeitlich schnell änderndes Dipolmoment, wodurch elektromagnetische Strahlung ausgesendet wird. Bei geringen Geschwindigkeiten kommt es aufgrund destruktiver Interferenz der ausgesendeten Wellen nicht zu einer merklichen Abstrahlung. Das ändert sich bei höheren Relativgeschwindigkeiten.

Dass das Phänomen des Machkegels auch in der Optik auftaucht, liegt an der Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in Medien. Gegenüber der Geschwindigkeit im Vakuum ist die Lichtgeschwindigkeit reduziert. Die Geschwindigkeitänderung ist durch den Wert des Brechnungsindex n gegeben. Kosmische Teilchen haben dagegen so hohe kinetische Energien, dass ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit die des Lichts in der Atmosphäre übersteigt. Allerdings ist ihre Geschwindigkeit geringer als c (2. Einsteinsches Postulat, Kapitel *Äther*). Unter diesen Umständen kommt es zur Lichtemission. Der charakteristische Öffungswinkel der Strahlung ergibt sich mit

$$\cos\Theta_{\text{Tscherenkow}} = \frac{1}{\beta \cdot n} \tag{5.4}$$

Für jedes Medium gibt es bei gegebenem Brechungsindex eine Grenzgeschwindigkeit, ab dem der Tscherenkow-Effekt auftritt. Die dazugehörige Gleichung unter der Bedingung $\cos\Theta = 1$ lautet:

$$\beta_{\text{threshold}} = \frac{v_{\text{threshold}}}{c} = 1/n \tag{5.5}$$

Wie man aus der Gleichung erkennt, tritt der Effekt nur in Spektralbereichen auf, in denen $n > 1$ ist. Abb. 5.8 zeigt, dass nur einzelne Spektralbereiche in Frage kommen,

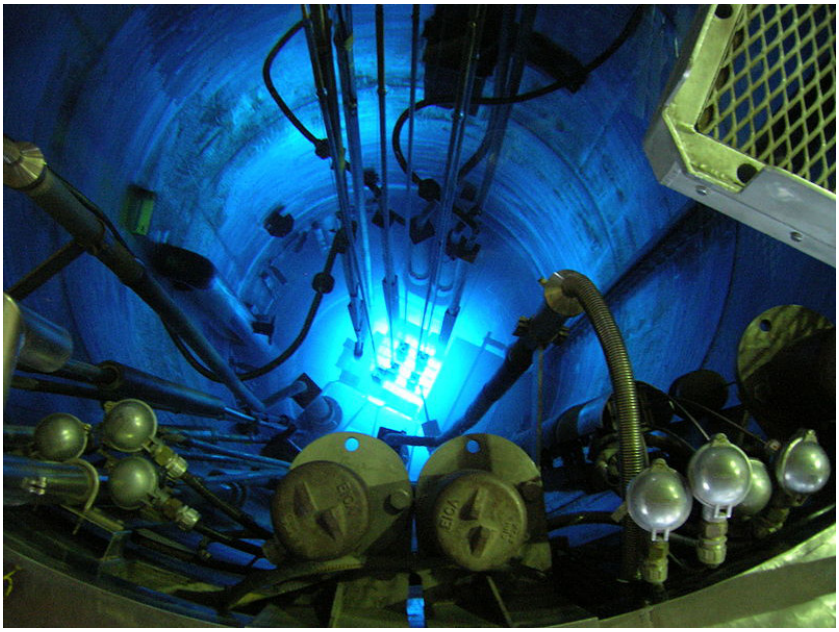


Abb. 5.9: Blick in den Tank eines Reaktors beim gepulsten Betrieb mit der typischen Tscherenkow-Strahlung [**?**].

insbesondere der infrarote und der optische Bereich. Beispielsweise ist für das Medium Luft die Grenzgeschwindigkeit $0.9997c$, siehe auch Tab. 5.1. In der Optik bezeichnet man das so erzeugte Licht Tscherenkow-Strahlung.[6]

Anwendungen[4LP]

Beobachtet man den Lichtkegel mit geeigneten Instrumenten, lässt sich aus dem Öffnungswinkel die Geschwindigkeit der Teilchen bestimmen.[7] Weiter kann die Richtung bestimmt werden, aus der die hochenergetische Strahlung stammt. Das blaue Leuchten radioaktiver Brennstäbe in Abklingbecken von Kernkraftwerken entsteht im Übrigen auch durch Tscherenkow-Strahlung, siehe Abb. 5.9. Im Video wird gezeigt, was passiert, wenn schlagartig alle Steuerstäbe aus dem Abklingbecken entfernt werden. Die sprunghaft anlaufende Kernreaktion erhöht die Energieabgabe des Reaktors in 50 ms auf 680 MW.

Link to video **Nuclear Reactor Pulse**

[6] The Nobel Prize in Physics 1958 was awarded jointly to Pavel Alekseyevich Cherenkov, Ilja Mikhailovich Frank and Igor Yevgenyevich Tamm *for the discovery and the interpretation of the Cherenkov effect.*

[7] Eine *low cost* Variante eines Tscherenkow-Detektors findet man in [**?**]

Medium	Brechungsindex	$\beta_{\text{threshold}}$	$\Theta^{\text{max}}_{\text{Tscherenkow}}$
Luft	1.000283	0.9997	1.36
Isobutan	1.00127	0.9987	2.89
Wasser	1.33	0.752	41.2
Quartz	1.46	0.685	46.7

Tab. 5.1: Eigenschaften der Materialien, die in Tscherenkow-Detektoren verwendet werden.

Detektor	Brechungsindex	A	B	C
D_1	n_1	$\beta_\pi > 1/n_1$	$\beta_K < 1/n_1$	$\beta_p < 1/n_1$
D_2	n_2	$\beta_\pi > 1/n_2$	$\beta_K > 1/n_2$	$\beta_p < 1/n_2$

Tab. 5.2: Kaskade von Tscherenkow-Detektoren zum Nachweis unterschiedlicher Elementarteilchen.

Ein Beispiel aus der Elementarteilchenphysik

Die Tscherenkow-Strahlung macht nur einen geringen Anteil der Ereignisse aus, die von einem Szintillationszähler (siehe Kapitel *Ionisierende Strahlung*) in der Regel nachgewiesen wird. Die Empfindlichkeit der Tscherenkow-Detektoren resultiert aus der Selektivität im Nachweis, da keine Tscherenkow-Strahlung erzeugt wird, wenn $v_{\text{light}} < v_{\text{particle}}$. Weiter kann man die gerichtete Emission für die Analyse nutzen. Diese Vorteile machen Tscherenkow-Detektoren zu Nachweissystemen, die, im Zusammenspiel mit anderen Systemen, in der Elementarteilchenphysik häufig Anwendung finden. Ein Beispiel: Ein unbekanntes Teilchen, erzeugt in einem Hochenergieexperiment, durchquert nacheinander zwei Tscherenkow-Detektoren (D_1, D_2). Das Signal beim Auftreffen auf dem Absorber gibt Auskunft darüber, dass ein Teilchen die Detektoren passiert hat. Die kinetische Energie des Teilchens bestimmt man über den Tscherenkow-Winkel $\Theta_{\text{Tscherenkow}}$. Es könnte sich um ein Proton (p), ein Kaon[8] (K) oder ein Pion[9] (π) handeln. Die Brechzahlen der Materialien sind n_1, n_2. Um Tscherenkow-Licht zu erzeugen, müssen die jeweiligen minimal notwendigen Grenzgeschwindigkeiten ($\beta_{\text{threshold}}$) überschritten werden. So werden viele nicht-relevante Ereignisse ausgeblendet.

$$\beta_{\text{particle}} > \beta_{\text{threshold}} \tag{5.6}$$

Die Detektoren sind wie in Tab. 5.2 eingestellt. Aus den Signalen der Tscherenkow-Detektoren erfährt man:

(A) Lichtsignale in D_1 und D_2: Es handelt sich um ein Pion.

(B) Lichtsignale in D_2, aber nicht in D_1: Es handelt sich um ein Kaon.

[8] *Lexikon:* **Kaonen** K bestehen einem Quark und einem Antiquark, können geladen und neutral sein und gehören zur Klasse der Mesonen. Die Masse der Kaonen beträgt 493.7 MeV/c^2 für K$^+$, K$^-$ und 497,6 MeV/c^2 für K^0.

[9] Masse 139.6 MeV/c^2

(C) keine Lichtsignale: Es handelt sich um ein Proton.

Ein Beispiel aus der Tumorforschung

It is not often that a new phenomenon can be discovered with such simple equipment and in such a short time, but it may also be true that it is not often that one finds experimental physicists with this adventurous spirit!

Trevor Weekes, 2006

Obwohl Tscherenkow-Licht schon im Jahr 1934 erstmals beobachtet wurde [**?**], erfolgte der Einsatz in der biomedizinischen Forschung erst 2009 [**?**], nachdem die technische Entwicklung es ermöglichte, die erforderlichen hohe Empfindlichkeiten der Kamerasysteme zu gewährleisten. Die Anwendungen erstrecken sich von der biomedizinischen Bildgebung bis zur Therapie. Man nutzt das Tscherenkowlicht klinisch relevanter Radionuklide für die optische Bildgebung. Die Methode ist gegenüber herkömmlichen nuklearen Bildgebungsverfahren in Bezug auf die Kosten der Infrastruktur, der Auflösung und der erforderlichen Aufnahmezeit vorteilhaft. Kombiniert mit kleinen Molekülen, Biomolekülen und Nanopartikeln ist es geeignet, die Diagnose und die Therapie in der Krebsforschung zu verbessern.

In vivo Cerenkov luminescence imaging: a new tool for molecular imaging [?]: Cerenkov radiation is a phenomenon where optical photons are emitted when a charged particle moves faster than the speed of light for the medium in which it travels. Recently, we and others have discovered that measurable visible light due to the Cerenkov effect is produced *in vivo* following the administration of β-emitting radionuclides to small animals. Furthermore, the amounts of injected activity required to produce a detectable signal are consistent with small-animal molecular imaging applications. This surprising observation has led to the development of a new hybrid molecular imaging modality known as Cerenkov luminescence imaging (CLI), which allows the spatial distribution of biomolecules labelled with β-emitting radionuclides to be imaged *in vivo* using sensitive charge-coupled device cameras. We review the physics of Cerenkov radiation as it relates to molecular imaging, present simulation results for light intensity and spatial distribution, and show an example of CLI in a mouse cancer model. CLI allows many common radiotracers to be imaged in widely available *in vivo* optical imaging systems, and, more importantly, provides a pathway for directly imaging β-emitting radionuclides that are being developed for therapeutic applications in cancer and that are not readily imaged by existing methods.

Beim β-Zerfall werden hochenergetische Teilchen beobachtet, siehe Kapitel *Ionisierende Strahlung*. Abb. 5.10 zeigt, dass oberhalb einer bestimmten kinetischen Energie (hier wieder aufgetragen in der atomaren Energie-Einheit Elektronenvolt[10] (eV)) Tscherenkow-Strahlung erzeugt wird. Vorteilhaft für die medizinische Diagnostik ist, dass die Schwelle

[10] $1\,\mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

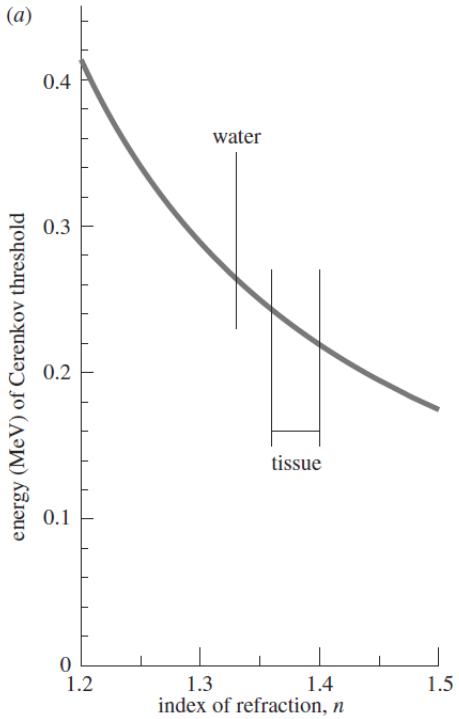


Abb. 5.10: Grenzenergie von Elektronen zur Erzeugung von Tscherenkow-Strahlung als Funktion des Brechungsindex [**?**].

aufgrund des höheren Brechungsindex für Gewebe (*tissue*) gegenüber Wasser (Wasseranteil an der Körpermasse bei Erwachsenen etwa 65%) reduziert ist. Wählt man einen radioaktive Probe, wo die emittieren energetischen Teichen Tscherenkow-Licht nur in Gewebe und nicht in Wasser auslösen, wird man in der Diagnostik empfindlich auf Gewebestrukturen. Der Tscherenkow-Effekt kann genutzt werden, um erkranktes Gewebe wie Tumore zu diagnostizieren und sogar tomographische Aufnahmen zu machen. Mit Hilfe geeigneter Medikamente werden radioaktive Marker (z.B. β-Strahler) in einen Tumor angereichert.[11] Der durch den β-Zerfall verursachte Tscherenkow-Strahlungskegel wird nachgewiesen und der Ursprungsort eingegrenzt. Der Tscherenkow-Effekt wird genutzt, um in einem Tierexperiment den Transport eines Medikaments nach der Injektion ortsaufgelöst zu verfolgen, siehe auch das Kapitel *Bildgebende Verfahren*. Pharmazeutika, die mit hochenergetischen Positronenemittern markiert sind, emittieren Tscherenkow-Licht unmittelbar nach dem Zerfall (Elektron-Positron Paarvernichtung) im Medium. Dieser Prozess ist insbesondere interessant für die *in vivo* Bildgebung. Abb. 5.11 und Abb. 5.12 zeigen Beispiele.

Cherenkov-excited luminescence scanned imaging [?]: Ionizing radiation is commonly delivered by medical linear accelerators (LINAC) in the form of shaped beams, and it is able to induce Cherenkov emission in tissue. In fluorescence-based microscopy excitation from scanned spots, lines, or sheets can be used for fast high-resolution imaging. Here we introduce Cherenkov-excited luminescence scanned imaging (CELSI)

[11] The Nobel Prize in Chemistry 1943 was awarded to George de Hevesy *for his work on the use of isotopes as tracers in the study of chemical processes.*

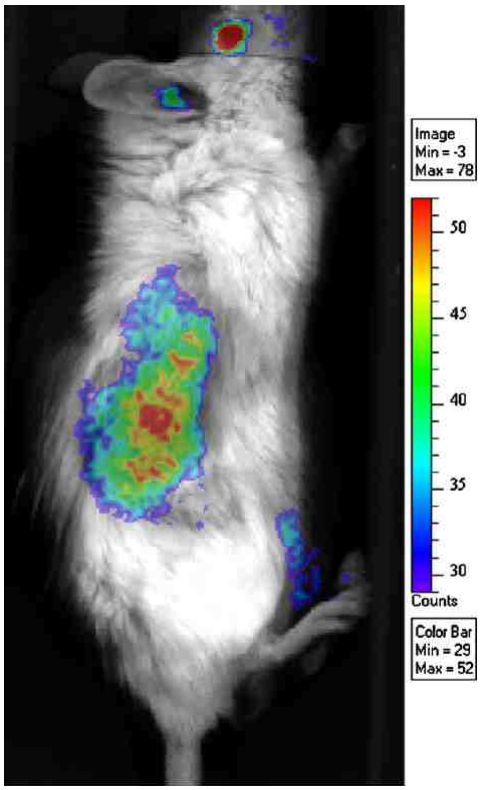


Abb. 5.11: Optischer Aufnahme einer Maus nach Injektion von[a] 270 μCi Fluordesoxyglucose. Im Tumor beträgt die gemessene Lumineszenz das 11-fache gegenüber dem Signal außerhalb des Bereichs des Tumors [**?**].

[a] Einheit Curie: 1 C=$3.7 \cdot 10^{10}$ Bq

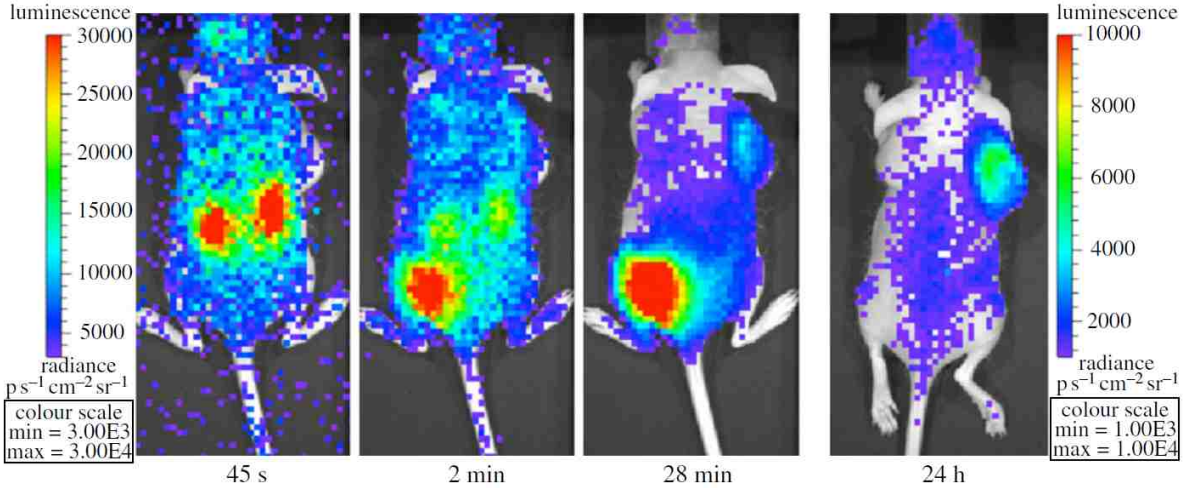


Abb. 5.12: *In-vivo* Studie einer Maus hat einen Tumor an der rechten Schulter. Eine Dosis von 8 mCi 90Y-AABD wurde in die Schwanzvene injiziert. Die Bilder zeigen die zeitlich aufgelöste Ausbreitung der Markermoleküle in Richtung des Tumors [**?**].

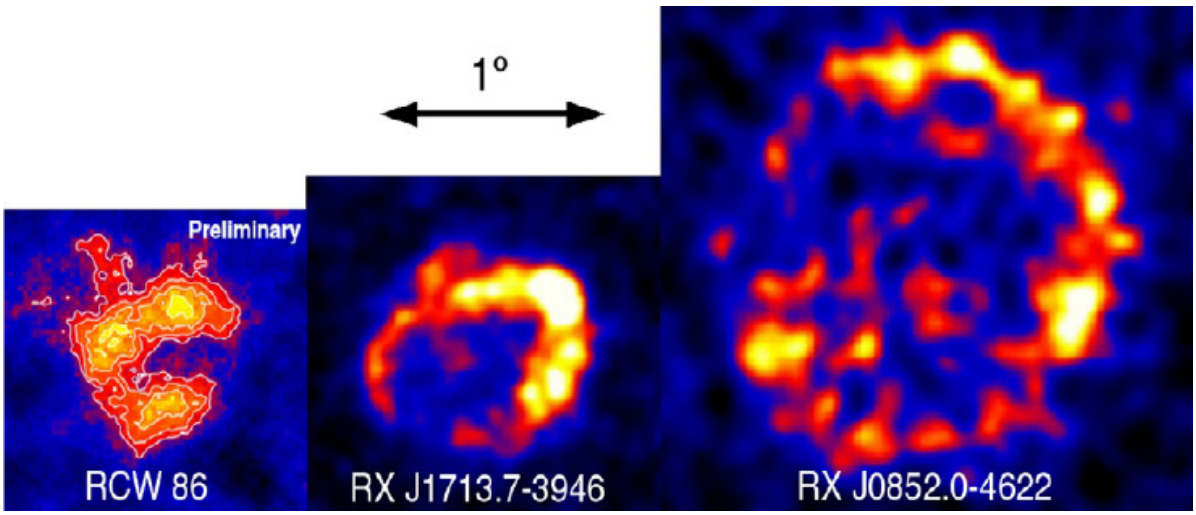


Abb. 5.13: Schalenartig emittierte TeV-Strahlung aus Supernova-Überresten (*Links:* RCW 86 [54]; *Mitte:* RX J1713.7-3946; *Rechts:* RX J0852.0-4622. Alle Aufnahmen wurden mit HESS[a] gemacht [**?**].

[a] HESS: High Energy Stereoscopic System ist ein System von abbildenden Tscherenkow-Teleskopen die γ-Strahlung im Energiebereich 0.03-100 TeV nachweisen.

as a new imaging methodology utilizing 2-dimensional (∼5 mm thick) sheets of LINAC radiation to produce Cherenkov photons, which in turn excite luminescence of probes distributed in biological tissues. Imaging experiments were performed by scanning these excitation sheets in three orthogonal directions while recording Cherenkov-excited luminescence. Tissue phantom studies have shown that single luminescent inclusions ∼1 mm in diameter can be imaged within 20 mm thick tissue-like media with minimal loss of spatial resolution. Using a phosphorescent probe for oxygen, PtG4 with the CELSI methodology, an image of partial pressure of oxygen (pO_2) was imaged in a rat lymph node, quantitatively restoring pO_2 values in differently oxygenated tissues.

Ein Beispiel aus der Astronomie

Im Jahr 1947 veröffentlichte Patrick Blackett[12] ein Manuskript, in dem er darlegte, dass Tscherenkowlicht einen geringen Anteil (0.01%) des nächtlichen Leuchtens ausmachen könnte und schloss mit der Bemerkung: Presumably such a small intensity of light could not be detected by normal methods. 1952 gelang es Galbraith und Jelley den experimentellen Nachweis zu erbringen. Die Messungen ergaben eine Anzahl von drei Photonen pro Quadratzentimeter bei jedem Tscherenkow-Lichtblitz in der Atmosphäre. Das war die Geburtsstunde der Tscherenkow-Astronomie. Wegweisend war eine

[12] The Nobel Prize in Physics 1948 was awarded to Patrick Maynard Stuart Blackett *for his development of the Wilson cloud chamber method, and his discoveries therewith in the fields of nuclear physics and cosmic radiation.*

Arbeit von Morrison [**?**], der darauf hinwies, dass die Richtung, aus der die γ-Strahlung einfällt, in direktem Zusammenhang mit ihrem Ursprung steht. Der Krebsnebel, die extragalaktische Radioquelle M87 und Cygnus A waren seiner Meinung Nacht geeignete Quellen, um diese Vermutung zu überprüfen. Tatsächlich wurde 1989 hochenergetische γ-Strahlung ($> 700\,\mathrm{GeV}$) aus Richtung des Krebsnebels nachgewiesen [**?**]. Mit Hilfe von Tscherenkow-Licht wurden in den nächsten zwanzig Jahren etwa 70 γ-Strahlungsquellen ($E_{ph} > 100\,GeV$) entdeckt. Abb. 5.13 zeigt Beispiele [**?**].

Ground-based gamma-ray astronomy with Cherenkov telescopes [**?**]**:** Very high-energy (>100 GeV) γ-ray astronomy is emerging as an important discipline in both high-energy astrophysics and astro-particle physics. This field is currently dominated by imaging atmospheric-Cherenkov telescopes and arrays of these telescopes. Such arrays have achieved the best angular resolution and energy flux sensitivity in the γ-ray domain and are still far from the fundamental limits of the technique.

Kürzlich konnte der Nachweis einzelner Photonen aus dem Tscherenkow-Prozess demonstriert werden [**?**]. Damit ist man in der Quantifizierung der detektierten Tscherenkow-Intensität im Vergleich zur deponierten Strahlendosis einen Schritt weitergekommen und damit eröffnet sich ein Weg für die zukünftige Implementierung einer Tscherenkow-basierten Absolutdosimetrie.

Das Rätsel der Sonnenneutrinos^{4LP}

The Sun derives its energy from fusion reactions in which hydrogen is transformed into helium. Every time four protons are turned into a helium nucleus, two neutrinos are produced. These neutrinos take only two seconds to reach the surface of the Sun and another eight minutes or so to reach the Earth. Thus, neutrinos tell us what happened in the center of the Sun eight minutes ago. The Sun produces a lot of neutrinos, $1.8 \cdot 10^{39}$ per second: even at the Earth, 150 million kilometers from the Sun, about 100 billion pass through an average fingernail ($1\,\mathrm{cm}^2$) every second. They pass through the Earth as if it weren't there, and the atoms in the human body capture a neutrino about every seventy years, or once in a lifetime [**?**].

Neutrinos wechselwirken kaum mit ihrer Umgebung. Ein Neutrino kann eine Schicht Materie einer Dicke entsprechend der Entfernung von 2 Lj durchqueren, ohne zu reagieren. Entsprechend aufwändig ist es, diese Teilchen zu beobachten. Abb. 5.14 zeigt den ersten experimentellen Nachweis des Neutrinos im Jahr 1970. Die Blasenkammeraufnahme zeigt, wie sich ein Wasserstoffatom in ein Pion und ein Myon verwandelt. Die Reaktion erfolgt aufgrund der Wechselwirkung mit einem Myon-Neutrino.

Die Auswertung der Tscherenkow-Strahlung liefert einen wichtigen Beitrag zum Verständnis des Problems der Sonnenneutrinos. Sonnenmodelle [**?**] liefern Aussagen zur

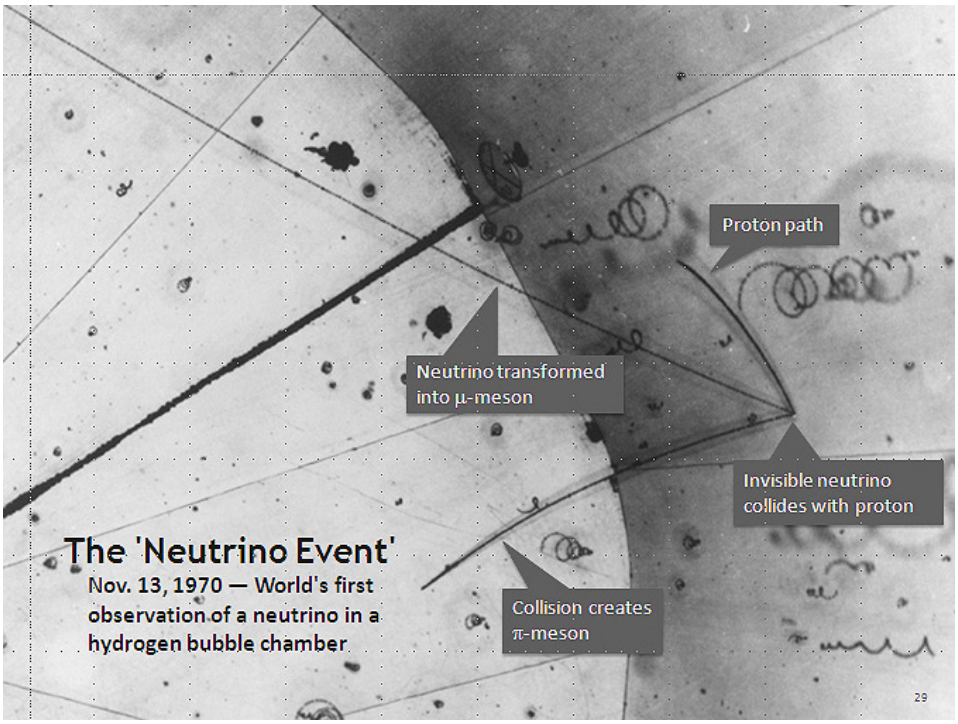


Abb. 5.14: Erster direkter Nachweis eines Neutrinos in einer Blasenkammer (Kapitel *Ionisierende Streahlung*) im Jahr 1970 [**?**].

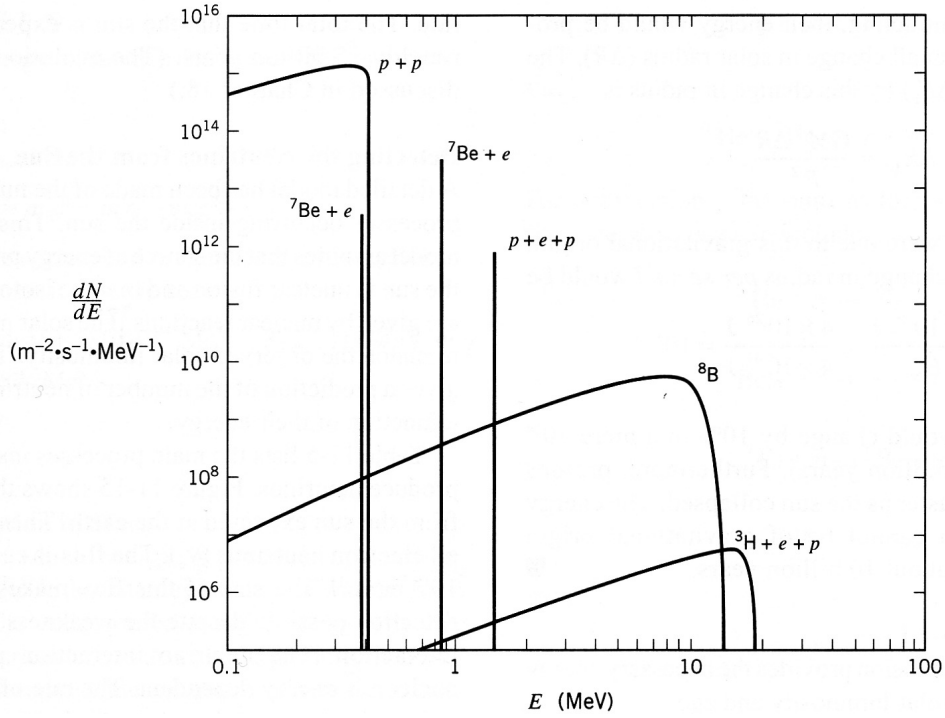


Abb. 5.15: Berechneter Neutrinofluss der Sonne gemessen auf der Erde [**?**].

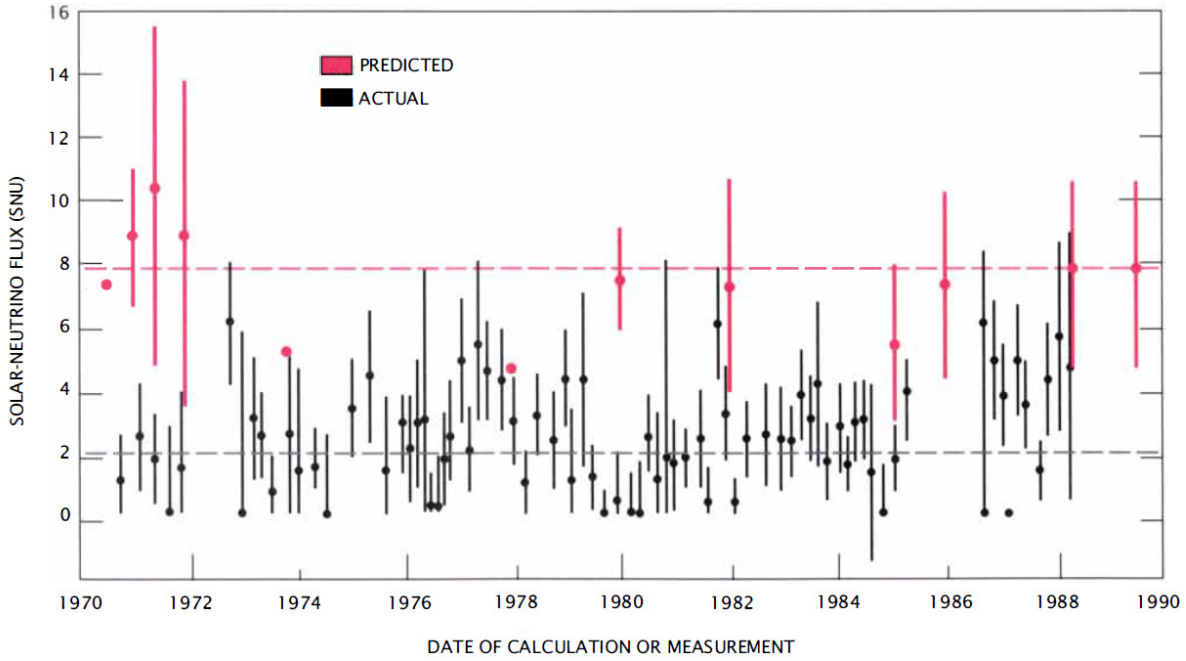


Abb. 5.16: Berechnete (rot) und gemessene (schwarz) solare Neutrinoflüsse zwischen 1970 und 1990. Der Neutrinofluss wird in Solar-Neutrino-Einheiten (SNU) gemessen (Pro Sekunde eine Neutrino-Wechselwirkung pro 10^{36} Atome). Die Rechnungen sagen im Vergleich zum Experiment einen merklich höheren Neutrinofluss voraus Im Mittel sind das 7.9 SNU zu 2.1 SNU [**?**].

Anzahl der bei den Fusionsprozessen erzeugten Neutrinos.[13] Diese schwach wechselwirkenden Teilchen geben Auskunft über die in der Sonne[14] stattfindenden Fusionsprozesse,

[13] *Lexikon:* Die **Schwache Wechselwirkung** ist die schwächste der vier fundamentalen Wechselwirkungen (Gravitation, Coulomb-Wechselwirkung, starke Wechselwirkung, schwache Wechselwirkung) und macht sich nur auf Abständen im Bereich des Kerndurchmessers (10^{-15} m) bemerkbar. Der β-Zerfall radioaktiver Kerne wird durch die schwache Wechselwirkung verursacht. Es gibt Elementarteilchen, wie das Neutrino, die nur über die schwache Wechselwirkung mit Materie wechselwirken.

[14] *Lexikon:* Das **Standard-Sonnenmodell** beschreibt die Sonne als kugelförmigen Gasball in unterschiedlichen Ionisationszuständen. Im Zentrum findet man beispielsweise Wasserstoff, der als vollständig ionisiertes Plasma vorliegt. Die Struktur der Sonne wird durch Differentialgleichungen

Prozess	Energie der Neutrinos
$p + p \rightarrow d + e + \nu_e$	$0 < E < 0.25\,\text{MeV}$
$p + p + e^- \rightarrow d + \nu_e$	$0 < E < 1.44\,\text{MeV}$
$^7\text{Be} + e^- \rightarrow ^7\text{Li}^* + \nu_e$	$E = 0.86\,\text{MeV}$
$^8\text{B} \rightarrow ^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e$	$0 < E < 0.14.06\,\text{MeV}$
$^3\text{He} + p- \rightarrow \alpha + e^+ + \nu_e$	$0 < E < 18.77\,\text{MeV}$

Tab. 5.3: Prozesse, die in der Sonne Neutrinos mit charakteristischen Energien erzeugen [**?**].

siehe Tab. 5.3. Der erwartete Neutrinofluss in Richtung Erde ist in Abb. 5.15 aufgezeigt. Der Fluss ist gigantisch: $10^{15}\,\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$. Die hohe Anzahl an Neutrinos erlaubt es Neutrino-Experimente durchzuführen. Überraschenderweise stellte man fest, dass die Rate an Sonnenneutrinos zu gering ist [**?** **?**], siehe Abb. 5.16. Das experimentelle Resultat stellt damit das bislang als allgemeingültig angesehene Standardmodell[15] [16] und damit das Fundament der Elementarteilchenphysik infrage. Eine Klärung ist daher von enormer Bedeutung für die Physik.

Hinweise auf das seltsame Verhalten der Sonnenneutrinos ergab eine zeitaufwendige Messung in dem 615 Tonnen Tetrachlorkohlenstoff ($2.3 \cdot 10^{30}$ Chloratome) eine Rolle spielen, das so genannte Homestake Experiment [**?**].[17] Um Hintergrundsignale auszublenden, wurde der Behälter in einer Goldmine gelagert. Kern des Versuchs ist die Reaktion von Sonnenneutrinos ν_e mit Chlor. In der Wechselwirkung verwandelt sich der Chlorkern in das Edelgas Argon.

$$\nu_e + {}^{37}\mathrm{Cl} \rightarrow {}^{37}\mathrm{Ar} + e^- \tag{5.7}$$

Ar-37 ist radioaktiv (Halbwertszeit 35.1 Tage) und zerfällt durch Elektroneneinfang:

$$e^- + {}^{37}\mathrm{Ar} \rightarrow \nu_e + {}^{37}\mathrm{Cl} \tag{5.8}$$

Der Elektroneneinfang lässt in der K-Schale der Atomhülle ein Loch zurück. Beim Auffüllen durch ein anderes schwächer gebundenes Elektronen wird ein Auger-Elektron mit einer charakteristischen Energie von 2.8 keV emittiert. Die minimale Energie, die notwendig ist, um Chlor zu aktivieren, ist 0.81 MeV. Was liefert der Vergleich mit Fig. 5.15 für Informationen? Der Nachweis ist hauptsächlich empfindlich auf Bor-Neutrinos! Die Theorie gibt für diesen Prozess, bezogen auf die experimentellen Bedingungen, eine Rate von einem Argonatom pro Tag an. Gemessen wurde aber nur eine deutlich geringere Ereignisrate von 0.4 Ar Atome pro Tag. Die Anzahl der Sonnenneutrinos, die diesen Prozess auslösen, stimmt daher mit Vorhersagen des in der Elementarteilchenphysik etablierten Standardmodells nicht überein und ist erheblich geringer.[18]

---

beschrieben, wobei experimentell ermittelte Randbedingungen gelten. Dies sind Leuchtkraft, Radius, Alter und Zusammensetzung der Sonne.

[15] *Lexikon:* Die Physik hat ihre Erkenntnisse über die kleinsten Teilchen im so genannten **Standardmodell der Teilchenphysik** zusammengefasst. Es beschreibt umfassend alle uns bekannten Phänomene des Mikrokosmos und beinhaltet Teilchen, aus denen Materie aufgebaut ist und die Wechselwirkungen, die über Teilchen vermittelt werden. Das Higgs-Teilchen beispielsweise verleiht nach dem Standardmodell über das so genannte Higgs-Feld den Elementarteilchen ihre Masse.

[16] The Nobel Prize in Physics 2013 was awarded jointly to François Englert and Peter W. Higgs *for the theoretical discovery of a mechanism that contributes to our understanding of the origin of mass of subatomic particles, and which recently was confirmed through the discovery of the predicted fundamental particle, by the ATLAS and CMS experiments at CERN's Large Hadron Collider*

[17] The Nobel Prize in Physics 2002 was divided, one half jointly to Raymond Davis Jr. and Masatoshi Koshiba *for pioneering contributions to astrophysics, in particular for the detection of cosmic neutrinos* and the other half to Riccardo Giacconi *for pioneering contributions to astrophysics, which have led to the discovery of cosmic X-ray sources.*

[18] Einen Hinweis darauf, dass Neutrino nicht gleich Neutrino lieferte ein Experiment, das einen Unterschied zwischen Neutrinos, die beim Zerfall von π-Mesonen in Myonen erzeugt werden, und Neu-

Neutrinos, they are very small.
They have no charge and have no mass
And do not interact at all.
The earth is just a silly ball
To them, through which they simply pass,
Like dustmaids down a drafty hall
Or photons through a sheet of glass.
They snub the most exquisite gas,
Ignore the most substantial wall,
Cold-shoulder steel and sounding brass,
Insult the stallion in his stall,
And, scorning barriers of class,
Infiltrate you and me! Like tall
And painless guillotines, they fall
Down through our heads into the grass.
At night, they enter at Nepal
And pierce the lover and his lass
From underneath the bed - you call
It wonderful; I call it crass.

John Updike - Cosmic Call (1960)

Um das Rätsel der Sonnenneutrinos zu lösen, wurden größere Instrumente aufgebaut (u.a. Super-Kamiokande[19] (Abb. 5.17) und IceCube[20]), dass Ereignisse der Wechselwir-

trinos, die beim β-Zerfall, dem Zerfall von Atomkernen in Elektronen und Neutrinos, entstehen, aufzeigte [**?**]. Die π-Mesonen wurden durch einen Protonenstrahl erzeugt, der auf ein Target traf; die π-Mesonen zerfielen dann im Flug in Myonen und Neutrinos. Nachdem sie eine Abschirmung passiert hatten, um alle anderen Teilchen zu entfernen, wechselwirkten die Neutrinos mit der Materie in den Platten einer Aluminiumfunkenkammer, wo sie Myonen, aber keine Elektronen erzeugten.

[19] Am 23. Februar 1987 beobachtete der Kamiokande-Detektor erstmals Neutrinos von außerhalb unseres Sonnensystems [**?**]. Sie stammten aus der Supernova-Explosion SN1987A. Der Vorläufer der Supernova war ein blauer Riese in der Großen Magellanschen Wolke in 170 000 Lj Entfernung. Der Neutrinoausbruch führte zu 11 Ereignisse innerhalb von 13 Sekunden. Aus dieser Beobachtung und der Entfernung von 160 000 Lj konnte man Abschätzungen über Masse ($m_{neutrino}$) und Lebensdauer $\tau_{neutrino}$) von Neutrinos ableiten.

$$\gamma \cdot \tau_{neutrino} > 1.6 \cdot 10^5 \,\mathrm{Lj} \tag{5.9}$$

Da die Ereignisse sich kurzzeitig häuften, kann man davon ausgehen, dass sich die Neutrinos mit konstanter Geschwindigkeit bewegt haben und Unterschiede durch die leicht unterschiedlichen kinetischen Energien resultiert. Man kommt auf einen Wert von $m_{neutrino} < 30\,\mathrm{eV}/c^2$.

[20] *Lexikon:* Das **Neutrino-Observatorium IceCube** ist ein Experiment zur Beobachtung des Kosmos, dass unter dem Polareis des Südpol aufgebaut wurde. IceCube umfasst einen Kubikkilometer Eis und sucht nach Neutrinos. Diese hochenergetischen Teilchen liefern Informationen, um starke astrophysikalische Quellen zu untersuchen. Dazu zählen explodierende Sterne, γ-Strahlungsausbrüche, Schwarze Löcher und Neutronensterne. IceCube detektiert etwa 100 bis 200 Neutrinos pro Tag, wobei der überwiegende Anteil in der Erdatmosphäre erzeugt wird.

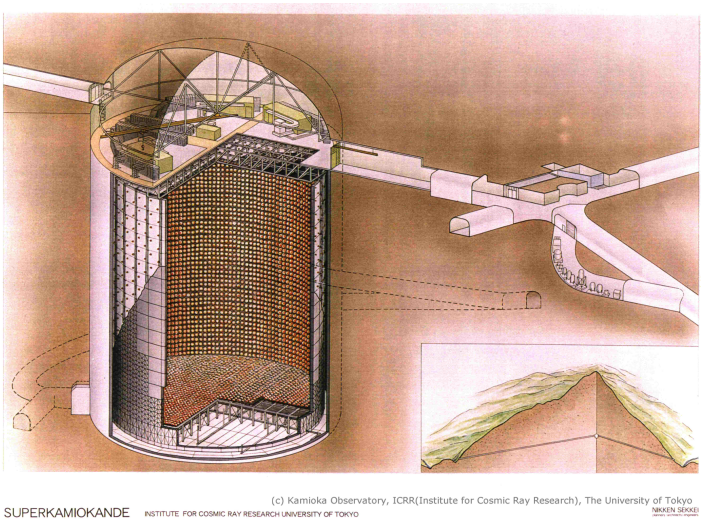


Abb. 5.17: Schema des Aufbaus des Neutrinodetektors Super-Kamiokande. Im Jahr 1998 wurden unter anderem Daten gesammelt, die Hinweise auf Neutrinooszillationen lieferten [**?**].

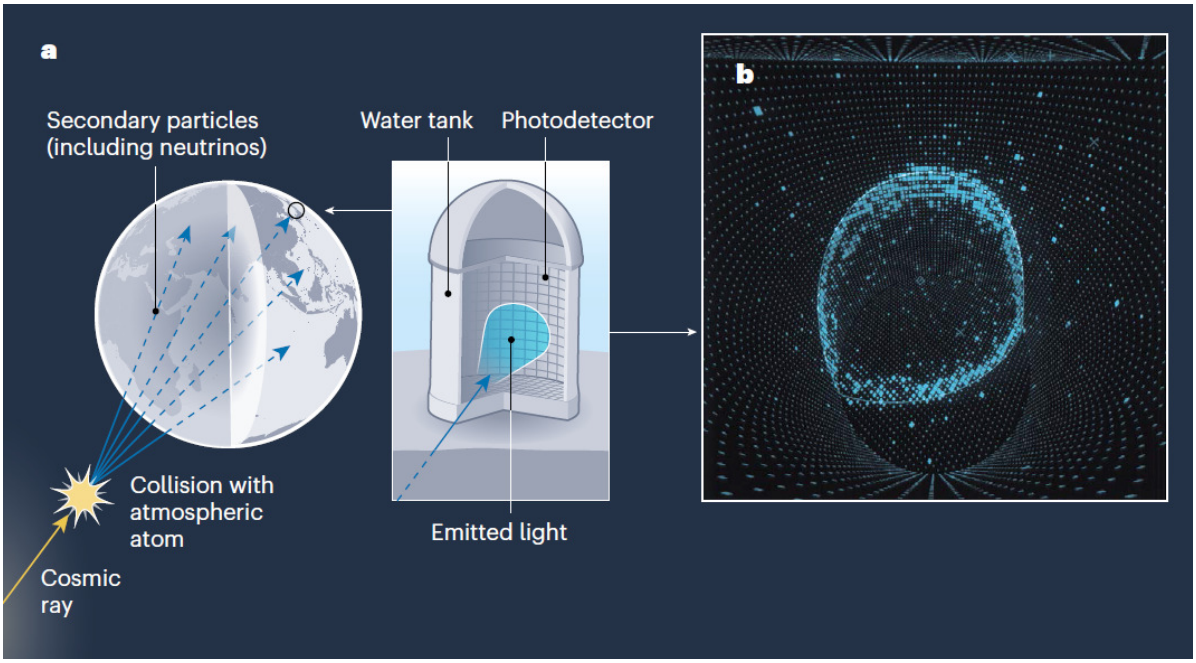


Abb. 5.18: Nachweis von Neutrinos, die in der Erdatmosphäre erzeugt werden. (a) Kosmische Strahlung, die in die obere Erdatmosphäre eindringt, stößt mit Gasmolekülen und erzeugt einen Schauer von Sekundärteilchen, unter anderem Neutrinos. (b) Anhand des Tscherenkow-Lichtkegels wird das Neutrino bezüglich Art, Energie, Richtung und Entfernung charakterisiert [**? ?**].

kung von Sonnenneutrinos mit Wasser nachweist. Abb. 5.18 zeigt am Beispiel der Entstehung von Neutrinos in der oberen Atmosphäre, wie die Signale in einem kaskadierten Prozess nachgewiesen werden. Da Neutrinos kaum mit normaler Materie wechselwirken, ist eine erhebliche Masse an Wasser höchster Reinheitsstufe erforderlich. Um die Ereignisse zu klassifizieren (nur Reaktionen mit Ursprung in der Sonne sollen gezählt werden), wird über Tscherenkow-Strahlung Anzahl und Richtung bestimmt.

Evidence for neutrino emission from the nearby active galaxy NGC 1068 [?]: A supermassive black hole, obscured by cosmic dust, powers the nearby active galaxy NGC 1068. Neutrinos, which rarely interact with matter, could provide information on the galaxy's active core. We searched for neutrino emission from astrophysical objects using data recorded with the IceCube neutrino detector between 2011 and 2020. The positions of 110 known gamma-ray sources were individually searched for neutrino detections above atmospheric and cosmic backgrounds. We found that NGC 1068 has an excess of 79 neutrinos at tera-electron volt energies, which we interpret as associated with the active galaxy. The flux of high-energy neutrinos that we measured from NGC 1068 is more than an order of magnitude higher than the upper limit on emissions of tera-electron volt gamma rays from this source. Observations have shown a diffuse background of high-energy neutrinos, which is known to be of extragalactic origin. However, it has been difficult to identify individual sources that contribute to this background. The IceCube Collaboration reanalyzed the arrival directions of astrophysical neutrinos and then searched for point sources. They identified evidence for neutrino emission from NGC 1068 (also known as Messier 77), a nearby active galaxy. Its properties are quite different from TXS 0506+056, which was found to be a neutrino source in 2018, leading the investigators to suggest that there might be more than one population contributing to the neutrino background. The arrival directions of astrophysical neutrinos indicate point source neutrino emission from NGC 1068.

Aus den Messungen zog man den Schluss, dass sich die Sonnenneutrinos auf dem Weg zur Erde in eine andere Neutrinoart umwandeln,[21] [22] siehe Abb. 5.19. Man nennt diesen Effekt Neutrino-Oszillation. Der Nachweis der Neutrino-Oszillationen lieferte den Beweis, dass Neutrinos, im Gegensatz zu früheren Vermutungen, massebehaftete[23] Teilchen sind.[24] Sie kennen sicher die berühmte Formel von Einstein $E = m \cdot c^2$ oder nach der

[21] *Lexikon:* Das **Neutrino** kommt in drei bekannten Formen vor. Die am häufigsten in terrestrischen Experimenten gesehene wird Elektron-Neutrino genannt, das mit Elektronen wechselwirkt. Die anderen beiden Arten, das Myon- und das Tau-Neutrino wechselwirken nur mit Myonen und Tau-Teilchen. Elektronen, Myonen und Taus sowie ihre Neutrinos gehören zu den fundamentale Teilchen, aus denen sich das Universum zusammensetzt.

[22] The Nobel Prize in Physics 1988 was awarded jointly to Leon M. Lederman, Melvin Schwartz and Jack Steinberger *for the neutrino beam method and the demonstration of the doublet structure of the leptons through the discovery of the muon neutrino*

[23] Die Frage nach einer möglichen Masse der Neutrinos wurde zuerst von Enrico Fermi in seinem ersten Papier zum β-Zerfall aufgeworfen [**?**].

[24] The Nobel Prize in Physics 2015 was awarded jointly to Takaaki Kajita and Arthur B. McDonald *for the discovery of neutrino oscillations, which shows that neutrinos have mass.*

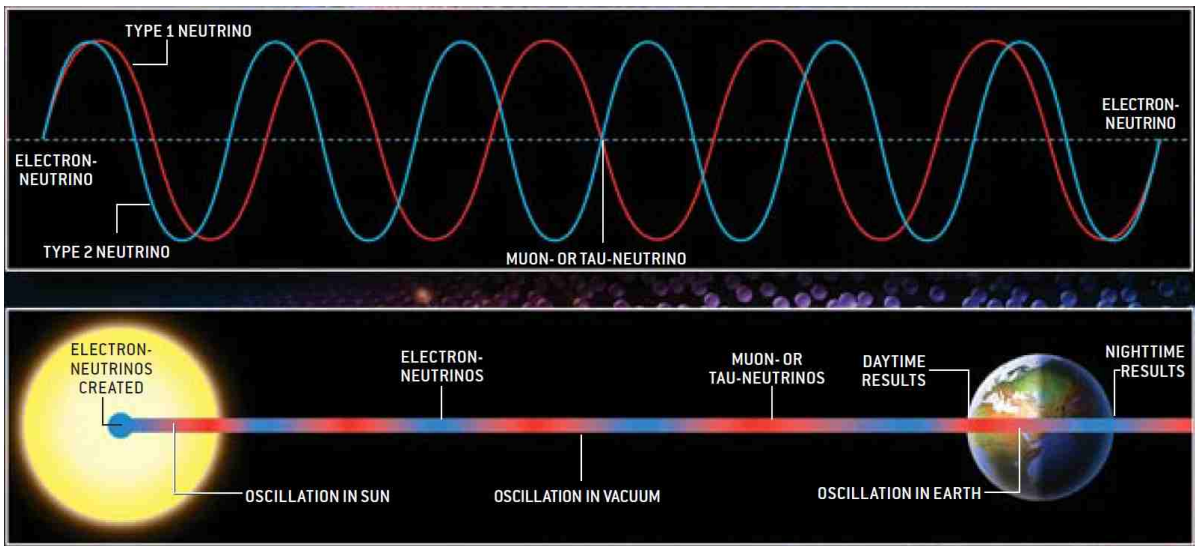


Abb. 5.19: Ein Elektron-Neutrino (*links*) ist eigentlich eine Überlagerung eines Typ-1- und eines Typ-2-Neutrinos, wobei zu Beginn der Reise zur Erde ihre deBroglie-Wellen (siehe Kapitel *Materiewellen*) in Phase sind. Auf dem Weg geraten die Wellen außer Phase und bilden ein Myon- oder ein Tau-Neutrino (*mitte*). Weiter entfernt wird es wieder zu einem Elektron-Neutrino (*rechts*). Die im Zentrum der Sonne erzeugten Elektron-Neutrinos oszillieren bis sie nach acht Minuten die Erde erreichen. Nachweis auf der Tag- oder Nachtseite können einen Unterschied machen. Die Schwebungsfrequenz hängt unter anderem vom Massenunterschied ab [**?**].

Masse umgestellt $m = E/c^2$ (siehe Kapitel *Einsteingleichung*). Die Masse eines Neutrinos beträgt in dieser für die Elementarteilchenphysik üblichen Schreibweise höchstens[25] $0.45\,\mathrm{eV}/c^2$ oder $8 \cdot 10^{-37}\,\mathrm{kg}$, wie kürzlich im Rahmen des KATRIN Experiments festgestellt wurde [**?**].[26] Zum Vergleich, die Masse des Elektrons ist $9.1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ oder $511\,\mathrm{keV/c^2}$. Nebenbei bemerkt: Es lohnt sich, den Wert für das Elektron parat zu haben!

Wie kann man die Masse des Neutrinos bestimmen? Um 1950 wurde vorgeschlagen, das Spektrum der Elektronen aus dem β-Zerfall von Tritium zu analysieren. Bei dieser Reaktion haben die emittierte Elektronen eine kinetische Energien im Bereich von 0 bis 18 570 eV. Die Masse des Neutrinos sollte sich in einer kleinen Verschiebung im Spektrums bei den höchsten Energien äußern. Der Effekt ist mit $1 : 10^{12}$ extrem gering. Die Forscher sind aber in der Lage, diesen Unterschied aufzulösen [**?**].

[25] $1\,\mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

[26] Die Nachweis, dass Neutrinos eine Masse haben ist für Kosmologen von Interesse. Auch wenn die Masse gering ist, reicht die schier überwältigende Anzahl an Neutrinos aus, durch ihre Gravitationswechselwirkung die Expansion des Universums zu verlangsamen.

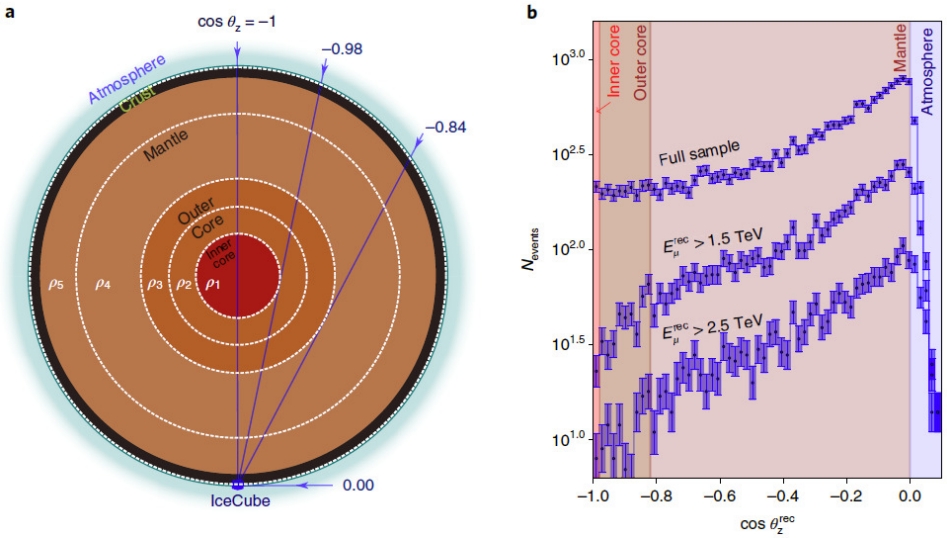


Abb. 5.20: Zenit-Winkelverteilung der atmosphärischen Myon-Neutrino-Ereignisse in der IC86-Probe. (a) Modell-Darstellung, wobei die Erde unterteilt ist in fünf konzentrische Schalen. Einige repräsentative Neutrino-Flugbahnen und die zugehörigen Zenitwinkel in Bezug auf IceCube zeigt (b). Dargestellt ist die Anzahl der Myon-Neutrino-Ereignisse im ersten Jahr der IceCube-Datenerfassung als Funktion des Kosinus des Zenitwinkelsc für unterschiedliche Energieschwellen. Die oberste Kurve zeigt die Verteilung für die gesamte Probe (20 145 Myonen im Energiebereich 400 GeV<E<20 TeV). Die unterste Kurve entspricht der höchsten Energieschwelle ($E > 2.5$ TeV) [**?**].

Ein Beispiel aus der Geophysik

Vor etwa 50 Jahren wurde die Idee geäußert, Neutrinos zur Erforschung des Erdinneren zu nutzen [**?**]. Es zwei Ansätze zur Durchführung einer Erdsondierung mit Neutrinos: Neutrino-Absorptionstomographie [**? ?**] und Neutrino-Oszillation-Tomographie [**?**]. Die Absorptionstomographie basiert auf der Abschwächung des Flusses von Neutrinos aufgrund von Streuung und Absorption innerhalb der Erde. Die Methode liefert daher keine Aussage über die lokale Materiedichte. Eine Reihe von Messungen entlang unterschiedlicher Basislinien sind deshalb notwendig, um das Dichteprofil der Erde zu rekonstruieren. Die Oszillationstomographie fußt auf dem Auftreten von Neutrino-Oszillationen aufgrund der Wechselwirkung mit Materie. Dies erlaubt es, die Materiedichteverteilung entlang der Neutrino-Pfade zu bestimmen. In den meisten Studien zur Neutrino-Oszillations-Tomographie werden Beschleuniger als Neutrinoquelle genutzt. Solar- und Supernova-Neutrinos können ebenfalls verwendet werden. Beispielsweise liefert die Sonne oder eine Supernova eine kostenlose Neutrinoquelle. Abb. 5.20 zeigt das Ergebnis einer Messung, die mit IceCube durchgeführt wurde.

Aufgaben

Aufgabe 1.1: Wie hoch muss die kinetische Energie von Elektronen und Protonen sein, um in Wasser Tscherenkow-Strahlung zu erzeugen?

Der Brechungsindex von Waser ist n=1.33. Daraus ergibt sich eine minimale notwendige Geschwindigkeit der Teilchen von

$$v = \frac{c}{n} = \frac{2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{1.33} = 2.3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

Das sind hoch relativistische Geschwindigkeiten. Daher benötigen wir für die Berechnung den relativistischen Energie-Impulssatz. Für den γ-Faktor ergibt sich

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(2.3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2}{(2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2}}} \\
\gamma &= 0.565
\end{aligned}$$

Wir greifen vor auf das Kapitel *Einsteingleichung*:

$$E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$$

Die Ruheenergien von Elektron und Proton sind 511 keV und 938 MeV. Damit ergeben sich mit der Ruheenergien der Teilchen ($E_0 = m_0 \cdot c^2$) die kinetischen Energien der beiden Teilchen:

$$\begin{aligned}
E^e_{kin} &= \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 1\right] \cdot m_0 \cdot c^2 \\
E^e_{kin} &= (0.565) \cdot (511\,\mathrm{keV}) = 289\,\mathrm{keV} \\
E^e_{kin} &= (0.565) \cdot (938\,\mathrm{MeV}) = 539\,\mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

Protonen benötigen also deutlich höhere kinetische Energien, um in der Wechselwirkung mit einem Medium Tscherenkov-Licht zu generieren.

Aufgabe 1.2: Wie groß ist der kritische Winkel für Tscherenkow-Strahlung in Wasser (n=1.33), wenn sich Elektronen mit $0.92c$ bewegen?

$$\begin{aligned}
\cos\Theta_{textrmTscherenkow} &= \frac{1}{\beta \cdot n} = \frac{1}{(0.92) \cdot 1.33} = 0.817 \\
\Theta_{textrmTscherenkow} &= 35.2^o
\end{aligned}$$

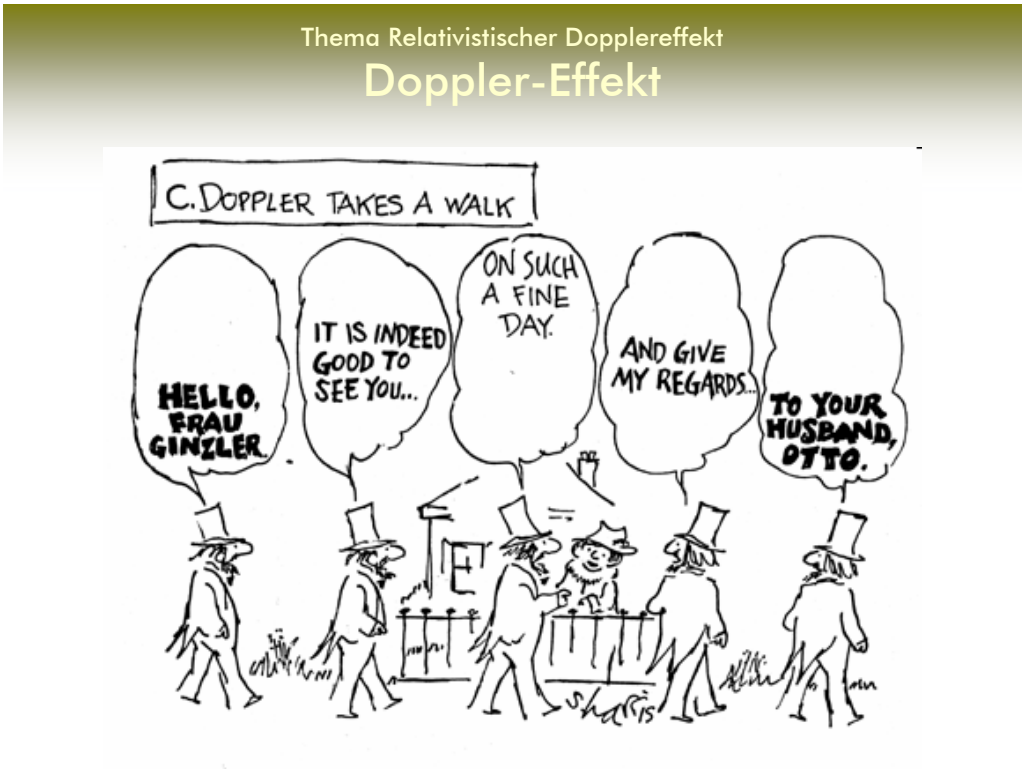
Aufgabe 1.3: A beam of protons of unknown energy moves through a transparent material whose index of reflection is 1.8. Čerenkov radiation is emitted at an angle of 11° with the beam. Find the kinetic energy of the protons in MeV.[27]

[27] Answer: 200 MeV

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Können sich Teilchen schneller als Licht bewegen?
2. Welchen Einfluss hat ein Medium auf die Aussendung von Tscherenkow-Strahlung?
3. Welche Bedeutung hat Tscherenkow-Strahlung für die Forschung?
4. Kann man Tscherenkow-Strahlung im leeren Raum (Vakuum) beobachten?

5.2 Akustischer und optischer Dopplereffekt



Mit etwas Phantasie erkennt man in dem obigen Cartoon, was beim akustischen Dopplereffekt passiert. Akustische Frequenzen ändern sich, wenn sich Quelle und Beobachter relativ zueinander bewegen, siehe auch Abb. 5.21.

Akustischer Dopplereffekt^{4LP}

Eine Lichtquelle bewegt mit relativistischer Geschwindigkeit. Hat das Einfluss auf die Farbe des Lichts? JA. Deshalb betrachten wir nun den Dopplereffekt relativistisch. Was sind die Unterschiede zum akustischen Dopplereffekt?. Sie erinnern sich vielleicht daran, dass es einen Unterschied macht, ob sich die Quelle oder der Empfänger bewegt. Die Ursache liegt in der Ausbreitung des Schalls im Medium. Licht dagegen benötigt für seine Ausbreitung KEIN Medium (Kapitel *Äther*). Er lohnt sich zunächst, den nichtrelativistischen akustischen Dopplereffekt noch einmal Revue passieren zu lassen.

Die obige Abbildung zeigt ein Experiments, das demonstriert, dass sich bei der Bewegung einer Quelle für den Beobachter die Frequenz ändert. Bei dieser Durchführung des Experiments ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle nicht.



Abb. 5.21: I love hearing that lonesome wail of the train whistle as the frequency of the wave changes due to the Doppler effect [**?**].

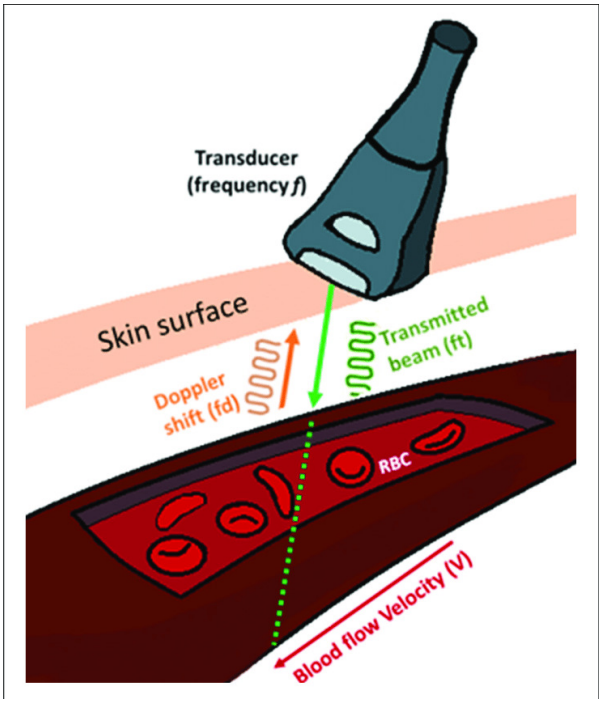


Abb. 5.22: Messung der Blutflussgeschwindigkeit mittels Ultraschall. Ein Schallgeber sendet eine Ultraschallwelle einer bestimmten Frequenz aus und empfängt die von den sich bewegenden Erythrozyten im Gefäß zurückgestreuten Signale. Diese sind aufgrund des Dopplereffekts in der Frequenz verschoben [**?**].

Link to video **Doppler-Effekt mit Wasserwellen sichtbar gemacht**

Überlegen Sie mal: Macht es einen Unterschied, wenn man die Rollen vertauscht, also ruhende Quelle und bewegter Beobachter?

So stellt sich der Dopplereffekt in der Akustik dar. Die genaue Analyse zeigt, dass man die Rolle von Schallgeber und Beobachter in Bezug auf ihren Bewegungszustand NICHT vertauschen kann. Man sollte sich klar machen, dass sich, im Gegensatz zu einer ruhenden Schallquelle, die abgestrahlte Frequenz ändert. Das ist bei einer ruhenden Quelle nicht der Fall. Hier ergibt sich die Frequenzverschiebung aus der Bewegung des Beobachters. In Gl. 5.10 bewegen sich Quelle und Detektor aufeinander zu, in Gl. 5.11 entfernen sich

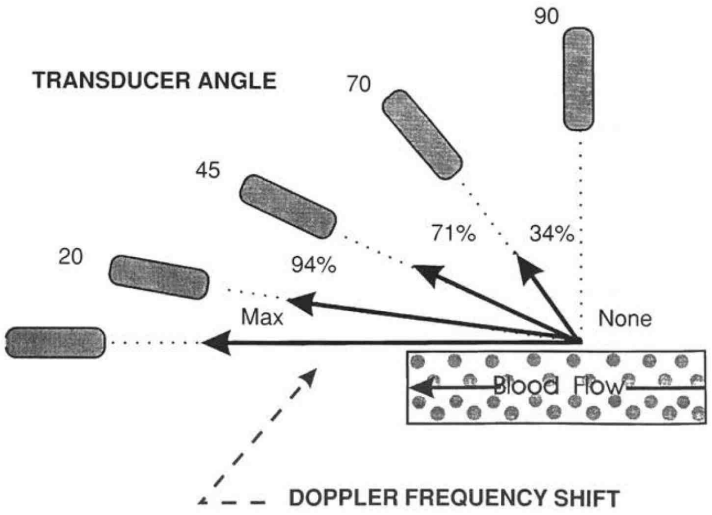


Abb. 5.23: Einfluss des Beobachtungswinkels auf die Frequenzverschiebung bei der Doppler-Sonographie [**?**].

Quelle und Detektor:

$$f_{observer} = f_{source} \cdot \frac{1 + v_{observer}/v_{medium}}{1 - v_{medium}/v_{source}} \tag{5.10}$$

$$f_{observer} = f_{source} \cdot \frac{1 - v_{observer}/v_{medium}}{1 + v_{medium}/v_{source}} \tag{5.11}$$

Anwendungen 1

Ein Beispiel aus der Medizin

Den Dopplereffekt nutzt man in der medizinischen Diagnostik um Strömungsgeschwindigkeiten zu bestimmen. Hier nutzt man den Effekt der Massenerhaltung, d.h. das Produkt aus Geschwindigkeit, Querschnittsfläche und Dichte der Flüssigkeit ist zeitlich konstant. Nimmt man vereinfacht an, das sich die Dichte der strömenden Flüssigkeit nicht ändert, ergibt sich die Kontinuitätsgleichung für eine Flüssigkeit, die mit der Geschwindigkeit v_1 durch ein Rohr mit Querschnittsfläche A_1 und mit v_2 durch ein anderes Rohrstück (Querschnitt A_2) strömt:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \tag{5.12}$$

Verringert sich in einem z.B. Arterienabschnitt der Querschnitt, erhöht sich die Strömungsgeschwindigkeit. Diesen Effekt kann man mit Hilfe des Dopplereffekts nachweisen. Dabei dienen die roten Blutkörperchen als bewegte Schallreflektoren, die anhand der Frequenzänderung, Auskunft geben über die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes, siehe Abb. 5.22. Die Doppler-Sonographie ist in der Lage, das parabelförmige Profil der laminaren Strömung aufzulösen. Problematisch ist, dass die Dopplerverschiebung stark vom Beobachtungswinkel abhängt, wie Abb. 5.23 demonstriert.

Optischer Dopplereffekt

Auch Licht erfährt eine merkliche Frequenzänderung, wenn sich Quelle und Empfänger in unterschiedlichen Bezugssystemen befinden. Der experimentelle Nachweis gelang Ives und Stilwell im Jahr 1938 [**?**]. Dabei hängt die Änderung davon ab, ob sich das Objekt dem Beobachter annähert (Frequenzerhöhung) oder sich entfernt (Frequenzerniedrigung).

Eine ruhende Quelle erzeugt periodisch ein Signal mit der Frequenz ν_{ruhend}, also mit einem zeitlichen Abstand T_{ruhend}=$1/\nu_{ruhend}$. Man verwendet Licht als Übertragung. Quelle und Detektor bewegen sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit v aufeinander zu. Welche Effekte treten auf? Aufgrund der Zeitdilatation geht die Uhr für den Beobachter langsamer.

$$T_{bewegt} = \gamma \cdot T_{ruhend} \tag{5.13}$$

Das ist aber noch nicht alles. Zusätzlich bewegt sich die Quelle und dadurch ändert sich die Ankunftszeiten der Signale aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit c. Dadurch verkürzt sich die Periode. Die Annäherung erfolgt mit $v \cdot \gamma \cdot T_{ruhend}$. Dadurch treffen die Signale nicht mit einem Abstand $c \cdot \gamma \cdot T_{ruhend}$, sondern mit einem Zeitabstand $(c - v) \cdot \gamma \cdot T_{ruhend}$ am Detektor ein. Das führt auf folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
T_{bewegt} &= \frac{(c-v)\cdot\gamma\cdot T_{ruhend}}{c} \\
T_{bewegt} &= \left(1-\frac{v}{c}\right)\cdot\gamma\cdot T_{ruhend} \\
T_{bewegt} &= \left(1-\frac{v}{c}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{1-v^2/c^2}}\cdot T_{ruhend} \\
T_{bewegt} &= \left(1-\frac{v}{c}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{(1-v/c)\cdot(1+v/c)}}\cdot T_{ruhend} \\
T_{bewegt} &= \sqrt{\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{(1-v/c)\cdot(1+v/c)}}\cdot T_{ruhend} \\
T_{bewegt} &= \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\cdot T_{ruhend}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Eine ähnliche Gleichung ergibt sich, wenn sich Quelle und Detektor voneinander wegbewegen. Abb. 5.24 illustriert das Verhalten. Zusammengefasst findet man daraus die Gleichungen für die Frequenzen (ν=$1/T$) und Wellenlängen:

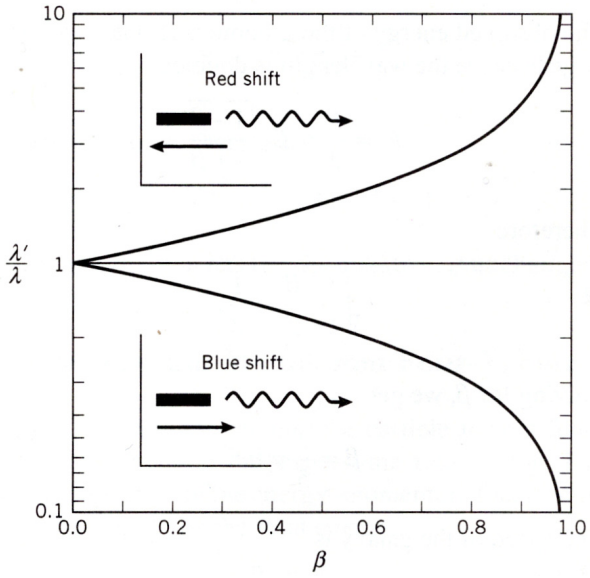


Abb. 5.24: Das Licht einer ruhenden Lichtquelle hat die Wellenlänge λ. Bewegt sich die Quelle relativ zu einem Beobachter kommt es aufgrund des relativistischen Dopplereffekts zu einer Wellenlängenverschiebung [**?**].

Fall 1: Quelle und Detektor bewegen sich aufeinander zu:

$$\begin{aligned} \nu_{bewegt} &= \nu_{ruhend} \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \\ \lambda_{bewegt} &= \lambda_{ruhend} \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Fall 2: Quelle und Detektor entfernen sich voneinander:

$$\begin{aligned} \nu_{bewegt} &= \nu_{ruhend} \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\ \lambda_{bewegt} &= \lambda_{ruhend} \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Measurement of the Relativistic Doppler Shift in Neon [**?**]**:** The relativistic Doppler shift is measured by the counting of the frequency difference between two cw dye lasers. One laser is locked to a two-photon transition in a fast beam of neon, and the other is locked to the same two-photon transition in thermal neon. The experimental result is compared to the prediction of special relativity. The result is in excellent agreement with this theory. An accuracy of $4 \cdot 10^{-5}$ is obtained, which provides the most accurate direct verification of time dilatation to date.

Den Effekt der relativistischen Dopplerverschiebung kann man auch auf der Basis der Zeitdilataiton deuten. In Kapitel *Gleichzeitigkeit* haben wir die Lichtuhr vorgestellt. Bewegt man die Uhr mit gleichmäßiger Geschwindigkeit im dreidimensionalen Raum ergibt sich für jede Richtung eine Zeitdilatation. Das Phänomen der Zeitdilatation ist ein isotroper Effekt. Das heißt, dass man eine Dopplerverschiebung auch beobachten kann, wenn

sich das Licht senkrecht zur Bewegung des Beobachters ausbreitet. Ein entsprechendes Experiment wurde von Walter Kündig durchgeführt, siehe auch [**?**]:

Measurement of the Transverse Doppler Effect in an Accelerated System [?]: Using an ultracentrifuge rotor, the shift of the 14.4 keV Mössbauer absorption line of Fe-57 in a rotating system was measured as a function of the angular velocity ω. An Fe-57 absorber was placed at a radius of 9.3 cm from the axis of the rotor. A Co-57 source was mounted on a piezoelectric transducer at the center of the rotor. By applying a triangularly varying voltage to the transducer, the source could be moved relative to the absorber. This arrangement makes possible the observation of the entire resonance line at various values of ω. The measured transverse Doppler shift agrees within an experimental error of 1.1% with the predictions of the theory of relativity.

Ein Beispiel aus der Atomphysik^{4LP}

Man kann den Dopplereffekt nutzen, um die thermische Bewegung von Atomen zu reduzieren. Dieser Verfahren nennt sich Laserkühlung (Kapitel *Laser*).[28] Man nutzt aus, dass Atome empfindlich auf die Wellenlänge des Lichts reagieren. Die Atome werden von sechs Seiten mit Licht einer bestimmten Wellenlänge bestrahlt. Man wählt die Frequenz so, dass nur die Atome das Licht absorbieren, die sich auf eine der Laserquellen mit zu hoher Geschwindigkeit zu bewegen. Absorbiert ein Atom ein Photon wechselt ein Elektron in einen angeregten Zustand. Nach einer bestimmten Zeit zerfällt dieser angeregte Zustand über spontane Emission. Das Photon wird dabei in eine zufällige Richtung emittiert. Das Atom erfährt, aufgrund des Impulsübertrags, bei jeder Absorption und Emission einen gewissen Rückstoß (Kapitel *Materiewellen*). Bei der Absorption ist der Rückstoß stets entgegengesetzt zur Lichtausbreitung des Laserstrahls und es ergibt sich im Mittel über die Streuprozesse ein erheblicher Effekt. Bei der Emission ist der Rückstoß isotrop verteilt und mittelt sich weg. Durch Ausnutzung des Dopplereffekts kann man erreichen, dass Atome, die mit Laserlicht aus allen Richtungen bestrahlt werden, immer nur solche Photonen aus einem Strahl absorbieren, wenn sie sich auf ihn zu bewegen. Man erhält dann eine Kraft, die der Bewegungsrichtung der Atome entgegengesetzt ist und sie dadurch abbremst. Die mittlere Geschwindigkeit nimmt mit der Zeit ab, das Gas wird kälter. Temperaturen von μK sind realisierbar. Dieses Verfahren trug entscheidend dazu bei, ein Bose-Einstein Kondensat (BEC) zu realisieren.[29]

Wenn die Geschwindigkeiten der Objekte klein sind gegenüber c, entwickelt man den

[28] The Royal Swedish Academy of Sciences has awarded the 1997 Nobel Prize in Physics jointly to Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji and William D. Phillips *for their developments of methods to cool and trap atoms with laser light.*

[29] The Nobel Prize in Physics 2001 was awarded jointly to Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle and Carl E. Wieman *for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates.*

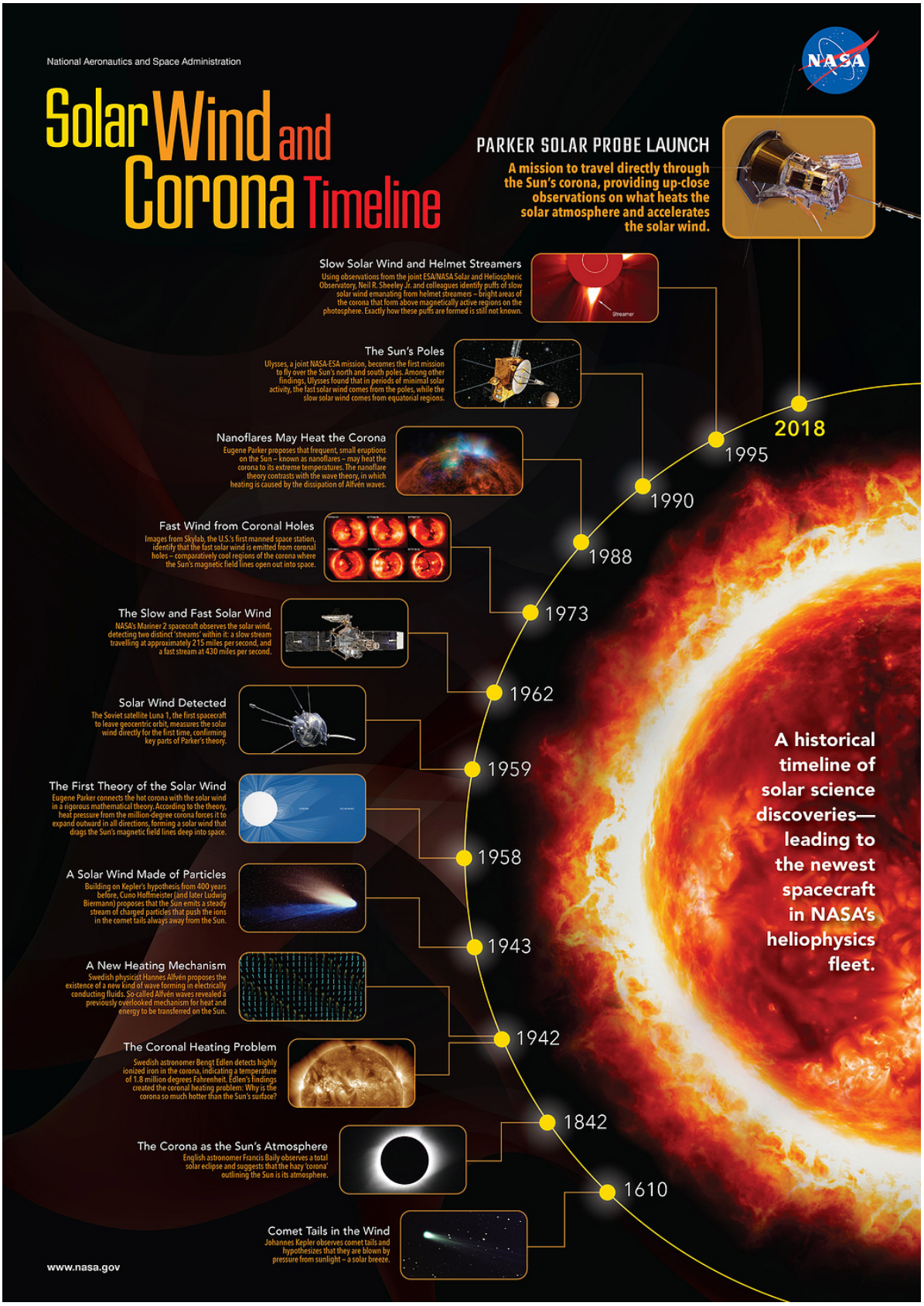


Abb. 5.25: Entdeckungen, die zu unserem aktuellen Verständnis der Korona und des Sonnenwinds führten [**?**].

Ausdruck in eine Potenzreihe und betrachtet nur die ersten beiden Einträge:

$$\begin{aligned} \nu_{bewegt} &= \nu_{ruhend} \cdot \left(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \ldots\right) \\ \nu_{bewegt} &\approx \nu_{ruhend} \cdot (1 - \beta) \end{aligned} \tag{5.17}$$

Man erkennt, dass es schon für geringe Relativgeschwindigkeiten zu Frequenzverschiebungen kommt. Experimentell bestimmt man allerdings keine Frequenzen, sondern Wellenlängen.[30]

$$\begin{aligned} \nu_{bewegt} &= \nu_{ruhend} \cdot (1 - \beta) \\ \frac{c}{\lambda_{bewegt}} &= \frac{c}{\lambda_{ruhend}} \cdot (1 - \beta) \\ \lambda_{bewegt} &= \lambda_{ruhend} \cdot \left(\frac{1}{1 - \beta}\right) \\ \lambda_{bewegt} &\approx \lambda_{ruhend} \cdot (1 + \beta) \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die relative Wellenlängenverschiebung bezeichnet man mit z. Für geringe Geschwindigkeiten ergibt sich die Näherung:

$$z = \frac{\lambda_{bewegt} - \lambda_{ruhend}}{\lambda_{ruhend}} = \beta = v/c \tag{5.19}$$

Für höhere Geschwindigkeiten muss die höheren Terme in der obigen Entwicklung berücksichtigen. Die Gültigkeit der Gleichung wurde in einem Experiment nachgewiesen [**?**], wobei man hochauflösende Laserspektroskopie nutze.

Beispiel gefällig? Durch Beobachtung des Andromedanebels gelang im Jahr 1912 eine Bestimmung der Annäherungsgeschwindigkeit [**?**]. Es ergab sich ein Wert von 200 km/s. Bei ausreichender spektraler Auflösung bietet sich damit die Möglichkeit, dynamische Prozesse, in Sternen, wie beispielsweise der Sonnenwind, zu studieren. Abb. 5.25 zeigt die Entwicklung der Forschung zu diesem Thema.

Anwendungen 2^{4LP}

In der Astronomie konzentriert man sich im Zusammenhang mit Geschwindigkeitsmessungen auf die Absorption von Licht durch Atome oder die Lichtemission aus angeregten Atomen. Details zu diesem Vorgang werden im Kapitel *Bohrsches Atommodell* vorgestellt. Für den Moment reicht folgende Information: Im Labor können die Spektren der Atomen leicht nachgemessen und als Standard verwendet werden. Die zugehörigen Emissionslinien bei der Wellenlänge λ haben eine geringe Linienbreite. Die teils geringe Frequenzverschiebung durch die Bewegung der Atome kann damit aufgelöst werden.

[30] Für $\alpha \ll 1$ gilt: $(1 - \alpha)^{-1} \approx 1 + \alpha$

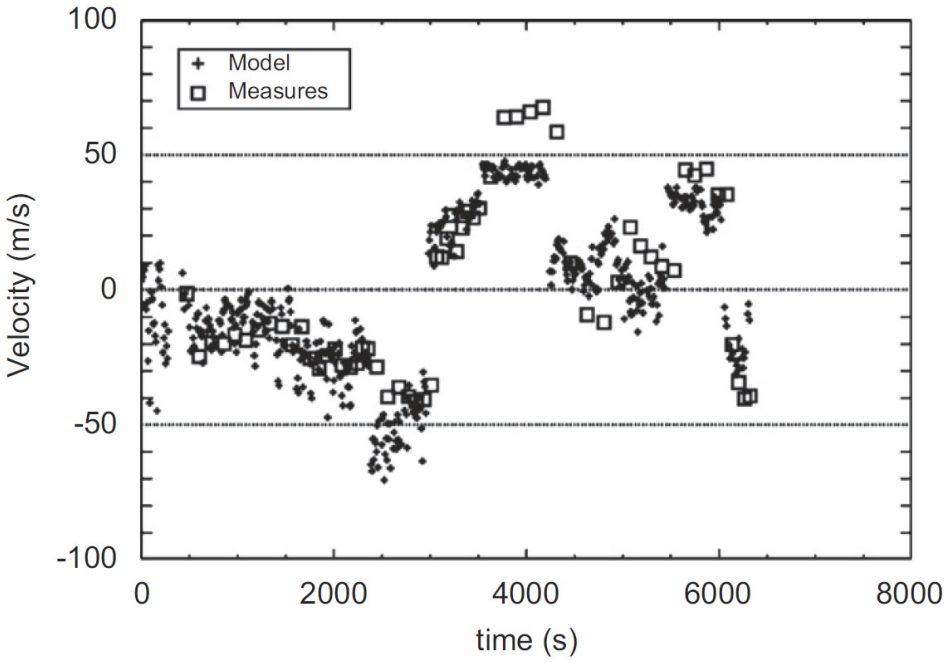


Abb. 5.26: Windmessung auf der Venus am 1.9.2003. Das Symbol (□) gibt die gemessene Dopplerverschiebung, das Symbol (+) die einer Simulation errechnete Doppler-Verschiebung wieder. Alle Werte in m/s. Die berechnete Äquatorgeschwindigkeit beträgt 75 m/s und ist in der Darstellung auf den Wert NULL gesetzt [**?**].

Man betrachtet deshalb in der Regel die relative Verschiebung $\Delta\lambda/\lambda$. Damit kann beispielsweise die Windgeschwindigkeiten auf der Sonne und auf anderen Planeten unseres Sonnensystems bestimmen [**?**]. Abb. 5.26 zeigt Messungen zu Windgeschwindigkeiten auf Venus [**?**].

Für die heutzutage gemessenen Wellenlängenverschiebungen weit entfernter Sterne gilt $\Delta\lambda \gg \lambda_{emitter}$, Die zugehörige Kosmologische Rotverschiebung bezeichnet man mit z:

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \tag{5.20}$$

Diesen Ausdruck für z muss man statt Gl. 5.18 verwenden, wenn sich die Quelle der Strahlung mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegt. Eine Rotverschiebung von z=2 entspricht einer Geschwindigkeit von 0.8c. Zu Zeiten Hubbles waren die bestimmten Rotverschiebungen kleiner als EINS und die Näherung $z \approx \beta$ war ausreichend.

Beispiele aus der Sonnenforschung

Gebündelte Millionen Grad heiße Plasmastrahlen treten täglich mit Geschwindigkeiten von bis zu 150 km/s aus der Sonnenoberfläche heraus [**?**]. Diese so genannten Spikulen

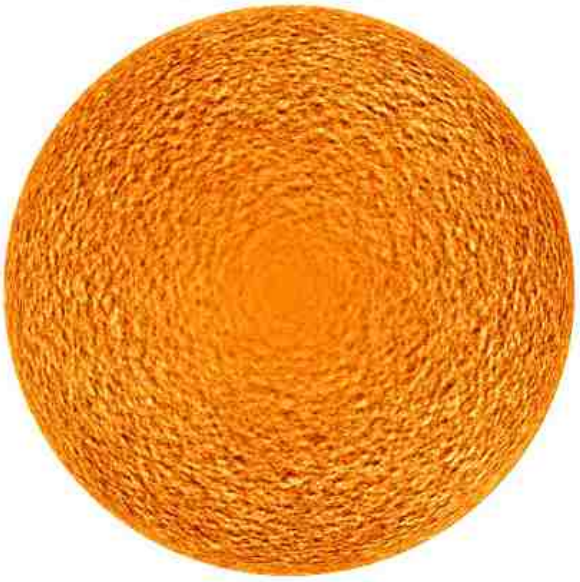


Abb. 5.27: Dopplergram, das am 13. Januar 1996 aufgenommen wurde. Für das Bild wurde die Rotation der Sonne abgezogen. Die körnige Struktur zeigt unterschiedliche Geschwindigkeiten der Sonnenoberfläche. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist unten angegeben. Die Farbskala muss man so lesen. Dunkel eingezeichnet ist eine Bewegung auf den Betrachter zu und hell eine Bewegung vom Betrachter weg [**?**].

entstehen durch die komplexe Wechselwirkung der lokalen Magnetfelder mit der ionisierten Materie nahe der Sonnenoberfläche. Man nimmt an, dass Spikulen eine wichtige Rolle bei der Aufheizung der Sonnenkorona und beim Phänomen Sonnenwind spielen [**?**]. Abb. 5.27 zeigt ein Geschwindigkeitsmappe der auf der Sonnenoberfläche herrschenden Dynamik. Es wurde aufgenommen mit dem Satelliten SOHO[31] und stellt den Mittelwert einer Serie von Dopplergrammen[32] dar, die über einen Zeitraum von 30 Minuten aufgenommen wurden, wobei der Beitrag der Sonnenrotation subtrahiert wurde.

Konzentriert man sich auf einen bestimmten Spektralbereich und hier auf die Emission bestimmter Elemente erhält man noch detailliertere Informationen. Abb. 5.28 zeigt als Beispiel eine Momentaufnahme der Geschwindigkeiten des Plasmas in der äußeren Korona. Die Korona ist mit über einer Million Grad Kelvin erheblich heißer als die Oberfläche der Sonne mit 6 000 K.[34] Bislang ist für die Astrophysik nicht geklärt, woher die Energie für diese Aufheizung kommt. Möglicherweise transportieren magnetische Tornados Energie von der Oberfläche in die äußere Atmosphäre der Sonne. Mit Hilfe des relativistischen Dopplereffekts lassen sich die enormen Rotationsgeschwindigkeiten der

[31] SOHO: SOlar Heliospheric Observatory

[32] *Lexikon:* Ein Dopplergramm ist eine zweidimensionale Darstellung der Annäherung und Entfernung eines Objekts in Bezug auf einen Beobachter.[33]

[34] *Lexikon:* Man unterteilt die Sonne radial in unterschiedliche Bereiche, siehe Abb. 5.29. Jede der Schichten trägt zur Energieerzeugung bei. Der Kern der Sonne ($R < 0.25 \cdot R_{sun}$) ist extrem dicht. Hier findet die Fusionsprozesse bei Temperaturen von $15 \cdot 10^6$ K statt. Oberhalb des Kerns ($0.25 \cdot R_{sun} < R < 0.70 \cdot R_{sun}$) findet man die Strahlungszone. Die mittlere freie Weglänge der Photonen ist aufgrund der enormen Dichte gering. Licht wird in diesem Bereich nur langsam transportiert, da es verstärkt zu elastischer und inelastischer Lichtstreuung kommt. Die Konvektionszone nennt man die äußerste, etwa $2 \cdot 10^8$ m dicke Schicht der Sonne. Hier erfolgt der Transport der Energie zur Oberfläche durch Konvektionszellen. Heißes Plasma am Boden der Zone strömt zur Oberfläche, gibt Wärme an den Weltraum ab und sinkt zurück auf den Boden der Konvektionszone.

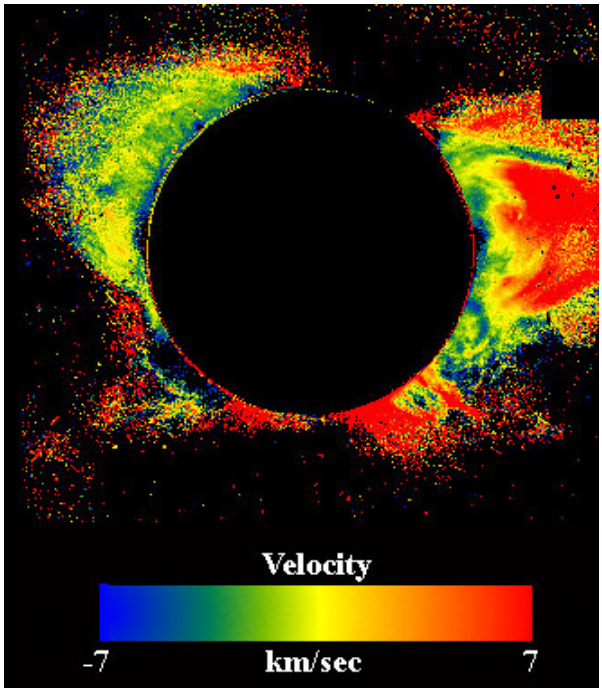


Abb. 5.28: Im LASCO-Experiment[a] wird mit einem abstimmbaren und schmalbandigen Fabry-Perot-Filter die Spektrallinien[b] von Fe-X (637 nm) und Fe-XIV (530 nm) aufgelöst. Aus den Linienprofilen werden Strömungsmuster in der Korona bestimmt[?].

[a]LASCO: Large Angle and Spectrometric Coronagraph

[b]Diese Notation wird in der Plasmaphysik verwendet: Fe-I sind neutrale Eisenatome; Fe-X sind 9-fach geladen, Fe-XIV sind 13-fach geladen.

tatsächlich vorkommenden Tornados bestimmen. In der Abbildung [?] auf der Folie ist rechts jeweils unten die relative Geschwindigkeit aufgetragen. Die Farbkodierung macht deutlich, dass es sich tatsächlich um eine Rotationsbewegung handelt. Abb. 5.30 zeigt eine Detailaufnahme eines Tornados auf der Sonne [?].[35]

Beispiele aus der Astrophysik

Im Jahr 1912 entdeckte Henrietta Leavitt, dass es einen eindeutigen Zusammenhang gibt zwischen der Periode einer Klasse veränderlicher Sterne, genannt Cepheiden und ihrer Helligkeit. Die Chepeiden sind jünger als die Sonne, haben aber eine höhere Dichte. Die

[35]Oben: Hα-Emission; Mitte: Lichabsorption bei 193 Å; Unten: Hα-Dopplermessung

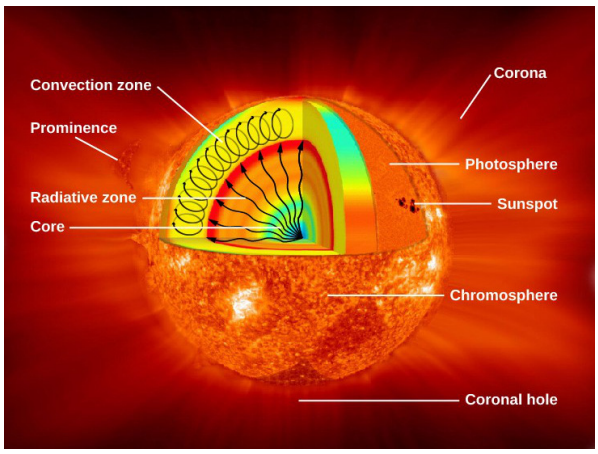


Abb. 5.29: Aufbau der Sonne [?].

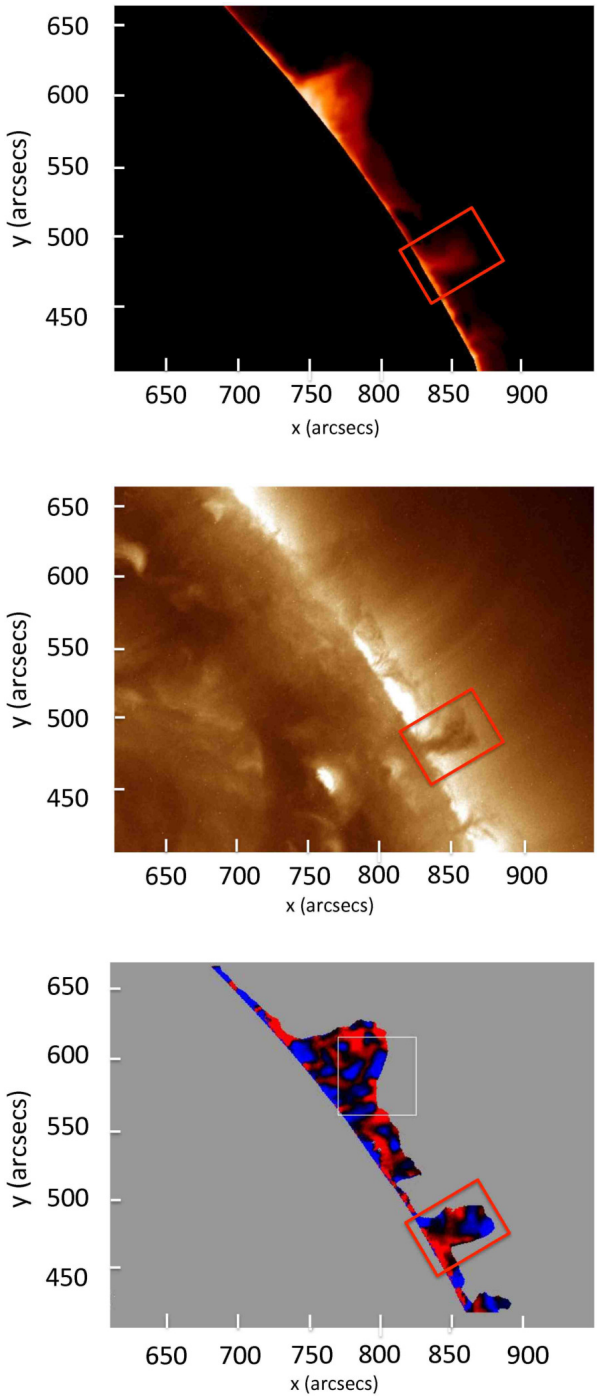


Abb. 5.30: Prominence observed on September 24, 2013 at 12:22 UT. Top panel: Hα image from the MSDP instrument[a] operating on the Solar Tower in Meudon. Middle panel: SDO/AIA 193Å image.[b] The prominence in 193 Å is observed in absorption. Bottom panel: H_α Doppler shift map. The tornado is in the red box, which corresponds to the field of view of the top panels of Figs. 4-7 [**?**].

[a] MSDP: Multi-channel Subtractive Double Pass

[b] SDO: Solar Dynamic Observatory; AIA: Atmospheric Imaging Assembly

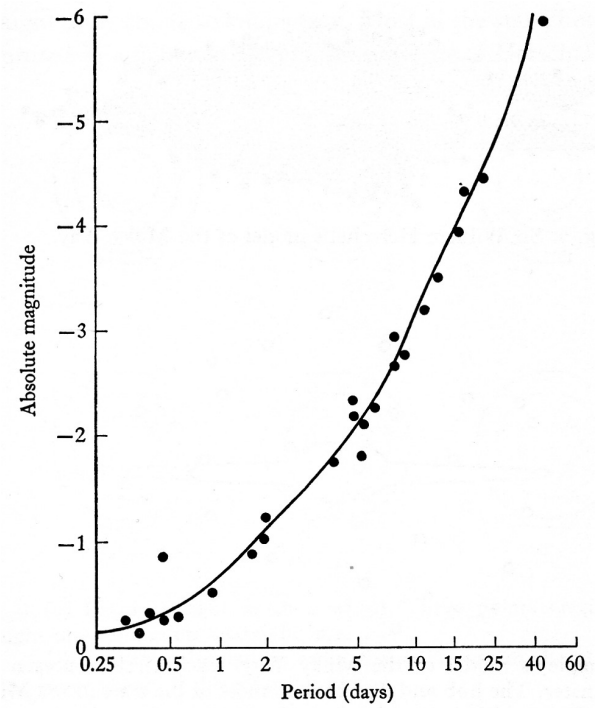


Abb. 5.31: Perioden-Helligkeits Beziehung der Chepheiden. Die Periode des variablen Sterns kann von der Erde aus anhand der Lichtintensitätsschwankungen gemessen werden. Seine absolute Leuchtkraft ermittelt man anhand dieser Information aus der Grafik. Beispielsweise ist der Polarstern ein Chepeidenstern, der seine Leuchtkraft zwischen 1.95 und 2.05 mit einer Periode von 4 Tagen verändert [**?**].

Helligkeit variiert aufgrund einer Kontraktion und Expansion der Sternatmosphäre, die hervorgerufen wird durch die Heliumatome. Helium wirkt als Strahlungsventil, dass sich öffnet, wenn die Atome ionisiert werden. Kommt es zur Ionen-Elektronen Rekombinieren reduziert sich der Strahlungsdruck. Wenn Strahlung entweicht verdichtet sich die Atmosphäre und es kommt zur Rekombination, wodurch der Strahlungsdruck ansteigt. Der erhöhte Druck führt zur einer Expansion. Strahlung entweicht, was zur Ionisation der He-Atome führt. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch. Die hellsten Sterne zeichnen sich durch lange Perioden aus, siehe Fig. 5.31. Sie entwickelte daraus eine Methode, aus dem Unterschied absoluter und scheinbarer Helligkeit, die Entfernung der Cepheiden zu bestimmen. Die Technik erlaubt es, die Entfernung von Sternen bis zu einem Abstand von 1 MPc zu bestimmen.

Das Problem der Astronomen ist, dass sich mit Hilfe einer Messung der Parallaxe (siehe Kapitel *Äther*) nur Sterne in unserer unmittelbaren Umgebung in ihrer Entfernung bestimmen lassen. Bei größeren Abständen versagt die Messmethode. Cepheiden sind so genannte Pulsationsveränderliche und werden in der Astronomie als Standardkerzen[36] bezeichnet. Diese Objekte leuchten umso heller, je langsamer sie pulsieren. Die Geschwindigkeit der Pulsation (radiale Größenänderung) kann über den Dopplereffekt bestimmt werden. Vergleicht man die ermittelte absolute Helligkeit mit der scheinbaren Helligkeit am Himmel (Messung mit dem Fernrohr) kann man die Entfernung abschätzen.

A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre

[36] *Lexikon:* Als **Standardkerzen** bezeichnet man in der Astronomie Objekte, deren absolute Helligkeit man messen kann. Anhand ihrer scheinbaren Helligkeit kann man auf ihrer Entfernung schließen.

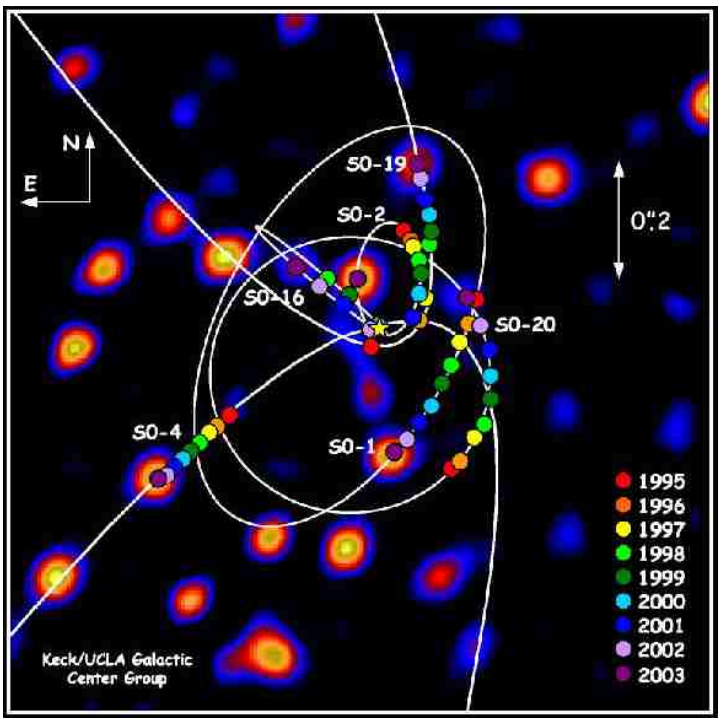


Abb. 5.32: Dutzende junger Sterne kreisen mit hoher Geschwindigkeit um das zentrale Schwarze Loch der Milchstraße. Durch die Aufzeichnung der Sternpositionen über viele Jahre berechneten Astronomen die Umlaufbahnen und schätzten darüber die Masse des Schwarzen Lochs ab, das die Sterne umkreisen [**?**].

of the Milky Way [?]: Many galaxies are thought to have supermassive black holes at their centres - more than a million times the mass of the Sun. Measurements of stellar velocities and the discovery of variable X-ray emission have provided strong evidence in favour of such a black hole at the centre of the Milky Way, but have hitherto been unable to rule out conclusively the presence of alternative concentrations of mass. Here we report ten years of high-resolution astrometric imaging that allows us to trace two-thirds of the orbit of the star currently closest to the compact radio source (and massive black-hole candidate) Sagittarius A*. The observations, which include both pericentre and apocentre passages, show that the star is on a bound, highly elliptical keplerian orbit around Sgr A*, with an orbital period of 15.2 years and a pericentre distance of only 17 light hours. The orbit with the best fit to the observations requires a central point mass of $(3.7 \pm 1.5) \cdot 10^6$ solar masses. The data no longer allow for a central mass composed of a dense cluster of dark stellar objects or a ball of massive, degenerate fermions.

Wie man inzwischen weiß, befindet sich im Zentrum nahezu jeder Galaxis ein schwarzes Loch. Hier ist die Masse vieler Sterne auf engstem Raum zusammengepresst, wodurch sich eine gewaltige Gravitationswirkung auf andere Himmelkörper ergibt. Die Radioquelle Sagittarius A* im Zentrum der Milchstraße ist ein supermassereiches Schwarzes

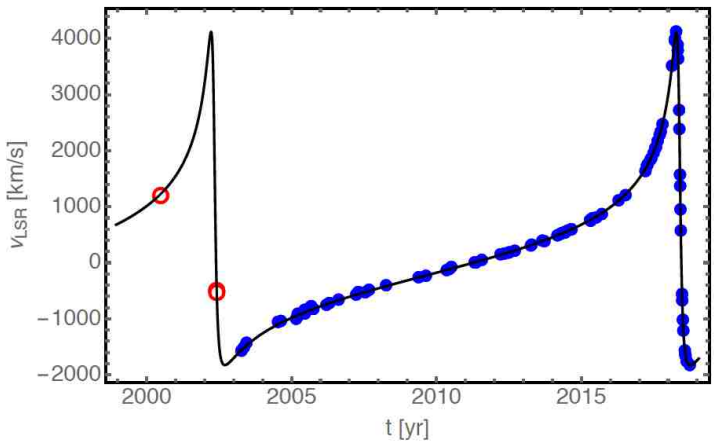


Abb. 5.33: Radiale Geschwindigkeit des Sterns S2, der sich um das Schwarze Loch im Zentrum der Milchstrasse bewegt. Die durchgezogene Linie wurde aus dem berechneten Orbit ermittelt [**?**].

Loch von $4.3 \cdot 10^6$ Sonnenmassen.[37] Abb. 5.32 zeigt die Keplerbahnen der Sterne in der Nähe des Schwarzen Lochs in der Milchstraße. Aus den Keplerdaten wurde die Position und die Masse des Schwarzen Lochs bestimmt [**?**].

The Shortest-Known-Period Star Orbiting Our Galaxy's Supermassive Black Hole [**?**]**:** Stars with short orbital periods at the center of our Galaxy offer a powerful probe of a supermassive black hole. Over the past 17 years, the W. M. Keck Observatory has been used to image the galactic center at the highest angular resolution possible today. By adding to this data set and advancing methodologies, we have detected S0-102, a star orbiting our Galaxy's supermassive black hole with a period of just 11.5 years. S0-102 doubles the number of known stars with full phase coverage and periods of less than 20 years. It thereby provides the opportunity, with future measurements, to resolve degeneracies in the parameters describing the central gravitational potential and to test Einstein's theory of general relativity in an unexplored regime.

Mit Teleskopen beobachtet man die Umlaufbahnen von Sternen um das Schwarze Loch. Man stellt Perioden von wenigen Dekaden fest. Ausgewertet werden die Spektrallinien von Wasserstoff-, Helium- und Kohlenmonoxid. Interessant ist die Geschwindigkeitsänderung des Sterns S2. Beim Durchlaufen des Perihels erreicht er innerhalb kurzer Zeit eine hohe Geschwindigkeit. Die Messungen liefern eine Doppler-Rotverschiebung von $+4 \cdot 10^6$ m/s. Wochen später beschleunigt ihn die Schwerkraft des Schwarzen Lochs auf $-2 \cdot 10^6$ m/s (Abb. 5.33) Die maximale Geschwindigkeit von S2 entspricht 2.5 Prozent der Lichtgeschwindigkeit [**?**]. Die Bewegung des Sterns ist also relativistisch. Dies

[37] The Nobel Prize in Physics 2020 was divided, one half awarded to Roger Penrose *for the discovery that black hole formation is a robust prediction of the general theory of relativity*, the other half jointly to Reinhard Genzel and Andrea Ghez *for the discovery of a supermassive compact object at the centre of our galaxy.*

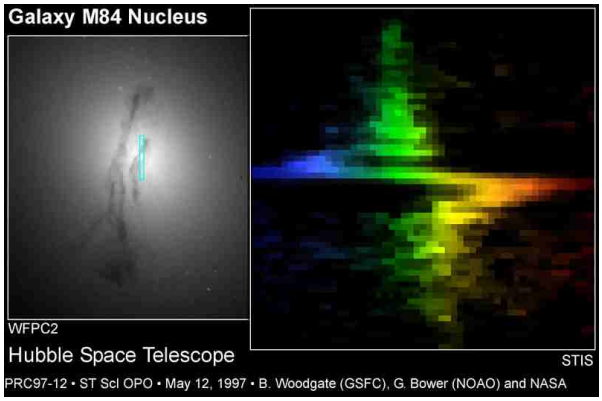


Abb. 5.34: Zentralbereich der Galaxie M84, in dem sich ein massereiches Schwarzes Loch befindet. Der blaue Rahmen markiert die Stelle, an der ein Spalt über das Zentrum der Galaxie gelegt wurde, um die Geschwindigkeitsmessung durchzuführen (auf den Beobachter zu (blau); vom Beobachter weg (gelb/rot)). Ohne das zentrale Schwarze Loch würden alle Werte grün sein [**?**].

erlaubt es, die Relativitätstheorie in Bezug auf die Bewegung eines Körpers im Schwerefeld eines Schwarzen Lochs zu überprüfen.

Im der Galaxis M87 umkreist ein Staubmantel das dort befindliche schwarze Loch. Die astronomische Beobachtung ergibt eine Verschiebung einer charakteristischen Emissionslinie um 0.9 nm. ($0.9 \cdot 10^{-9}$ m). Eingesetzt in die Gleichung für den relativistischen Dopplereffekt ergibt sich eine Rotationsgeschwindigkeit von 0.18% der Lichtgeschwindigkeit im Abstand von 100 Lichtjahren vom schwarzen Loch. Nutzt man nach dem Virialsatz[38] das Kräftegleichgewicht von Gravitation und Zentripetalkraft aus, ergibt sich eine gewaltige Masse für das schwarze Loch im Zentrum von M87. Dazu setzt man Gravitationskraft und Zentripetalbeschleunigung gleich

$$G_N \frac{m_{dust} \cdot M_{hole}}{r_{dust}^2} = m_{dust} \frac{v_{dust}^2}{r_{dust}} \tag{5.21}$$

und berechnet aus den ermittelten Werten die Masse des Schwarzen Lochs

$$M_{hole} = \frac{v_{dust}^2 \cdot r_{dust}}{G_N} \tag{5.22}$$

mit $4.12 \cdot 10^{39}$ kg oder $2 \cdot 10^9$ Sonnenmasse. Diese Schwarze Loch ist nochmal einen Faktor 10^3 schwerer als das in der heimischen Milchstraße. Abb. 5.2 zeigt, dass das supermassive Schwarze Loch in M87 dafür sorgt, dass ein intensive Strom hochenergetischer Teilchen ausströmt. In entfernteren Galaxien kann man die Bewegung der einzelnen Sterne nicht vermessen werden. Hier detektiert man die Bewegung von Sternen und Gaswolken nahe dem Zentrum dieser Systeme. Die über den Dopplereffekt bestimmten Geschwindigkeiten weisen auf zentrale Objekte hin, deren Masse das 10^6- bis 10^9-fache der Sonnenmasse beträgt, siehe Abb. 5.34.

[38] *Lexikon:* Der **Virialsatz** von Rudolf Clausius [**?**] stellt eine Beziehung zwischen der zeitlich gemittelten Kinetischen und Potentiellen Energie in einem abgeschlossenen physikalischen Systems her.

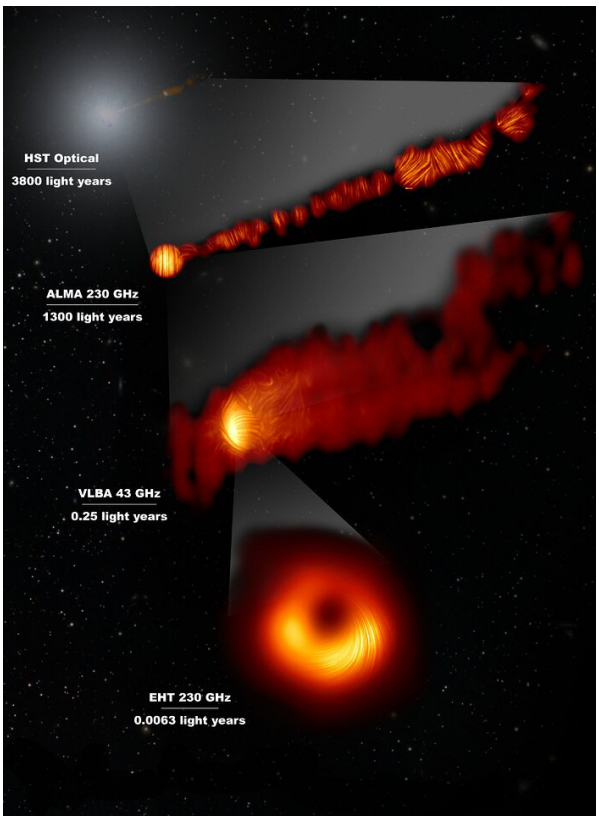


Abb. 5.35: This composite image shows three views of the central region of the Messier 87 (M87) galaxy in polarised light and one view, in the visible wavelength, taken with the Hubble Space Telescope. The galaxy has a supermassive black hole at its centre and is famous for its jets, that extend far beyond the galaxy. The Hubble image at the top captures a part of the jet some 6 000 light years in size. aufgenommen vom *European Southern Observatory* in Chile [**?**].

A Sun-like star orbiting a black hole [**?**]**:** We report discovery of a bright, nearby (G=13.8; d=480 pc) Sun-like star orbiting a dark object. We identified the system as a black hole candidate via its astrometric orbital solution from the *G*aia mission. Radial velocities validated and refined the *G*aia solution, and spectroscopy ruled out significant light contributions from another star. Joint modeling of radial velocities and astrometry constrains the companion mass to M_2=9.62±0.18 $M_\odot$. The spectroscopic orbit alone sets a minimum companion mass of $M_2 > 5\,M_\odot$; if the companion were a 5 $M_\odot$ star, it would be 500 times more luminous than the entire system. These constraints are insensitive to the mass of the luminous star, which appears as a slowly-rotating G dwarf ($T_{\rm eff} = 5850$ K, $\log g = 4.5$, $M = 0.93\,M_\odot$), with near-solar metallicity ([Fe/H] = −0.2) and an unremarkable abundance pattern. We find no plausible astrophysical scenario that can explain the orbit and does not involve a black hole. The orbital period, $P_{\rm orb}$185.6 days, is longer than that of any known stellar-mass black hole binary. The system's modest eccentricity (e=0.45), high metallicity, and thin-disk Galactic orbit suggest that it was born in the

Milky Way disk with at most a weak natal kick. How the system formed is uncertain. Common envelope evolution can only produce the system's wide orbit under extreme and likely unphysical assumptions. Formation models involving triples or dynamical assembly in an open cluster may be more promising. This is the nearest known black hole by a factor of 3, and its discovery suggests the existence of a sizable population of dormant black holes in binaries. Future *G*aia releases will likely facilitate the discovery of dozens more.

Weiße Zwerge beenden ihr Leben in thermonuklearen Explosionen, die Supernovae vom Typ Ia genannt werden. Diese Explosionen erzeugen praktisch alle Elemente außer Wasserstoff und Helium. Supernovae vom Typ Ia werden von Kosmologen auch als Standardkerzen zur Messung astronomischer Entfernungen verwendet. Das ist die Methode, die zur Entdeckung der beschleunigten Expansion des Universums führte. Überraschenderweise gibt es keinen Konzens bei der Beschreibung von Supernova Explosionen vom Typ Ia, weder über die Ursache noch über den genauen Mechanismus. Bislang durchgeführte Untersuchungen basieren auf Röntgenspektrokopie, was, aufgrund der geringen Ausbeute an Photonen, nur eingeschränkte Aussagen erlaubt. Eine kürzlich vorgestellte Methode, genannt *supernova remnant tomography*, charakterisiert unterschiedliche Schichten des Materials, das durch die Explosion nach außen geschleudert wird, mittels optischer Spektroskopie [**?**]. Mit Hilfe des Relativistischen Dopplereffekt wurden die Ausstoßgeschwindigkeiten der Schockwellen orstaufgelöst bestimmt. Bei der Analyse zweier Supernovae mit der Methode stellten man fest, dass bei einer der Explosionen ein Weißen Zwerg mit einer Masse unter der Chandrasekhar-Grenze stammte. Überraschend, denn eine Grenzmasse von 1.4 Sonnenmassen wird in der Astrophysik oft als die Mindestmasse angesehen, die für die Explosion eines Weißen Zwergs erforderlich ist. Die Theoretiker müssen jetzt Modelle entwickeln, um ihre Ergebnisse mit den Beobachtungen vergleichen zu können. Das wird wie folgt ablaufen: Beginnend mit einem Modell des Vorläufersterns muss die Explosion und das Kernbrennen beschrieben, werden. Dann benötigt man die Entwicklung des Supernova und der resultierenden Stoßwelle und schließlich die zeitabhängige Häufigkeit der erzeugten relevanten Elemente. Dadurch erhofft man sich ein vertieftes Verständnis der Dynamik von Supernova-Explosionen.

Die Lyman-Break-Technik gestattet es, effizient stark rotverschobene Galaxien (Lyman-Break-Galaxien) nachzuweisen. Jede Galaxie beinhaltet Quellen ultravioletter Strahlung, die die unmittelbare Wasserstoff-Umgebung abtasten. Im Ruhesystem des Wasserstoff (Kapitel *Bohrsches Atommodell*) findet man bei 91.2 nm die Seriengrenze der Lyman-Serie und bei 121 nm die Lyman-α-Linie. Dadurch kommt es in diesem Wellenlängenbereich zu starken Einbrücken in der Transmission von Strahlung aus der Galaxis und es bilden sich zwei charakteristische Absorptionskanten aus. Oberhalb von 91.2 nm wird die Strahlung von den Wasserstoffatomen absorbiert. Strahlung mit Wellenlängen geringer als 91.2 nm führt zur Ionisation von Wasserstoff, sodass das ultraviolette Licht noch stärker abgeschwächt wird. Durch die Expansion des Universums verschiebt sich nicht nur das ausgesendete Licht entfernter Galaxien zu längeren Wellenlängen, sondern auch dessen Absorption und damit die typische Lage des Lyman-Break. Fällt die Intensität

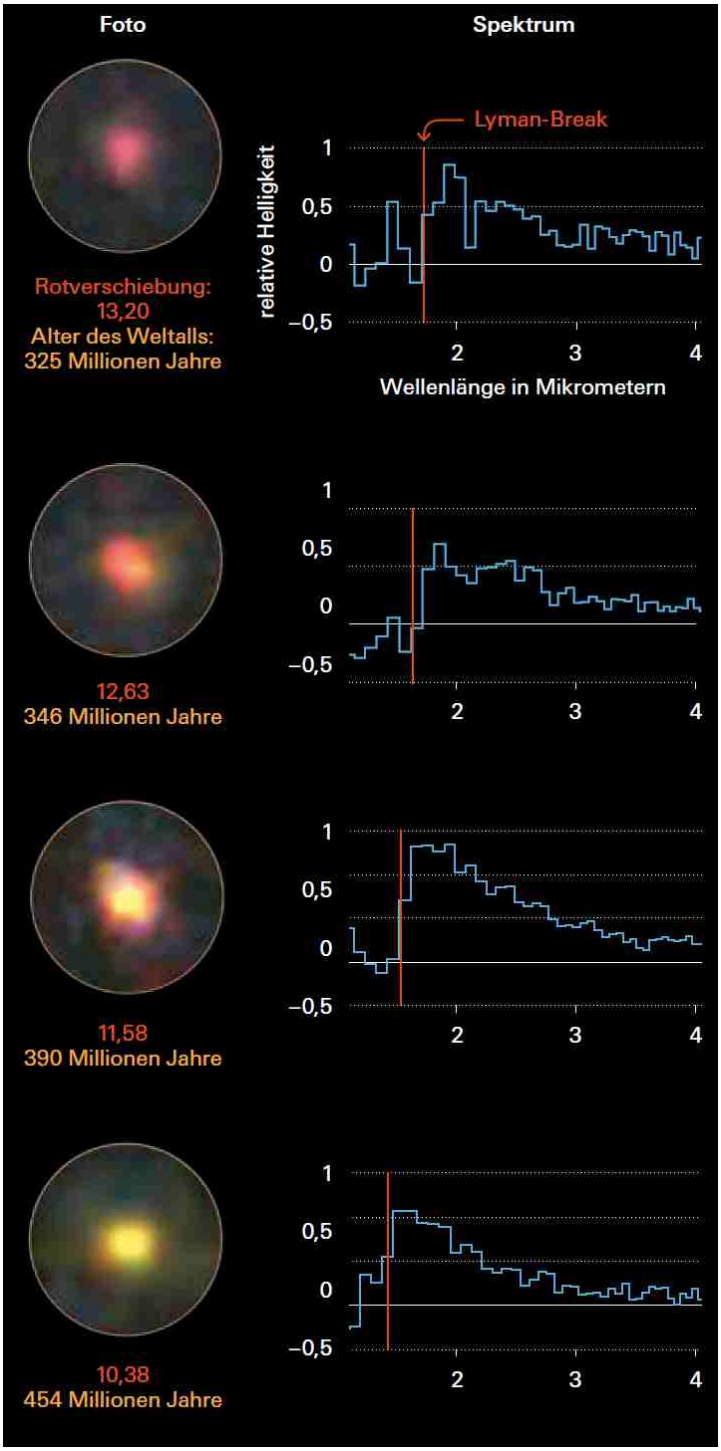


Abb. 5.36: Je weiter entfernt eine Galaxie ist, desto stärker ist ihr Licht ins Rote verschoben. Ein charakteristischer Sprung tritt beim Lyman-Break auf, bei dem Wasserstoff die Strahlung absorbiert. Der Verlauf der Lichtkurven belegt, dass die Strahlung weniger als 500 Millionen Jahre nach dem Urknall ausgesendet wurde [**?**].

im Spektrum einer Galaxie bei längeren Wellenlängen ab, dann ist sie weiter entfernt. Rotverschiebungen von bis zu z=13.2 wurden so mittlerweile identifiziert. Abb. 5.36 zeigt Beispiele. Das bedeutet, dass das Licht weniger als 400 Millionen Jahre nach dem Urknall emittiert wurde [**?**].

Dunkle Materie^{4LP}

The conclusion is inescapable that non-luminous matter exists beyond the optical galaxy.

Vera Rubin (1980)

Sterne zu zählen wurde zuerst von Herschel im 18. Jahrhundert durchgeführt. Aus der Verteilung am Himmel schloss er auf eine diskusförmige Milchstraße. Es ist Shapley zu verdanken, der 1918 die heimische Sonne nicht ins Zentrum, sondern an den Rand der Milchstraße in 10kPc Entfernung zu platzierte. Es dauerte bis 1927, bis Lindblad und Oort anhand der Bewegung der Sterne heraus fanden, dass die Milchstraße rotiert. Immanuel Kant hat dies im Jahr 1755 anhand der abgeplatteten Form schon vorher vermutet. Oort bestätigte auch Kants Vermutung, dass die Milchstraße nicht starr wie ein Wagenrad, sondern ähnlich dem heimischen Planetensystem rotiert.

Zum Abschluss dieses Kapitels ein Ausflug in die Kosmologie. Die Arbeiten von Einstein und Hubble deuteten darauf hin, dass sich das Universum langsam und gleichmäßig schnell ausdehnt. Im Zuge dieser Expansion formten sich die ersten Elemente. Dazu musste das Universum auf etwa 3000 K abkühlen. Unter diesen Bedingungen formt sich Wasserstoff und die Elektronen gelangen in den elektronischen Grundzustand (Kapitel *Bohrsches Atommodell*). Das geschah etwa 380 000 Jahre nach dem Urknall. [**?**] Wie kann man die Expansion des Universums überprüfen? Man kartographiert die am weitesten entfernten Systeme, beispielsweise, indem man nach hellen Ia-Supernova Ausbrüchen sucht (siehe Kapitel *Gleichzeitigkeit*). Zwei Forschergruppen haben dies Mitte der 90er Jahre getan und festgestellt, dass sich diese Standardkerzen in größerer Entfernung befinden als erwartet. Der Schluss, den die Forscher zogen war, dass das Universum immer schneller expandiert. Gibt es eine mysteriöse Antigravitationskraft, die die Objekte im Universum auseinander treibt? Michael Turner nannte dieses Phänomen Dunkle Energie. Die Astrophysiker gehen davon aus, das 80% der Materie im Universum aus Dunkler Materie besteht. Während die sichtbare Materie nur 5% Prozent zur Energiedichte beisteuert, soll der Anteil durch die Dunkle Materie 25% Prozent ausmachen. Abb. 5.37 illustriert das Verhältnis am irdischen Beispiels eines Eisbergs. Bislang hat noch niemand Dunkel Materie mit dem Auge gesehen. Herkunft und Zusammensetzung sind ebenfalls ungeklärt. Es ist also eine Herausforderung diesen scheinbar dominanten Anteil an Masse und Energie im Universum nachzuweisen.

Link to: `Dunkle Materie Simulator`

Wie fing alles an? In den Dreißiger Jahren vermuteten Zwicky [**?**] und Smith [**?**], dass nicht sichtbare Materie beträchtlicher Masse den Virgo Galaxienhaufen stabilisiert. Diese

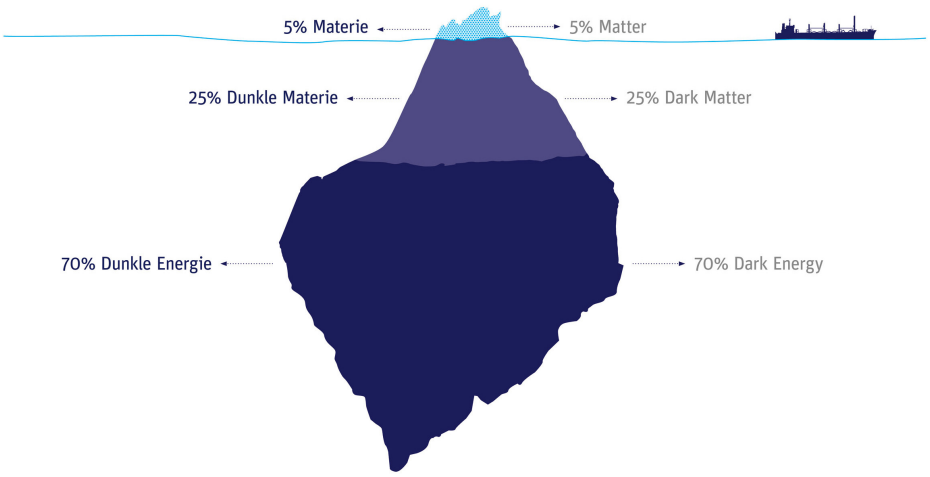


Abb. 5.37: Schematische Darstellung der Verteilung von normaler Materie, sowie Dunkler Materie und Energie im Universum. Nach den Vorstellungen der Astrophysiker ist nur ein Bruchteil der Materie tatsächlich sichtbar [**?**].

Überlegung fielen nicht auf fruchtbaren Boden. Erste Hinweise auf die Existenz Dunkler Materie ergaben sich aus der Bewegung von Andromeda (M31) [**?** **?**] (Abb. 5.38) und Galaxien im Galaxienhaufen Coma. Die gemessenen Geschwindigkeiten sind im Bezug zu die astronomisch beobachteten Sternen, Gas- und Staubwolken viel zu groß, wie Messungen des relativistischen Dopplereffekts zeigen. Die daraus resultierende Schwerkraft reicht bei weitem nicht aus, die Objekte zu halten. Das Phänomen könnte sich durch die Anwesenheit nicht sichtbarer Masse erklären lassen. Massereiche, astrophysikalische, kompakte Halo-Objekte wie beispielsweise braune Zwerge und schwarze Löcher, die auch für den Astronomen nicht sichtbar sind, kommen nicht als einzige Erklärung für die Beobachtungen infrage. Man vermutete eine völlig neue Materieform: Dunkle Materie [**?**]!

Geht man allein nach der Helligkeit der Sterne in einer Galaxis, ist die überwiegende Masse im Zentrum konzentriert. Abweichungen zwischen berechneter und beobachteter Rotation in der Andromedagalaxie und auch in anderen Galaxien deuteten auf Dunkle Materie hin [**?**]. Die oben gezeigte Rotationskurve zeigt für größere Abstände vom Zentrum der Galaxis einen nahezu horizontalen Verlauf. Dieses Verhalten ist durch eine im Zentrum der Galaxis konzentrierte Masse nicht zu erklären. In dem Fall sollten die äußeren Spiralarme der Galaxis viel langsamer rotieren. Eine mögliche Erklärung des Phänomens ist Dunkle Materie. Um eine flache Rotationskurve zu erreichen, muss sich das Dichteprofil einer Galaxie und ihrer Umgebung von einer unterscheiden, bei der die Masse im Zentrum konzentriert ist. Eine häufig in diesem Zusammenhang verwendete Gleichung für das Dichteprofil stammt von Navarro, Frenk und White [**?**]:

$$\rho_{\mathrm{NFW}}(R) = \frac{\rho_{center}}{\frac{R}{R_S}\left(1+\frac{R}{R_S}\right)^2} \tag{5.23}$$

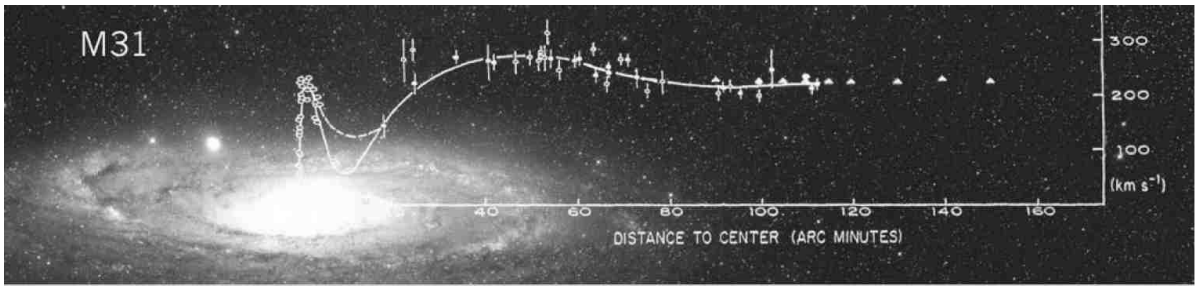


Abb. 5.38: Mittlere optische Radialgeschwindigkeit der Hauptachse von M31 und die Rotationskurve überlagert mit dem Photo von M31. Geschwindigkeiten aus Radioastronomie-Beobachtungen sind durch Dreiecke gekennzeichnet. Die Rotationsgeschwindigkeiten bleiben weit über die optische Galaxie hinaus nahezu konstant, was besagt, dass die Gesamtmasse von M31 linear mit dem Radius ansteigt [**?**].

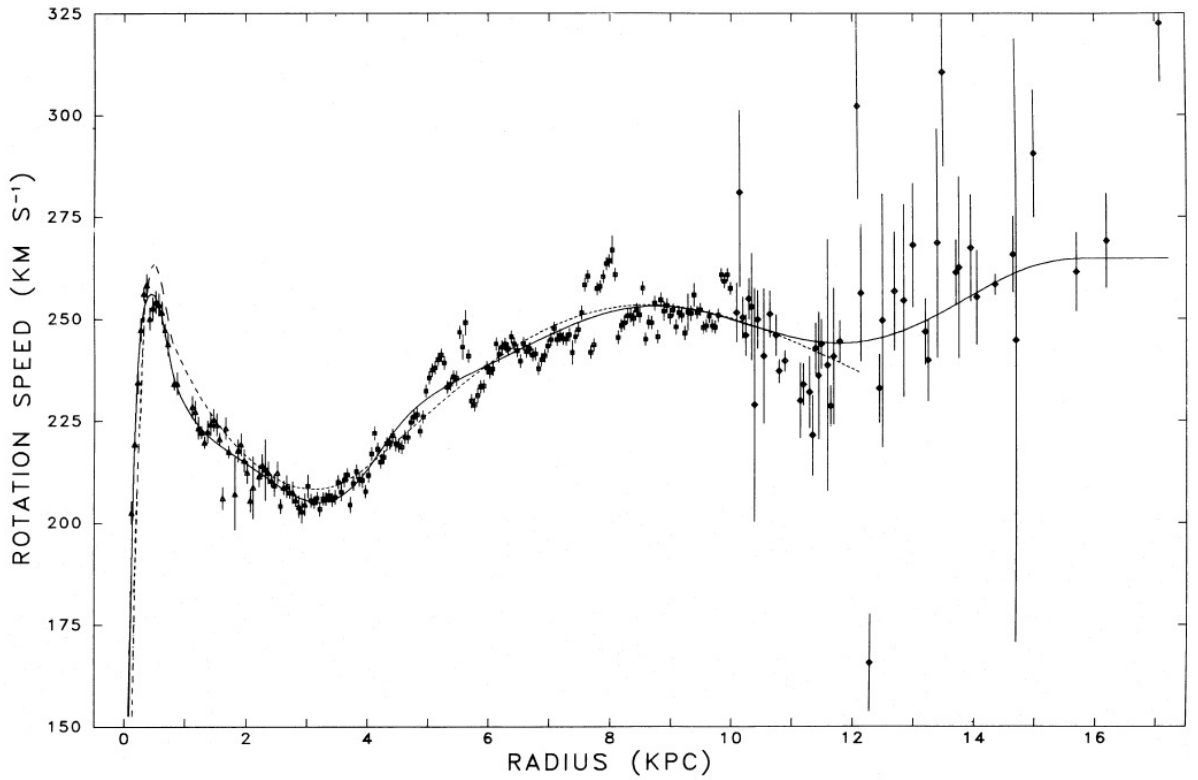


Abb. 5.39: Rotationsgeschwindigkeit der Milchstraße aufgetragen gegen den galaktozentrischen Radius [**?**].

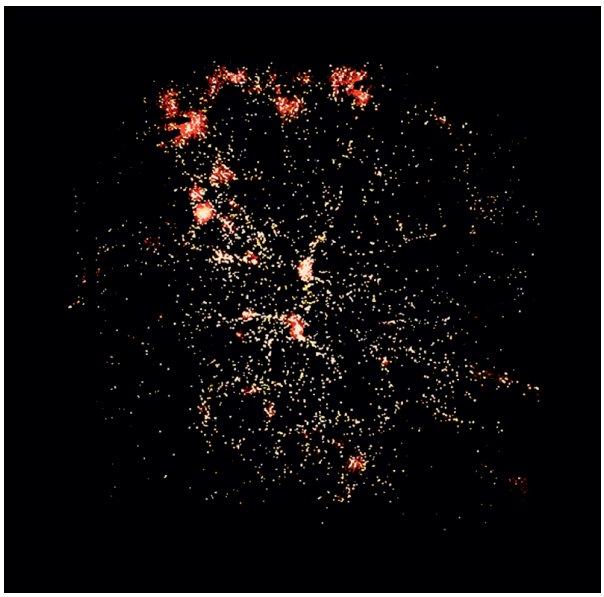


Abb. 5.40: The great wall CfA2 [**?**].

wobei ρ_{center} und R_S einstellbare Parameter sind, die an die unterschiedlichen Halos der Galaxien angepasst werden. Abb. 5.39 zeigt eine Messung der Rotation der Milchstraße und die über das Dichteprofil angepasste Rotationskurve.

Vieles deutet darauf hin, dass eine erhebliche Masse in diesem Bereich vorhanden sein muss. Im Gegensatz dazu nimmt die Leuchtkraft weit ab vom Zentrum der Galaxis deutlich ab. Das heißt, dass das Verhältnis von Massendichte-zu-Leuchtkraftdichte zunimmt. Man deutet dies als weiteren Hinweis darauf, dass hier Dunkle Materie eine Rolle spielt.

Beobachtet man weit ausgedehnte Strukturen im Universum? JA! Huchra und Geller haben 1989 die Positionen von Galaxien im Umkreis[39] von 10^6 pc über systematische Messung der Rotverschiebung der Spektrallinien bestimmt [**?**]. Sie fanden eine filgrane, mauerartige Struktur, die populärwissenschaftlich *The great wall* genannt wird. Die Gravitation der normalen Materie kann die Bildung solcher Großstrukturen nicht erklären. Erst die Einbeziehung Dunkler Materie in Simulationen ergibt ähnliche Strukturen. Das Zentrum des in Abb. 5.40 gezeigten Coma Walls (CfA2 Great Wall) ist $4.25 \cdot 10^8$ Lj von uns entfernt und erstreckt sich über $6.25 \cdot 10^8$ Lj. Die Tiefe der Struktur kann nicht erfasst werden, da durch Gas und Staub der Milchstrasse verdeckt. Der Coma Wall besteht aus drei Galaxien-Superhaufen. Solche *Great walls* sind selten. Man kennt bislang nur sechs.

Die Sloan Great Wall ist eine ausgedehnte Anordnung an Galaxien [**?**]. Neben der Hercules-Corona Borealis Great Wall und dem Quasar-Cluster U1.27 ist sie die größte bislang beobachtete Struktur im Universum. Die Sloan Great Wall ist 10^6 Lj von der Erde entfernt, dreimal so breit wie CfA2 Great Wall und hat eine Länge von $1.37 \cdot 10^6$ Lj.

[39] Das sind $3.26 \cdot 10^6$ Lj.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Eine Radiogalaxie, die ein starkes Radiowellensignal bei λ_{galaxy}=0.525 m aussendet, entfernt sich in Bezug auf die Erde mit einer Geschwindigkeit von v_{galaxy}=0.825c. Welche Wellenlänge λ_{earth} empfängt man auf der Erde?

Da sich die Galaxie mit hoher Geschwindigkeit bewegt, müssen wir die Aufgabe mit Hilfe der Gleichung für den relativistischen Dopplereffekt auswerten.

$$\begin{aligned}
\lambda_{earth} &= \lambda_{galaxy}\sqrt{\frac{1+v_{galaxy}/c}{1-v_{galaxy}/c}} \\
\lambda_{earth} &= 0.525\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{1+0.825}{1-0.825}} \\
\lambda_{earth} &= 1.64\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2: Wie groß ist die Wellenlängenverschiebung eines Sterns, der sich mit Lichtgeschwindigkeit von uns entfernt?[40]

Aufgabe 2.3: Die Spektrallinie (400 nm) im Spektrum einer Sonne ist im Vergleich zur Referenzline, gemessen auf der Erde, um 0.1 nm ins Infrarote verschoben. Welche Geschwindigkeit hat die Sonne in Bezug auf die Erde?

Die Verschiebung der Spektrallinie ins Infrarote bedeutet, dass sich der Stern von der Erde entfernt.

$$\begin{aligned}
\nu_{bewegt} &= \nu_{ruhend}\cdot\left(1-\frac{v}{c}\right) \\
\frac{1}{\lambda_{bewegt}} &= \frac{1}{\lambda_{ruhend}}\cdot\left(1-\frac{v}{c}\right) \\
\frac{v}{c} &= 1-\frac{\lambda_{ruhend}}{\lambda_{bewegt}} \\
\frac{v}{c} &= 1-\frac{4\cdot10^{-9}\,\mathrm{m}}{4.1\cdot10^{-9}\,\mathrm{m}} \\
\frac{v}{c} &= 1-0.99975 \\
\frac{v}{c} &= 2.5\cdot10^{-4} \\
v &= 2.5\cdot10^{-4}\cdot2.998\cdot10^{8}\,\mathrm{m/s} \\
v &= 75\cdot10^{3}\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.4: Im Jahr 1963 bestimmte Maarten Schmidt die Rotverschiebung $(\lambda-\lambda_0)/\lambda_0$ der Galaxie 3C 273 mit 0.158. Mit welcher Geschwindigkeit entfernt sich das Objekt von der Erde?

[40] Antwort: Alle Wellenlängen lägen bei UNENDLICH. Keine Chance etwas zu sehen.

Da sich möglicherweise hohe Geschwindigkeiten ergeben, rechnen wir nicht mit der Näherung. Für die Frequenzverschiebung ergab sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{\nu_0} &= \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\
\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 &= \frac{1-\beta}{1+\beta} \\
(1+\beta)\cdot\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 &= 1-\beta \\
\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\cdot\beta &= 1-\beta \\
\beta\cdot\left(\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2+1\right) &= 1-\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \\
\beta &= \frac{1-\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2}{1+\frac{\nu}{\nu_0}}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung benötigen wir noch die Umrechnung von Wellenlänge in Frequenz bei relativistischen Dopplereffekt:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0} &= 0.158 \\
\frac{\lambda}{\lambda_0}-1 &= 0.158 \\
\frac{\lambda}{\lambda_0} &= 1.158
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Frequenzverschiebung:

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{\nu_0} &= \frac{c}{c}\frac{\nu}{\nu_0} \\
\frac{\nu}{\nu_0} &= \frac{c/\nu_0}{c/\nu} \\
\frac{\nu}{\nu_0} &= \frac{\lambda_0}{\lambda} \\
\frac{\nu}{\nu_0} &= \frac{1}{1.158} \\
\frac{\nu}{\nu_0} &= 0.864
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die obige Gleichung ergibt sich β=0.15 oder eine Geschwindigkeit von $45\cdot10^6$ m/s. Die relativistische Berechnung war also gerechtfertigt. 3C 273 ist ein Quasar

im Sternbild Jungfrau und der erste Quasar, der jemals identifiziert wurde [**?**].

Aufgabe 2.5: A distant star is found to be approaching the earth at a speed of $4.5 \cdot 10^6$ m/s. Its spectrum reveals that is surface is composed largely of hydrogen. In the laboratory the red line of the Balmer series, observed with a hydrogen discharge tube, has a wavelength of 6562Å. What is[41]

(a) the frequency of the laboratory light?

(b) the difference between this frequency and the frequency of the light coming from the star?

(c) this same frequency shift in wave numbers?

(d) the wavelength shift in angstroms?

Aufgabe 2.6: When the spectrum of the light from a distant star is observed and measured, the lines are found to be shifted to shorter wavelengths than when they are produced in the laboratory. The green line of iron, for example, is not at its normal wavelength of 5270 Å, but at 5240 Å. Find[42]

(a) the frequency of the normal green line.

(b) the frequency of the corresponding line from the star.

(c) the frequency difference.

(d) the velocity of the star with respect to the earth.

[41] Answer: (a) $4.57 \cdot 10^{14}$ vib/s; (b) $6.86 \cdot 10^{12}$ vib/s; (c) 229 cm^{-1}; (d) 98.4 Å

[42] Answer: (a) $5.692 \cdot 10^{14}$ vib/ s. (b) $5.725 \cdot 10^{14}$ vib/ s. (c) $3.3 \cdot 10^{12}$ vib/ s. (d) $1.74 \cdot 10^6$ m/ s

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Erklären Sie die Bedeutung der Begriffe *Rotverschiebung* und *Blauverschiebung* im Zusammenhang mit dem relativistischen Dopplereffekt.

2. Wie äußert sich der relativistische Dopplereffekt, wenn die Relativgeschwindigkeit NULL ist?

3. In welcher Weise ändert das Licht einer entfernten Galaxie, wenn sie sich von uns entfernt?

Mössbauer Effekt^{4LP}



Es wurde mir klar, dass ich das eigentliche Experiment noch gar nicht gemacht hatte: Es müsste doch möglich sein, die scharfen Resonanzlinien mit dem linearen Doppler-Effekt zu messen. Ich war so aufgeregt, dass ich quer durch die Vorhalle der TH München in das Büro von Professor Maier-Leibnitz rannte, und rief: Ich nehme den nächsten Zug nach Heidelberg, ich habe das eigentliche Experiment versäumt!

Rudolf Mössbauer im Jahr 1958, kurz nach Einreichung seiner Doktorarbeit

Impulsübertrag des Photons

Eine interessante Anwendung des relativistischen Dopplereffekts ist der Mössbauer-Effekt,[43] auf den wir aus Zeitgründen nicht genauer eingehen können. Ausführlich wird dieser Effekt im Kapitel *Festkörperphysik* behandelt. Die Mössbauer-Diagnostik beruht

[43]The Nobel Prize in Physics 1961 was divided equally between Robert Hofstadter *for his pioneering studies of electron scattering in atomic nuclei and for his thereby achieved discoveries concerning the structure of the nucleons* and Rudolf Ludwig Mössbauer *for his researches concerning the resonance absorption of gamma radiation and his discovery in this connection of the effect which bears his name.*

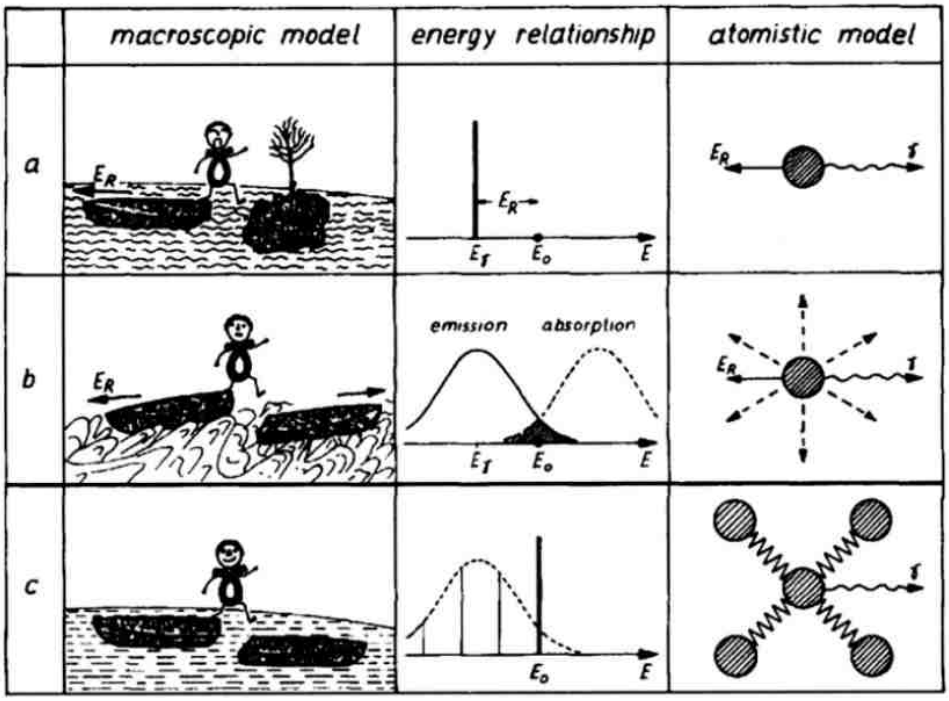


Abb. 5.41: In (a) versucht Herr Gamma, vom Boot auf eine Insel zu springen. Er scheitert jedoch weil kinetische Energie aufgrund des Rückstoßimpulses verloren geht. In (b) verhindert der Wellengang des Sees und der Sprung gelingt vielleicht nicht. Im Atom entspricht dies der thermische Bewegung, die die Emissions- und Absorptionslinien verbreitern (Dopplerverbreiterung). Durch die verbreiterten Linien kommt es zur teilweisen Überlappung. In (c) ist der Teich gefroren und der Sprung gelingt da kein merklicher Rückstoßimpuls auftritt. In (a) und (b) sind die Atom frei beweglich, während in (c) das Atom in ein Kristallgitter eingebunden ist. Dies kann man sich wie ein System von Feder vorstellen, die das Atom fixieren [**?**].

auf der rückstoßfreien Emission und Absorption von γ-Photonen[44] durch Atomkerne, siehe zur Illustration Abb. 5.41. Die Quantenphysik stellt fest: Atome und Kerne können Energie nur bei bestimmten Energien ab- bzw. aufnehmen. Tatsächlich wechselt das System bei der Emission eines Photons von einem definierten Energiezustand E_2 in einen anderen Zustand E_1. Für die Energie emittierten Photons E_{photon} (siehe Kapitel *Bohrsches Atommodell*) gilt:

$$E_{photon} = E_2 - E_1 \tag{5.24}$$

Für uns ist interessant, wenn im nachfolgenden Schritt ein anderes Atom den umgekehr-

[44] *Lexikon:* **γ-Strahlung** entsteht beim Zerfall radioaktiver Nuklide, wenn sich der resultierende Kern in einem angeregten Zustand befindet. Beim Übergang in den so genannten Grundzustand (siehe Kapitel *Bohrsches Atommodell*) wird hochenergetische Strahlung ausgesendet.

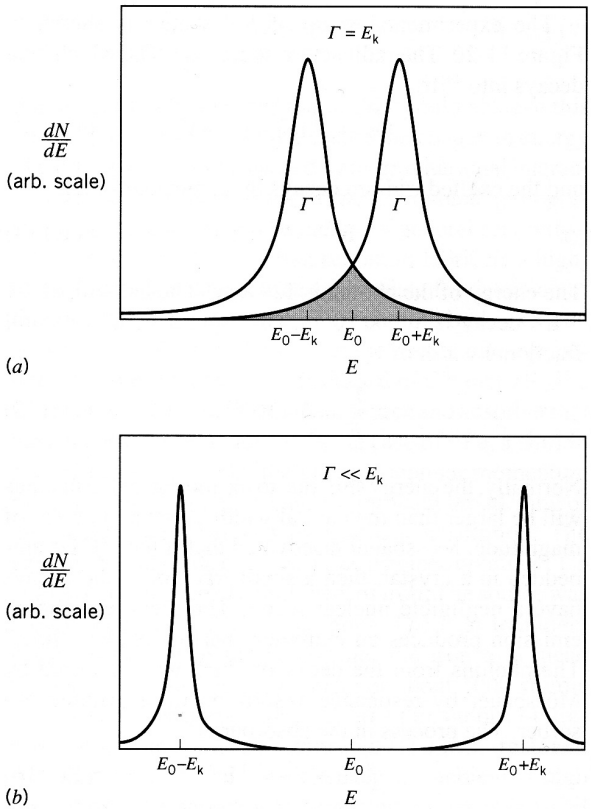


Abb. 5.42: Ein Übergang zwischen zwei Energieniveaus führt zur Emission eines Photons. Die natürliche Linienbreite Γ sorgt für eine Verbreiterung der Emissionslinie. Selbiges gilt für den Prozess der der Absorption. Aufgrund der Photonimpulses ist die Energie des Photons aufgrund des Verlustes durch die Rückstoßenergie E_k reduziert. Oben: $\Gamma = E_k$; Unten $\Gamma \ll E_k$. Nur im obigen Fall kann es zur resonanten Absorption kommen [**?**].

ten Weg geht. Man nennt diesen Prozess Resonanzabsorption.[45] Das Atom wechselt durch die Absorption eines Photons von E_1 zurück nach E_2. Es gibt aber ein kleines Problem. Nämlich, dass man die Rechnung nicht ohne den Impulserhaltungssatz machen darf. Ein geringer Anteil geht als Rückstoßenergie verloren (Kapitel *Einsteingleichung*)

$$E_{kin} = \frac{p_\gamma^2}{2\, m_{nucleus}} = \frac{E_{\gamma^2}}{2\, m_{nucleus} \cdot c^2} \tag{5.25}$$

Die Energie des emittierten Photons ist reduziert und stimmt also nicht mehr. Bei elektronischen Übergängen im Atom ist dieser Rückstoßverlust vernachlässigbar. Zum Beispiel beträgt er für ein Eisenatom bei der Emission eines Photons im sichtbaren

[45] *Lexikon:* **Resonanzabsorption** bezeichnet die Absorption elektromagnetischer Energie bei einer Frequenz, deren Energie gleich der Anregungsenergie des absorbierenden Systems ist. In der Kernphysik versteht man die Resonanzabsorption als Aussendung eines γ-Quants durch einen Kern und die anschließende Absorption desselben Kerns durch einen anderen Kern der gleichen Art.

Spektralbereich (Energie des Photons: 1 eV) nur 10^{-11} eV. Die natürliche Linienbreite (Kapitel *Unschärferelation*) ist deutlich größer als die Rückstoßenergie. Das ändert sich, wenn man die Emission eines Photons aus dem Kern betrachtet. Das Eisenisotop Fe-57 emittiert ein Photon bei 14.4. keV und das Atom erfährt einen Rückstoß von 2 meV. Tatsächlich erfährt der absorbierende Kern ebenfalls einen Rückstoß. Hier ist die Rückstoßenergie deutlich größer als die natürliche Linienbreite ($\pm 2.4 \cdot 10^{-9}$ eV). Das reicht aus, um den Rückweg zu versperren. Resonante Absorption wird damit unterbunden. Abb. 5.42 illustriert die beiden besprochenen Fälle.

Mössbauers Idee war, den Rückstoßbeitrag zu eliminieren, indem man den Prozess in einem Festkörper auslöst. In diesem Fall überträgt sich, aufgrund der erheblich größeren Masse, der gesamte Impuls auf den Kristall und es kommt nicht zu einer Frequenzverschiebung. Noch geringere Linienbreiten erhält man, wenn man die Kristallproben auf tiefe Temperaturen bringt, weil dann die Bewegung der Gitteratome (Dopplerverbreiterung) stark minimiert wird. Damit erhält man eine hochsensible Sonde, die kleinste Änderungen in der Position von γ-Spektrallinien nachweisen kann. Beispielsweise merkt es der Kerns, wenn sich in seiner Umgebung etwas verändert. Er reagiert darauf, indem sich die Resonanzlinie leicht verschiebt. Man nutzt den relativistischen Dopplereffekt, um wieder Resonanzabsorptionsbedingungen zu erreichen. Dazu bewegt man den Sender, um mit extrem hoher spektraler Genauigkeit Absorptionslinien zu vermessen. Änderungen in der Energie der 14.4 keV γ-Linie des Eisenisotops ^{57}Fe können mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-15} bestimmt werden. Kaum eine andere Messmethode erreicht eine solch hohe Auflösung. Abb. 5.43 zeigt ein Beispiel für eine Mössbauer-Messung am Isotop $^{191}_{77}$Ir. Man achte auf die extrem geringen Geschwindigkeitsunterschiede zwischen Sender und Empfänger. Die dadurch verursachte relativistische Dopplerverschiebung im Bereich von μeV reicht aus, um die resonante Anregung abzutasten.

Da die relative Geschwindigkeit von Quelle und Empfänger deutlich geringer ist als c, gilt für die Photonenenergie im Ruhesystem des Absorbers

$$E = E_0 \cdot (1 \pm \beta) \tag{5.26}$$

wobei E_0 die Photonenenergie des Lichts im Ruhesystem des Emitters ist. Die Bewegung verschiebt die Emissionslinie um den Betrag $\Delta E = E_0 \cdot v/c$. Die gemessene Halbwertsbreite der Resonanz sei $4.7 \cdot 10^{-6}$ eV. Die zugehörige Geschwindigkeit des Emitters beträgt

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{9.4 \cdot 10^{-6}\,\text{eV}}{7.3 \cdot 10^{-11}\,\text{eV}} = 7.3 \cdot 10^{-11} \tag{5.27}$$

oder v=0.022 m/ s. Vergleichbare Geschwindigkeiten findet man in Abb. 5.43. Anwendungen der Mössbauer-Spektroskopie sind Messungen der so genannten Hyperfeinaufspaltung in der γ-Emission aus Kernen, die Aufschluss geben über die magnetischen Eigenschaften der Materie oder elektrische Felder am Kernort.

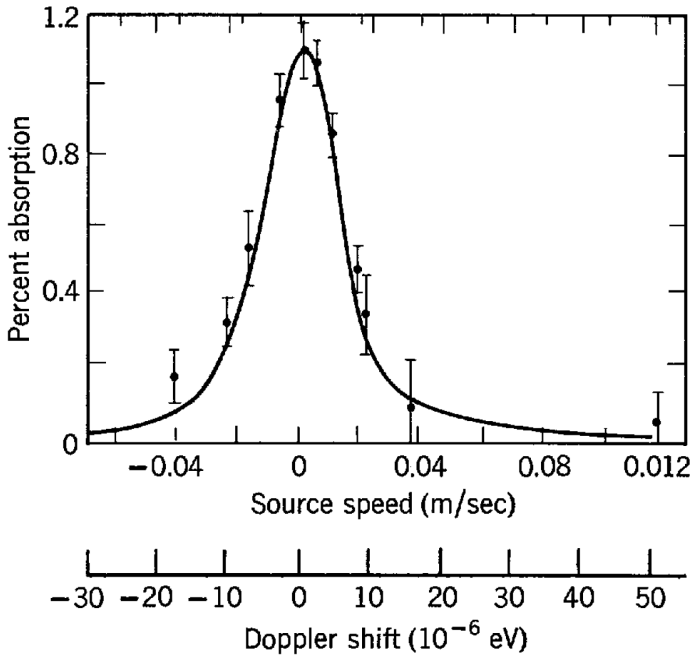


Abb. 5.43: Der Mössbauer-Effekt in $^{191}_{77}$Ir bei 88 K. Man beachte die niedrigen Geschwindigkeiten der Quelle und die extrem kleinen resultierenden Dopplerverschiebungen [**?**].

Nicht jedes Isotop im Periodensystem kann im Rahmen der Mössbauer-Spektroskopie eingesetzt werden. Abb. 5.44 zeigt das Periodensystem mit den infrage kommenden Elementen. Welche Eigenschaften muss ein Mössbauer-Isotop aufweisen?

- Die Energie des γ-Photons sollte im Bereich 5-150 keV liegen. Optimal sind Photonenenergien geringer als 50 keV.

- Für eine geringe Linienbreite, also eine hohe spektrale Auflösung, sollte die Lebensdauer des angeregten Zustands 1-100 Nanosekunden betragen.

- Der Elternkern sollte eine lange Halbwertszeit haben, um über einen längeren Zeitraum eine hohen Aktivität der Quelle bereitzustellen.

- Das Mössbauer-Isotop sollte keinen hohen Kernspin (Kapitel *Kernmodelle*) haben, da sonst die Analyse erschwert wird.

- Das Mössbauer-Isotop sollte leicht verfügbar sein.

Die Mössbauer-Isotope Fe-57 und Sn-119 erfüllen die oben genannten Anforderungen am besten. Was sind die Vorteile der Mössbauer-Spektroskopie?

- Die Mössbauer-Spektroskopie hat nachweislich die höchste Energieauflösung aller spektroskopischen Methoden.

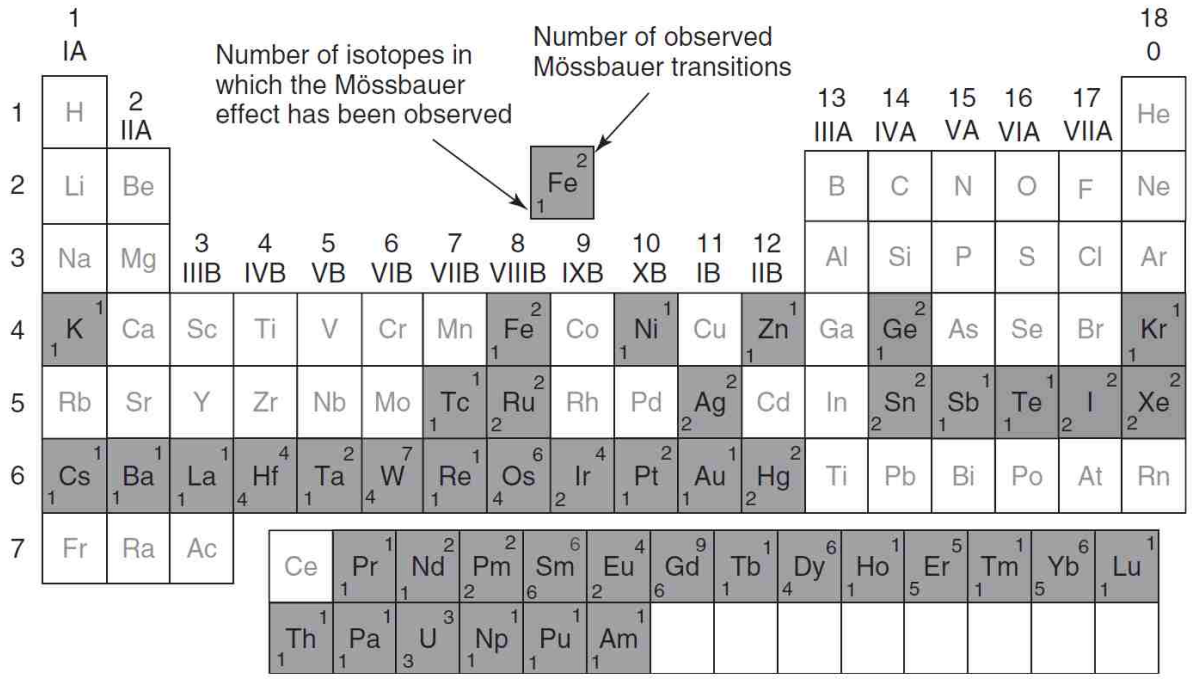


Abb. 5.44: Mössbauer-Elemente im Periodensystem der Elemente [**?**].

- Im Gegensatz zu anderen kernphysikalischen Methoden sind der experimentelle Aufwand und die Kosten gering.
- Die Mössbauer-Spektroskopie ist eine zerstörungsfreie Methode um Festkörper mit atomarer Auflösung zu untersuchen.

Applications of the Mössbauer Effect in Biophysics [?]: The Mössbauer effect may be applied to biology in two ways: (i) to study the electronic state of an atom in a biological molecule and (ii) as a method of chemical identification. The former can be very powerful since many biological molecules have a transition metal atom at the active center, and hence data on its chemical state and on the electron transfer which takes place during a biochemical reaction may be obtained from magnetic measurements. Mössbauer effect measurements of the hyperfine interaction of ^{57}Fe provide detailed information on the electron distribution in iron atoms, even when the molecular structure is not known. A review is given of some molecules to which this technique has been applied. The most extensive measurements have been made on hemoglobin and its derivatives and on the iron?sulfur proteins. In the latter, pairs of iron atoms are antiferromagnetically coupled. As an example of possible applications in analysis the Mössbauer spectra of iron from a healthy and a hemosiderosis lung are compared and found to be very different.

Mit Hilfe der Mössbauer-Spektroskopie kann der transversale Dopplereffekt und der Ätherdrift (Kapitel *Äther*) nachgewiesen werden. Eine γ-Quelle in der Mitte einer rotierenden Scheibe sendet Licht an einen am Rand der Scheibe befindlichen Empfänger. Aufgrund der Rotationsgeschwindigkeit des Detektors sinkt aufgrund des transversalen

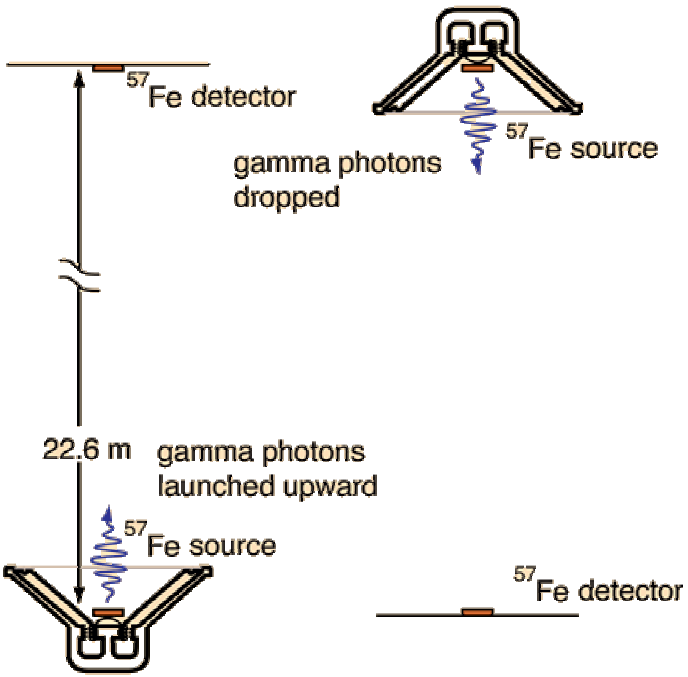


Abb. 5.45: Über 22.6 m beträgt die Gravitations-Rotverschiebung der Spektrallinie nur $4.92 \cdot 10^{-15}$. Eine Messung mit Hilfe des Mossbauer-Effekt mit 14.4 keV γ-Strahlung aus Eisen-57 hat eine ausreichend hohe Auflösung, um diesen Unterschied aufzulösen. Der theoretisch vorhergesagte Effekt konnte 1959 experimentell mit einer Genauigkeit von 1% bestätigt werden [**?**].

Dopplereffekts die charakteristische Absorptionsfrequenz. Die Resultate bestätigen die Vorhersagen mit hoher Genauigkeit [**? ? ? ?**].

Harvard Tower Experiment

Die in der Allgemeinen Relativitätstheorie postulierte Gravitations-Rotverschiebung von Licht im Gravitationsfeld der Erde konnte mit Hilfe des Mössbauer Effektes experimentell nachgewiesen werden [**? ?**], siehe Abb. 5.45. Aufgrund der Schwerefeldes der Erde kommt es zu einer Frequenzverschiebung, wenn sich ein Photon in ein Gebiet veränderter Gravitationsbedingungen bewegt. Pound und Rebka führten die Untersuchungen durch, wobei sie einen Höhenunterschied von h=22.6 m verwendeten, siehe Abb. 5.46. Die damit verbundene Frequenzverschiebung ergibt sich nach der Allgemeinen Relativitätstheorie. Der Mössbaueneffekt hat die erforderliche Auflösung. Die Forscher nutzten die 14.4 keV γ-Linie des Fe-57, um den Effekt zu bestätigen. Die zugehörige Energieverschiebung bei der Bewegung des Photons nach *oben* und nach *unten* berechnet sich folgendermaßen.



Abb. 5.46: Photo des damals verwendeten Aufbaus zur Bestätigung der Gravitations-Rotverschiebung. Robert Pound, auf dem Turm eines Physikgebäudes in Harvard, kommunizierte während der Kalibrierungen für ihr Experiment telefonisch mit Glen Rebka im Keller [**?**].

Bewegt sich das γ-Photon im Gravitationsfeld ändert sich die potenzielle Energie um

$$\begin{aligned}
\Delta E_\gamma &= m \cdot g \cdot h \\
\Delta E_\gamma &= \frac{E_\gamma}{c^2} \cdot g \cdot h \\
\Delta E_\gamma &= \frac{(14.4 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}) \cdot (9.81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}) \cdot (22.6\,\mathrm{m})}{(2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \\
\Delta E_\gamma &= 3.5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{eV} \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle haben wir die im nächsten Kapitel *Einsteingleichung* eingeführte Gleichung $E = m \cdot c^2$ verwendet und die Masse des Objekts, da da Photon masselos ist, durch den Ausdruck E_γ/c^2 ersetzt. Die sich damit ergebene relative Energieverschiebung ergibt

sich damit mit:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma}\right)_{down} - \left(\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma}\right)_{up} &= \frac{2 \cdot (3.5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{eV})}{14.4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{eV}} \\ \left(\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma}\right)_{down} - \left(\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma}\right)_{up} &= 4.9 \cdot 10^{-15}\end{aligned} \tag{5.29}$$

Experimentelle gemessen wurde:

$$\left(\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma}\right)_{down} - \left(\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma}\right)_{up} = (5.1 \pm 0.5) \cdot 10^{-15} \tag{5.30}$$

Das Experiment konnte nur mit sorgfältiger Vorbereitung und durch eine sorgfältige Präparation des Emitter- und Detektormaterials gelingen. Eine ausgeklügelte Temperaturbehandlung war entscheidend, um die notwendige Auflösung im Experiment zu erreichen. Um eine Dopplerverschiebung zu realisieren, wurde die Fe-57 Quelle auf einem mit 10 Hz betriebenen Lautsprechers montiert. Damit erreichte man eine sinusförmige Geschwindigkeit des Emitters.

Anwendungen

Einsatzmöglichkeiten für die Mössbauer-Spektroskopie finden sich in der Chemie [**?**] und den Materialwissenschaften [**?**], beispielsweise um die Eigenschaften von Legierungen zu untersuchen. Im Bereich der Biologie kann der Mössbauer-Effekt in doppelter Hinsicht verwendet werden [**?**]:

- um die elektronische Struktur von Atomen in Biomolekülen zu erfassen. Viele biologische Moleküle beinhalten Metallatome im aktiven Zentrum. Informationen über die chemische Umgebung und Elektronentransfers während biochemischer Reaktionen können erfasst werden.

- als Methode der chemische Identifizierung von Elementen in den Molekülen.

Rock paintings from Minas Gerais, Brasil, investigated by in-situ Mössbauer spectroscopy [**?**]**:** The archaeological site of Santana do Riacho is located at about 90 km northeastern of Belo Horizonte, in the *Serra do Cipó* region. The recent development of a miniaturised Mössbauer spectrometer opened the possibility of making in-situ measurements of the rock paitings. The paintings were selected based on their colours and apparent thickness, and six spots were measured. The analysis of the data suggests that hematite and goethite seems to be the pigments responsible for the red and yellow colours, but no conclusion was yet found for an ochre painting.

Mössbauer-Untersuchungen von Hämo- und Myoglobin sind mit Einführung der Methode durchgeführt worden. Das liegt daran, dass beide Proteine leicht verfügbar sind Außerdem enthalten sie Eisen und sind als Proteine der Atmungskette für alle Wirbeltiere lebensnotwendig. Hämoglobin bereitet dem Spektroskopiker allerdings Probleme.

Daher konzentriert sich das Interesse mehr auf Myoglobin, das eine ähnliche Struktur aufweist.

Applications of Mössbauer Spectroscopy in Biomedical Research [?]**:** A brief review on the applications of Mössbauer spectroscopy in biomedical research discusses the results of more than fifty years of experience in this field. Basing on the numerous results the main directions of biomedical applications of Mössbauer spectroscopy are considered as follows: 1) studies of the quantitative changes of iron-containing biomolecules related to pathological processes; 2) studies of the qualitative changes in iron-containing biomolecules related to pathological processes; 3) studies of the effect of various environmental factors (physical, chemical, and biological) on iron-containing biomolecules; 4) studies of metabolic processes by means of analysis of the Mössbauer nuclides pathways in organisms; 5) studies of dynamic processes; 6) studies of pharmaceutical compounds and blood substitutes containing Mössbauer nuclides; 7) miscellaneous studies. Some examples of biomedical research using ^{57}Fe, ^{57}Co, ^{119}Sn, ^{153}Sm, and ^{197}Au Mössbauer nuclides are presented.

Ein Beispiel aus der Archäologie

Im Jahr 1969 schlugen Cousins and Dharmawardena vor, Mössbauer-Spektrokopie zur archäologischen Untersuchung antiker Töpferarbeiten einzusetzen [**?**]. Keramik war schon immer eine wichtigste Handelsware, da es in der Küche als Geschirr, Koch- und Vorratsgefäß oder als Grabbeigabe verwendet wurde. Eine genaue Kenntnis über die Eigenschaften dieser Artefakte erlaubt es, Handelswege zu verfolgen und damit Rückschlüsse auf frühere Wirtschaftssysteme zu ziehen. Der Einsatz der Mößbauer-Spektroskopie zur Untersuchung von Keramiken resultiert aus dem Umstand, dass praktisch alle Töpferware Eisen enthält. Typisch sind zwischen 1 bis 10 Gewichtsprozente, wobei der Fe-57 Anteil etwa 2% beträgt, was ausreichend ist, um Mössbauer-Untersuchungen durchzuführen. Selbst Porzellan kann untersucht werden. Eisen ist als Merkmal ausgezeichnet geeignet, da es in zwei Oxidationsstufen auftritt. Die physikalische und chemische Umwandlung der eisenhaltigen Phasen während des Brennens hängen stark von den Herstellungsbedingungen ab, der Brenntemperatur und -zeit, den oxidierenden oder reduzierenden Eigenschaften in der Ofenatmosphäre und in wenige Ausnahmen auch der Reihenfolge der Brennvorgänge. Die Methode erlaubt es außerdem, die Lagerstätten zu identifizieren.

Mössbauer Spectra of Clays and Ceramics [?]**:** The physical, chemical and mineralogical aspects of the use of Mössbauer spectroscopy in studies of clay-based ceramics are described. Mössbauer spectra of pottery clays fired under oxidising, reducing and changing conditions are explained, and the possibilities of using Mössbauer spectra to derive information on the firing temperatures and the kiln atmosphere during firing in antiquity are discussed and illustrated by examples.

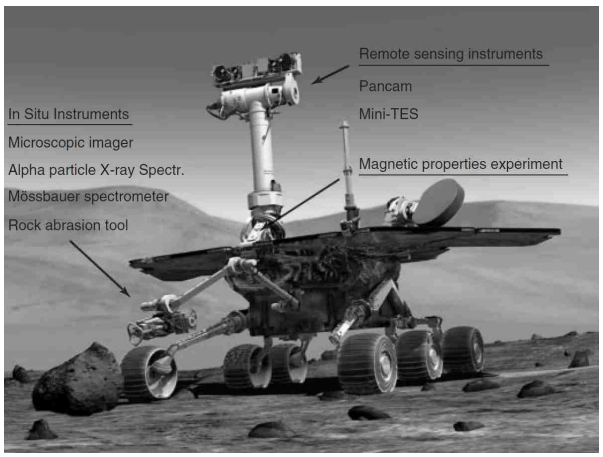


Abb. 5.47: Die wissenschaftliche Nutzlast des Mars Rovers besteht aus einer Panoramakamera, einem Miniatur-Thermoemissionsspektrometer (Mini-TES), einem Mikroskop, einem α-Teilchen-Röntgenspektrometer, dem Mössbauer-Spektrometer und einem Werkzeug zum Abrieb von Gestein [**?**].

Ein Beispiel aus der Raumfahrt

Das miniaturisierte Mössbauer-Spektrometer MIMOS II [**?**] kam bei der europäischen Mars-Mission *Mars-Express* im Jahr 2003 zum Einsatz. Abb. 5.47 zeigt ein Photo des Rovers. Das Instrument wiegt 0.5 kg, hat ein Volumen von $5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ und verbraucht 2 J/s. Die Untersuchungen sollen Aufschluss darüber geben, ob Mars in früheren Zeiten größere Mengen Wasser hatte und wie sich die Atmosphäre entwickelte. Das zielt auf die Frage, wo auf dem Mars die Voraussetzungen für die Entstehung von Leben vorhanden waren. MIMOS II untersucht Bodenproben und untersucht sie im Hinblick auf Zeichen von Verwitterung, ein Hinweis auf Wasservorkommen.

Fe Mössbauer spectroscopy as a tool in astrobiology [?]: The element Fe and Fe-bearing minerals occur ubiquitously throughout the field of astrobiology. Cycling between the various oxidation states of Fe provides a source of energy available for life. Banded iron formations may record the rise of oxygenic photosynthesis. The distribution of Fe between Fe-bearing minerals and its oxidation states can help to characterize and understand ancient environments with respect to the suitability for life by constraining the primary rock type and the redox conditions under which it crystallized, the extent of alteration and weathering, the type of alteration and weathering products, and the processes and environmental conditions for alteration and weathering. Fe Mössbauer spectroscopy is a powerful tool to investigate Fe-bearing compounds. It can identify Fe-bearing minerals, determine Fe oxidation states with high accuracy, quantify the distribution of Fe between mineralogical phases, and provide clues about crystallinity and particle sizes. Two miniaturized Mössbauer spectrometers are on board of the NASA Mars Exploration Rovers Spirit and Opportunity. The Fe-bearing minerals goethite, an iron oxide-hydroxide, and jarosite, an iron hydroxide sulfate, were identified by Mössbauer spectroscopy in Gusev Crater and at Meridiani Planum, respectively, providing in situ proof of an aqueous history of the two landing sites and constraints on their habitability. Hematite identified by Mössbauer spectroscopy at both landing sites adds further evidence for an aqueous history. On Earth, Mössbauer spectroscopy was used to monitor possibly microbially-induced changes of Fe-oxidation states in basaltic glass

samples exposed at the Loihi Seamount, a deep sea hydrothermal vent system, which might be analogous to possible extraterrestrial habitats on ancient Mars or the Jovian moon Europa today.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: If the Mössbauer experiment is performed with a 1.80-MeV gamma ray from a radioactive source and the half-width at half-intensity of the resonance curve is 2.2 cm/s, find[46]

(a) the frequency of the gamma ray.

(b) the Doppler shift in vib/ s.

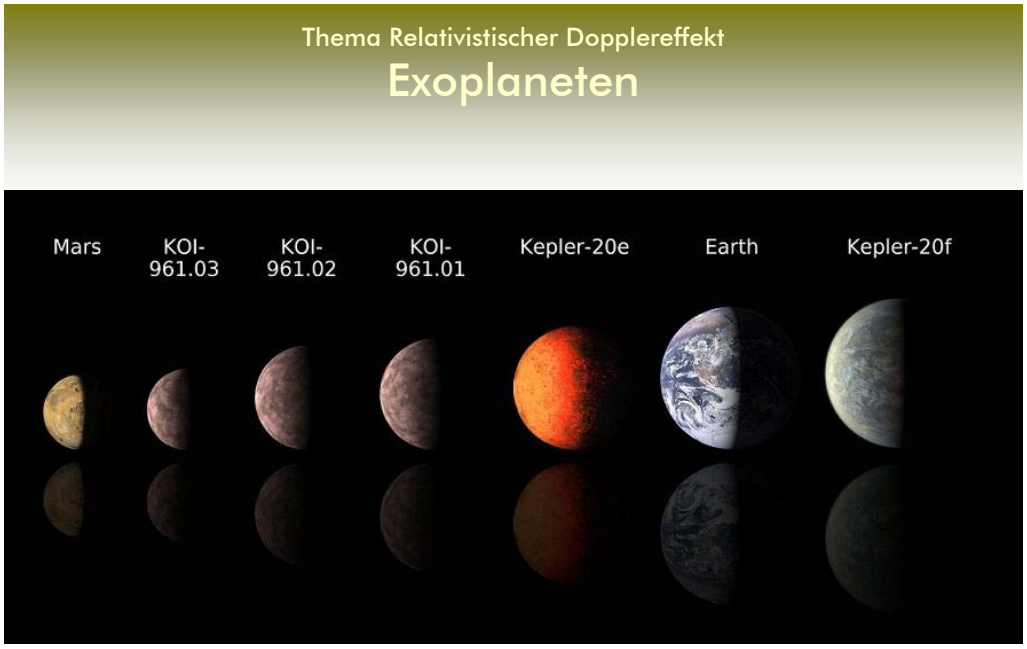
(c) the mean life of the gamma-ray state.

[46]Answer: (a) $4.36 \cdot 10^{20}$ vib/s. (b) $1.74 \cdot 10^{10}$ vib/s. (c) $5.75 \cdot 10^{-11}$ s

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welcher Effekt wird bei der Mössbauer-Spektroskopie ausgenutzt?
2. Warum kann man Mössbauer-Spektroskopie nicht im optischen durchführen?
3. Warum hat die Mössbauer-Spektroskopie eine so hohe spektrale Auflösung?
4. In welcher Weise wird ein Photon durch die Gravitation eines Planeten beeinflusst?

Exoplaneten[4LP]



Ein Ziel der Astronomie ist es, entfernte Planeten zu entdecken (Abb. 5.48).[47] Der Nachweis stellt eine experimentelle Herausforderung dar, denn Planeten strahlen nicht wie Sonnen, sondern reflektieren nur einen Bruchteil der Strahlung des zugehörigen Zentralsystems. Methoden müssen deshalb entwickelt werden, um Exoplaneten in anderen Sonnensystemen nachzuweisen. Der Name entdeckter Planeten wie *Kepler 20F* bezieht sich auf das Instrument, mit dem die Untersuchungen durchgeführt wurden, dem Weltraumteleskop Kepler. Der relativistische Dopplereffekt ist eine der Methoden, die helfen, Exoplaneten zu entdecken. Eine weitere werden wir im Kapitel *Allgemeine Relativitätstheorie* kennenlernen. Die Mission Kepler hat tausende Exoplaneten entdeckt, obwohl nur ein geringer Himmelsausschnitt (2.5‰) betrachtet werden konnte. Die Nachfolger TESS und CHEOPS haben deutlich größere Beobachtungsbereiche. Davon sind die meisten Planeten erdgroß oder vom Typ Neptun. Die Untersuchungen ergaben, dass im Mittel jede zweite Sonne zumindest einen Planeten hat. In ganz seltenen Fällen gelingt es den Astronomen, einen Exoplaneten zu photographieren [**?**]. Abb. 5.49 zeigt den jungen Stern CT

[47] The Nobel Prize in Physics 2019 was awarded *for contributions to our understanding of the evolution of the universe and Earth's place in the cosmos* with one half to James Peebles *for theoretical discoveries in physical cosmology*, the other half jointly to Michel Mayor and Didier Queloz *for the discovery of an exoplanet orbiting a solar-type star.*



Abb. 5.48: Käpt'n Blaubär und die Exoplanten.

Cha (Alter $2 \cdot 10^6$ Jahre; 540 LJ entfernt) und rechts einen Begleiter). Aufgrund seiner erheblichen Masse ist es aber unklar, ob es sich um einen Planeten oder einen Braunen Zwerg handelt.[48] Umkreisen Exoplaneten ihre Sonne in engen Bahnen (Umlaufzeiten geringer als ein Tag) können mit Hilfe der Spektroskopie detaillierte Aussagen über die Planeten gewonnen werden. Wie sich herausstellt, hat beispielsweise GJ 367b eine Dichte von $8.106 \pm 2.165\,\mathrm{g/cm^3}$, also vergleichbar zu Eisen. Eine Simulationen lassen vermuten, dass der Planet, ähnlich wie Merkur, einen Eisenkern hat [**?**].

Radialgeschwindigkeitsmethode

Die Anwesenheit eines Planeten in einem Sonnensystem verschiebt den gemeinsamen Schwerpunkt. Damit bewegt sich der Stern für einen Beobachter auf der Erde unter günstigen astronomischen Bedingungen vor und zurück. Dadurch ergibt sich eine Frequenzverschiebung in den Emissionslinien, siehe Abb. 5.50. Die Auswertung auf der Grundlage des Relativistischen Dopplereffekts gestattet es, die Masse des Planeten aus den Keplerschen Gesetzen zu bestimmen. Man erkennt möglicherweise die Probleme:

1. Massereiche Planeten, die in unmittelbarer Nähe der jeweiligen Sonne kreisen, haben bessere Chancen entdeckt zu werden. Die Beobachtungsmethode ist daher in gewisser Weise selektiv.

[48] Das Kriterium für einen Braunen Zwerg ist etwas willkürlich gewählt. Die Masse muss größer sein als sieben Jupitermassen.

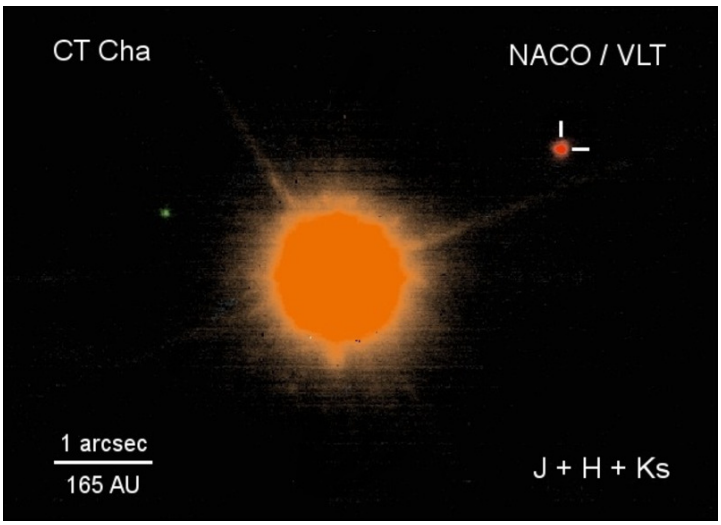


Abb. 5.49: VLT-NACO-KsBand Aufnahme von CT Cha und seinem 6.3 Magnituden schwächeren Begleiter vom 2. März 2007 [**?**].

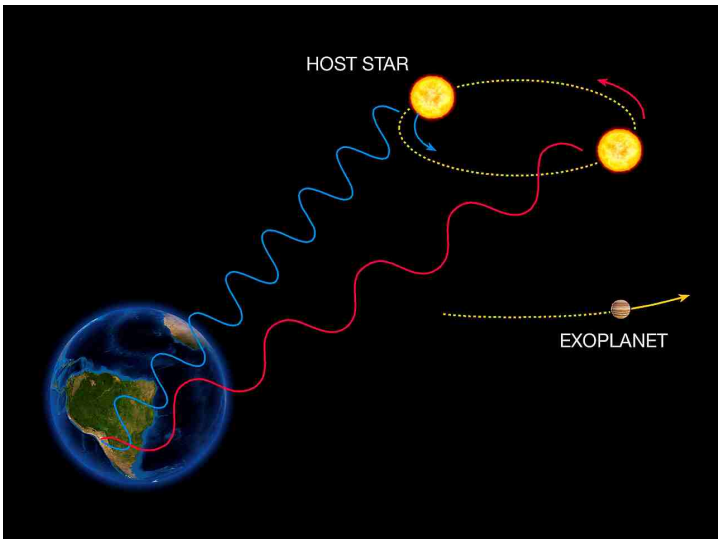


Abb. 5.50: Hat ein Stern einen Exoplaneten, ändert sich die Radialgeschwindigkeit wegen der Bewegung um den gemeinsamen Massenschwerpunkt. Dies führt zu einer periodischen Frequenzverschiebung, die man mit Hilfe des Optischen Dopplereffekts nachweisen kann. [**?**]

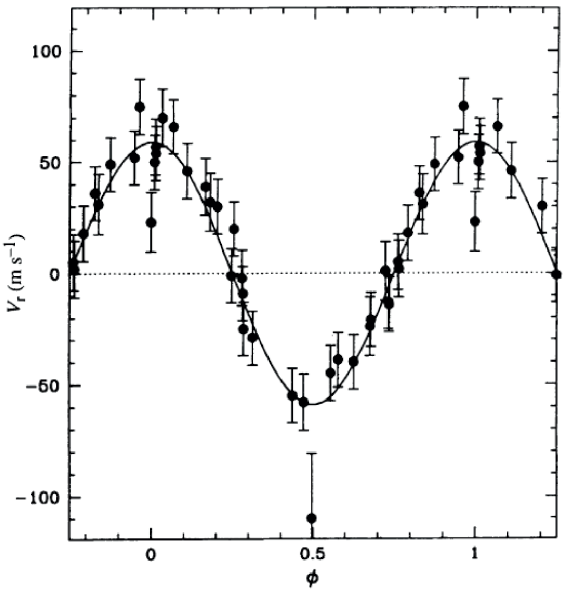


Abb. 5.51: Radialgeschwindigkeitskurve für 51 Pegasi B. Schwarze Punkte sind die astronomischen Daten mit Fehlerbalken. Die durchgezogeneLinie passt am besten zu den Daten [**?**].

2. Ein massearmer Planet in geringer Entfernung und ein massereicher Planet in größerer Entfernung verursachen möglicherweise ein ähnliches Dopplersignal.

Ergänzende Messungen sind daher erforderlich. Die folgenden Folien zeigen Beispiele für den Nachweis von Exoplaneten. Stern und Exoplanet (Masse m_{star}, m_{exo}) bewegen sich im Abstand (r_{star}, r_{exo}) um den Massenschwerpunkt (CoM)[49].

$$\mu_{CoM} = \frac{m_{star} \cdot r_{star} + m_{exo} \cdot r_{exo}}{m_{star} + m_{exo}} \tag{5.31}$$

Der extrasolare Planet *51 Pegasi B* im Sternbild Pegasus ist 50 Lichtjahre entfernt und wurde 1995 als erster Exoplanet entdeckt [**?**]. Abb. 5.51 zeigt die Messung, die den Exoplaneten mit Hilfe der Radialgeschwindigkeitsmethode entdeckte. Der Planet hat den Namen *Dimidium*, was *die Hälfte* bedeutet. Der Name weist darauf hin, dass der Planet eine Masse hat, die der halben Jupitermasse entspricht. *Dimidium* umkreist *51 Pegasi* innerhalb von 4.2 Tagen auf einer engen Umlaufbahn. Dabei wird die Gashülle auf fast eintausend Grad erhitzt. *Dimidium* zählt deshalb zur Klasse der heißen Jupiter, siehe Abb. 5.2 für weitere Beispiele.

Die astronomischen Untersuchungen an *47 Ursae Majoris* ergaben, dass der Stern zwei Exoplaneten aufweist. Der Größere hat 2.54 Jupitermassen und 2.09 Astronomische Ein-

[49] CoM: *center-of-mass*



Abb. 5.52: Vergleich von Exoplaneten vom Typ *hot Jupiter* (Artist view). Von links oben nach rechts unten: WASP-12b, WASP-6b, WASP-31b, WASP-39b, HD 189733b, HAT-P-12b, WASP-17b, WASP-19b, HAT-P-1b und HD 209458b [**?**].

heiten[50] Abstand zum Zentralstern, der kleinere hat mindestens 0.76 Jupitermassen und einen Abstand von 3.73 Astronomische Einheiten. Abbildung 5.53 illustriert, auf welchen Umlaufbahnen ausgewählte Exoplanten ihre Sonnen umkreisen. Man erkennt, dass im Wesentlichen schwere Planeten auf weit innen liegenden Bahnen effektiv nachgewiesen werden. Neben dem Nachweis von Exoplaneten durch die Ausnutzung der relativistischen Rotverschiebung haben sich weitere Methoden etabliert, um solche Objekte zu entdecken. Dazu gehört die optische Beobachtung der Helligkeit des Zentralsterns. Der Transit[51] eines Exoplaneten auf der Sichtachse zur Erde führt zu einem kurzzeitigen Einbruch in der Intensität des Sternenlichts. Abb. 5.54 zeigt eine typische Messkurve [**?**]. Für eine Realisation im Rahmen eines Schülerprojekts, siehe [**?**].

[50] Eine Astronomische Einheit entspricht dem mittleren Abstand zwischen Erde und Sonne.

[51] *Lexikon:* The **transit method** is a photometric method that aims to indirectly detect the presence of one or more exoplanets in orbit around a star. In 1999, the method was used to confirm the existence of HD209458b, a planet that had been discovered almost at the same time by the radial velocity method. The effect measured during a transit is quite small. For a star the size of the Sun, the transit of a Jupiter-size planet will cause a decrease in apparent luminosity of about 1%, while this decrease will be of about 0.001% for a planet the size of the Earth. This method makes it possible to determine the radius of the planet as well as its period of revolution. Furthermore, if the planet has already been detected using the radial velocity method, then its mass is known and it is possible to obtain a value for the bulk density of the planet.

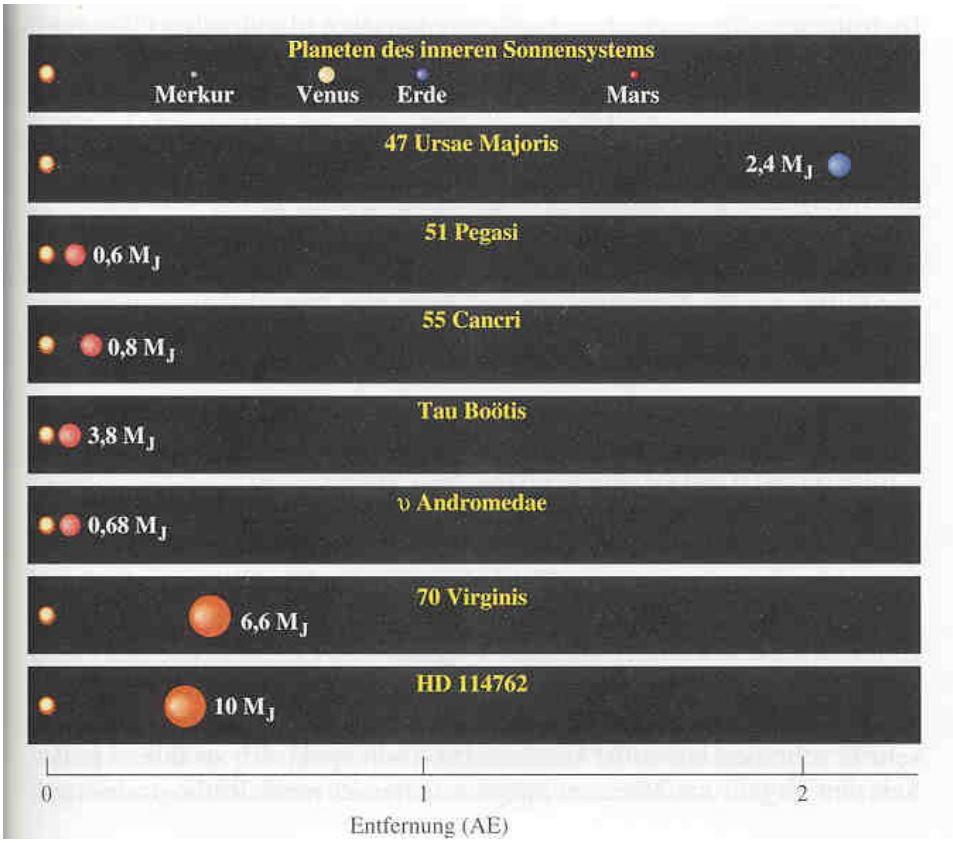


Abb. 5.53: Vergleich der Massen und Bahnradien für verschiedene entdeckte Exoplaneten. Die Umlaufzeit von 51 Pegasi B, der seiner Sonne am nächsten ist, beträgt 4.23 Tage. Die Umlaufzeit von 47 UMa b, der am weitesten von seinem Stern entfernt ist, beträgt 2.98 Jahre [**?**].

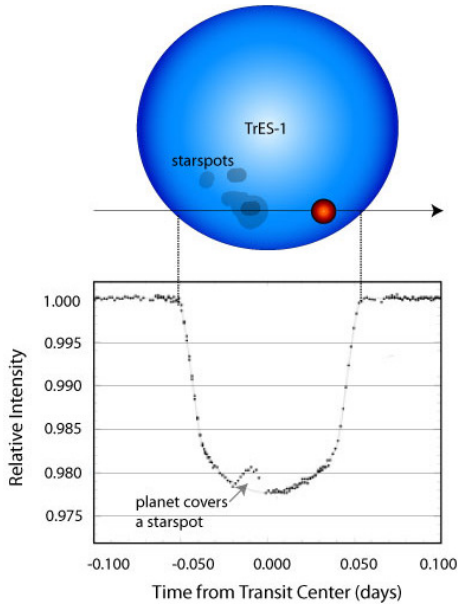


Abb. 5.54: Die Transitlichtkurve eines Exoplaneten vor TrES-1, einem Stern der Größe 11.8, aufgenommen mit dem Hubble-Weltraumteleskops. Diese Lichtkurve zeigt eine Beule während des Transits [**?**].

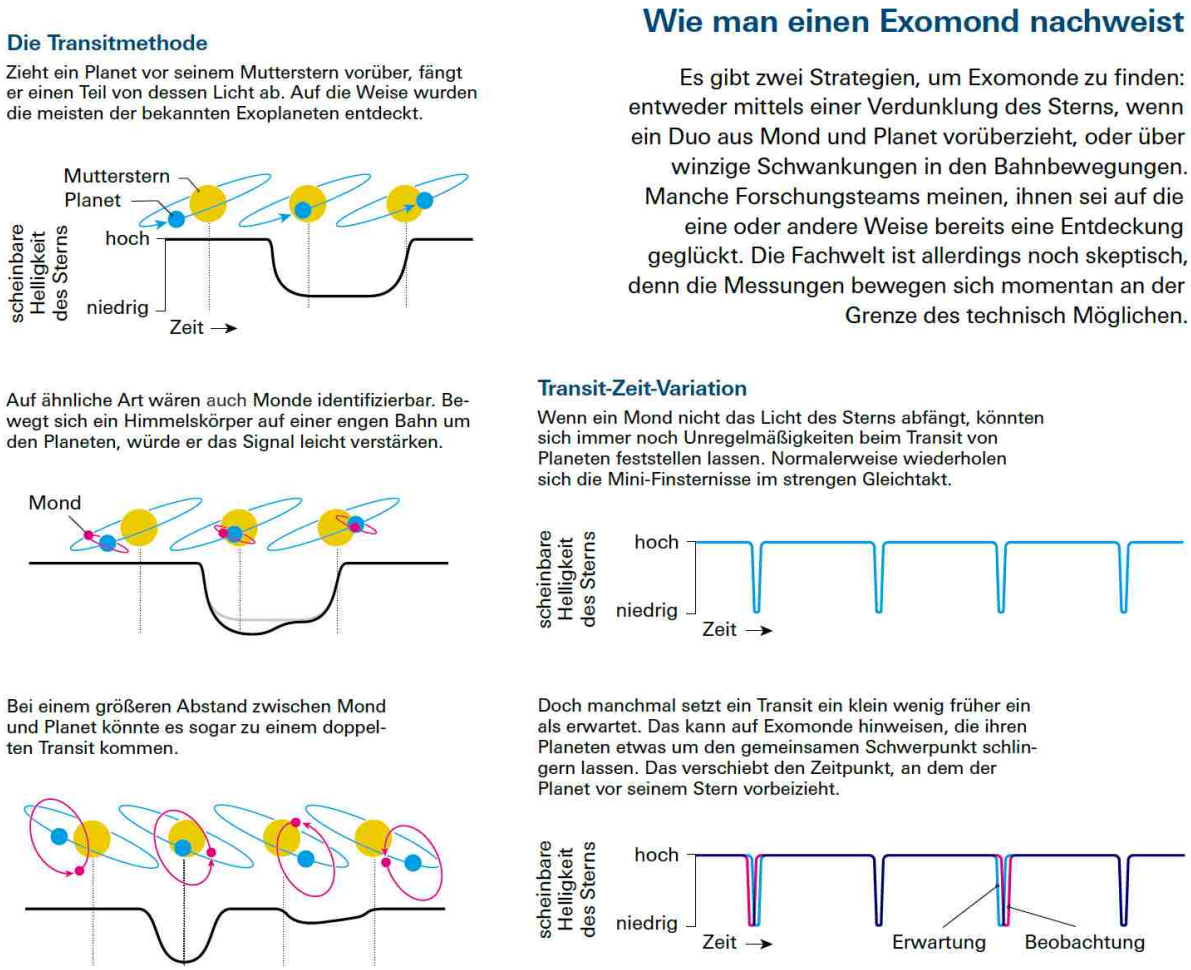


Abb. 5.55: Strategie, um den Mond eines Exoplaneten zu entdecken [**?**].

Im Prinzip eignet sich die Transitmethode auch, um Monde um Exoplaneten zu entdecken. Abb. 5.55 zeigt, wie man vorgeht und auf welche Signale man empfindlich sein muss. Die Forschung zu diesem Thema steckt allerdings noch in den Kinderschuhen. Bislang konnte kein Exoplanetenmond zweifelsfrei nachgewiesen werden.

Abbildung 5.56 zeigt den aktuellen Stand der Forschung. Insgesamt hat man in den letzten drei Jahrzehnten 3500 Exoplaneten mit den unterschiedlichsten Methoden entdeckt. Die Abb. 5.57 demonstriert, welche detaillierten Informationen die Exoplanetenforschung mittlerweile zur Verfügung stellen kann [**?**].

Habitable Zone

Können Sie aus dem Stand diese Frage beantworten: Was für Kriterien würden Sie für einen erdähnlichen Planeten vorgeben? Man versucht Planeten zu finden, die in der

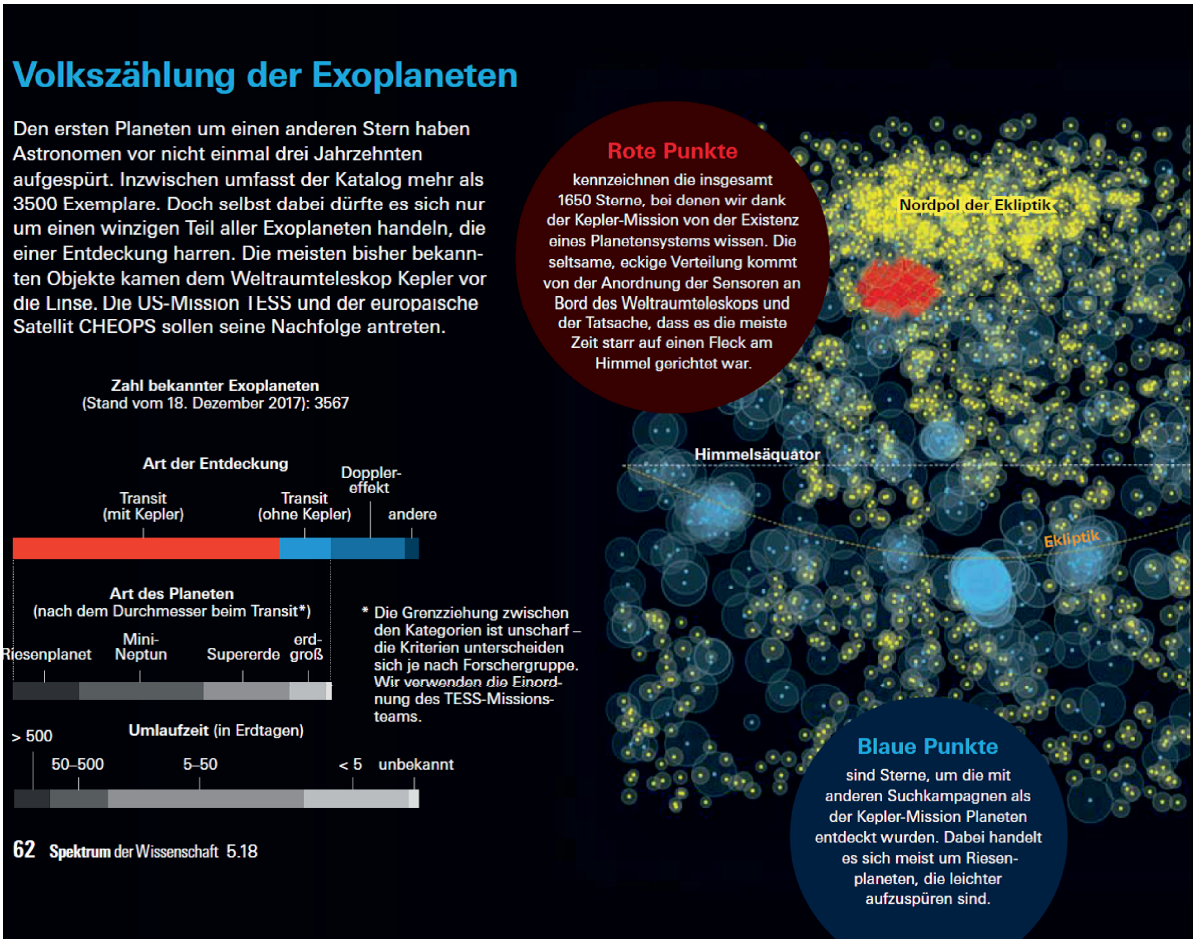


Abb. 5.56: Eine kurze Geschichte der Exoplanetenforschung [**?**].

so genannten habitablen Zone (*Goldilocks*[52] *zone*) um das Zentralgestirn kreisen, siehe Abb. 5.58. Zu dieser Klasse an Planeten gehören alle Exoplaneten, auf denen sich die Umweltbedingungen so gestalten, dass Wasser in flüssiger Form vorliegt, siehe auch die Überlegungen in der Fußnote.[53] Dies gilt als Grundbedingung für die Entwicklung von Leben. Der Nachweis von Kohlenstoff, Kohlendioxid und Methan in der Atmosphäre ist möglicherweise eine Biosignatur. Mittlerweile wurden eine ganze Reihe von Kandidaten identifiziert. Abbildung 5.59 zeigt Beispiele für Exoplaneten, von denen die Forscher

[52] *Lexikon:* The **Goldilocks principle** is derived from a childrens story *The Three Bears* in which a little girl named Goldilocks finds a house owned by three bears. Each bear has their own preference of food, beds, etc. After testing each of the three items, Goldilocks determines that one of them is always too much in one extreme (too hot, too large, etc.), one is too much in the opposite extreme (too cold, too small, etc.), and one is *just right*.

[53] A common first step when discussing the search for life beyond Earth is identifying the best places to look in our solar system. This usually includes Mars and several Jovian moons. A useful way to frame this discussion is around environments on Earth that are similar to environments on other solar system planets or moons. Such environments are often inhabited by extremophile lifeforms and are known simply as 'analog environments' [**?**].

Table 1. Measured properties of Gliese 486 and its planet. We used gravitational constant G = $6.67430\ 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}, $M_\odot$ = $1.98847\ 10^{30}$ kg, $R_\odot$ = $6.957\ 10^8$ m, M_E = $5.9722\ 10^{24}$ kg, and R_E = $6.3781\ 10^6$ m. The tabulated rotation period is a proxy obtained from a quasi-periodic representation of the photometric variability. The eccentricity upper limit of <0.05 is constrained at the 68.3% confidence level. The tabulated equilibrium temperature would be 60 K cooler if the Bond albedo were 0.30.

Parameters	Value
Stellar	
Right ascension (J2000 equinox)	12:47:56.62
Declination (J2000 equinox)	+09:45:05.0
Spectral type	M3.5 ± 0.5 V
J-band magnitude (mag)	7.195 ± 0.026
Mass ($M_\odot$)	0.323 ± 0.015
Radius ($R_\odot$)	0.328 ± 0.011
Luminosity ($L_\odot$)	0.01210 ± 0.00023
Effective temperature (K)	3340 ± 54
Distance (pc)	8.0761 ± 0.0041
Rotation period (days)	$130.1^{+1.6}_{-1.2}$
Metallicity [Fe/H] (dex)	+0.07 ± 0.16
Planetary	
Orbital period (days)	$1.467119^{+0.000031}_{-0.000030}$
Radial velocity semiamplitude (m s^{-1})	$3.370^{+0.078}_{-0.080}$
Eccentricity	<0.05
Argument of periastron (degrees)	unconstrained
Time of inferior transit (barycentric Julian date)	$2,458,931.15935^{+0.00042}_{-0.00042}$
Orbital semimajor axis (au)	$0.01734^{+0.00026}_{-0.00027}$
Mass (M_E)	$2.82^{+0.11}_{-0.12}$
Radius (R_E)	$1.305^{+0.063}_{-0.067}$
Inclination (degrees)	$88.4^{+1.1}_{-1.4}$
Insolation (S_E)	$40.3^{+1.5}_{-1.4}$
Mean density (10^{-3} kg m^{-3})	$7.0^{+1.2}_{-1.0}$
Surface gravitational acceleration (m s^{-2})	$16.4^{+0.6}_{-0.5}$
Equilibrium temperature (K)	701^{+13}_{-13}

Abb. 5.57: Tabelle der aus der Spektroskopie erhaltenen Daten über den Exoplaneten *Gliese 486* [**?**]

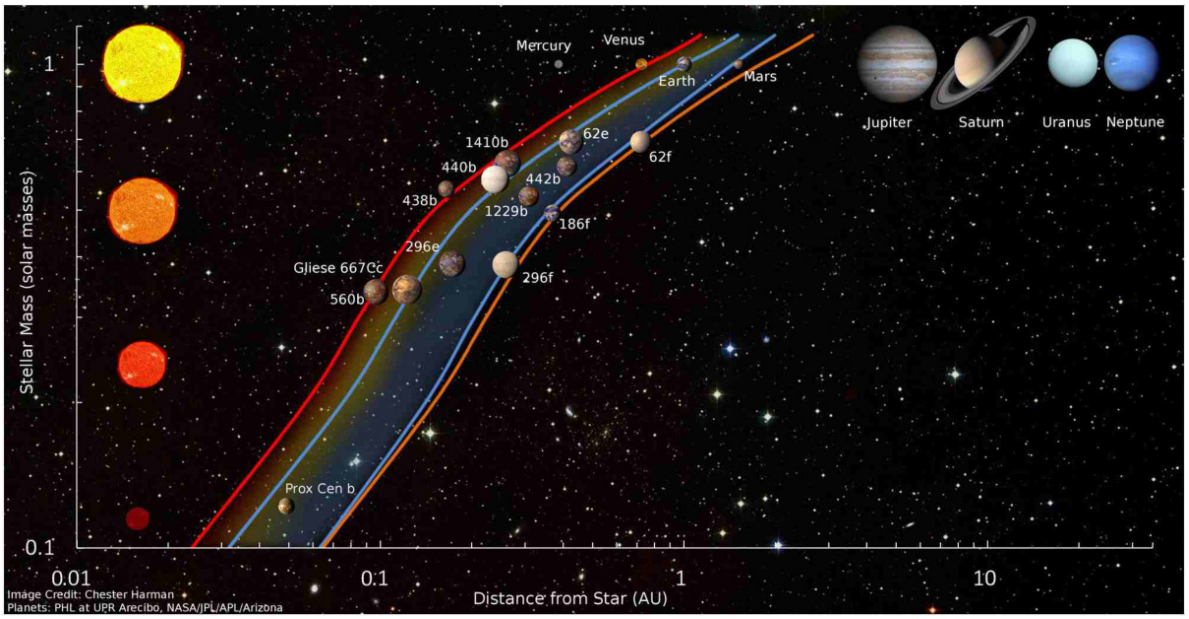


Abb. 5.58: Schematische Darstellung der Grenzen der Habitablen Zone für Sterne unterschiedlicher Masse. Die Planeten des Sonnensystems und vielversprechende Exoplaneten sind eingezeichnet [**?**].

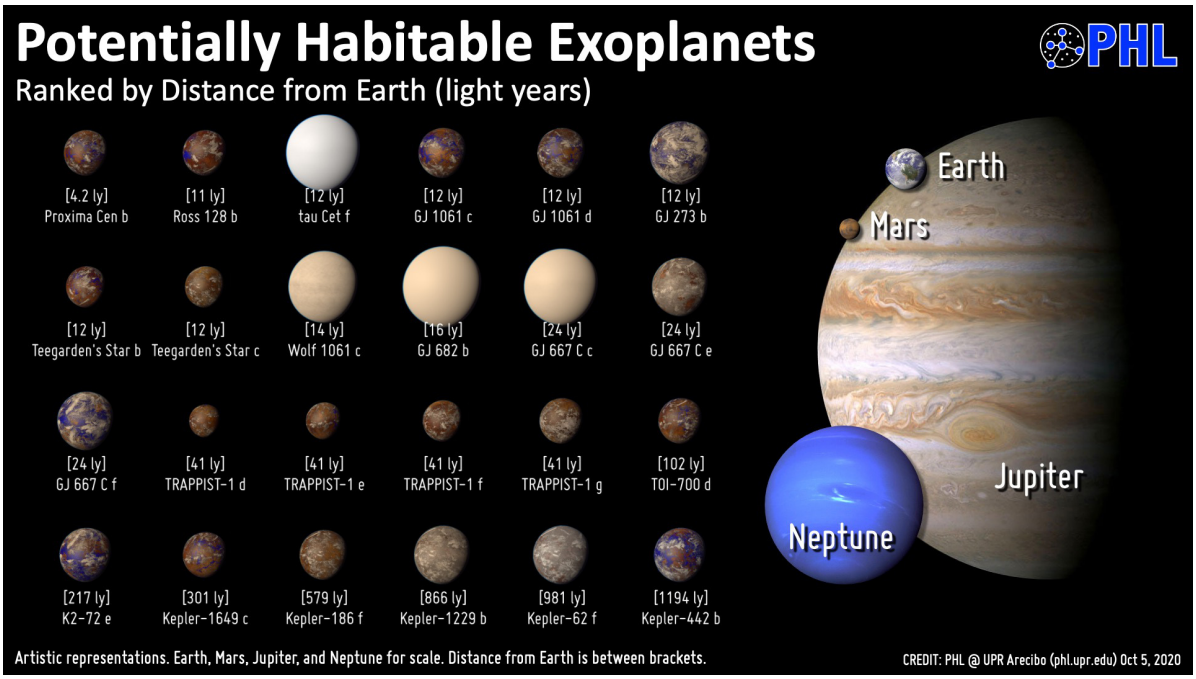


Abb. 5.59: Liste potenziell bewohnbarer Exoplaneten (Stand 5.10.2020), geordnet nach Entfernung von der Erde (Angabe in Lichtjahren) [**?**].

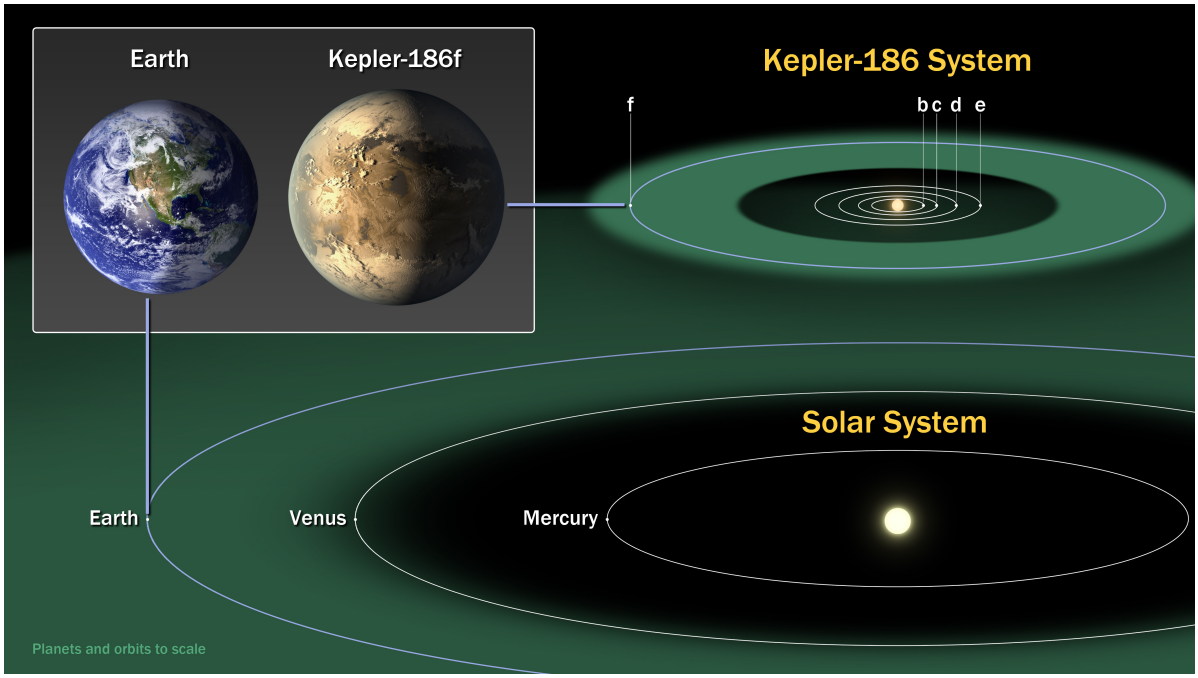


Abb. 5.60: Alle bisher entdeckten Planeten in der habitablen Zone ihrer Sterne waren bis zu 40% größer als die Erde. *Kepler186 F* ist interessant, da er nur 10% größer ist als die Erde [**?**].

vermuten, dass sie erdähnliche Bedingungen aufweisen. Ein vielversprechender Kandidat für habitable Bedingungen ist *Kepler 186 F* (Abb. 5.60). Die zugehörige Sonne ist ein 490 Lichtjahre von der Erde entfernter Roter Zwerg im Sternbild Schwan. Der Planet umkreist *Kepler 186* innerhalb von 130 Tagen und bewegt sich in der habitablen Zone. *Kepler 186-f* hat einen um 10% größeren Radius als die Erde. Das neue Weltraum Teleskop *James Webb* hat kürzlich mit seinen empfindlichen Infrarotsensoren erstmals das Molekül CO_2 in der Atmosphäre des heißen jupitergroßen Gasriesen *WASP 39B*, 700 Lj entfernt von der Erde entfernt, entdeckt.[54] Kohlendioxid ist ein Maß für die *Metallizität* eines Planeten. Schwere Elemente sind entscheidend bei der Bildung von Riesenplaneten. Das CO_2-Signal von *WASP 39B* entspricht in etwa dem des Planeten Saturn. Die Umlaufbahnen sich jedoch merklich unterschiedlich. Der Planet umkreist den Stern in etwa 4 Tagen. Die Forscher vermuten, dass der Planet sich in größerer Entfernung um seine Sonne gebildet hat und sich im Laufe der Zeit der Sonne genähert hat [**?**]. Kohlendioxid in der Atmosphäre eines Planeten ist ein Indiz für Leben auf Exoplaneten. *WASP 39B* beherbergt kein Leben, da er der Planet der Sonne viel zu nah ist.

Möchten Sie mehr über aktuelle Ergebnisse der Forschung zu Exoplaneten erfahren?

- Nachweis eines schwerer Elemente (Barium, Strontium, Kobalt) in heißen jupiter-

[54]Das Spitzer Teleskop beobachtet den Exoplaneten im Zeitraum 2003 bis 2020, fand aber keine klaren Hinweise auf das Vorhandensein von CO_2. James Webb benötigt nur 8 Stunden um belastbare Daten zu sammeln.

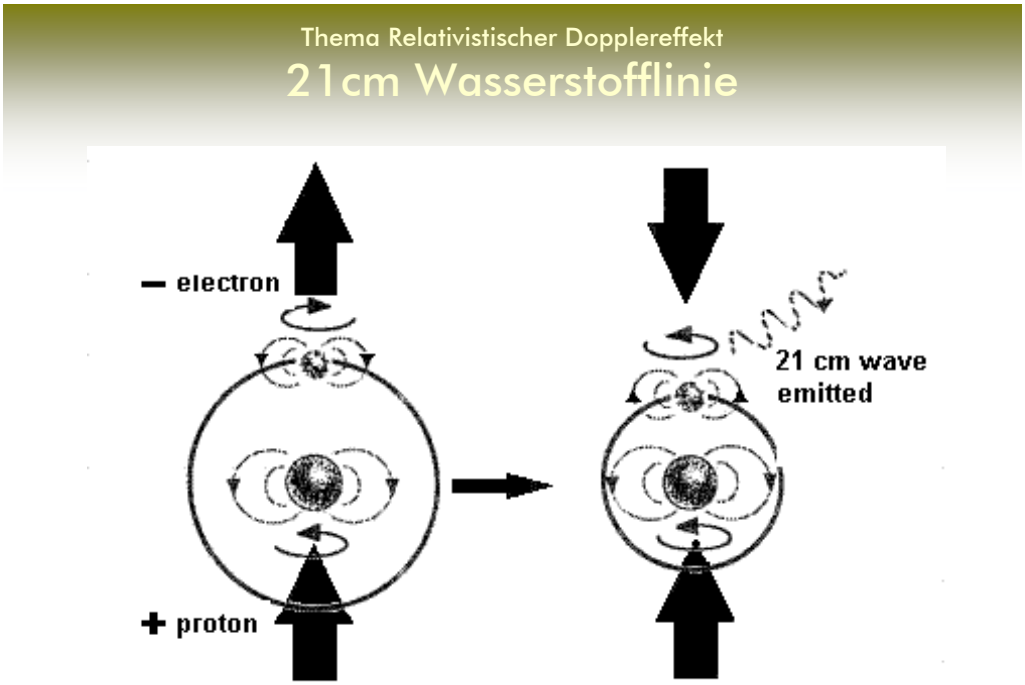
artigen Exoplaneten [**?**].

- Neptun-artige Exoplaneten in Umlaufbahnen um rote Zwergsterne [**?**].
- Exoplaneten, die aufgrund ihrer hohen Temperatur Eisen verdampfen[**?**].
- Nachweis von Exoplaneten unter erschwerten Bedingungen [**?**].
- Klima auf Exoplaneten [**?**].
- Exoplaneten in der Habitablen Zone [**?**].
- Kollision zweier Exoplaneten [**?**]

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter einem Exoplaneten?
2. Unter welchen astronomischen Bedingungen sind die Chancen hoch einen Exoplaneten zu entdecken?
3. Kennen Sie Methoden, um Exoplaneten zu entdecken?
4. Was versteht man unter der Habitablen Zone?

Wasserstoff 21-cm-Linie^{4LP}



Eine weitere Anwendung der relativistischen Dopplerverschiebung ist die Spektroskopie der 21 cm Strahlung aus Wasserstoff. Diese Emissionslinie ist für die Astronomie und Astrophysik hochinteressant und hat sogar Eingang gefunden auf der *Golden Record*, die an Bord der Voyager Satelliten gerade das Sonnensystem verlassen, siehe Abb. 5.61. Unten rechts (8) sieht man einen Eintrag zu Wasserstoff. Die Anfänge der Suche nach außerirdischem Leben gehen zurück auf das Jahr 1959, als Philip Morrison und Giuseppe Cocconi vorschlugen, die 21-cm-Linie des Wasserstoffatoms für diese Forschung zu verwenden. SETI[55] startete im Jahr 1960, als Frank Drake ein Radioteleskop in Richtung Tau Ceti und Epsilon Eridani ausrichtete. Diese beiden Sternen sind nicht weit entfernt und sonnenähnlich. Erste Kontaktsignale der Erde wurden im Jahr 1974 vom Radioteleskop in Arecibo (Puerto Rico) gesendet.

Die so genannte H-Eins-Linie ist eine Spektrallinie des neutralen Wasserstoffs mit einer Wellenlänge von 21 cm, also im Bereich der Radiowellen. Die Emission oder die Absorption der Strahlung erfolgt beim Umklappen des Elektronenspins relativ zum Spin des Protons. Da dieser Übergang nach den Regeln der Quantenphysik verboten ist, zeichnet er sich durch eine extrem geringe Linienbreite aus (Kapitel *Heisenbergsche*

[55]SETI: Search for Extraterrestrial Intelligence

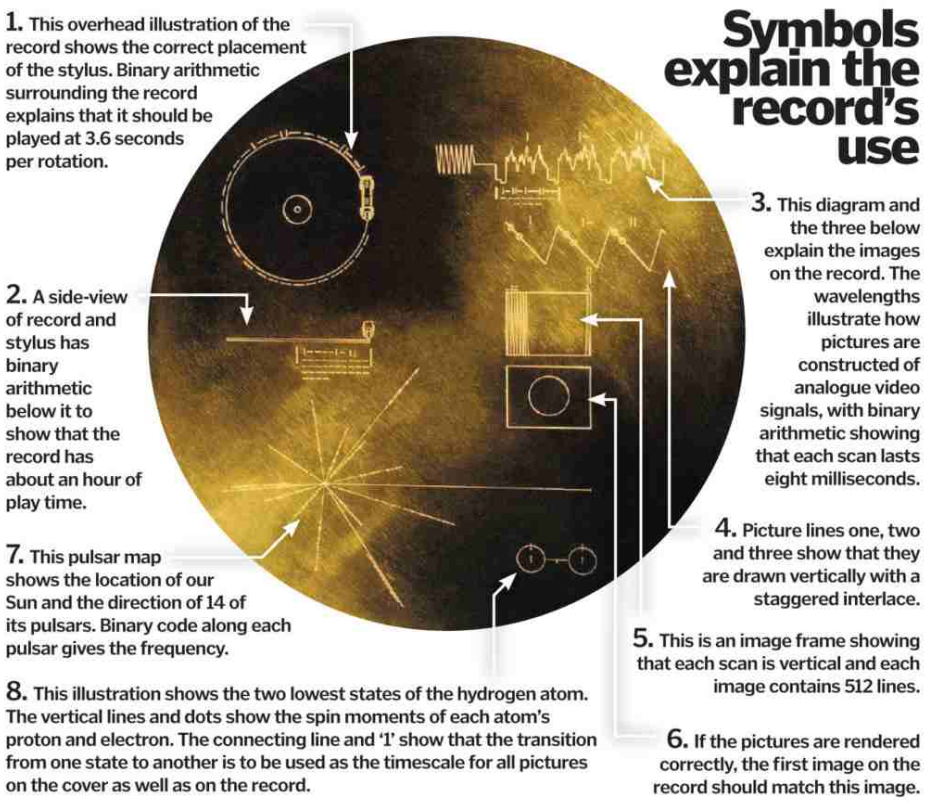


Abb. 5.61: Die Satelliten Pionier 10 und Pionier 11, die vor Voyager gestartet wurden, trugen kleine Metalltafeln mit Zeitangabe und Ursprungsort. Voyager 1 und Voyager 2 haben eine Art Zeitkapsel an Bord, dazu bestimmt, Außerirdischen die Geschichte der Erde zu übermitteln. Die Voyager-Botschaft ist auf einer vergoldeten Schallplatte aus Kupfer enthalten, die Klänge und Bilder enthält, die ausgewählt wurden, um die Vielfalt des Lebens und der Kultur auf der Erde darzustellen.

Unschärferelation). Dadurch lässt sich die relativistische Rotverschiebung gut vermessen. Da Wasserstoff praktisch überall im Universum vorhanden ist, ist die 21-cm-Linie ein wichtiger Sensor der Astronomie zur Untersuchung von interstellaren Wasserstoffwolken.

Elektronen und Protonen weisen eine Eigenschaft auf, die man auf der Grundlage der klassischen Physik nicht erfassen kann. Tatsächlich bedarf es der Quantenelektrodynamik, um das Phänomen Spin zu erklären. Der Spin, in Abb. 5.62 als Pfeil (↑) eingezeichnet, weist nur zwei Einstellungen auf (*spin-up* oder *spin-down* genannt). Grob und in keiner Weise richtig, kann man sich den Spin als Eigendrehimpuls eines Teilchens vorstellen.

Im Wasserstoffatom können sich die Spins von Elektron und Proton in zwei unterschiedlichen Weise einstellen (parallel (↑↑) oder anti-parallel (↑↓)). Dies führt zu leicht unterschiedlichen Energieverhältnissen. Quantenphysikalisch ist es möglich, dass der Spin

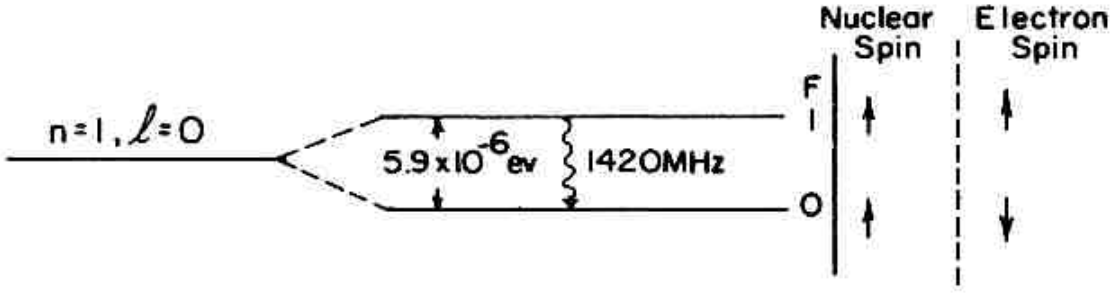


Abb. 5.62: Die 1420 MHz Strahlung resultiert aus Spinwechselwirkung von Elektronen- und Kernspin im Grundzustand des Wasserstoffatoms. Diese Aufspaltung ist als Hyperfeinstruktur bekannt.

umklappt und in den anderen Zustand wechselt. Der Prozess erfordert eine kleine Energiemenge von etwa 1 μeV, siehe Abb. 5.62. Die zugehörige Wellenlänge beträgt:

Energiedifferenz der Hyperfeinaufspaltung im Wasserstoff-Grundzustand: $5.9 \cdot 10^{-6}$ eV

Frequenz der Hyperfeinaufspaltung im Wasserstoff-Grundzustand: 1420 MHz

Wellenlänge der Hyperfeinaufspaltung im Wasserstoff-Grundzustand: 21 cm

Zum Vergleich sei angemerkt, dass Moleküle in einem Gas bei Raumtemperatur eine kinetische Energie von 20 meV aufweisen.

Die Rate mit der dieser Umklapp-Prozess geschieht, ist verschwindend klein (mittlere Lebensdauer 10^7 Jahre), so dass die entsprechenden Signale äußerst gering sind. Merkliche Signale ergeben sich nur unter den Bedingungen des Weltraums, wo Wasserstoff in rauen Mengen vorhanden ist. Beispielsweise besteht das interstellare Medium zu 90% aus Wasserstoff. Der holländischen Astronom van de Hulst machte 1944 die Vorhersage, dass man die 21-cm-Linie des Wasserstoff in Emission beobachten kann. Die Entdeckung dieser Linie im Jahr 1951 durch Ewen und Purcell[56] [**?**] war der Beginn Radioastronomie mit dem Fokus auf die Analyse der Spektrallinien. Abb. 5.63 zeigt das von ihnen verwendete Instrument. Erste Karten des neutralen Wasserstoffs in der Galaxie enthüllten erstmals die Spiralstruktur der Milchstraße [**?**].

Die Reise von Pioneer 10 begann 1972. Die Raumsonde erfüllte ihre Mission am Jupiter und entfernte sich dann weiter von der Sonne. 31 Jahre nach dem Start empfing man ihre letzten Funksignale. In etwa 2 Millionen Jahren könnte Pioneer 10 in die Nähe des

[56] The Nobel Prize in Physics 1952 was awarded jointly to Felix Bloch and Edward Mills Purcell *for their development of new methods for nuclear magnetic precision measurements and discoveries in connection therewith*



Abb. 5.63: Photo der Mikrowellenantenne von Ewen und Purcell. Ewen installierte die Hornantenne direkt vor einem Fenster im vierten Stock des Lyman Lab in Harvard, wobei der Wellenleiter durch das Fenster zum Empfänger und Rekorder führte. Bei starkem Regen wirkte die Hornantenne wie ein Trichter und überschwemmte bei verstopften Abfluss das Labor. Im Winter war die Antenne ein verlockendes Ziel für Schneebälle, geworfen von vorbeikommenden Studenten [**?**].

Sterns Aldebaran kommen. Für den unwahrscheinlichen Fall, dass Außerirdische darauf stoßen, haben Pioneer 10 und ihre Pioneer 11 eine Plakette mit einer Botschaft an Bord, unter Anderem mit der Information über die Hyperfeinaufspaltung von Wasserstoff.

Anwendungen

Ein Ausflug in die Astrophysik

Durch die Beobachtung der 21-cm-Linie können Wasserstoffvorkommen in unserer und anderen Galaxien beobachtet werden. Der große Vorteil ist, dass die Strahlung Staubwolken nahezu ohne Verluste durchdringt. In Abb. 5.64 ist die Galaxis Messier 83 dargestellt. M83 ist bekannt geworden, weil hier die erste visuelle Beobachtung einer Supernova seit der Erfindung des Teleskops gemacht wurde. Wie unterscheiden sich diese Aufnahmen zu Messungen im optischen Bereich? Abb. 5.65 zeigt dazu einen Vergleich am Beispiel der Spiralgalaxis Messier 81 [**?**]. Die Linie ist weiter geeignet Geschwindigkeitsfelder abzubilden. Abb. 5.66 zeigt, wie man mit Hilfe der 21-cm-Linie die Bewegung einer Galaxie bestimmen kann. Das Radialgeschwindigkeitsfeld der hier gezeigten Spiralgalaxie M33 ist relativ zum Massenzentrum kodiert.

Abb. 5.68 zeigt die Milchstraße im Sichtbaren (oben) und bei der 21-cm-Linie. Deutlich

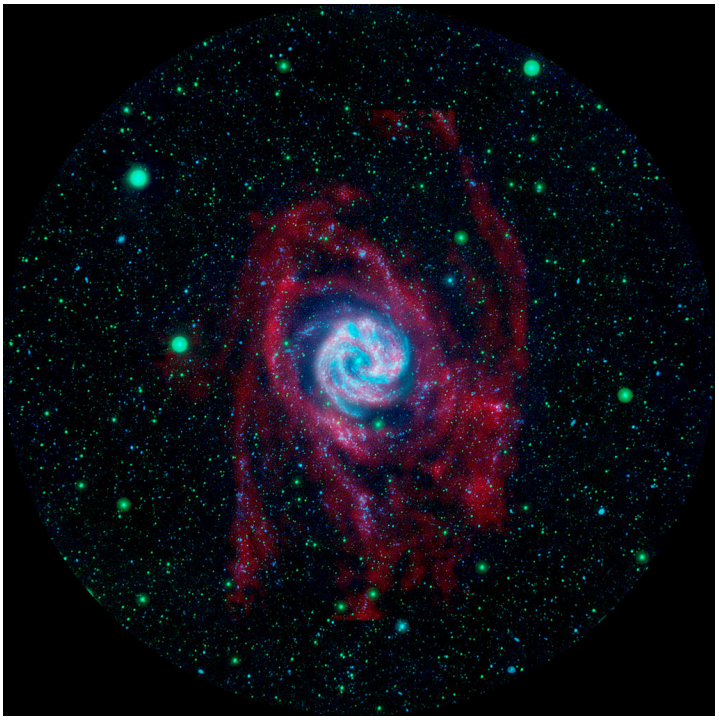


Abb. 5.64: Photo der Galaxis M83 (Feuerrad Galaxie), aufgenommen auf der 21 cm Wasserstofflinie. In dieser Galaxie ist die Gasscheibe ist viel ausgedehnter als auf der Grundlage der optischen Beobachtung vermutet [**?**].

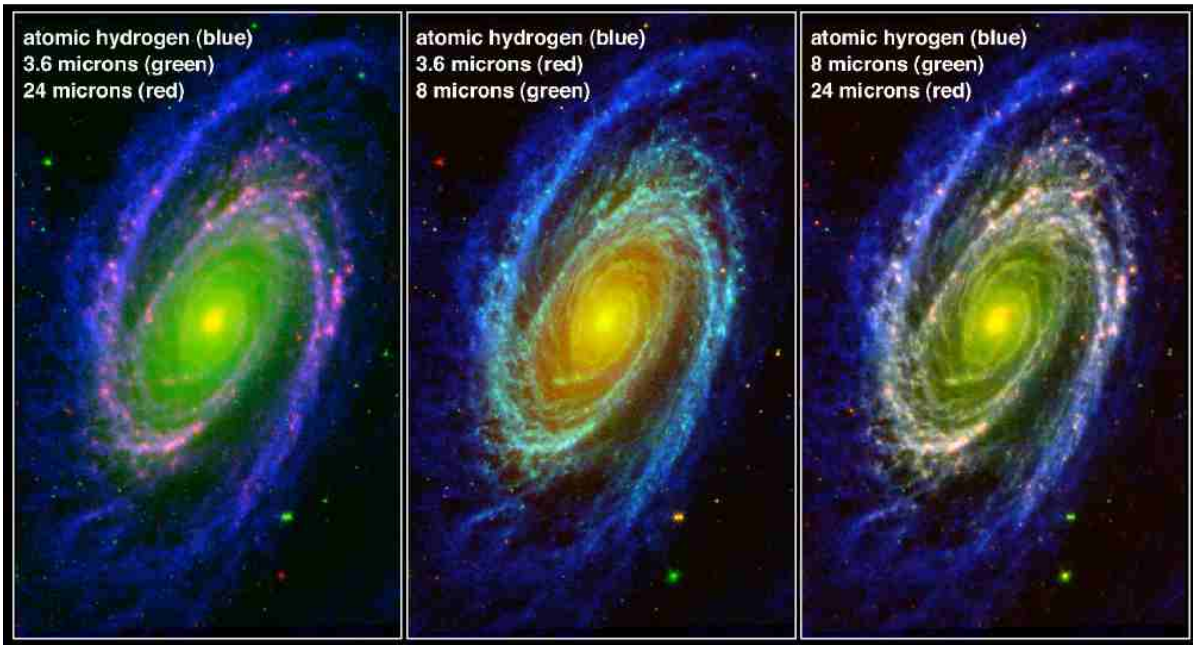


Abb. 5.65: Hochaufgelöste Wasserstoff 21 cm Aufnahme der Galaxis M81 im Vergleich zu einer Aufnahme im mittleren Infrarotbereich [**?**].

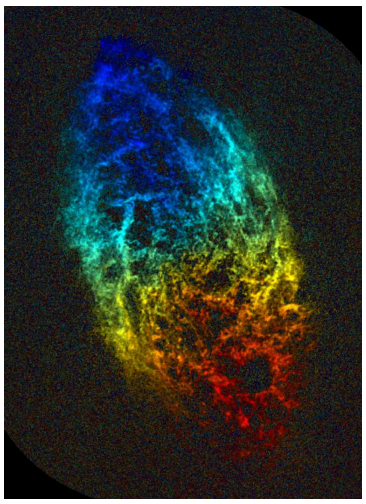


Abb. 5.66: Rotation der Galaxis M33 [**?**].

ist anhand der Intensitätsverteilungen zu erkennen, dass die Emissionen in unterschiedlichen Bereichen der Galaxis stark auftreten. Das Video bietet dieselbe Darstellung. Allerdings sieht man hier den Anteil neutralen Wasserstoffs auflöst nach der Entfernung. Zu Anfang im näheren Umkreis der Sonne und schließlich die gesamte Milchstraße. Zum Ende hin erschienen angrenzende Galaxien wie Andromeda und die Magellanschen Wolken.

Link to video **21 cm view of the Milkyway**

Ein Beispiel aus der Astronomie

Wie verteilt sich der Wasserstoff in unserer Milchstraße? Abb. 5.67 zeigt eine frühe Messung von Oort, wobei die Verteilung, aus Messungen bei der 21-cm-Linie bestimmt wurde [**?**]. Abb. 5.69 zeigt die unterschiedlichen Spiralarme der Milchstraße und die Astronomen sind natürlich auch an dynamischen Prozessen interessiert. Unter anderem wurde mit Hilfe der 21-cm-Linie die Spiralstruktur unserer Milchstraße entschlüsselt. Welche Hinweise gibt es, dass es sich bei der Milchstraße um eine Spiralgalaxis handelt?

- Wenn man in Richtung des Galaktischen Zentrums schaut, beobachtet man einen langen, dünnen Streifen. Dies deutet eher auf eine Scheibe als auf ein Ellipsoid oder eine andere Form hin. Man erkennt auch eine Ausbuchtung in der Mitte. Die Astronomen kennen andere Spiralgalaxien, die ebenfalls zentrale Ausbuchtungen aufweisen.

- Wenn wir die Geschwindigkeiten von Sternen und Gas in unserer Galaxie messen, beaobachtet man eine Rotationsbewegung, die sich von zufälligen Bewegungen unterscheidet.

- Der Gasanteil, die Spektralzusammensetzung und der Staubgehalt unserer Galaxis ähneln denen anderer Spiralgalaxien.

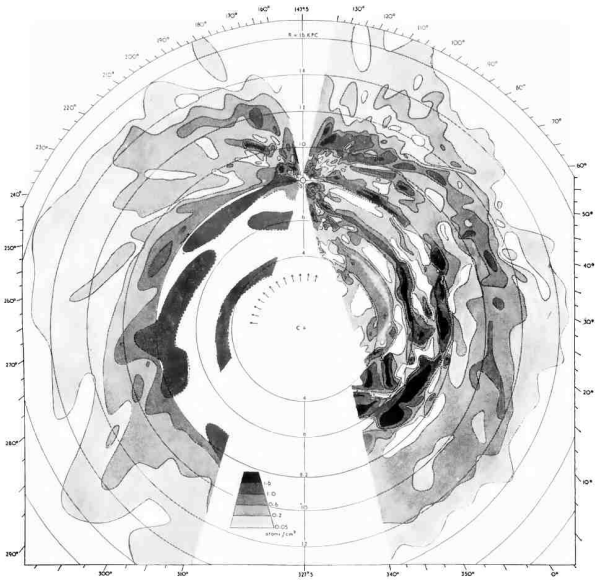


Abb. 5.67: Verteilung von Wasserstoff in der Milchstraße. Die maximalen Dichten sind dabei projiziert auf die Ebene der Scheibe. Den Hauptanteil der Wasserstoffvorkommen findet man in den Spiralarmen [**?**].

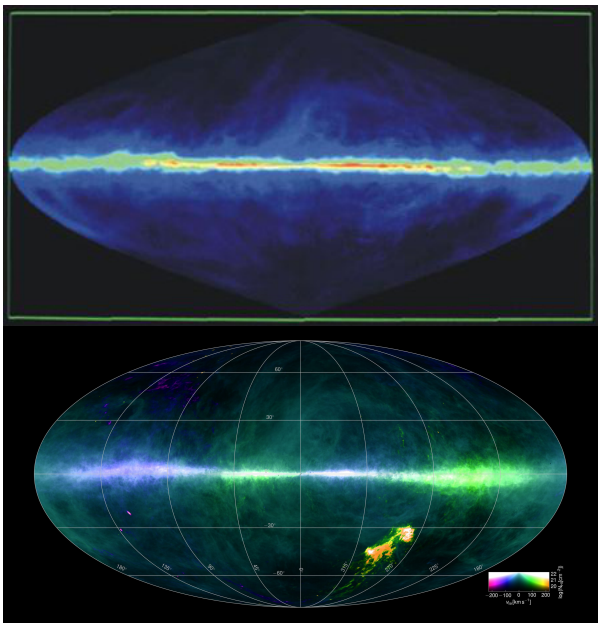


Abb. 5.68: *Oben:* Verteilung von neutralem Wasserstoff in der Milchstraße. *Unten:* Diese Karte des neutralen Wasserstoffs wurde unter Verwendung von Daten des Radioteleskops in Effelsberg und des CSIRO-Radioteleskops in Parkes, Australien, erstellt. Die Bildfarben reflektieren Gas mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Die Ebene der Milchstraße verläuft horizontal durch die Bildmitte. Unten rechts sind die Magellanschen Wolken zu erkennen [**?**].

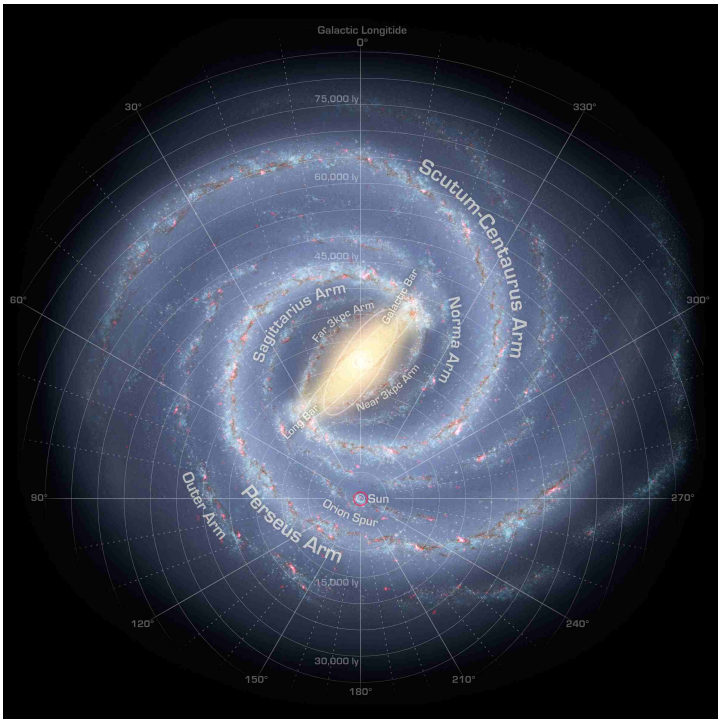


Abb. 5.69: Die Milchstraße ist eine Spiralgalaxie mit mehreren markanten Armen und hat einen Durchmesser mehr als etwa 100 000 Lichtjahren. Damit ist sie die zweitgrößte in unserer lokalen Gruppe von Galaxien. Unsere Sonne findet man nahe dem unteren Rand. Die Milchstraße dreht sich mit einer Geschwindigkeit von 270 km/s und braucht etwa $2 \cdot 10^8$ a für eine Umdrehung. Die Gebiete, in denen Sterne entstehen, sind in rosa Wolken aus Wasserstoffgas gehüllt [**?**].

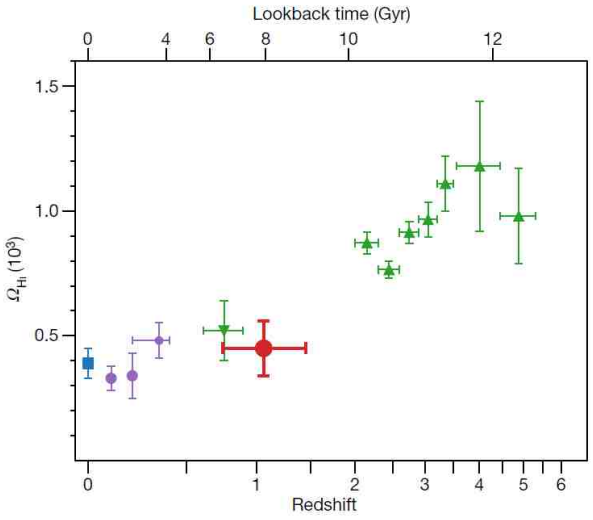


Abb. 5.70: Kosmologische Rotverschiebung und zeitliche Entwicklung interstellaren Wasserstoffs in Galaxien [**?**].

Ein Ausflug Richtung Urknall

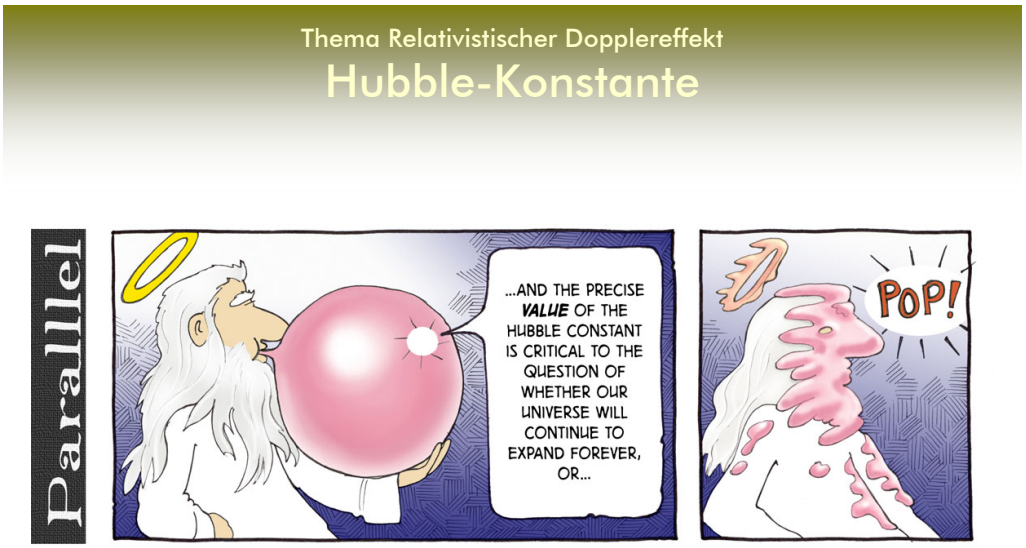
Die Rate der Sternentstehung im Universums war maximal zwischen 2.5 und 4.5 Milliarden Jahre nach dem Urknall. In dieser Zeitspanne bildeten sich die Hälfte der Sterne. Forscher haben die Stärke der H1-Linie von Wasserstoffs anhand der Beobachtung von 7500 Galaxien ausgewertet [**?**]. Über die kosmologische Rotverschiebung[57] wurde dabei die Entfernung bestimmt. Damit schaut man in eine Epoche zwischen 4.4 und 7.5 Milliarden Jahre nach dem Urknall. Die Analyse ergab, dass die Rate nach dem Maximum auf 10% abgesunken ist, siehe Abb. 5.70. Als Ursache wird vermutet, dass der Zustrom intergalaktischen Wasserstoffs später versiegte.

[57] *Lexikon:* Die **Kosmologische Rotverschiebung** z ersetzt in der Astronomie die Angabe von Entfernungen. Je größer die z, umso entfernter ist die Entfernung zum Objekt. Die Rotverschiebung ist ein Maß für das Alter eines astronomischen Objekts. Je größer z ausfällt, umso früher war das Objekt bereits im Kosmos vorhanden. Mit steigendem z macht man also eine Reise in die Vergangenheit unseres Universums.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Zu welchem Bereich elektromagnetischer Strahlung gehört die Wasserstoff 21-cm-Linie?
2. Welche Bedeutung hat der Spin für die 21 cm Wasserstofflinie?
3. Wie wird die 21 cm Strahlung von Wasserstoffatomen erzeugt?
4. Welche Bedeutung hat die 21 cm Wasserstofflinie für die Astronomie?

Hubble Konstante



In den 1920er Jahren glaubten viele Astronomen, dass galaktische Nebel nahe gelegene Gaswolken in unserer eigenen Milchstraße sind. Die Milchstraße umfasste für sie das gesamte Universum. Andere waren der Auffassung, dass Nebel weiter entfernte Sterneninseln waren, getrennt von unsere eigenen Galaxie. Harlow Shapley und Heber Curtis führten dazu eine berühmte Debatte über das Thema im Jahr 1920 [**?**].[58] Ironischerweise wurde die historische Bedeutung erst später erkannt. Die Veranstaltung war tatsächlich nicht gut besucht. Es war noch nicht mal eine Debatte, sondern bestand schlicht aus den zwei Präsentationen und einer anschließenden Diskussion. Curtis argumentierte, dass das Universum aus vielen Galaxien besteht, die unserer eigenen ähnlich sind und von den Astronomen als Spiralnebel identifiziert wurden. Im Gegensatz dazu glaubte Shapley, dass es sich bei den Spiralnebeln lediglich um Gaswolken handelt und dass das Universum aus einer einzigen großen Galaxie bestand. Im Modell von Shapley ist die Sonne weit vom Zentrum der Galaxie entfernt, während Curtis die Sonne in der Nähe ihres Zentrums

[58] Der Astronomen F. Shu meint, dass die Shapley-Curtis-Debatte bis heute als ein faszinierender Einblick in die Denkprozesse bedeutender Wissenschaftler, die an einer großartigen Arbeit beteiligt sind, ist; eine Kontroverse, für die die Beweise auf beiden Seiten fragmentarisch und teilweise fehlerhaft sind, und als ein Momentaufnahme der Schwierigkeit, sich durch die Tücken zu navigieren, der Forschung in Grenzbereichen der Wissenschaft charakterisiert.

lokalisierte. Zu dieser Zeit begann am Mount Wilson der Astronom Edwin Hubble, die Entfernungen zu den Nebeln zu vermessen. Er verwendete dazu die Cepheiden-Methode, basierend auf den Arbeiten von Henriette Leavitt, die einen Zusammenhang zwischen der Leuchtkraft und der Pulsationsrate dieser Veränderlichen herstellte [**?**]. Hubble untersuchte Cepheiden im Andromeda-Nebel und fand heraus, dass der Nebel keine Gaswolke in unserer Milchstraße war, sondern eine entfernte Galaxie. Weiter war bekannt, dass die Emission aus den Nebeln spektral nach rot verschoben waren. Astronomen, wie Vesto Slipher, hatten herausgefunden, dass sie sich mit hohen Geschwindigkeiten entfernen [**?** **?**]. Unverstanden war, warum alle Galaxien sich scheinbar von uns entfernen. Wie ging Hubble weiter vor? Galaxien klumpen (clustern). Die Milchstraße befindet sich in einer lokalen Gruppe.[59] Hubble wandte die Methode der Entfernungsbestimmung von Sternen und Galaxien über die scheinbare Leuchtkraft auf die Galaxiencluster selbst an.[60] Mit der Annahme, dass jeder Cluster in etwa dieselbe Leuchtkraft hat, konnte er Entfernungen von Objekten bis 500 Mpc bestimmen. Nachdem Hubble genügend Datenpunkte gesammelt hatte, fand er eine einfache lineare Beziehung zwischen der Geschwindigkeit eines Objekts und seiner Entfernung von uns [**?** **?**]. Das Hubble-Gesetz besagt, dass Galaxien sich mit Geschwindigkeiten von uns weg bewegen, die proportional zu ihrer Entfernung sind. Abb. 5.71 illustriert das Phänomen. Ein Meilenstein in der Geschichte der Kosmologie! Es sei noch erwähnt, dass Walter Baade herausfand, dass es zwei Typen von Cepheiden gibt, die sich in ihrer Periode-Helligkeitsbeziehung unterscheiden. Daraus ergab sich, dass Hubble die Entfernung der weit entfernten Objekte um einen Faktor zwei unterschätzt hatte [**?**].

The Hubble Constant? The Answer Is 42! The preliminary results of a new measurement of the so-called Hubble Constant, taken by radio telescopic means at Cambridge University in England is 42. The Hubble Constant determines the speed at which galaxies are receding from each other, and thus tells us the age of the universe from the time of the Big Bang. It so happens that Douglas Adams, in the book and radio series A Hitchhiker's Guide to the Galaxy in 1978 had a massive computer calculate the meaning of life and the answer was: 42.

www.npr.org

Das Zitat motiviert einen Ausflug in die Kosmologie und die Allgemeine Relativitätstheorie. Wer das Buch *Per Anhalter durch die Galaxis* von Douglas Adams [**?**] kennt, weiß, dass die Zahl 42 die Antwort auf eine wichtige Frage ist. Tatsächlich bezieht sich diese Zahl auf den Hubble-Parameter $\mathcal{H}$, der für die Entwicklung des Universums ein

[59] Milchstraße, Andromeda und etwa 70 Zwerggalaxien. Durchmesser: $5 - 8 \cdot 10^6$ Lj.

[60] Die Leuchtkraft eines Sterns oder einer Galaxie ist charakterisiert durch den Strahlungsfluss, der die Erde erreicht und wird durch die scheinbare Helligkeit (Einheit m) angegeben. Die Werte bewegen sich zwischen m=1 (hellste Sterne) und m=6 (gerade noch mit dem Auge sichtbar). Wenn F_1 und F_2 der Strahlungsfluss zweier Objekte ist, dann ergibt sich die Differenz der scheinbaren Helligkeit mit

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log(F_1/F_2) \tag{5.32}$$

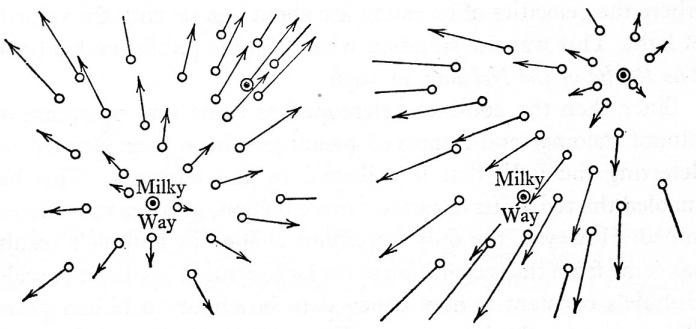


Abb. 5.71: Die Expansion des Universums, wie sie von entfernten Galaxien aufgrund des Hubble-Gesetzes wahrgenommen wird. *links:* Die Fluchtgeschwindigkeit ist proportional zum Abstand zum Objekt. *rechts:* Eine Beobachter in einer anderen Galaxie würde dasselbe Phänomen beobachten. Die Milchstraße ist also nicht ausgezeichnet [**?**].

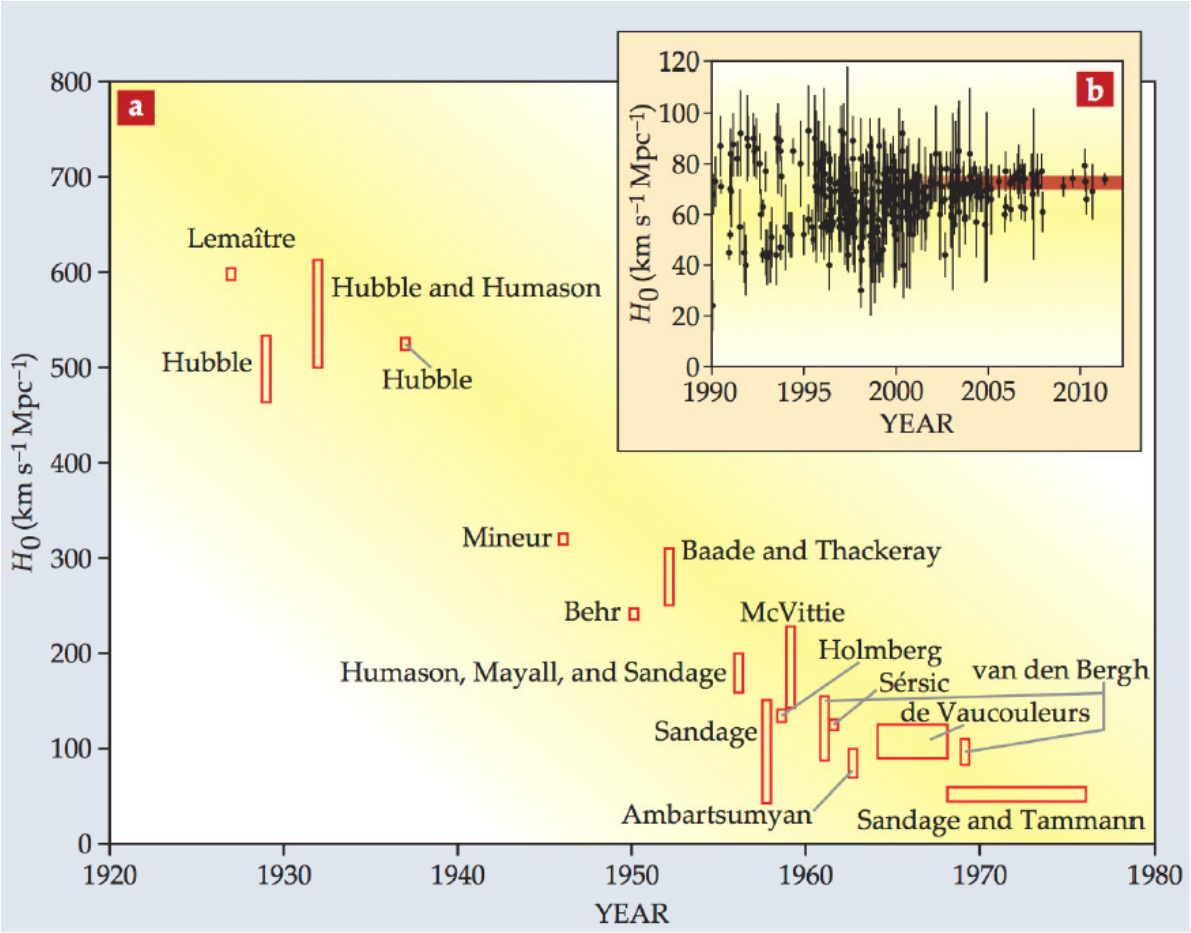


Abb. 5.72: Entwicklung der Messungen der Expansionsrate des Universums, angegeben durch die Hubble-Konstante. Die verwendeten Einheiten geben die Geschwindigkeit der Expansion in km/s pro 10^6 Parsec (Mpc).

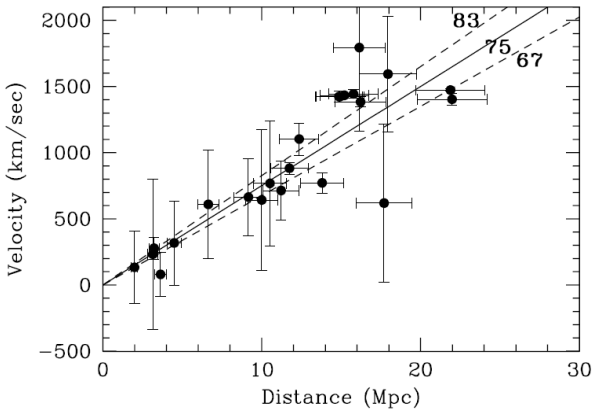


Abb. 5.73: Bestimmung der Hubble-Konstante aus Beobachtungen von Supernovae in weit entfernen Galaxien. Die durchgezogene Linie liefert den aktuellen Wert des Hubble-Parameters. Die gestrichelten Linien zeigen die Grenzen der Anaalyse an ($\pm 7\,\mathrm{km/s/Mpc}$) [**?**].

wichtiges Maß darstellt. Der Parameter $\mathcal{H}$ bezieht sich auf einen Skalierungsfaktor a, der proportional zur Entfernung zwischen Galaxien ist

$$\mathcal{H} = \frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dt} \tag{5.33}$$

Es sei angemerkt, dass $\mathcal{H}$ keine Konstante ist, sondern einen Wert hat, den man für die heutige Zeit bestimmt hat. Man bezeichnet ihn als Hubble-Konstante $\mathcal{H}_0$. Abb. 5.72 zeigt, wie sich aufgrund neuerer Erkenntnisse der Astronomen die Hubble-Konstante im Laufe der Jahre immer genauer bestimmt wurde. Der heute gültige Wert ist [**?**], siehe Abb. 5.73:

Hubble-Konstante: $\mathcal{H}_0$=72 km/s/Mpc

Das bedeutet, dass sich das Universum mit einer Geschwindigkeit von 72 Kilometern pro Sekunde pro Megaparsec ausdehnt.[61] Alle $3.3 \cdot 10^6$ Lj steigt die Geschwindigkeit einer Galaxie infolge der Expansion des Universums um 70 km/s an.

Eine Analyse der Relativgeschwindigkeit von weit entfernten Objekten wie fernen Galaxien zeigt, dass sich alle Objekte von der Erde entfernen, siehe Abb. 5.74. Die Tabelle in Abb. 5.75 gibt Beispiele. Den Rekord hält UDFy-38135539, eine Galaxie im Hubble Ultra Deep Field, die $13.2 \cdot 10^9$ Lj von uns entfernt ist [**? ?**]. Diese Galaxie entstand nur $6 \cdot 10^6$ Jahre nach dem Urknall. Dies führt im Rahmen der Behandlung des Allgemeinen Relativitätstheorie zu einem relativistischen Dopplereffekt und einer Rotverschiebung der Wellenlängen. Hubble hat den Wert für die relativistische Rotverschiebung z, der Auskunft gibt über die Fluchtgeschwindigkeit ($\beta = v/c$):

- relativistische Geschwindigkeiten:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{5.34}$$

[61] Ein Megaparsec entspricht $3.3 \cdot 10^6$ Lichtjahre

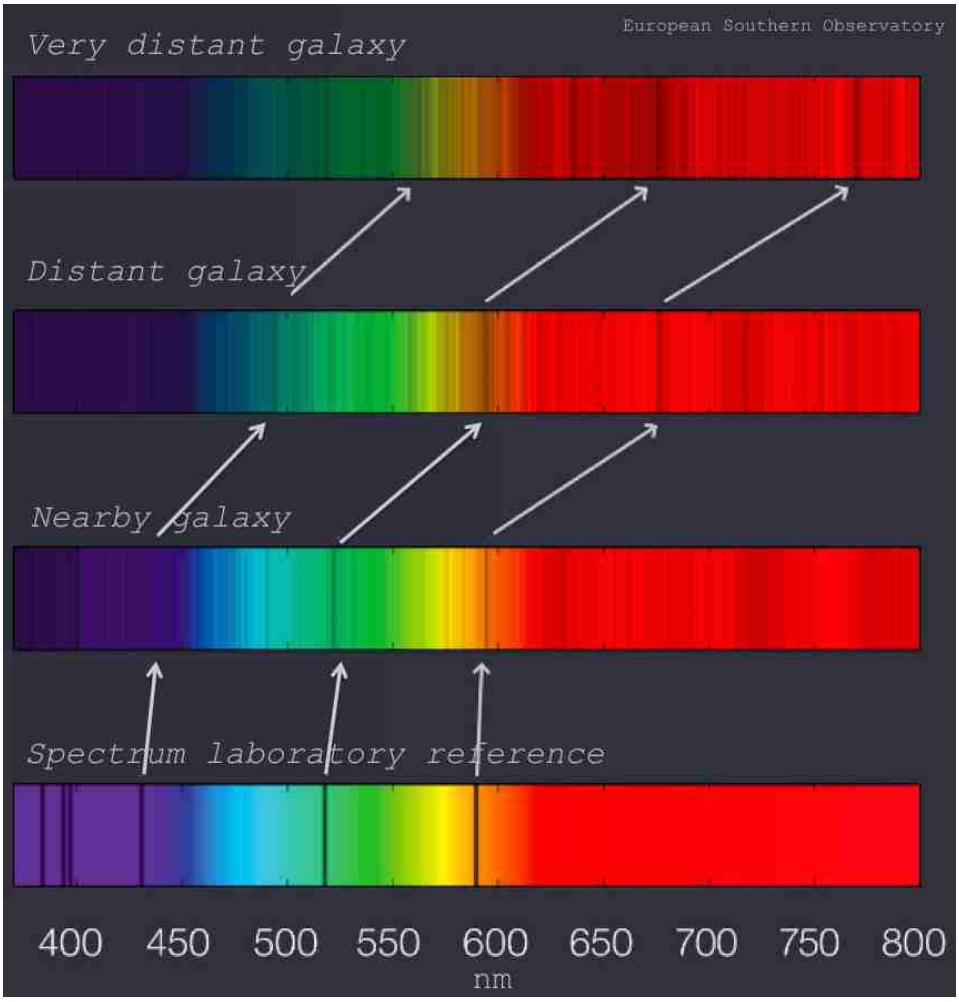


Abb. 5.74: Rotverschiebung atomarer Absorptionslinien für unterschiedlich weit entfernte Galaxien [**?**].

Table 1: The most distant galaxies with measured redshift (as of Sep.14, 2006).

Rank	Identification	Coordinates	Redshift	Distance#	Paper	Publishing date
1	IOK-1	J132359.8+272456	6.964	12.8826	Iye et al.	Sep. 14, 2006
2	SDF ID1004	J132522.3+273520	6.597	12.8250	Taniguchi et al.	Feb, 25, 2005
3	SDF ID1018	J132520.4+273459	6.596	12.8248	Kashikawa et al.	Apr. 25, 2006
4	SDF ID1030	J132357.1+272448	6.589	12.8238	Kashikawa et al.	Apr. 25, 2006
5	SDF ID1007	J132432.5+271647	6.580	12.8222	Taniguchi et al.	Feb. 25, 2005
6	SDF ID1008	J132518.8+273043	6.578	12.8219	Taniguchi et al.	Feb. 25, 2005
6	SDF ID1001	J132418.3+271455	6.578	12.8219	Kodaira et al.	Apr. 25, 2003
8*	HCM-6A	J023954.7-013332	6.560	12.8189	Hu et al.	Apr. 1, 2002
9	SDF ID1059	J132432.9+273124	6.557	12.8184	Kashikawa et al.	Apr. 25, 2006
10	SDF ID1003	J132408.3+271543	6.554	12.8178	Taniguchi et al.	Feb.25, 2005

Distance in billion light years calculated for a model of the Universe that has an age 13.66 billion years.
* This object was discovered by Keck telescope. All the rest were discovered by Subaru Telescope in the Subaru Deep Field.

© Subaru Telescope, NAOJ

Abb. 5.75: Tabelle der Galaxien, die von uns extrem weit entfernt sind [**?**].

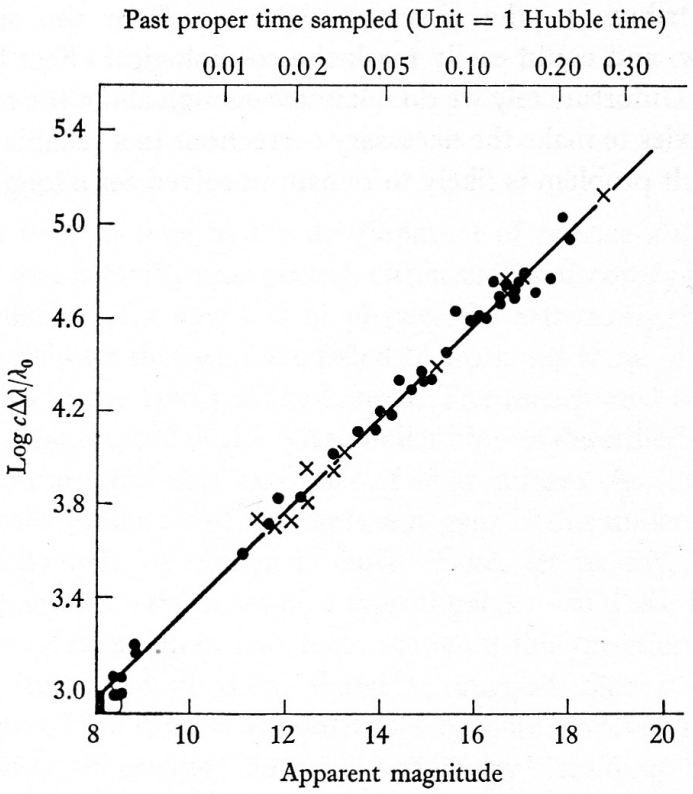


Abb. 5.76: Beziehung zwischen Rotverschiebung und Helligkeit für die hellsten Galaxien in 42 Galaxienclustern [**?**] im Vergleich zum Hubble-Gesetz (durchgezogenen Linie).

- nicht-relativistische Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} 1+z &= \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \\ 1+z &= \sqrt{\frac{(1+\beta)^2}{(1+\beta)\cdot(1-\beta)}} \\ 1+z &= \frac{1+\beta}{\gamma} \\ 1+z &\approx 1+\beta \\ z &\approx \beta \end{aligned} \tag{5.35}$$

in Zusammenhang mit der Entfernung $d_{\mathcal{H}}$ der Objekte von der Erde gebracht:

$$v = \mathcal{H}_0 \cdot d_{\mathcal{H}} \tag{5.36}$$

Je höher die Fluchtgeschwindigkeit ist, umso weiter sind die Objekte von der Erde entfernt. Trägt man die Geschwindigkeit, mit der sich die astronomischen Objekte bewegen, gegen die Entfernung auf, ergibt sich ein einfacher Zusammenhang, siehe Abb. 5.76. Die Geschwindigkeit mit der sich Sterne und Galaxien entfernen, wächst proportional mit der Entfernung von Erde und astronomischem Objekt. Die eigene Milchstraße ist dabei nicht das Zentrum der Expansion. Astronomen in jeder beliebigen Galaxie würden diese Beobachtung machen. Der Kosmos expandiert als Ganzes. Man kann sich aber überlegen, dass die Annahme einer seid Anbeginn konstanten Expansionsgeschwindigkeit einer genaueren Betrachtung nicht standhält. Die Gravitationsanziehung hat die Expansion verlangsamt und zwar zu Beginn stärker als später in der Entwicklung des Universums.

Trugschlüsse

- Die Erde befindet sich NICHT in einer ausgezeichneten Position im Zentrum im Universum.

- KEINE Position im Kosmos ist ausgezeichnet (Kosmologisches Prinzip).[62]

- Wenn man von JEDER beliebigen Position im Universum auf die Bewegung anderer Galaxien schaut, wird man feststellen, dass diese sich entfernen und zwar ebenfalls nach den Vorgaben des Hubble-Gesetzes.

- Die Galaxien bewegen sich NICHT im Raum, wen sie sich von uns entfernen. Tatsächlich dehnt sich der Raum aus und DADURCH vergrößert sich der Abstand der Galaxien.

- Die Vergrößerung der Lichtwellenlängen erfolgt NICHT aufgrund des optischen Dopplereffekts, sondern weil sich das Universum seid der Aussendung des Lichts vergrößert hat (Kosmologische Dopplerverschiebung).

Hubble-X

Die Steigung der Geraden

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\text{Fluchtgeschwindigkeit}}{\text{Entfernung}} \tag{5.37}$$

[62] *Lexikon:* Das **kosmologische Prinzip** besagt, dass auf der Längenskala des Universums, kein Ort gegenüber einem anderen ausgezeichnet ist. Der Kosmos wird damit in erster Näherung als isotrop und homogen angenommen.

ist die Hubble-Konstante $\mathcal{H}_0$. Da $\mathcal{H}_0$ positiv ist, kommt man zu dem Schluss, dass das Universum stetig expandiert. Das hat Konsequenzen für die Entwicklung des Universums.[63]

Ist das Universum nun geschlossen oder offen?

- Ein offenes Universum expandiert, weil die Gravitation die Expansion nicht stoppen kann. Das Universum kühlt ab und nähert sich langsam aber sicher dem den absoluten Nullpunkt.

- Ein geschlossenes Universum enthält so viel Masse, dass die Expansion durch die Wirkung der Gravitation zum Stillstand kommt. Danach kollabiert das Universum im Big Crunch.

Es gibt demnach eine kritische Massendichte, die darüber entscheidet, wie das Universum sich entwickeln wird. Wie kann man diesen Wert abschätzen? Dazu betrachten wir die Fluchtgeschwindigkeit der Erde in Bezug auf eine entfernte Galaxie im Abstand d. Das Beispiel ist willkürlich gewählt. In der Rechnung fällt der Abstand heraus und man erhält ein allgemein gültiges Resultat. Nach dem Newtonschen Schalentheorem ist die Masse M, die sich aus der Dichte der Materie ρ innerhalb der Kugel mit Radius $r{=}d/2$ ergibt, relevant für die Gravitationswechselwirkung.

$$M = \frac{4}{3}\,\pi \cdot d^3 \cdot \rho \tag{5.38}$$

Die Fluchtgeschwindigkeit, um sich von solch einer Masse ins Unendliche zu verabschieden, ist

$$\begin{aligned}
v_{escape} &= \sqrt{\frac{G_N \cdot M}{r}} \\
v_{escape} &= \sqrt{\frac{2\,G_N \cdot M}{d}} \\
v_{escape} &= \sqrt{\frac{2\,G_N \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot d^3 \cdot \rho}{d}} \\
v_{escape} &= \sqrt{\frac{8\,\pi}{3}\; G_N \cdot d^2 \cdot \rho}
\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Galaxis von uns entfernt, ergibt sich aus dem Hubble-Gesetz:

$$v = \mathcal{H}_0 \cdot d \tag{5.39}$$

[63] *Lexikon:* Da die Wechselwirkung zwischen den Massen immer geringer wird, stirbt das Universum irgendwann einen **Kältetod**. Bei diesem Prozess kühlen alle warmen oder heißen Bestandteile des Weltalls auf eine homogenen und niedrige Temperatur ab. Damit kommen alle thermodynamischen Prozesse zum Erliegen. Nach dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik folgt für ein abgeschlossenes System, wie eben das Universum, dass sich alle Temperaturdifferenzen ausgleichen und sich eine einheitliche Temperatur einstellt.

Für ein geschlossenes Universum muss v geringer sein als die die Fluchtgeschwindigkeit, also $v \leq v_{escape}$. Das führt auf den Ausdruck für die kritische Dichte ρ_c

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 \cdot d &\leq \sqrt{\frac{8\,\pi}{3}\, G_N \cdot d^2 \cdot \rho} \\ \rho &\geq \frac{3\,\mathcal{H}_0^2}{8\,\pi \cdot G_N} \\ \rho_c &= \frac{3\,\mathcal{H}_0^2}{8\,\pi \cdot G_N} \\ \rho_c &= 9.96 \cdot 10^{-27} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \end{aligned} \tag{5.40}$$

Alles was man machen muss, um der Lösung näher zu kommen ist die Massendichte des Universums zu bestimmen. Der aktuell akzeptierte Wert für die Massendichte des Universums ist bei allen Unsicherheiten $4.7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/m^3}$. Grob betrachtet leben wir also in einem offenen Universum.

Gehen wir weiter mit unserer Analyse und machen eine Dimensionsanalyse. Die Hubble-Konstante $\mathcal{H}_0$ hat die SI-Einheit [1/s]. Der Kehrwert hat ebenfalls eine Bedeutung. Geht man davon aus, dass sich seit dem Urknall an der Expansionsdynamik nichts geändert hat, gibt $\mathcal{H}$ Auskunft über das wahrscheinliche Alter des Universums. Hubbles Resultat ergab ein Alter des Universums von $2 \cdot 10^9$ Jahre. Das ist deutlich geringer als das bekannte Alter der Erde ($4.5 \cdot 10^9$ Jahre). Mit der Zeit wurde der Wert immer weiter nach unten korrigiert [**?**]. Aus der Hubble-Konstanten ergibt sich aktuell ein weitaus vernünftigerer Wert von etwa 10 Milliarden Jahren. Man nennt diesen Wert die Hubble-Zeit.

Hubble-Zeit: $\mathcal{H}_T$=$1.37 \cdot 10^{10}$ a

Man kann sich aber überlegen, dass die Annahme einer seid Anbeginn konstanten Expansionsgeschwindigkeit einer genaueren Betrachtung nicht standhält. Die Gravitationsanziehung hat die Expansion verlangsamt und zwar zu Beginn stärker aufgrund der geringeren Abstände. Die Hubble-Zeit überschätzt daher das Alter des Universums. Zwei Forschergruppen haben anhand der Beobachtung von weit entfernten Supernovae vom Typ Ia (Kapitel *Gleichzeitigkeit*) Beweise für die beschleunigte Expansion des Universums gefunden [**?**][64] Diese Supernovae bewegen sich schneller als vom Hubble-Gesetz erwartet. Was hat das zu bedeuten? Die Expansion des Universums erfolgt nicht mit zeitlich konstanter Rate.

Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe [?]: The ultimate fate of the Universe, infinite expansion or a big crunch, can be determined by using the redshifts and distances of very distant supernovae to monitor changes in the

[64] The Nobel Prize in Physics 2011 was divided, one half awarded to Saul Perlmutter, the other half jointly to Brian P. Schmidt and Adam G. Riess *for the discovery of the accelerating expansion of the Universe through observations of distant supernovae*

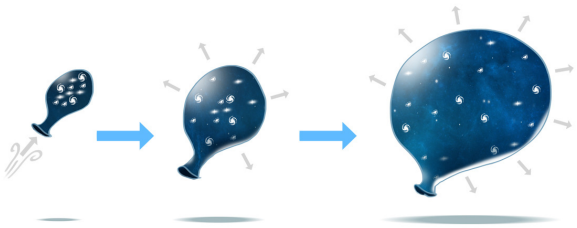


Abb. 5.77: Durch die Expansion des Universums entfernen sich die Galaxien voneinander, wie auf der Oberfläche eines sich aufblasenden Ballons.

expansion rate. We can now find1 large numbers of these distant supernovae, and measure their redshifts and apparent brightnesses; moreover, recent studies of nearby type Ia supernovae have shown how to determine their intrinsic luminosities - and therefore with their apparent brightnesses obtain their distances. The >50 distant supernovae discovered so far provide a record of changes in the expansion rate over the past several billion years. However, it is necessary to extend this expansion history still farther away (hence further back in time) in order to begin to distinguish the causes of the expansion-rate changes - such as the slowing caused by the gravitational attraction of the Universe's mass density, and the possibly counteracting effect of the cosmological constant. Here we report the most distant spectroscopically confirmed supernova. Spectra and photometry from the largest telescopes on the ground and in space show that this ancient supernova is strikingly similar to nearby, recent type Ia supernovae. When combined with previous measurements of nearer supernovae, these new measurements suggest that we may live in a low-mass-density universe.

Dritter Teil der Analyse. Informationen breiten sich nach Einstein mit höchstens Lichtgeschwindigkeit aus. Daraus ergint sich die Hubble-Länge. Dieser Ausdruck gibt Auskunft über den aktuellen Radius des Universums:

$$\mathcal{H}_L = \frac{c}{\mathcal{H}_0}$$

Hubble-Länge: $\mathcal{H}_L$=14.4 · 10^9 Lj

Das ist allerdings nur ein grober Schätzwert, denn der ermittelte Wert hängt stark davon ab, welches Kosmologische Modell man verwendet [**?**].

Wie kann man sich die räumliche Expansion des Universums vorstellen? Dazu zum Abschluss dieses Kapitels zwei Ideen. Malen Sie mit einem Filzstift ein paar Punkte auf einen schlappen Luftballon und blasen Sie ihn langsam auf. Die Abstände aller Markierungen vergrößern sich, siehe Abb. 5.77. Dies ist eine zweidimensionale Analogie, die die Verhältnisse bei der Expansion des Universums illustriert. Oder stellen Sie sich einen Hefeteig vor. Im Innern findet man kleine Lufteinschlüsse. Geht der Hefeteig auf, vergrößert sich der Abstand der Bläschen, diesmal dreidimensional.

Aufgaben

Aufgabe 6.1: Eine Galaxis weist eine kosmologische Rotverschiebung von z=3.3 auf.

(i) Mit welcher Geschwindigkeit v_{Galaxy} entfernt sich das Objekt?

(ii) Wie groß ist die Entfernung d_{galaxy} zwischen der Galaxie und der Erde?

(i) Die Fluchtgeschwindigkeit berechnet sich aus der Rotverschiebung über:

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - 1 \\
(z+1)^2 &= \frac{1+\beta}{1-\beta} \\
(z+1)^2 \cdot (1-\beta) &= 1+\beta \\
z^2 + 2\,z + 1 - z^2 \cdot \beta - 2\,z \cdot \beta - \beta &= 1+\beta \\
z^2 + 2\,z - z^2 \cdot \beta - 2\,z \cdot \beta - 2 \cdot \beta &= 0 \\
z^2 + 2\,z - (z^2 + 2\,z + 2) \cdot \beta &= 0 \\
\beta &= \frac{z^2 + 2\,z}{z^2 + 2\,z + 2} \\
\beta &= 0.9 \\
v_{Galaxy} &= 0.9 \cdot 2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \\
v_{Galaxy} &= 2.69 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

(ii) Mit der Information aus (i) kann man die Entfernung der Galaxie aus dem Hubble-Gesetz ermitteln:

$$\begin{aligned}
d_{galaxy} &= \frac{v_{Galaxy}}{\mathcal{H}_0} \\
d_{galaxy} &= \frac{2.69 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{74.3\,\mathrm{m/s\ pro\ Mpc}} \\
d_{galaxy} &= 3.62 \cdot 10^3 \cdot \mathrm{Mpc}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2: Ein Satellit nähert sich einem Asteroiden und sendet ein Radarsignal bei einer Frequenz von $6.5 \cdot 10^9$ Hz aus. Das Signal wird vom Himmelkörper reflektiert und vom Empfänger des Satelliten bei einer Frequenz registriert, die gegenüber der Ursprungsfrequenz um $5 \cdot 10^4$ Hz verschoben ist. Wie hoch ist die Relativgeschwindigkeit der beiden Objekte?

Hier muss man aufpassen. Durch die Reflektion des Tastsignals kommt es zweimal zu einer Frequenzverschiebung. Der Asteroid empfängt ein Radarsignal bei einer Frequenz von

$$\nu_{asteroid} = \nu_{emitter} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Der Satellit empfängt das reflektierte Signal bei einer Frequenz von

$$\begin{aligned}
\nu_{observer} &= \nu_{asteroid}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \\
\nu_{observer} &= \left(\nu_{emitter}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)\cdot\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \\
\nu_{observer} &= \nu_{emitter}\cdot\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine Frequenzverschiebung von

$$\begin{aligned}
\nu_{observer}-\nu_{emitter} &= \nu_{emitter}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}-1\right) \\
\frac{\nu_{observer}-\nu_{emitter}}{\nu_{emitter}} &= \frac{1+\beta}{1-\beta}-1 \\
\frac{1+\beta}{1-\beta} &= 1+\frac{\nu_{observer}-\nu_{emitter}}{\nu_{emitter}} \\
\frac{1+\beta}{1-\beta} &= 1+a \\
1+\beta &= (1+a)\cdot(1-\beta) \\
1+\beta &= 1+a-\beta-a\cdot\beta \\
\beta &= a-\beta-a\cdot\beta \\
2\beta+a\cdot\beta &= a \\
\beta\cdot(1+a) &= a \\
\beta &= \frac{a}{2+a}
\end{aligned}$$

wobei wir den Bruch auf der rechten Seite durch den Parameter a substituiert haben. Für die Größe a erhält man durch Einsetzen der Frequenzwerte:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\nu_{observer}-\nu_{emitter}}{\nu_{emitter}} \\
a &= \frac{5\cdot10^{4}\,\mathrm{Hz}}{6.5\cdot10^{9}\,\mathrm{Hz}} \\
a &= 7.69\cdot10^{-6}
\end{aligned}$$

Damit lässt sich die Relativgeschwindigkeit v bestimmen:

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{a}{2+a} \\
\beta &= \frac{7.69\cdot10^{-6}}{2+7.69\cdot10^{-6}} \\
\beta &= 3.85\cdot10^{-6} \\
v &= 3.85\cdot10^{-6}\cdot2.998\cdot10^{8}\,\mathrm{m/s} \\
v &= 1\,154\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

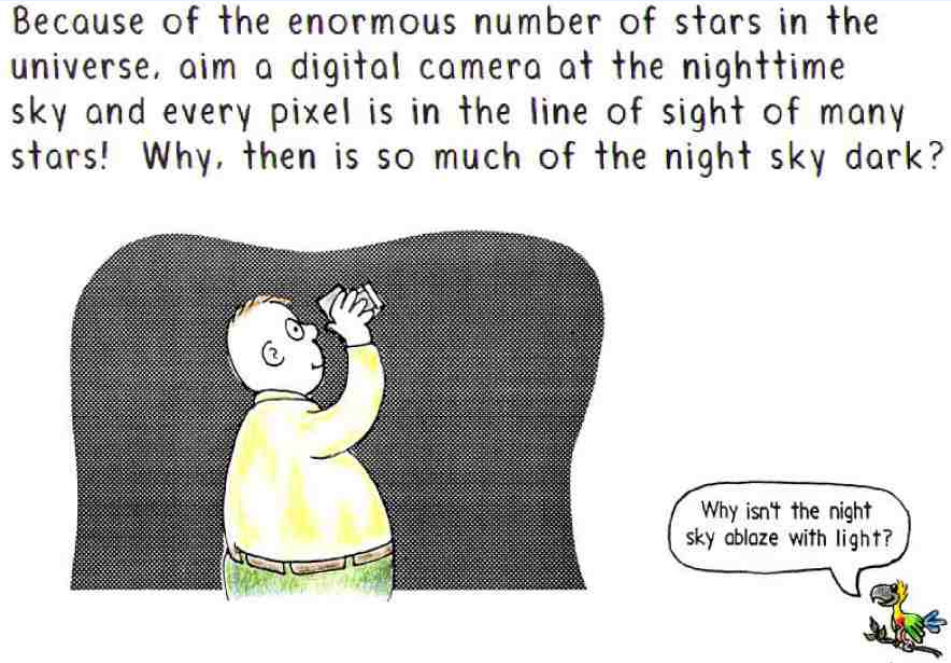


Abb. 5.78: Zu Aufgabe 6.4

Aufgabe 6.3: Die Balmer α-Spektrallinie von Wasserstoff findet man im Labor bei einer Wellenlänge von λ_{lab}=656.285 nm. Welche Fluchtgeschindigkeit ergibt sich für einen nahen Sterns, wenn die Linie nach λ_{star}=656.315 nm verschoben ist?

$$\begin{aligned}
\beta_{star} = \frac{v_{star}}{c} &= \frac{\lambda_{star} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} \\
\frac{v_{star}}{c} &= \frac{656.315\,\mathrm{m} - 656.285\,\mathrm{m}}{656.285\,\mathrm{m}} \\
\frac{v_{star}}{c} &= \frac{0.03\,\mathrm{m}}{656.285\,\mathrm{m}} \\
\frac{v_{star}}{c} &= 4.57 \cdot 10^{-5} \\
v_{star} &= 4.57 \cdot 10^{-5} \cdot 2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s} \\
v_{star} &= 13.7\,\mathrm{km/s}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.4: Es gibt doch so viele Sterne am Firmament. Warum ist der Nachthimmel deshalb nicht deutlich heller?[65]

[65] Antwort: Informieren Sie sich über das Olberssche Paradoxon.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche historische Bedeutung hat die Shapley-Curtis-Debatte?

2. Welche Hinweise führten darauf, dass sich die Galaxien voneinander entfernen?

3. Astronomen haben an einem weit entfernten Quasar beobachtet, dass die von dem kosmischen Objekt ausgesandten Signale in immer längeren Abständen auf der Erde eintreffen. Die Änderung beträgt 0.2 ms pro Jahr. Der Quasar ist so weit entfernt, dass sich eine Geschwindigkeit von $8c$ in Bezug auf die Erde ergibt. Ist dies der Beweis, dass die Spezielle Relativitätstheorie nicht stimmt?

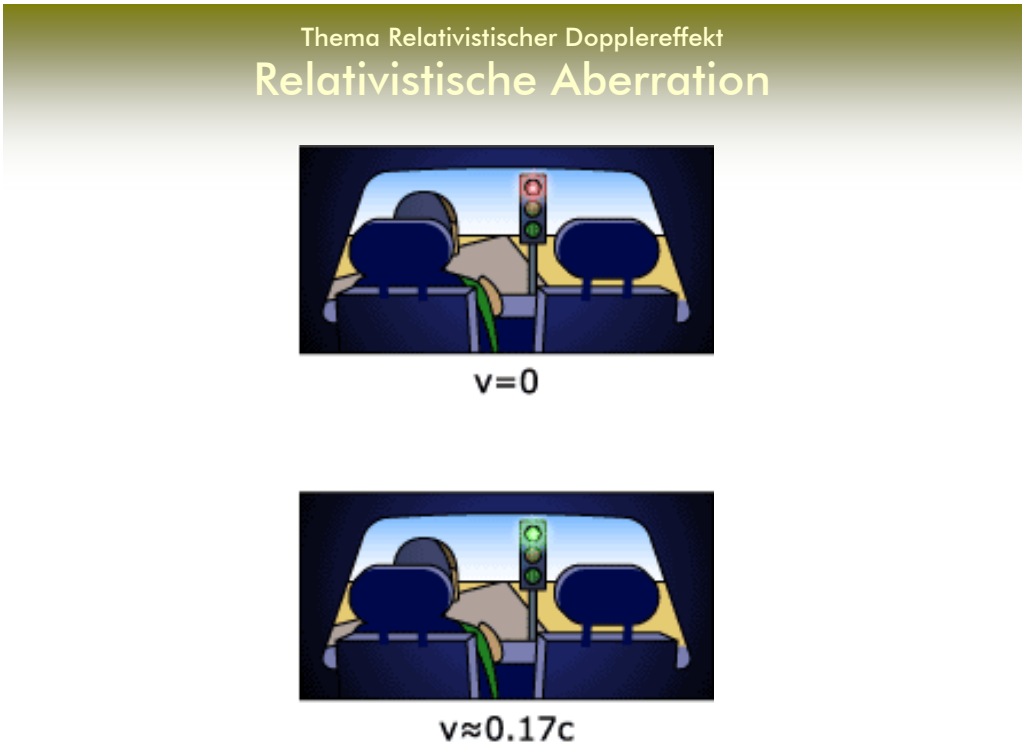
4. Welche Beziehung besteht zwischen der Entfernung einer Galaxie und ihrer Bewegung relativ zu uns?

5. Nach dem Hubble-Gesetz ist die Rotverschiebung einer charakteristischen Spektrallinie proportional der Entfernung des Objekts von der Erde. Wie überprüft man die spektrale Zuordnung?

6. Es gibt enorm viele Sterne und Galaxien im Universum. Sie nehmen ihre Kamera und photographieren den Nachthimmel. Eigentlich müssten doch überall Sterne zu sehen sein. Trotzdem ist ihre Aufnahme im wesentlichen dunkel. Können Sie sich diese Paradoxon erklären?[66]

[66] Olberssches Paradoxon: Sind wirklich im ganzen unendlichen Raum Sonnen vorhanden, sie mögen nun in ungefähr gleichen Abständen von einander, oder in Milchstrassen-Systeme vertheilt sein, so wird ihre Menge unendlich, und da müsste der ganze Himmel eben so hell sein wie die Sonne. Denn jede Linie, die ich mir von unserem Auge gezogen denken kann, wird nothwendig auf irgend einen Fixstern treffen, und also müsste uns jeder Punkt am Himmel Fixsternlicht, also Sonnenlicht zusenden.

Relativistische Aberration^{4LP}



Wie nehmen Raumfahrer, die sich mit Geschwindigkeiten nahe c bewegen, ihre Umgebung wahr? Sie beobachten Farbwechsel und geometrischen Verzerrungen. Warum das rote Ampellicht für einen bewegten System grün erscheint, wird in diesem Kapital erläutert. Um die Effekte zu verstehen, ist es notwendig sich zunächst mit der Farbwahrnehmung des Auges zu beschäftigen. Mehr dazu in Kapitel *Photoelektrischer Effekt*. Abbildung 5.79 zeigt, in welchen Spektralbereichen die drei Arten von Zapfen auf der Retina Lichtsignale detektieren. Aus der Analyse der Zapfen für rot (L, long), grün (M, medium) und blau (S, short) wird im Gehirn der Farbeindruck hervorgerufen. Lichtquellen, deren Helligkeitsmaximum im Bereich grünen Lichts (550 nm) liegen, werden besonders gut wahrgenommen.

Welche optischen Phänomene erwarten einen Raumfahrer, der sich mit relativistischer Geschwindigkeit bewegt?

- Bei einer Raumfahrt in Richtung von z.B. Beteigeuze verschiebt sich aufgrund des relativistischen Dopplereffekts das Helligkeitsmaximum eines roten Riesen in den blauen Spektralbereich. Das Spektrum eines blauen Riesen schiebt in den ultravioletten Spektralbereich und wird kaum mehr wahrgenommen. Der Effekt verstärkt sich mit zunehmender Geschwindigkeit des Raumschiffs, siehe Abb. 5.84.

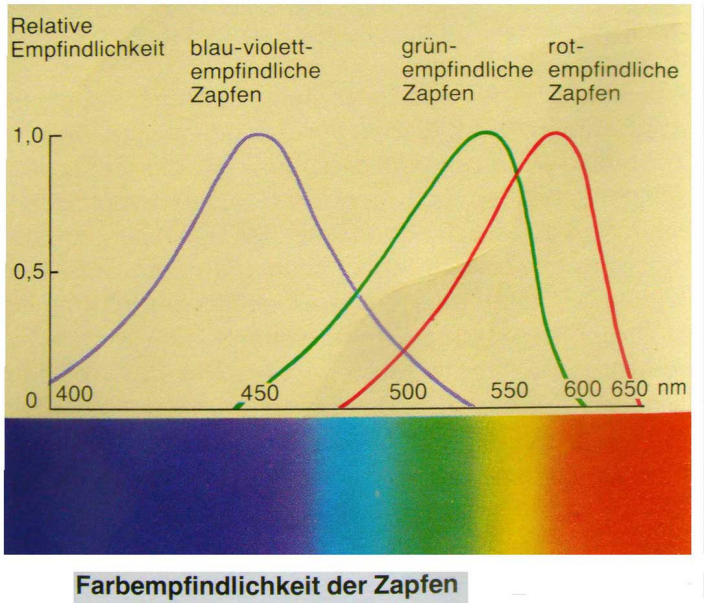


Abb. 5.79: Relative spektrale Empfindlichkeit der menschlichen Zapfen.

- Es kommt zu einem geometrischen Einengungseffekt aufgrund des hohen Reisegeschwindigkeit. Dazu betrachten wir eine Lochkamera als Modell eines Auges, siehe Abb. 5.81. Licht das durch die Lochblende (Pupille) einfällt würde, bei Relativgeschwindigkeit NULL, nach den Regeln der geometrischen Optik auf dem Schirm abgebildet. Da sich das Raumschiff mit relativistischer Geschwindigkeit bewegt, schränkt sich der Winkelbereich des Sehens ein.

- Die endliche Lichtgeschwindigkeit sorgt dafür, dass Objekte die sich hinter dem Raumschiff befinden, in Vorwärtsrichtung wahrgenommen werden (siehe auch Terrell-Rotation in Kapitel *Zerfall des Myons*), siehe Abb. 5.81.

Was passiert, wenn sich ein Beobachter mit fast Lichtgeschwindigkeit durch einen Ort wie Paris bewegt, zeigt die Animation. Einen ersten Eindruck zeigt Abb. 5.83

Link to video **Relativistic flight through the Eiffel Tower**

Die Abbildungen 5.84 bis 5.86 zeigen am Beispiels eines relativistischen Raumflugs zum Orion, dass die relativistischen Phänomene die optische Wahrnehmung grundlegend verändern. Abb. 5.87 zeigt ein weiteres Beispiel, wie die besprochenen Effekte zusammenwirken. Ausgangsobjekt ist ein Gitter einer Temperatur von 1000 °C. Dieser Körper hat ein charakteristisches Spektrum, siehe Kapitel *Schwarzer Strahler*. Für uns glüht es rot. Wenn das Gitter mit $0.9c$ auf uns zufliegt, ist die Temperatur scheinbar stark erhöht. Das Gitter strahlt hell weiß. Am größten ist die wahrgenommene Helligkeit in der Bildmitte: Mit einer zugeordneten Temperatur von 5 600 K ist das Gitter dort so hell wie die Sonne! Zur Seite hin nimmt die wahrgenommene Temperatur schnell ab. Die äußeren Teile sind kaum zu erkennen. Entfernt man sich vom Objekt mit derselben Geschwindigkeit, ist die Temperatur erniedrigt. Am stärksten ist der Effekt wieder in der Bildmitte,

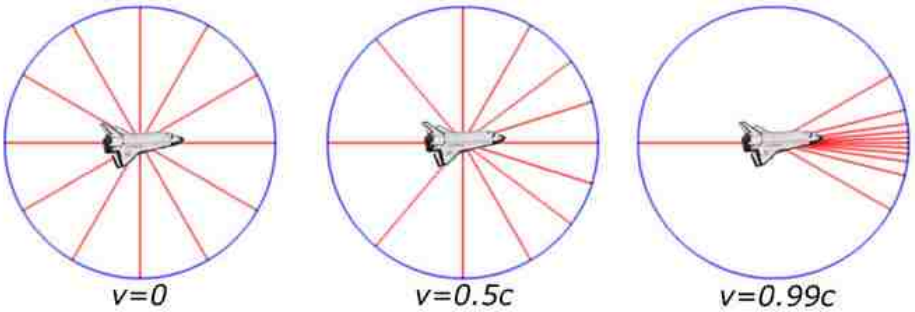


Abb. 5.80: Licht, ausgesendet von entfernten Fixsternen, die gleichmäßig auf einem Kreis verteilt sind erreichen ein Raumschiff. *Links:* Raumschiff ruht in Bezug auf die Sterne. *Mitte:* Raumschiff bewegt sich mit $0.5c$. Die Richtung aus der das Licht kommt ändert sich und scheint aus der Vorwärtsrichtung zu kommen. *Rechts:* Geschwindigkeit des Raumschiffs $0.99c$. nahezu das gesamte Licht kommen von vorne. Das trifft sogar für Sterne die sich eigentlich in einem Bereich hinter dem Raumschiff befinden [**?**].

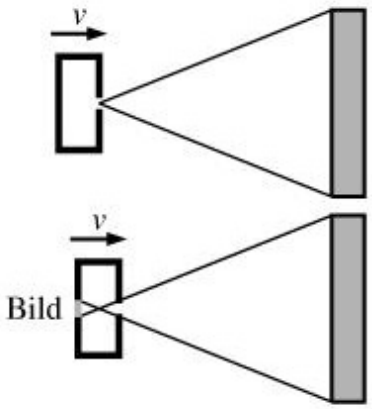


Abb. 5.81: Bildentstehung in einer relativistisch bewegten Lochkamera. Zwischen dem Eintritt des Lichtes durch die Lochblende (oben) und seinem Auftreffen auf dem Schirm (unten) bewegt sich die Kamera weiter, was zu einer Einengung des effektiven Blickwinkels führt [**?**].



Abb. 5.82: Eine Lochkamera bewegt sich mit fast Lichtgeschwindigkeit. Licht, das schräg von hinten vor die Kamera läuft, kann von der Blende eingefangen werden und fällt auf den Schirm. Je schneller sich die Kamera bewegt, desto weiter kann man als Raumfahrer nach hinten sehen [**?**].



Abb. 5.83: Fast Lichtschnell durch Tübingen (β=0.8) [**?**].

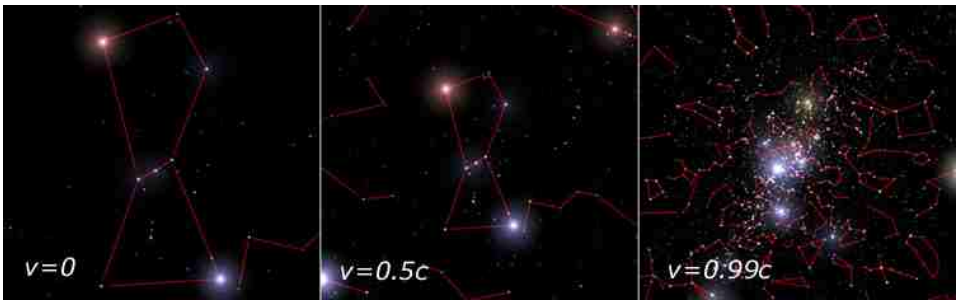


Abb. 5.84: Aberrationseffekte für ein Raumschiff, das sich in Richtung Orion bewegt (Sichtfeld 30^o). Das Sichtfeld wird konstant gehalten, nur die Geschwindigkeit wird in zwei Stufen von 0 auf $0.99c$ heraufgesetzt. Hier wird nur die geometrische Aberration berücksichtigt [**?**].

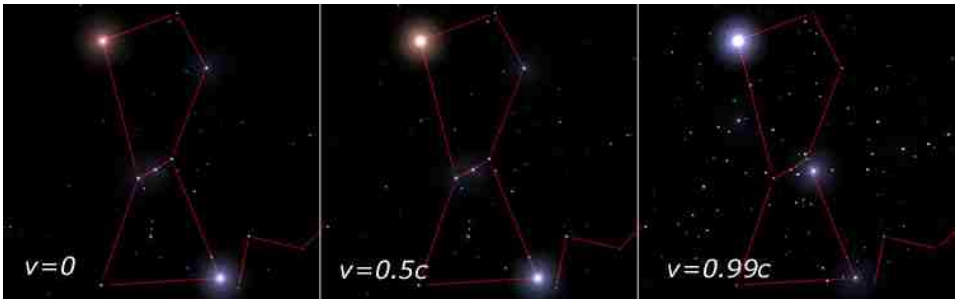


Abb. 5.85: Doppler-Verschiebung und Vorwärtsfokussierung beim relativistischen Raumflug. In dieser Abbildung ist die Aberration nicht berücksichtigt. Der Stern oben links ist der rote Überriese Beteigeuze und unten links findet man den blauen Überriesen Rigel. Links in der Abbildung sind die beiden Sterne ungefähr gleich hell. Erhöht man die Geschwindigkeit des Raumschiffs, überstrahlt Beteigeuze die Sonne Rigel aufgrund der Doppler-Verschiebung. Beim roten Stern Beteigeuze wird die starke infrarote Spektralkomponente in den sichtbaren Bereich verschoben. Bei Rigel dagegen verschiebt sich das ultraviolett dominierte Spektrum, bis der Stern optisch verschwindet [**?**].

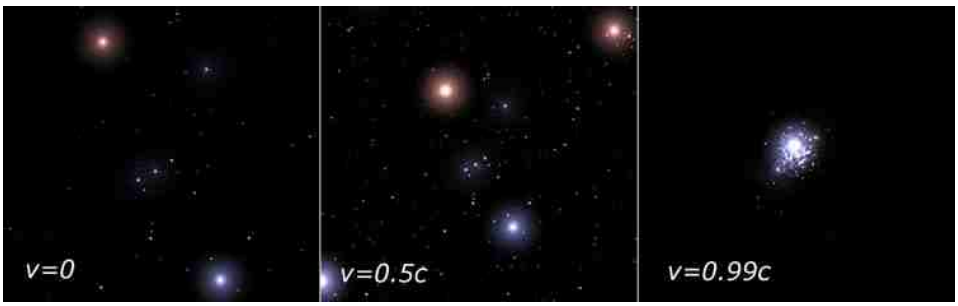


Abb. 5.86: Raumfahrt unter Berücksichtigung der beiden relativistischen Effekte [**?**].

wo das Gitter nur noch mit einer wahrgenommenen Temperatur von 20 ^{o}C strahlt, also Zimmertemperatur. Unserer Auge ist für diese Wärmestrahlung unempfindlich und das Gitter ist für uns nahezu unsichtbar.

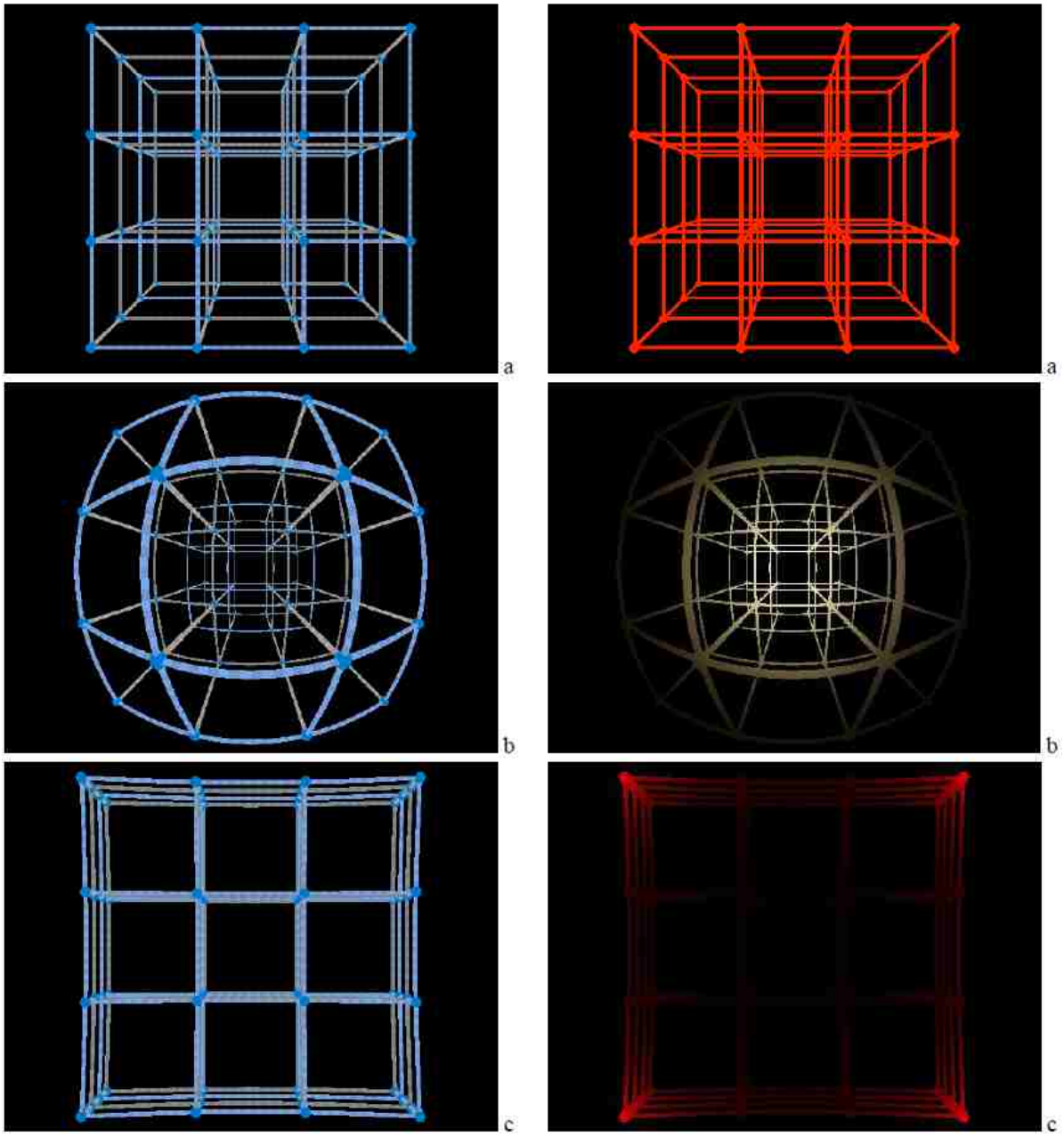


Abb. 5.87: *Links:* (a) Ruhendes Gitter; Gitter nähert (b) und entfernt (c) sich mit $0.9c$. *Rechts:* Wie *links*, aber jetzt unter Einbeziehung der spektralen Verschiebung. (a) Ruhendes Gitter bei einer Temperatur von $1000\,^{o}$C. Durch die relativistische Bewegung relativ zueinander verschieben sich die Intensitätsverhältnisse dramatisch. Die Emission in (b) ist $1.7 \cdot 10^6$ mal heller als dargestellt, in (c) ist die Emission um einen Faktor $4 \cdot 10^{22}$ geringer [**?**].

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche visuellen Verzerrungen treten auf, wenn Sie sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegen?
2. Als Kellner tragen Sie eine ovales Tablett. Wie müssten Sie sich bewegen, damit ein Beobachter ein rundes Tablett beobachtet?
3. Sieht man sich irgendwie verzerrt, wenn man sich in einem hyperschnellen Raumschiff im Spiegel betrachtet?
4. Was treibt die APS[67] dazu, einen solchen Aufkleber, siehe Abb. 5.88 zu verteilen?

[67] APS: American Physical Society

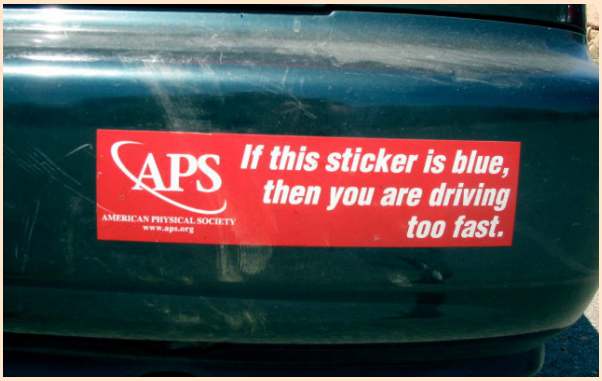


Abb. 5.88: Aufkleber der Amerikanischen Physikalischen Gesellschaft.

Zwillingsparadoxon



Wenn wir z.B. einen lebenden Organismus in eine Schachtel hineinbrächten und ihn dieselbe Hin- und Herbewegung ausführen liessen wie vorher die Uhr, so könnte man es erreichen, dass dieser Organismus nach einem beliebig langen Fluge beliebig wenig geändert wieder an seinen ursprünglichen Ort zurückkehrt, während ganz entsprechend beschaffene Organismen, welche an den ursprünglichen Orten ruhend geblieben sind, bereits längst neuen Generationen Platz gemacht haben. Für den bewegten Organismus war die lange Zeit der Reise nur ein Augenblick, falls die Bewegung annähernd mit Lichtgeschwindigkeit erfolgte! Dies ist eine unabweisbare Konsequenz der von uns zugrunde gelegten Prinzipien, die die Erfahrung uns aufdrängt [**?**].

Albert Einstein (1916)

Zum Abschluss des Kapitels die Erklärung des Zwillingsparadoxons. In einem Raumschiff gehen, in Bezug auf einen Beobachter auf der Erde, die Uhren langsamer und damit laufen auch alle biologischen Vorgänge verlangsamt ab. Der Raumfahrer merkt nichts davon. Dasselbe sollte eigentlich für seinen Zwillingsbruder auf der Erde gelten. Der Raumfahrer stellt ebenfalls fest, dass sein Bruder auf der Erde weniger schnell altert. Was passiert, wenn er zur Erde zurückkommt. Scheinbar ist sein daheim gebliebener Zwillingsbruder stärker gealtert. Dieses Szenario ist als Zwillingsparadoxon bekannt geworden. Ein Gedankenexperiment geklärt, wie sich das Paradoxon auflösen lässt. Dazu werden während

der gesamten Reise des Raumfahrers Informationen zwischen den Brüdern ausgetauscht. Man denke an eine Übermittlung eines EKG.[68] Unter dieser vollständigen Kontrolle des Experiments zeigt sich, dass die Spezielle Relativitätstheorie auch solche Situationen richtig beschreibt. Die Lösung des Paradoxon verbirgt sich hinter der richtigen Verwendung des Begriffs Inertialsystem. Als Ergänzung verweise ich auf den Animationsfilm von Paul Hewitt. Es lohnt sich, sich mit dem Autor zu beschäftigen. Vermutlich können Sie Hewitts Ansatz *Conceptional Physics* in ihrem Unterricht gut verwenden [**?**].

Link to video **Twin Paradox**

Link to Paul Hewitts book: **Conceptional Physics**

Wir betrachten ein Zwillingspaar. Einer der Brüder macht einen Raketenflug zum Aldebaran, während der Andere auf der Erde bleibt. Mit dem Herzschlag der Personen haben hier eine biologische Uhr vor uns. Wie ist der Zusammenhang zu relativistischen Effekten? Für uns interessant ist die Zeitdilatation (Kapitel *Gleichzeitigkeit.*) Im Ruhesystem der Personen gehen die biologischen Uhren nicht langsamer. Wir kontrollieren den Puls der Brüder indem während der Reise Funksignale ausgetauscht werden. Jeder Brüder sendet in gleich Zeitabständen einen Lichtimpuls an den Anderen. Sind Erde und Rakete relativ zueinander in Ruhe empfängt der Bruder auf der Erde dieselbe Anzahl an Lichtimpulsen.

Was könnte passieren, wenn sich die Rakete HANSA4EVER auf die Reise macht?

- Der Astronaut in der Rakete sendet eine GLEICHE Gesamtanzahl von Signalen wie Zwilling auf Erde. Dann wäre die Spezielle Relativitätstheorie widerlegt, denn dann gäbe es keine Zeitdilatation and deshalb auch keinen verlangsamten Alterungsprozess

- Der Astronaut im Raumschiff sendet WENIGER Signale als sein Bruder auf der Erde. Die Vorhersagen der Speziellen Relativitätstheorie wären richtig. Allerdings wären in dem Fall Signale verloren gegangen. Das wäre nicht gut.

Schließlich stellt sich die Frage: Kann man den Spieß nicht umdrehen und der Astronaut altert?

Berücksichtigen wir den Effekt der Zeitdilatation. HANSA4EVER bewegt sich mit $3/5 \cdot c$. Bei einer Reisedauer von jeweils 25 Jahren im Ruhesystem Erde errechnet man für den Zwillingsbruder

$$\Delta t_{rocket} = 50\,\text{Jahre} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 40\,\text{Jahre} \tag{5.41}$$

Wie erwartet, geht die (biologische) Uhr für den Raketenmann langsamer. Der Herzschlag der von der Rakete gesendet wird, verändert sich allerdings für den Beobachter

[68] EKG: Elektrokardiogramm

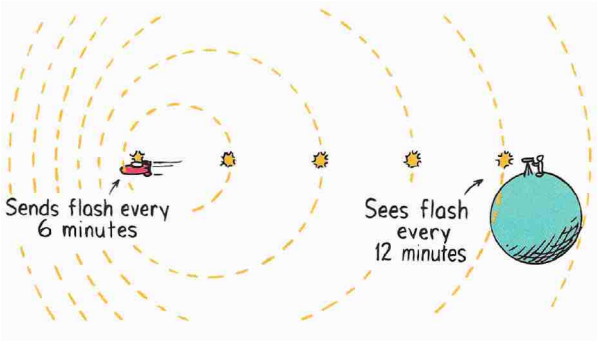


Abb. 5.89: Abstand der Lichtsignale, die der Zwilling auf der Erde empfängt, wenn sein Bruder zum Aldebaran unterwegs ist [**?**].

auf der Erde. Die Formel für den Dopplereffekt (Gl. 5.10, Gl. 5.11) liefert folgendes. Auf der Hinreise beobachtet der Zwilling auf der Erde

$$\begin{aligned}
\Delta t^{away}_{rocket} &= \Delta t_{earth}\sqrt{\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
\Delta t^{away}_{rocket} &= \Delta t_{earth}\sqrt{\frac{1+\frac{3^2}{5^2}}{1-\frac{3^2}{5^2}}} \\
\Delta t^{away}_{rocket} &= \sqrt{4}\,\Delta t_{earth} \\
\Delta t^{away}_{rocket} &= 2\,\Delta t_{earth}
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Der Herzschlag des Bruders auf der Rakete verlangsamt sich um einen Faktor ZWEI. Und wie sieht es auf der Rückreise aus?

$$\begin{aligned}
\Delta t^{back}_{rocket} &= \Delta t_{earth}\sqrt{\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}} \\
\Delta t^{back}_{rocket} &= \Delta t_{earth}\sqrt{\frac{1-\frac{3^2}{5^2}}{1+\frac{3^2}{5^2}}} \\
\Delta t^{back}_{rocket} &= \frac{1}{2}\Delta t_{earth}
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Halten wir fest. Die Signale erreichen den Beobachter auf der Erde mit unterschiedlicher Rate ABHÄNGIG von der Bewegungsrichtung der Rakete. Verfolgen wir die Reise und zählen nach. Von der Erde aus betrachtet dauert die Hin- und Rückreise jeweils 60 Minuten. Wenn alle 6 Minuten Lichtsignale gesendet werden, heißt das von der Erde 20 Lichtsignale gesendet werden. Der Bruder auf der Erde empfängt aufgrund der immer größer werdenden Entfernung der Rakete zur Erde die Zeitstempel nur alle 12 Minuten

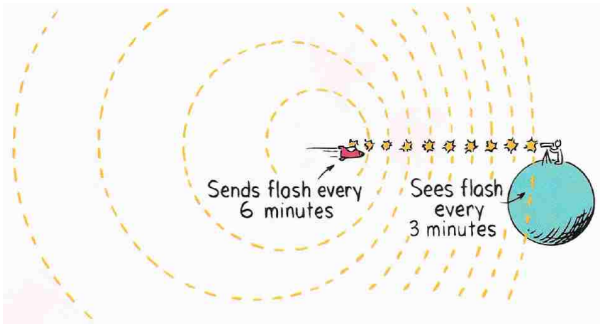


Abb. 5.90: Abstand der Lichtsignale, die die Erde bei der Reise des Zwillings zurück vom Aldebaran empfängt [**?**].

	Lichtblitze	Abstand [min]	Zeitspanne [min]
Hinreise	10	12	120
Rückreise	10	3	30
Reisedauer			150

Tab. 5.4: Zwilling auf der Erde beobachtet Lichtsignale der Rakete HANSA4EVER.

(Abb. 5.89). Auf der Rückreise ist es genau anderes herum. Die Entfernung schrumpft und die Signale erreichen die Erde im Abstand von 3 Minuten (Abb. 5.90). Tab. 5.4 fasst die Beobachtung zusammen. Die Reise dauert für den Zwilling auf der Erde länger, nämlich 150 Minuten. In seinem Ruhesystem vergehen dagegen nur 120 Minuten. Man beobachtet also das Phänomen der Zeitdilation.

Der Zwilling auf der Erde sendet Lichtblitze ebenfalls im Abstand von 6 Minuten. Was beobachtet der Bruder auf der Rakete? Er sieht Lichtsignale im Abstand von 12 Minuten, wenn er sich von der Erde entfernt und Signale im Abstand 3 Minuten (Abb. 5.89) wenn er zurückfliegt. Wie Tab 5.5 zeigt, beobachten die Zwillinge die GLEICHE Anzahl an Lichtblitzen, nämlich 25. Warum ergeben sich nur 5 Zeitsignale im Abstand 12 Minuten? Nach einer Stunde hat die Rakete Ihr Ziel erreicht, dreht um und fliegt nun den verbleibenden Lichtsignalen entgegen. Im Bezugssystem HANSA4EVER vergehen wieder nur 2 Stunden. Der Zwilling auf der Erde unterliegt der Zeitdilatation und seine Uhr zeigt 2.5 Stunden. Aber warum altert der Zwilling stärker als sein Bruder?

Der Grund liegt in einer Verletzung der Einsteinschen Postulate der Speziellen Relativitätstheorie. Diese gilt nur in Bezugssystemen die relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Der Zwilling auf der HANSA4EVER wechselt aber am Alde-

	Lichtblitze	Abstand [min]	Zeitspanne [min]
Hinreise	5	12	60
Rückreise	12	3	60
Reisedauer			150

Tab. 5.5: Zwilling auf der Rakete beobachtet Lichtsignale der Erde.

baran seine Richtung. das heißt, er beschleunigt seine Rakete. Das bricht die Symmetrie und es kommt zu einem Paradoxon.

Kann man das Zwillingsparadoxon im Experiment untersuchen? In einer Messungen an einem 14 m durchmessenden Speicherring wurden positive und negative Myonen bewegen mit $0.9994c$ (γ=29.33) auf eine Kreisbahn gebracht. Die schnellen Teilchen kommen also an ihren Ursprungsort zurück. Dies Experiment sowohl eine Bestätigung der Zeitdilatation, aber auch des Zwillingsparadoxon. Uhren, die auf Reise gehen und an ihre Ausgangsposition zurückkehren, gehen gegenüber einer ruhenden Uhr langsamer [**?**].

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Kann man das Zwillingsparadoxon auf der Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie erklären?

2. Wie könnte man weit in die Zukunft der Erde reisen, ohne signifikant zu altern? Könnte man mit dieser Methode auch in die Vergangenheit reisen?

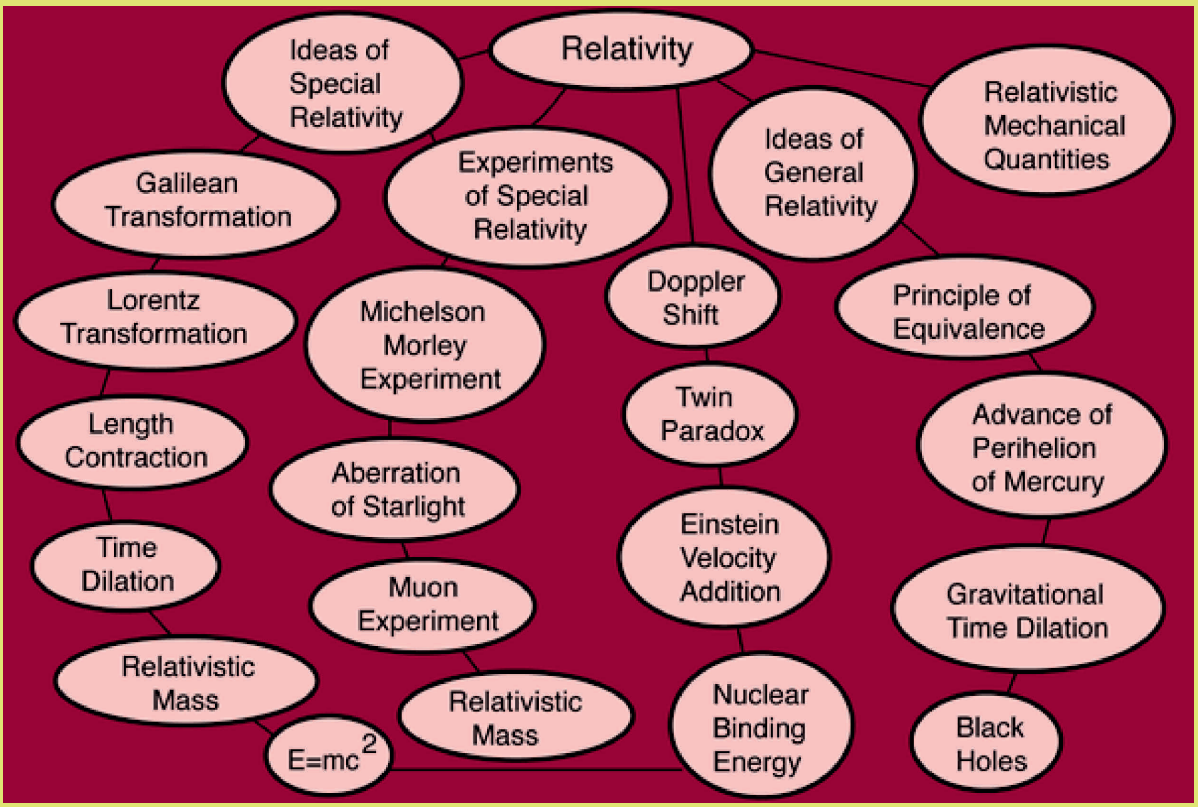


Abb. 5.91: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was ist relevant für die Klausur?

- Entstehung von Tscherenkow-Strahlung (Gl. 5.5)

$$\beta_{\text{threshold}} = 1/n$$

- Öffnungswinkel eines Tscherenkow-Kegels (Gl. 5.4)

$$\cos\Theta_{\text{Tscherenkow}} = \frac{1}{\beta \cdot n}$$

- Relativistische Dopplerverschiebung
  - Quelle und Detektor bewegen sich aufeinander zu (Gl. 5.15):

$$\nu_{bewegt} = \nu_{ruhend} \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

  - Quelle und Detektor entfernen sich voneinander (Gl. 5.16):

$$\nu_{bewegt} = \nu_{ruhend} \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

- Relativistische Dopplerverschiebung für geringe Geschwindigkeiten $v \ll c$
  - Frequenzverschiebung (Gl. 5.17):

$$\nu_{bewegt} \approx \nu_{ruhend}(1 - \beta)$$

  - Wellenlängenverschiebung (Gl. 5.18)

$$\lambda_{bewegt} \approx \lambda_{ruhend} \cdot (1 + \beta)$$

- z-Wert der Rotverschiebung
  - für geringe Geschwindigkeiten $v \ll c$ (Gl. 5.19):

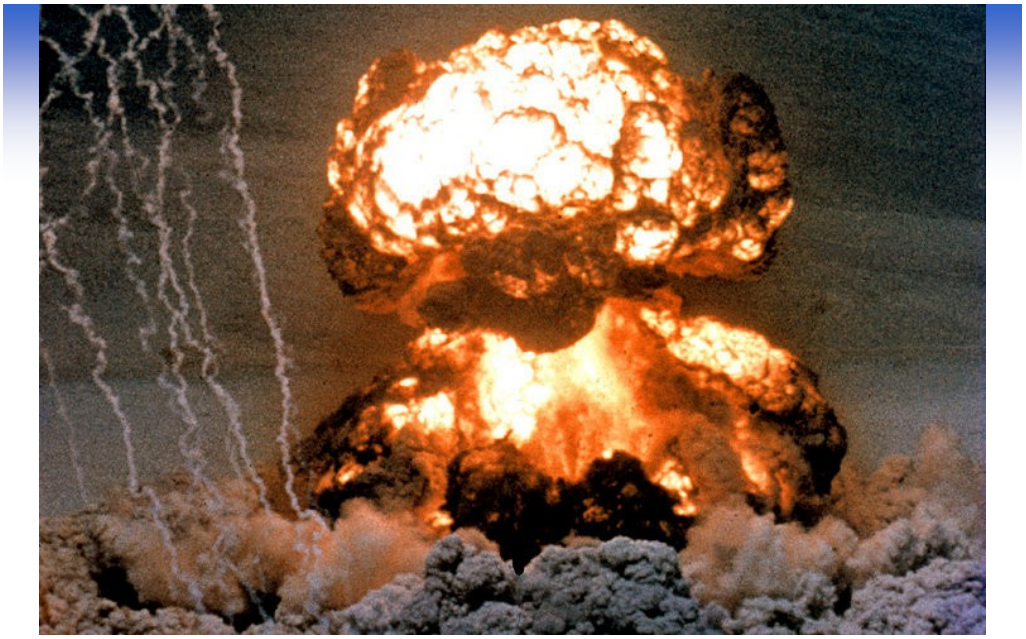
$$z = \frac{\lambda_{bewegt} - \lambda_{ruhend}}{\lambda_{ruhend}} = \beta = v/c$$

  - für hohe Geschwindigkeiten (Gl. 5.34):

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1$$

- Hubble-Konstante und die Expansion des Universums
- Klärung des Zwillingsparadoxon

6 E=mc^2



E=mc^2

Es ist nicht von der Masse eines bewegten Körpers zu sprechen, da für die Masse keine klare Definition gegeben werden kann. Man beschränke sich besser auf die Ruhe-Masse. Daneben kann man ja den Ausdruck für Momentum und Energie geben, wenn man dass Trägheitsverhalten rasch bewegter Körper angeben will [**?**].[1]

Albert Einstein, 1948

[2]In der Physik gibt es zwei fundamentale Sätze, die die Erhaltung einer bestimmten physikalischen Größe fordern: Massen- und Energieerhaltung. Abb. 6.1 zeigt ein bekanntes Beispiel für die Verletzung eines Erhaltungssatzes. Bei Prozessen in abgeschlossenen Systemen müssen sich vor und nach der Reaktion die Massen gleichen und die Energiemenge konstant bleiben. Heute würde man formulieren, dass in Prozessen Masse UND

[1]Einstein an den Herausgeber des LIFE Magazin Lincoln Barnett vom 19. Juni 1948.
[2]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

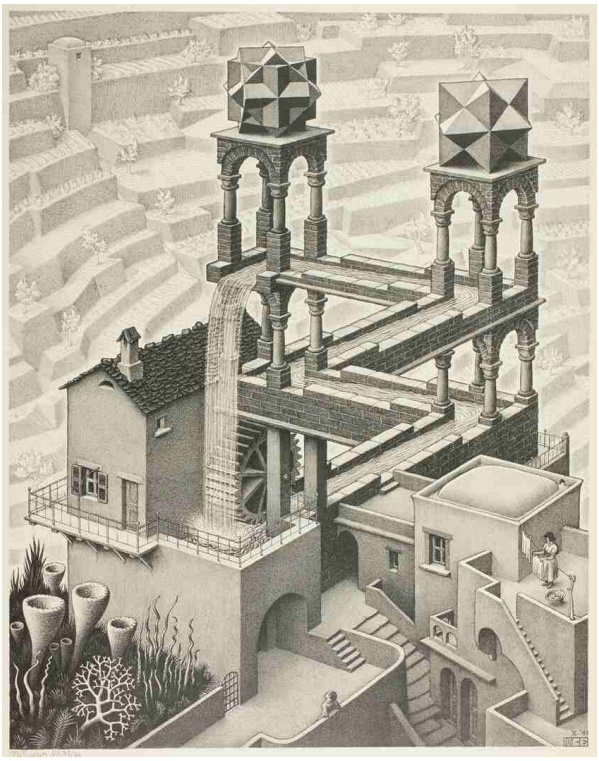


Abb. 6.1: M. C. Escher, Waterval (Lithographie, 1961) [**?**].

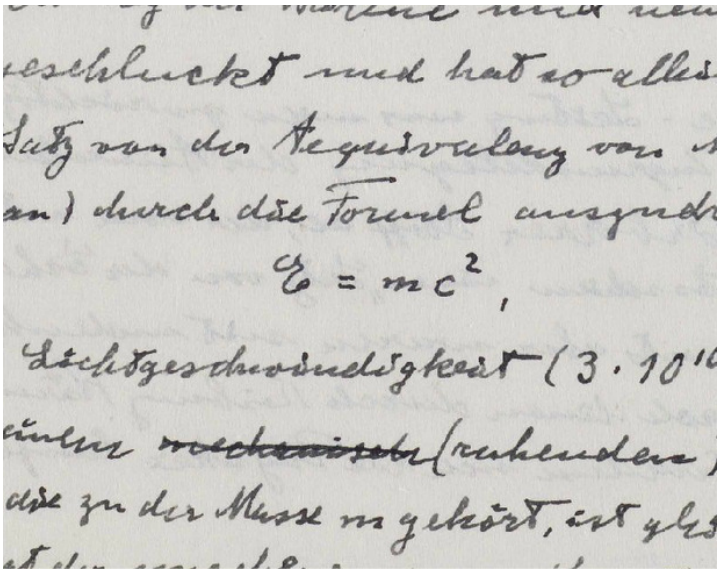
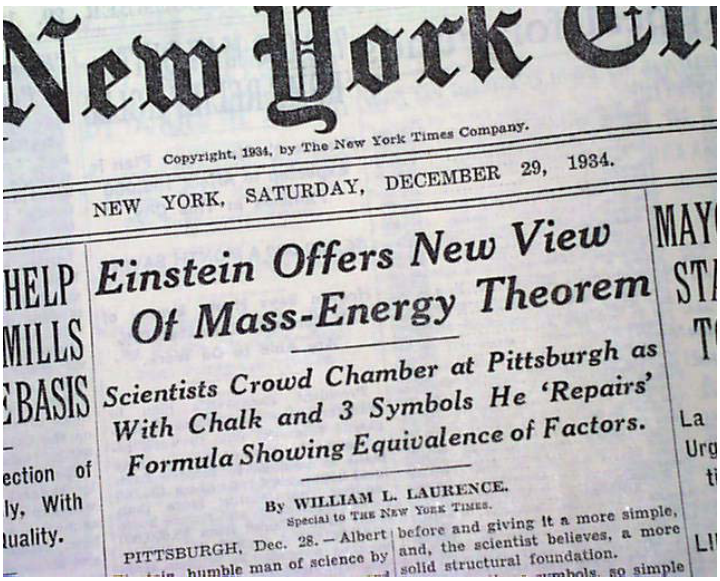


Abb. 6.2: Auszug[a] aus einem handschriftlichen Papier Einsteins, in dem das erste Mal die berühmte Gleichung auftauchte[**?**].

[a] It followed from the special theory of relativity that mass and energy are both but different manifestations of the same thing, a somewhat unfamiliar conception for the average mind. Furthermore, the equation $E = mc^2$, in which energy is put equal to mass, multiplied by the square of the velocity of light, showed that a very small amount of mass may be converted into a very large amount of energy, and vice versa. The mass and energy were in fact equivalent, according to the formula mentioned before.



New York Ti

Copyright, 1934, by The New York Times Company.

NEW YORK, SATURDAY, DECEMBER 29, 1934.

HELP
MILLS
BASIS
ection of
ly, With
uality.

Einstein Offers New View Of Mass-Energy Theorem

Scientists Crowd Chamber at Pittsburgh as With Chalk and 3 Symbols He 'Repairs' Formula Showing Equivalence of Factors.

By WILLIAM L. LAURENCE.
Special to The New York Times.

PITTSBURGH, Dec. 28.—Albert ... humble man of science by

before and giving it a more simple, and, the scientist believes, a more solid structural foundation. ... so simple

MAY
STA
T
La
Urg
t
LI

Abb. 6.3: *The New York Times*, December 29, 1934

Energie erhalten bleibt. Warum? Im Rahmen der klassischen Physik taucht die Größe Energie immer wieder auf. Ein wichtiges Ergebnis, neben dem Energieerhaltungssatz ist, dass Energie in eine andere Energieform umgewandelt werden kann.

Welche Energieformen kennen Sie und können Sie die Energieformen den Konzepten kinetische und Potenzielle Energie zuordnen?

Der Wissenschaftszweig der Chemie geht davon aus, dass Masse und Energie in chemischen Reaktionen erhalten bleiben. Das scheint tatsächlich richtig, denn selbst die genauesten Waagen können in einem Experiment nach einer chemischen Reaktion keine Abweichung in der Masse nachweisen. Wenn man sich aber auf die Ebene nuklearer Reaktionen begibt, steigt der Energieumsatz so stark an, dass man Änderungen in der Masse der Objekte beobachtet. Als Beispiel zeigt das Titelblatt ein Photo einer Atombombenexplosion. Es soll einen Eindruck vermittelt, welche Energiemengen in einer nuklearen Kettenreaktion freigesetzt werden. Die Äquivalenz von Energie und Masse - zentral für dieses Kapitel- folgt der Betrachtung physikalischer Vorgänge aus dem Blickwinkel der Speziellen Relativitätstheorie, siehe Abb. 6.2 und 6.3. Beispielsweise taucht der Faktor Lichtgeschwindigkeit nicht in der Mechanik, sondern erst im Zusammenhang mit dem Thema Elektrodynamik auf.

Link to video **First Atomic Explosion**

Dazu ein einleitendes Gedankenexperiment. Man betrachte einen ruhenden Körper. Unvermittelt werden zwei identische Lichtimpulse in in einem Winkel von 180^o ausgesendet. Aufgrund der Impulserhaltung verbleibt der Körper auf der Stelle wo er gestanden hat. Allerdings transportiert jeder der Lichtblitze Energie. Das Objekt gibt also Energie ab. Aber wer ist der Energielieferant? Einstein kommt zu dem Schluss, dass die notwendige



Abb. 6.4: . . . and vice versa.

Energie der Masse des Körpers entzogen wird. Masse und Energie sind demnach austauschbare Konzepte (Abb. 6.4).

Die bekannte Gleichung $E = m \cdot c^2$ führt die Masse als neue Energieform in die Physik ein. Da die Masse auch in anderen wichtigen Größen wie Kraft und Impuls auftaucht, hat eine Analyse im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie Auswirkungen auch auf diese Größen. Darüber hinaus müssen die Erhaltungssätze neu formuliert werden. Wie sich zeigen wird, ergeben sich die Erhaltungssätze der klassischen Physik als Grenzfall bei geringen Geschwindigkeiten. Die experimentelle Bestätigung der Einsteinschen Formel dauerte. Erst 1933 beobachteten Irène und Frédéric Joliot-Curie[3] die Umwandlung von Energie in Masse. Ein Lichtquant wandelt sich in Masse um, und es entstehen Teilchen, die sich voneinander wegbewegen. Zur gleichen Zeit wurde auch der umgekehrte Prozess, die Umwandlung von Masse in Energie, beobachtet. Cockcroft und Walton bombardierten einen ^{7}Li-Kern mit einem Proton der Energie 125 keV. Die resultierenden Fragmente, zwei α-Teilchen, hatten insgesamt etwas weniger Masse als die Massen von ^{7}Li+p, flogen aber mit einer Energie von 17.2 MeV auseinander. Die Überprüfung der Energien unter Verwendung der Massen der Teilchen bestätigte die Einstein-Gleichung.

Nach der in dieser entwickelten Auffassung ist der Satz von der Konstanz der Masse ein Spezialfall des Energieprinzips Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie [**?**].

Albert Einstein, 1906

[3] The Nobel Prize in Chemistry 1935 was awarded jointly to Frédéric Joliot and Irène Joliot-Curie *in recognition of their synthesis of new radioactive elements.*

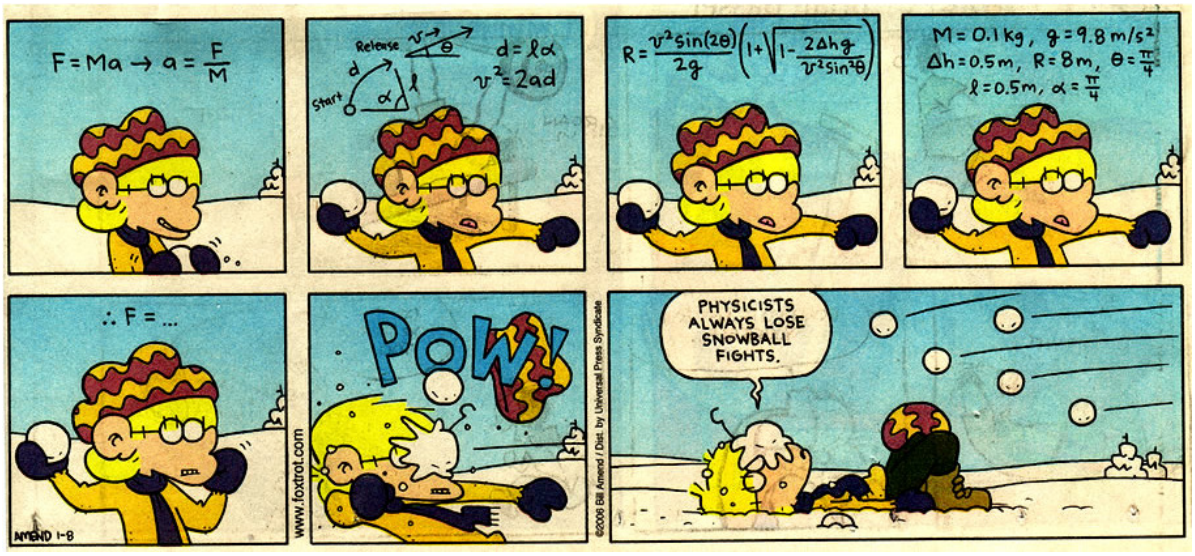


Abb. 6.5: Im Allgemeinen ziehen Physiker bei Schneeballschlachten den Kürzeren!

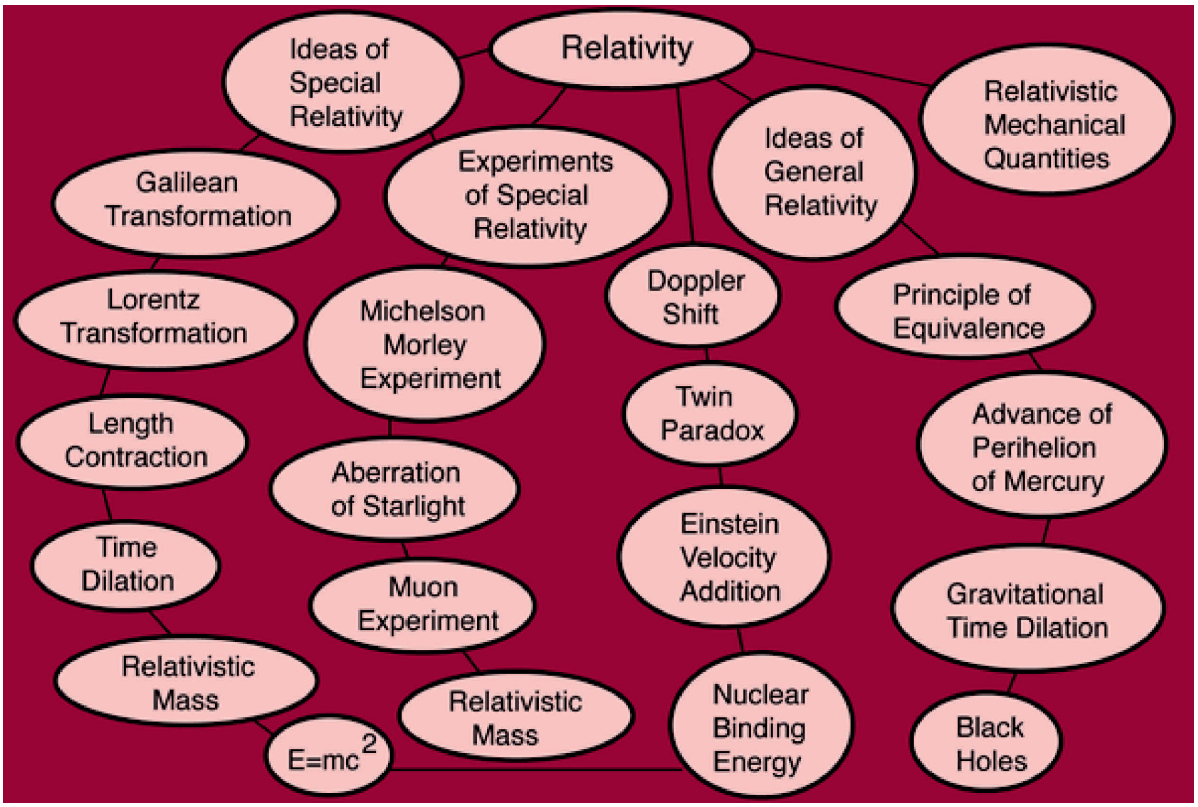
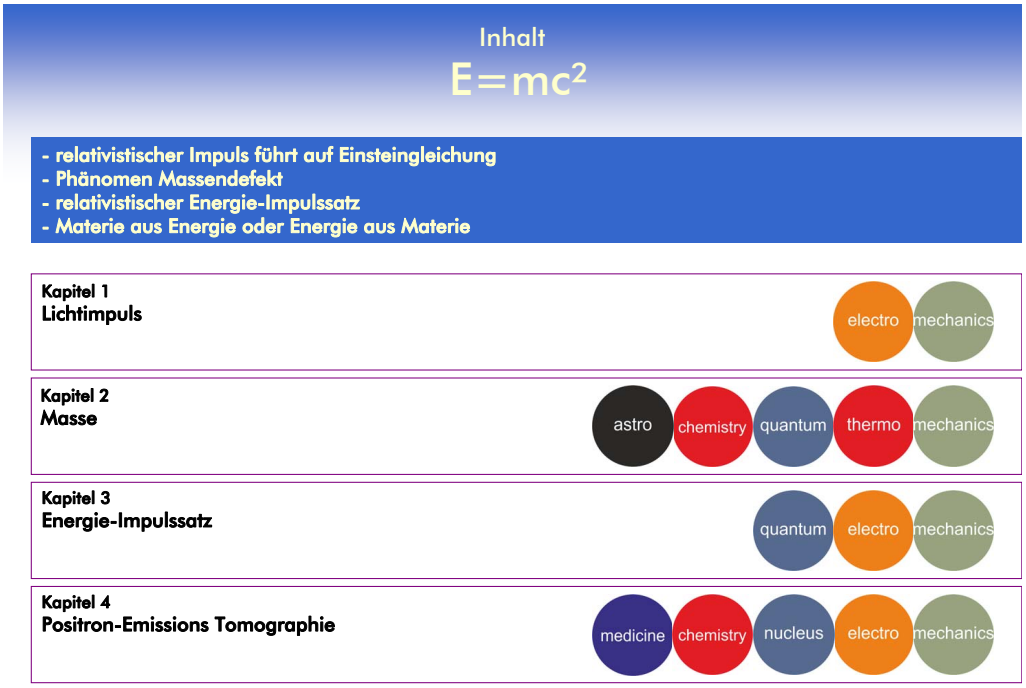


Abb. 6.6: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie nach dem Durcharbeiten des Kapitels die behandelten Konzepte [**?**].


Inhalt
E=mc²
- relativistischer Impuls führt auf Einsteingleichung
- Phänomen Massendefekt
- relativistischer Energie-Impulssatz
- Materie aus Energie oder Energie aus Materie
Kapitel 1
Lichtimpuls
electro
mechanics
Kapitel 2
Masse
astro
chemistry
quantum
thermo
mechanics
Kapitel 3
Energie-Impulssatz
quantum
electro
mechanics
Kapitel 4
Positron-Emissions Tomographie
medicine
chemistry
nucleus
electro
mechanics

6.1 Lichtimpuls



Nichts ist ewig, denn der Wechsel

aus Faust von J.W. von Goethe [**?**]

Als Einstieg in das Thema wird untersucht, ob die Wechselwirkung von Licht mit Materie mit der Übertragung eines Impulses p verbunden ist. Licht ist masselos und insofern sollte die Gleichung $p = m \cdot v$ den Wert NULL ergeben. Tatsächlich trägt Licht einen Impuls. Der Lichtimpuls muss also anders definiert werden. Statt der Gleichung der Mechanik verwendet man den Ausdruck

$$p = E/c \tag{6.1}$$

für den Lichtimpuls. Sie können sich sofort anhand einer Dimensionsanalyse davon überzeugen, dass die Gleichung, von dieser Warte aus betrachtet, richtig ist.

$$[p_{light}] = \left[\frac{E_{light}}{c}\right] = \left[\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{m/s}}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{s}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \tag{6.2}$$

$$[p_{object}] = [m_{object}\cdot v_{object}] = \left[\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \tag{6.3}$$

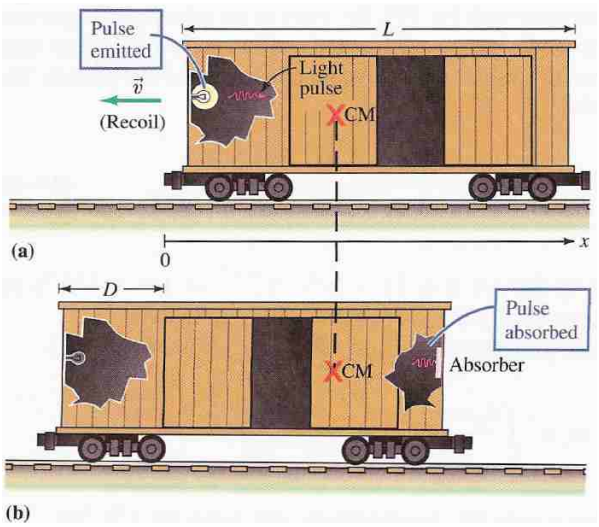


Abb. 6.7: (a) Eine Lichtquelle in einem Eisenbahnwaggon sendet einen elektromagnetischen Impuls mit der Energie E. Der Rückstoßimpuls p=E/c setzt den Waggon in Bewegung. (b) Diese Bewegung stoppt wenn der Impuls am anderen Ende des Waggons absorbiert wird [**?**].

Lichtuhr reloaded

Eine Konsequenz der elektrodynamischen Arbeit ist mir noch in den Sinn gekommen. Das Relativitätsprinzip im Zusammenhang mit den Maxwellschen Grundgleichungen verlangt nämlich, daß die Masse direkt ein Maß für die im Körper enthaltene Energie ist das Licht überträgt Masse. Eine merkliche Abnahme der Masse müßte beim Radium erfolgen. Die Überlegung ist lustig und bestechend.

Albert Einstein an Conrad Habicht, 1905

Wir folgen den Überlegungen von Einstein [**?**] und führen ein Gedankenexperiment in einem Zugwaggon durch. In der kinetischen Gastheorie erzeugt der Impulsübertrag auf eine Wand einen Druck. Deshalb verwendet man in diesem Zusammenhang oft den Begriff Strahlungsdruck (Kapitel *Materiewellen*). Kepler verwendete den Strahlungsdruck, um zu erklären, warum ein Kometenschweif stets von der Sonne weg gerichtet sind. Das Titelbild zeigt die Idee eines Antriebssystems, um mit Hilfe des Strahlungsdrucks Satelliten zu beschleunigen. Mehr zu dieser Thematik im Kapitel *Materiewellen*.
Im Gedankenexperiment, siehe Abb. 6.7, wird auf der linken Seite eines Wagons der Länge L_{Waggon} ein Lichtblitz mit dem Impuls (E/c) ausgelöst und von der gegenüberliegenden Wand wieder absorbiert. Im zweiten Teil der Vorlesung zum Thema *Quantenphysik* lernen wir, dass das Licht eine körnige Struktur hat und -wie wir sagen- quantisiert ist. Die Physik nennt die Lichtquanten Photonen. Wir benutzen deshalb schon mal dieses Begriff. Bei der Emission und Absorption des Photons wird ein Impuls auf den Waggon übertragen. Man beachte, dass die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts dazu führt, dass der Wagen sich zunächst um die Strecke D_{Waggon} nach links bewegt und durch die Absorption an der anderen Wand zum Stehen gebracht wird. Der Impulserhaltungssatz ist also erfüllt. Die folgende Analyse führt zur Einsteinschen Energie-Masse Beziehung.
Für die Herleitung greifen wir wiederholt auf bestimmte Ausdrücke (I-IV) zurück. Ausdruck (I) berechnet den Impulsübertrag p_{ph} des Lichts auf den Waggon. Das führt auf

Gl. (I)

$$p_{ph} = \frac{E_{ph}}{c} = m_{waggon} v_{waggon} \tag{6.4}$$

Während das Photon unterwegs ist, bewegt sich der Zugwaggon um eine bestimmte Strecke D_{waggon}. Um welche Wegstrecke wird der Waggon zwischen Emission und Absorption des Lichtimpulses versetzt?

$$\begin{aligned} c \cdot t_{ph} &= L_{waggon} - v_{waggon} \cdot t_{ph} \\ t_{ph} &= \frac{L_{waggon}}{c + v_{waggon}} \\ t_{ph} &= \frac{L_{waggon}}{c + \frac{E_{ph}}{m_{waggon} \cdot c}} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Damit berechnet sich die Strecke, die die Waggon zwischen Emission und Absorption um die Strecke D_{waggon}

$$\begin{aligned} D_{waggon} &= v_{waggon} \cdot t_{ph} \\ D_{waggon} &= \frac{E_{ph}}{m_{waggon} \cdot c} \cdot \frac{L_{waggon}}{c + \frac{E_{ph}}{m_{waggon} \cdot c}} \\ D_{waggon} &= \frac{E_{ph} \cdot L_{waggon}}{m_{waggon} \cdot c^2} + \frac{m_{waggon} \cdot c \cdot E_{ph}}{m_{waggon} \cdot c} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich Gl. (II)

$$D_{waggon} = \frac{E_{ph} \cdot L_{waggon}}{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2} \tag{6.6}$$

Es bietet sich an, neben der Impulserhaltung auf die Lage des Schwerpunktes (CoM)[4] in dem Vorgang zu betrachten. Dazu müssen wir dem Photon eine fiktive Masse (μ_{ph}) zuordnen. Vor der Emission des Photons ist der Schwerpunkt des Systems bei

$$CoM_{waggon}^{initial} = \frac{L_{waggon}}{2} \tag{6.7}$$

Haben Sie ein Idee, wohin sich der Schwerpunkt verlagert hat, wenn das Licht an der gegenüberliegenden Seite des Zugwaggons absorbiert wird?

Aus den Betrachtungen zum Impuls in der Klassischen Mechanik ist bekannt, dass in einem abgeschlossenen System die Schwerpunktbewegung nicht durch Stöße unter den Teilchen beeinflusst wird. Man denke an das Beispiel einer Feuerwerksexplosion. Die Explosionsprodukte bewegen sich in alle möglichen Richtungen. Der Massenschwerpunkt,

[4] CoM: center of mass

berechnet aus der Position aller Teilchen, ist davon aber nicht beeinflusst. Der Schwerpunkt bewegt sich weiter auf einer Parabelbahn. Die Bahnkurve entspricht dabei der Bewegung einer Rakete, deren Zünder versagt hat. Da die Energieemission den Waggon bewegt, ist es sinnvoll dem Licht eine fiktive Masse μ_{Light} zuzuordnen. Durch die Übertragung des Photons von der rechten zur linken Seite des Waggons verschiebt sich die Position des Wagens. Der Massenschwerpunkt des Gesamtsystems verbleibt aufgrund der Impulserhaltung aber an derselben Stelle. Die Masse des Lichtimpulses kompensiert die Massenverschiebung durch die Bewegung des Waggons.

- Situation bevor das Photon emittiert wird (initial):

$$\begin{aligned} CoM^{initial}_{waggon} &= \frac{\mu_{ph} \cdot 0 + m_{waggon} \cdot (L_{waggon}/2)}{\mu_{ph} + m_{waggon}} \\ CoM^{initial}_{waggon} &= \frac{m_{waggon} \cdot (L_{waggon}/2)}{\mu_{ph} + m_{waggon}} \end{aligned} \tag{6.8}$$

- Situation nachdem das Photon wieder absorbiert wurde (final):

$$CoM^{final}_{waggon} = \frac{\mu_{ph} \cdot (L_{waggon} - D_{waggon}) + m_{waggon} \cdot (L_{waggon}/2 - D_{waggon})}{\mu_{ph} + m_{waggon}} \tag{6.9}$$

Aus Gründen der Impulsverhalten gilt, dass sich der Schwerpunkt des Systems NICHT verschiebt. Das werten wir jetzt aus.

$$\begin{aligned} CoM^{initial}_{waggon} &= CoM^{final}_{waggon} \\ \frac{m_{waggon} \cdot (L_{waggon}/2)}{\mu_{ph} + m_{waggon}} &= \frac{\mu_{ph} \cdot (L_{waggon} - D_{waggon}) + m_{waggon} \cdot (L_{waggon}/2 - D_{waggon})}{\mu_{ph} + m_{waggon}} \\ m_{waggon} \cdot (L_{waggon}/2) &= \mu_{ph} \cdot (L_{waggon} - D_{waggon}) + m_{waggon} \cdot (L_{waggon}/2 - D_{waggon}) \\ \frac{m_{waggon} \cdot L_{waggon}}{2} &= \mu_{ph} \cdot (L_{waggon} - D_{waggon}) + \frac{m_{waggon} \cdot L_{waggon}}{2} - m_{waggon} \cdot D_{waggon} \\ 0 &= \mu_{ph} \cdot (L_{waggon} - D_{waggon}) + 0 - m_{waggon} \cdot D_{waggon} \end{aligned}$$

Das führt auf Gl. (III):

$$\mu_{ph} = \frac{m_{waggon} \cdot D_{waggon}}{L_{waggon} - D_{waggon}} \tag{6.10}$$

Damit lässt sich die fiktive Masse des Photons durch makroskopisch messbare Größen ausdrücken. Da wir an μ_{light} keine speziellen Anforderungen gestellt haben, sollte das Endresultat allgemein gültig sein. Wir könnten das Gedankenexperiment auch mit einem Tennisball ausführen und kämen zum selben Ergebnis. Im nächsten Schritt ermitteln wir

einen Ausdruck für die Größe $(L_{waggon} - D_{waggon})$. Dazu nutzen wir Gl. (II):

$$\begin{aligned}
L_{waggon} - D_{waggon} &= L_{waggon} - \frac{E_{ph} \cdot L_{waggon}}{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2} \\
L_{waggon} - D_{waggon} &= L_{waggon} \left(1 - \frac{E_{ph}}{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2}\right) \\
L_{waggon} - D_{waggon} &= L_{waggon} \left(\frac{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2}{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2} - \frac{E_{ph}}{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2}\right) \\
L_{waggon} - D_{waggon} &= L_{waggon} \left(\frac{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2 - E_{ph}}{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2}\right) \\
L_{waggon} - D_{waggon} &= L_{waggon} \left(\frac{m_{waggon} \cdot c^2}{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2}\right)
\end{aligned}$$

Das ergibt die Gl. (IV):

$$L_{waggon} - D_{waggon} = \frac{L_{waggon} \cdot m_{waggon} \cdot c^2}{E_{light} + m_{waggon} c^2} \tag{6.11}$$

Nun nutzen wir Gl. (II) und (IV), indem wir diese Ausdrücke in Gl. (III) einsetzen:

$$\begin{aligned}
\mu_{ph} &= \frac{\dfrac{m_{waggon} \cdot E_{ph} \cdot L_{waggon}}{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2}}{\dfrac{L_{waggon} \cdot m_{waggon} \cdot c^2}{E_{ph} + m_{waggon} \cdot c^2}} \\
\mu_{ph} &= \frac{m_{waggon} \cdot E_{ph} \cdot L_{waggon}}{L_{waggon} m_{waggon} \cdot c^2}
\end{aligned}$$

Damit wird ein direkter Zusammenhang zwischen den Größen Energie und Masse hergestellt. Die Gleichung zeigt, dass Energie äquivalent zu Masse ist.

$$E_{light} = \mu_{light} \cdot c^2 \tag{6.12}$$

Man kann diesen Ausdruck verallgemeinern, denn er gilt für alle mit Masse behafteten Körper, siehe Abb. 6.8. Damit ergibt sich die wohl bekannteste Gleichung der Physik (Abb. 6.9 und Abb. 6.10), wobei m_0 die so genannte Ruhemasse und E_0 die Ruheenergie ist.

Ptolemy made a universe which lasted 1 400 years. Newton also made a universe, which have lasted 300 years. Einstein has made the universe, and I can't tell you how long that will last.

George Bernard Shaw[5], 1930

[5] The Nobel Prize in Literature 1925 was awarded to George Bernard Shaw *for his work which is marked by both idealism and humanity, its stimulating satire often being infused with a singular poetic beauty.*

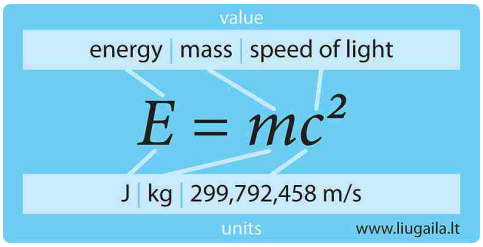


Abb. 6.8: Äquivalenz von Masse und Energie[a]

[a]It followed from the special theory of relativity that mass and energy are both but different manifestations of the same thing - a somewhat unfamiliar conception for the average mind. Furthermore, the equation, E is equal m c square, in which energy is put equal to mass, multiplied with the square of the velocity of light, showed that very small amounts of mass may be converted into a very large amount of energy and vice versa. The mass and energy were in fact equivalent, according to the formula mentioned before. This was demonstrated by Cockcroft and Walton in 1932, experimentally.

Albert Einstein, 1948

Ein großer Schritt gelang 1932, als Cockcroft und Walton in Rutherfords Labor eine Apparatur (*a million volts in a soapbox*) aufbauten, die Protonen mit hoher Geschwindigkeit auf Metall feuerte. Durch die Stöße wurden einige Kerne umgewandelt. Ein Teil der Masse wurde dabei als Energie freigesetzt. Das Cockcroft-Walton-Experiment [**?**] demonstrierte erstmals ein Konzept, das Albert Einstein fast dreißig Jahre zuvor vorgeschlagen hatte.[6]

Welche Bedeutung haben die Begriffe Ruhemasse[7] und Ruheenergie? In der Relativitätstheorie behandeln wir die Masse genauso wie in der klassischen Physik, allerdings mit der Einschränkung, dass der Körper zunächst in Ruhe versetzt wird. In diesem ausgewählten Inertialsystem bewegt sich die Masse nicht. Beobachter in anderen Bezugssystemen stimmen darin überein, dass, wenn der Körper in ihrem Inertialsystem ruht, sie auch dieselbe Ruhemasse bestimmen. Die Ruhemasse ist also einen invariante Größe. Im Hinblick auf die Einsteinschen Postulate ist das auch erforderlich. Wenn die Ruhemassen desselben Körpers unterschiedlich wären, dann könnten wir ein ausgezeichnetes Bezugssystem finden, in dem die Masse beispielsweise minimal wäre. Man denke in diesem Zusammenhang auch an die Begriffe Eigenzeit und Eigenlänge! Hier handelt es sich also um die Masse und die äquivalente Energie, die man im Ruhesystem des Körpers

[6] The Nobel Prize in Physics 1951 was awarded jointly to Sir John Douglas Cockcroft and Ernest Thomas Sinton Walton *for their pioneer work on the transmutation of atomic nuclei by artificially accelerated atomic particles*

[7] *Lexikon:* Man beachte, dass m_0 die Masse eines Körpers ist, die von einer relativ zum Objekt ruhenden Person gemessen wird. Dies kann beispielsweise mit Hilfe der Schwerkraft geschehen. Wenn sich ein Körper relativ zu einem Beobachter bewegt, kann ihre Masse nur durch beispielsweise Stöße ermittelt werden. Dadurch kommt der Impuls ins Spiel. Die Masse eines bewegten Objekts kann nicht unabhängig vom Impuls bestimmt werden. Die einzig physikalisch sinnvolle Masse ist die **Ruhemasse**. Wenn man den Begriff Masse verwendet, ist damit immer die Ruhemasse gemeint.

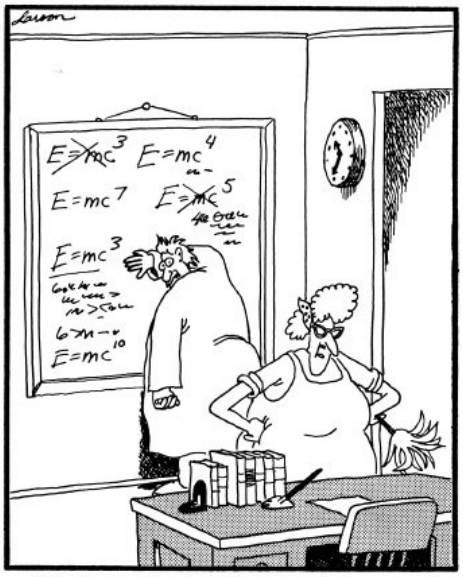


Abb. 6.9: Einstein Cartoon von Gary Larson.

bestimmt:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 \tag{6.13}$$

Inside the horror of Nagasaki and Hiroshima lies the beauty of Einstein's $E = m \cdot c^2$.

Gut Symmetries by Jeanette Winterson, 1997

Historisch ist zu bemerken, dass diese Formel nicht überraschend kam.[8] Thomson hatte schon 1881 eine gleichmäßig auf der Oberfläche einer Kugel verteilten Ladung betrachtet. Die sich ergebene elektrostatische Energie ist

$$E_{pot} = \frac{1}{8\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r} \tag{6.14}$$

wobei Q die Ladungsmenge und r der Radius der Kugel. Er berechnete die *elektromagnetische Masse* m_{EM}, wenn sich das Objekt mit der Geschwindigkeit v bewegt

$$m_{EM} = \frac{1}{6\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{c^2 \cdot r} \tag{6.15}$$

und erhielt eine Gleichung für die Energie

$$E = \frac{3}{4}\, m_{EM} \cdot c^2 \tag{6.16}$$

[8] Wer es genauer wissen will, schaue im Feyman in Kapitel 28.3 *Electromagnetic mass* nach [**?**].



Abb. 6.10: Gesehen in Davos.

Science has obtained conclusive proof from recent experiments that the innermost citadel of matter, the nucleus of the atom, can be smashed, yielding tremendous amounts of energy and probably vast new stores of gold, radium and other valuable minerals.

The New York Times, March 30, 1934

Die beiden Größen Masse und Energie sind nach Einstein austauschbare Konzepte. Im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie gilt diese Aussage nur im Ruhesystem des Teilchens. Die Ruhemasse ordnet man deshalb in die Kategorie Potenzielle Energie ein. Damit kann jedem Körper, aufgrund seiner Masse, eine bestimmte Energiemenge zugeordnet werden. In der Elementarteilchenphysik ist es üblich, die Masse von Teilchen, wie z.B. dem Elektron, in der Einheit [eV/c^2] anzugeben. Beispielsweise wird uns der Wert für das Elektron noch öfter im Rahmen der Vorlesung begegnen.

Masse des Elektrons: 511 keV/ c^2

Masse des Protons: 938.3 keV/ c^2

Masse des Neutrons: 939.6 keV/ c^2

Die Massen von Proton und Neutron sind also bis auf eine kleine Abweichung gleich und für alle Fälle kann man sich merken, dass die Masse dieser Elementarteilchen 1 GeV/c^2 beträgt. Für einen Körper, auf den keine Kräfte wirken, ist der Wert der potenziellen Energie E_{pot}, resultierend aus externen Potenzial NULL und die Gesamtenergie lässt sich schreiben als

$$E_{ges} = E_0 + E_{kin} \tag{6.17}$$

Man sieht, dass es auch in diesem Fall in der Energiegleichung einen Term der potenziellen Energie gibt. Eine wichtige Konsequenz dieser Gleichung sei an dieser Stelle schon erwähnt. Die Quantenphysik sagt die Existenz von Antiteilchen voraus. Diese haben dieselbe Masse wie das zugehörige Elementarteilchen, aber ein entgegengesetztes

Objekt	Masse	Ruheenergie	
Elektron	$9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$	$8.19 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$	$511\,\mathrm{keV}$
Protron	$1.67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$	$1.50 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}$	$938\,\mathrm{MeV}$
Uranatom	$3.95 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$	$3.55 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$	$226\,\mathrm{GeV}$
Staubteilchen	$1 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{kg}$	$1 \cdot 10^{4}\,\mathrm{J}$	$2\,\mathrm{kcal}$
Cent	$3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$	$2.8 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J}$	$78\,\mathrm{GWh}$

Tab. 6.1: Ruheenergien verschiedener Körper, angegeben in unterschiedlichen Energieeinheiten.

Ladungsvorzeichen. Die Einsteinsche Gleichung erlaubt, solche Teilchen aus Strahlungsenergie zu erzeugen.

Tab. 6.1 liefert Beispiele für die Masse von Objekten und den Energieeinheit nach der Einsteingleichung. Neben der Angabe in [J], [cal], [Wh] werden die Werte in [eV] angegeben, der gängigen Einheit der Relativitätstheorie und Quantenphysik.

Radius des Elektrons[4LP]

An dieser Stelle noch einen Randbemerkung, die sie vielleicht überraschen wird. Wenn sie die Literatur durchforsten, werden sie feststellen, dass es keinen experimentellen Wert für den Radius des Elektrons gibt. Alle bislang durchgeführten Experimente zeigen, dass Elektronen weder eine Ausdehnung noch eine innere Struktur aufweisen. Wir betrachten die Energie, die erforderlich ist, um eine Elementarladung in einer Metallkugel geringster Größe unterzubringen. Nehmen wir an, dass das Elektron eine Kugel mit Radius r_e ist und die Ladung befindet sich, da das Objekt ein Metall ist, homogen verteilt auf der Oberfläche. Im Abstand r vom Zentrum der Kugel ($r > r_e$) hat das elektrostatische Feld E_e den Wert:

$$E_e(r) = \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}\frac{e}{r^2} \tag{6.18}$$

Die potenzielle Energie der geladenen Kugel berechnet sich mit:

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E_e^2\,dV \\ E_{pot} &= \frac{e^2}{8\,\pi \cdot \varepsilon_0}\int_{r_e}^{\infty}\frac{dr}{r^2} \\ E_{pot} &= \frac{e^2}{8\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_e} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Auf der anderen Seite entspricht dies der Ruheenergie des Elektrons und man kann schreiben:

$$\frac{e^2}{8\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_e} = m_e \cdot c^2 \tag{6.20}$$

Warum macht das Sinn? Setzt man für das Elektron eine Punktladung an, ergäbe sich eine unendliche große Masse. Wäre r_e kleiner als $e^2/(8\,\pi \cdot m_e \cdot c^2)$, dann wäre eine Energie größer als die Ruhemasse des Elektrons im elektrostatischen Feld gespeichert. Das würde auf einen Energiegewinn bei der Annihilation herauslaufen! Die so ermittelte Größe nennt man den klassischen Elektronenradius und man erhält den Wert r_e=$1.4 \cdot 10^{-15}$ m.[9]

[9] So, what is an electron? An electron is a particle and a wave; it is ideally simple and unimaginably complex; it is precisely understood and utterly mysterious; it is rigid and subject to creative disassembly. No single answer does justice to reality [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 1.1: Vergleichen Sie die Energiemenge einer Masse von 1 kg mit der Jahresleistung des Rostocker Kohlekraftwerks!

Nach der Einsteingleichung kann theoretisch aus einer Masse von 1 kg eine Energie von

$$E = m \cdot c^2 = (1.0\,\mathrm{kg}) \cdot (2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2 = 9 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J}$$

gewonnen werden. Das Rostocker Kohlekraftwerk speist 514 MW ins Netz ein. Die Jahresleistung beträgt

$$E = 514 \cdot 10^6\,\mathrm{J/s} \cdot 31.536 \cdot 10^6\,\mathrm{s} = 1.62 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J}$$

Aufgabe 1.2: Ein Lichtpuls beinhaltet eine Energiemenge von $9 \cdot 10^{-7}$ J. Welche Masse kann man dem Licht zuordnen?

$$\begin{aligned} m &= \frac{E}{c^2} \\ m &= \frac{9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}}{(2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \\ m &= 1.001 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Ein Würfel, der innen mit perfekt reflektieren Wänden verkleidet ist, steht auf reibungslosen Oberflächen. Mit einem Laser wird ein kurzer Lichtpuls auf eine der Seitenwände geschickt. Was beobachtet ein aussen stehender Beobachter?

2. Ist es möglich ein Raumschiff allein durch den Sonnenwind anzutreiben?

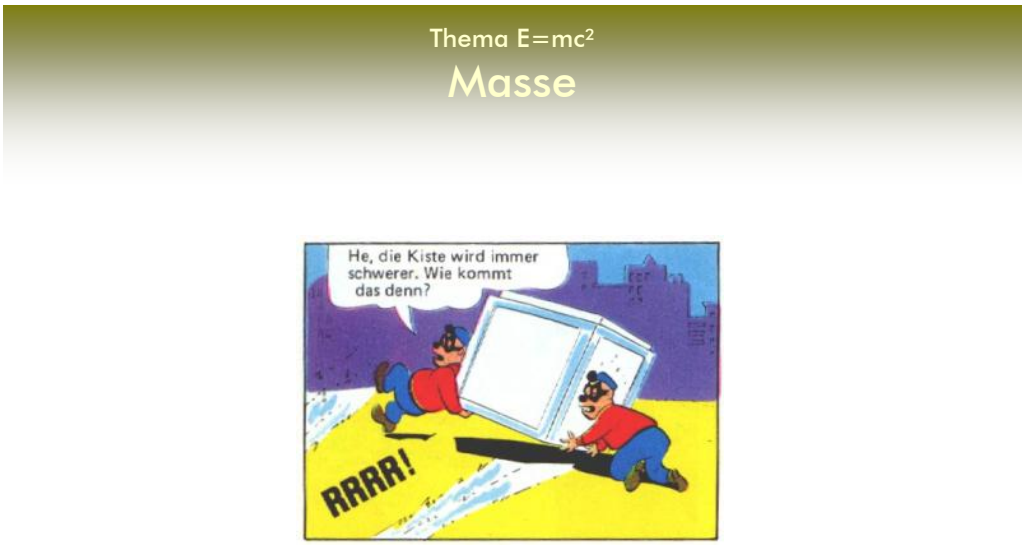
- Which of the following statements are true about momentum?
  - Momentum is a vector quantity.
  - The standard unit on momentum is the Joule.
  - An object with mass will have momentum.
  - An object which is moving at a constant speed has momentum.
  - An object can be traveling eastward and slowing down; its momentum is westward.
  - Momentum is a conserved quantity; the momentum of an object is never changed.
  - The momentum of an object varies directly with the speed of the object.
  - Two objects of different mass are moving at the same speed; the more massive object will have the greatest momentum.
  - A less massive object can never have more momentum than a more massive object.
  - Two identical objects are moving in opposite directions at the same speed. The forward moving object will have the greatest momentum.
  - An object with a changing speed will have a changing momentum.

3. Which of the following statements are true about collisions?
   - Two colliding objects will exert equal forces upon each other even if their mass is signicantly different.
   - During a collision, an object always encounters an impulse and a change in momentum.
   - During a collision, the impulse which an object experiences is equal to its velocity change.
   - The velocity change of two respective objects involved in a collision will always be equal.
   - While individual objects may change their velocity during a collision, the overall or total velocity of the colliding objects is conserved.
   - In a collision, the two colliding objects could have different acceleration values.

- In a collision between two objects of identical mass, the acceleration values could be different.
- Total momentum is always conserved between any two objects involved in a collision.
- When a moving object collides with a stationary object of identical mass, the stationary object encounters the greater collision force.
- When a moving object collides with a stationary object of identical mass, the stationary object encounters the greater momentum change.
- A moving object collides with a stationary object; the stationary object has significantly less mass. The stationary object encounters the greater collision force.
- A moving object collides with a stationary object; the stationary object has significantly less mass. The stationary object encounters the greater momentum change.

4. Wie ist die Ruheenergie definiert?

6.2 Masse



Es existiert vorläufig nicht der leiseste Anhalt dafür, ob und wann jemals diese Energiegewinnung erzielt werden könnte [**?**].

Albert Einstein, 1920

Masse wird in der modernen Physik die Eigenschaft einer Energieform zugeordnet. Da diese Neuinterpretation nicht im Einklang gebracht werden kann mit dem Prinzip der Massenerhaltung, zunächst ein historischer Rückblick. Der Cartoon deutet an, dass sich unter bestimmten Bedingungen die Masse eines Objektes ändern kann. Welche Bedeutung hat der Begriff Masse für die Physik? Dazu ein Beispiel: Massenmessungen werden in der Kernphysik seid Beginn eingesetzt. Die Bindungsenergie wird bestimmt aus der Masse über die Einsteinsche Gleichung. Ihre Bestimmung erlaubt es die Kernstrukturaspekte wie die Paarung der Nukleonen und die Kerndeformation aufzulösen. Die Masse liefert den ersten Hinweis darauf, dass Nukleonen Objekte sind, die wie Atome quantisierte Orbitale aufweisen. Nuklide weisen eine erhöhte Stabilität auf, wenn, wenn die Orbitale mit einer magischen Anzahl an Protonen bzw. Neutronen aufgefüllt sind. Ziel aktueller Experimente ist es, ob es in exotischen Nukliden solche magischen Konfigurationen vorliegen und wo die Grenzen der nuklearen Stabilität liegen.

Da wir uns im Weiteren intensiv mit der Eigenschaft Masse beschäftigen werden, ist es angebracht die in der Atomphysik verwendete Masseneinheit [amu] (*atomic mass unit*) einzuführen. Die atomare Masseneinheit hat eine nützliche Eigenschaft. Alle bekannten Kern- und Atommassen sind nahezu ganzzahlig. Die betreffende ganze Zahl heißt die Massenzahl des Kerns oder des Atoms und ist gleich der Anzahl der Nukleonen im Kern.

Das [amu] ist definiert als 1/12 der Masse des ^{12}C Kohlenstoffisotops. Aus der Chemie wissen sie vielleicht, dass ein Mol des Isotops $^{12}_{6}$C 12 g wiegt.

$$\begin{aligned} 1\,\text{amu} &= \frac{m(\text{C-12})}{12} = \frac{12\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}{12\cdot 6.022\cdot 10^{23}\,\text{kg}} \\ 1\,\text{amu} &= 1.66\cdot 10^{-27}\,\text{kg} \end{aligned} \tag{6.21}$$

Damit kann man die Massen von Proton und Neutron in dieser Einheit angeben.

$$m_p = 1.0073\,\text{amu} \tag{6.22}$$

$$m_n = 1.0087\,\text{amu} \tag{6.23}$$

Setzt man den Wert von einem amu in die Einsteingleichung ein, ergibt sich ein Wert von 931.5 MeV.

Einige neuere Untersuchungen von Enrico Fermi und Leo Szilard, die mir im Manuskript zugänglich wurden, lassen mich erwarten, daß das Element Uran zu einer neuen und wichtigen Energiequelle in der unmittelbaren Zukunft werden kann [**?**].

Albert Einstein, 1939



Chemische Grundgesetze[4LP]

In der klassischen Physik und in der Chemie gilt der Satz von der **Erhaltung der Masse**, bekannt geworden auch als das Erste chemische Grundgesetz postuliert im Jahr 1748 von Lomonossow:

Massenerhaltungssatz Nichts wird bei Operationen künstlicher oder natürlicher Art geschaffen und es kann als Axiom angesehen werden, dass bei jeder Operation eine gleiche Quantität Materie vor und nach der Operation existiert.

Beispiele aus der Chemie:

Wird Eisenwolle stark erhitzt, entsteht als Endprodukt ein Stoff, der leichter ist als das Anfangsprodukt. Bei dem Versuch muss aber berücksichtigt werden, dass das Eisen mit Sauerstoff in der Luft reagiert. Sauerstoff hat ebenfalls eine Masse und ein Versuch in einem abgeschlossenen Behältnis zeigt, dass die Gesamtmasse der Produkte bei der Reaktion erhalten bleibt.

Link to video **Massenerhaltung beim Verbrennen**

Gesetz der konstanten Proportionen (1794): Elemente in chemischer Verbindung kommen immer im gleichen Massenverhältnis vor.

Gesetz der multiplen Proportionen (1803): Vereinen sich zwei Elemente zu mehreren Verbindungen, so stehen die betreffenden Gewichtsverhältnisse im Verhältnis einfacher kleiner Zahlen.

Kochsalz (Natriumchlorid, NaCl) entsteht in der chemischen Reaktion von Natrium und Chlor. Soll bei der Herstellung von NaCl kein Rest übrig bleiben, müssen die Stoffe in einem bestimmten Massenverhältnis miteinander reagieren. Das Experiment zeigt, dass sich 4g Natrium mit 6g Chlor zu 10g Natriumchlorid verbinden. Der Vollständigkeit halber auch die andere Grundgesetze der Chemie, die für die Physik relevant sind.

Link to video **Oxyhydrogen explosion**

- Gesetz von Avogadro: Gleiche Volumina verschiedener Gase beinhalten bei gleichen Bedingungen die gleiche Anzahl von Teilchen.

- Neutrale Atome haben immer die gleiche Anzahl an Protonen und Elektronen. Die Anzahl der Neutronen berechnet sich aus der Differenz der relativen Atommasse zur Protonenzahl (Periodensystem!Ordnungszahl). Moleküle sind ebenfalls elektrisch neutral. Die Atome eines Moleküle sind über bindende Elektronenpaare miteinander verbunden.

- Ionen sind elektrisch geladene Atome oder Moleküle. Kationen sind positiv geladen, d.h. die Anzahl an Elektronen ist geringer als die Anzahl der Protonen. Anionen sind negativ geladene Atome und Moleküle. Die Anzahl der Elektronen ist höhere als die Anzahl der Protonen.

- Van't Hoff'sche Regel: Die Geschwindigkeit, mit der eine chemische Reaktion abläuft, nimmt mit steigender Temperatur zu.

Bindungsenergie^{4LP}

Das wichtigste Ergebnis der Speziellen Relativitätstheorie betraf die träge Masse körperlicher Systeme. Es ergab sich, daß die Trägheit eines Systems von seinem Energieinhalt abhängen müsse, und man gelangte geradezu zur Auffassung, daß träge Masse nichts anderes sei als latente Energie. Der Satz von der Erhaltung der Masse verlor seine Selbständigkeit und verschmolz mit dem von der Erhaltung der Energie [**?**].

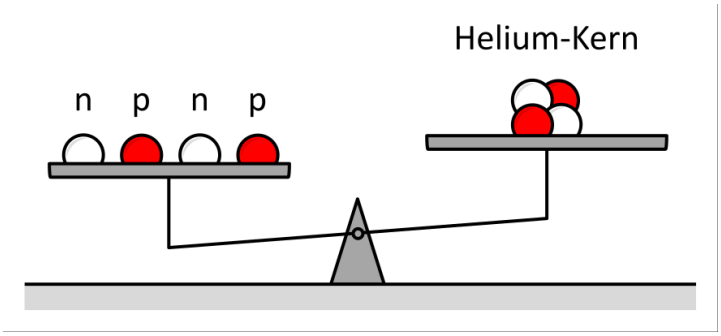


Abb. 6.11: Bei der Bildung von Kernen führt die Bindung der Nukleonen untereinander zu einer Reduzierung des Masse des Kerns.

Albert Einstein, Brief an die *London Times*, vom 28.11.1919

In einem Gedankenexperiment wird der vollständig inelastische Stoß zweier Körper mit einer Masse von jeweils m und Geschwindigkeiten $(v, -v)$ betrachtet, siehe Abb. 6.12. In diesem Prozess wird die kinetische Energie vollständig in thermische Energie umgewandelt.[10] Der Körper wird warm und die Energie verbleibt im Objekt.[11] Der Energietransfer wird durch die gespannte Feder symbolisiert. In der klassischen Physik kommt es in diesem Prozess aufgrund der Massenerhaltung nicht zu einer Erhöhung der Gesamtmasse $M = m + m$. Die Energie, die in der Feder gespeichert ist, kann man aufgrund der Einsteinschen Gleichung aber als eine Erhöhung der Masse auffassen. Analog zu diesem Gedankenspiel denke man an die Bildung von Atomkernen aus einzelnen Nukleonen[12] (Stichwort Bindungsenergie), siehe Kapitel *Kerne*. Abb. 6.11 zeigt anhand einer Waage, wie man sich das vorstellen muss. Man spricht von einem Massendefekt.[13]

Ein Beispiel aus der Welt des Sports

Zur Illustration betrachten wir den vollständig inelastischen Zusammenprall zweier Football-Spieler (Masse: m; Gesamtmasse M, Stoßgeschwindigkeit: 10 m/s).

$$M \cdot c^2 = 2\,m \cdot c^2 + E_{kin} \tag{6.24}$$

Die Massenänderung ist

$$\begin{aligned} \Delta M &= M - 2\,m \\ \Delta M &= \frac{2\,E_{kin}}{c^2} \end{aligned} \tag{6.25}$$

[10] Eine Betrachtung der Energie- und Impulsbilanz würde den Nachweis liefern.
[11] Tatsächlich würde auch Energie in Form von Schall freigesetzt werden. Das ignorieren wir hier geflissentlich.
[12] Protonen und Neutronen
[13] *Lexikon:* Die Masse eines Atomkerns ist reduziert um den Massendefekt, als die Summe der Massen der Protonen und Neutronen im Kern, da zur Bindung eines Kerns eine Bindungsenergie erforderlich ist.

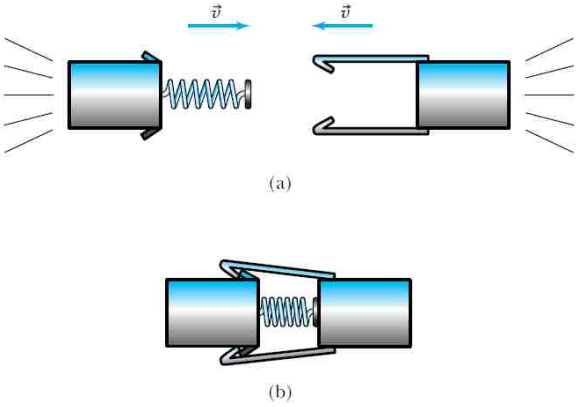


Abb. 6.12: (a) Zwei Metallblöcke der Masse m, einer mit einer Feder versehen, bewegen sich gleicher Geschwindigkeit v frontal aufeinander zu. (b) Die beiden Blöcke stoßen zusammen und komprimieren die Feder, die in ihrer Position einrastet. Das System hat nun eine erhöhte Masse, weil die kinetische Energie in potentielle Energie der Feder umgewandelt wurde [**?**].

oder als relative Massenänderung

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta M}{2\,m} &= \frac{M-2\,m}{2\,m} \\
\frac{\Delta M}{2\,m} &= \frac{2\,E_{kin}}{c^2}\cdot\frac{1}{2\,m} \\
\frac{\Delta M}{2\,m} &= \frac{E_{kin}}{m\cdot c^2} \\
\frac{\Delta M}{2\,m} &= \frac{1}{2}\,m\cdot v_{crash}^2\frac{1}{m\cdot c^2} \\
\frac{\Delta M}{2\,m} &= \frac{1}{2}\,\frac{v_{crash}^2}{c^2} \\
\frac{\Delta M}{2\,m} &= \frac{1}{2}\,\frac{(10\,\mathrm{m/s})^2}{(2.998\cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \\
\frac{\Delta M}{2\,m} &= 6\cdot 10^{-16}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Die Analyse zeigt, dass solche Überlegungen im Alltag keine Rolle spielen.

Energielieferant Sonne^{4LP}

Ein Beispiel aus der Fusionsforschung:

Anders stellt sich die Situation dar, wenn man Prozesse in der Sonne betrachtet. Abb. 6.15 zeigt den inneren Aufbau. Man kann verschiedene Zonen unterscheiden, die sich beispielsweise in ihrer Temperatur deutlich unterscheiden. Oberhalb des radiativen Kerns, in dem die Fusionsprozesse stattfinden, ist die Wasserstoff-Konvektionszone. Ihre Ausdehnung in radialer Richtung beträgt etwa 10% des Sonnenradius. In dieser Zone ist die Konvektion ein effizienter Transportmechanismus. Beobachtet man die Photosphäre mit einem Teleskop, entdeckt man die körnigen Konvektionszellen.

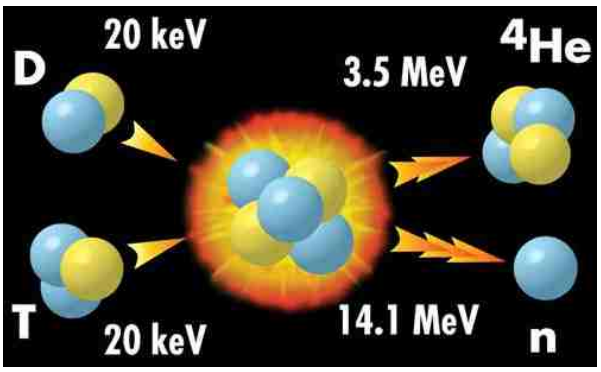


Abb. 6.13: Schema der Deuterium-Tritium Fusion, die in der Sonne stattfindet. Man beachte, dass die Kinetischen Energien der D- und T-Kerne im keV Bereich liegen, während die Reaktionsenergien im Bereich MeV liegen.

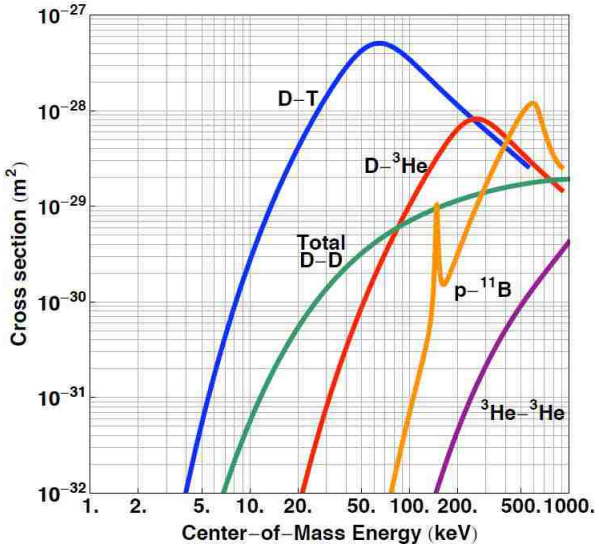


Abb. 6.14: Wirkungsquerschnitte verschiedener Fusionsprozesse. Die blaue Linie zeigt den Wirkungsquerschnitt für die Deuterium-Tritium-Fusion, der effektiv zwischen 50 und 100 keV abläuft. Die Skala ist logarithmisch in beiden Achsen [**?**].

Die Energiequelle der Sonne ist der Prozess der Kernfusion, d.h. im Stoß unterschiedlicher Atomkerne bilden sich neue Elemente. Zum Beispiel entsteht in der Reaktion der Wasserstoffisotope Deuterium (D) und Tritium (T), ein Heliumkern und ein Neutron. Abb. 6.13 zeigt den Prozess und die Kinetischen Energie bei der Reaktion.

$$D + T \rightarrow^4 \mathrm{He} + n$$

Da die Kerne positiv geladen sind, ist eine erhebliche kinetische Energie notwendig, um die Coulombabstoßung der Protonen zu überwinden. Die Stoßenergie wird durch die thermische Energie der Teilchen (Kerntemperatur der Sonne) bereit gestellt. Wie man sieht (oben), zeigen die einzelnen Fusionsreaktionen eine stark unterschiedliche Effizienz in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur, sihe Abb. 6.14. Die Beobachtung, dass die Sonne durch diese Prozesse nicht abkühlt, sondern ihre Temperatur beibehält, deutet darauf hin, dass in der Reaktion nicht Energie verbraucht, sondern freigesetzt wird. Bei der schon genannten D-T Reaktion wird Energie in Höhe von 17.6 MeV ($2.8 \cdot 10^{-12}$ J) freigesetzt.

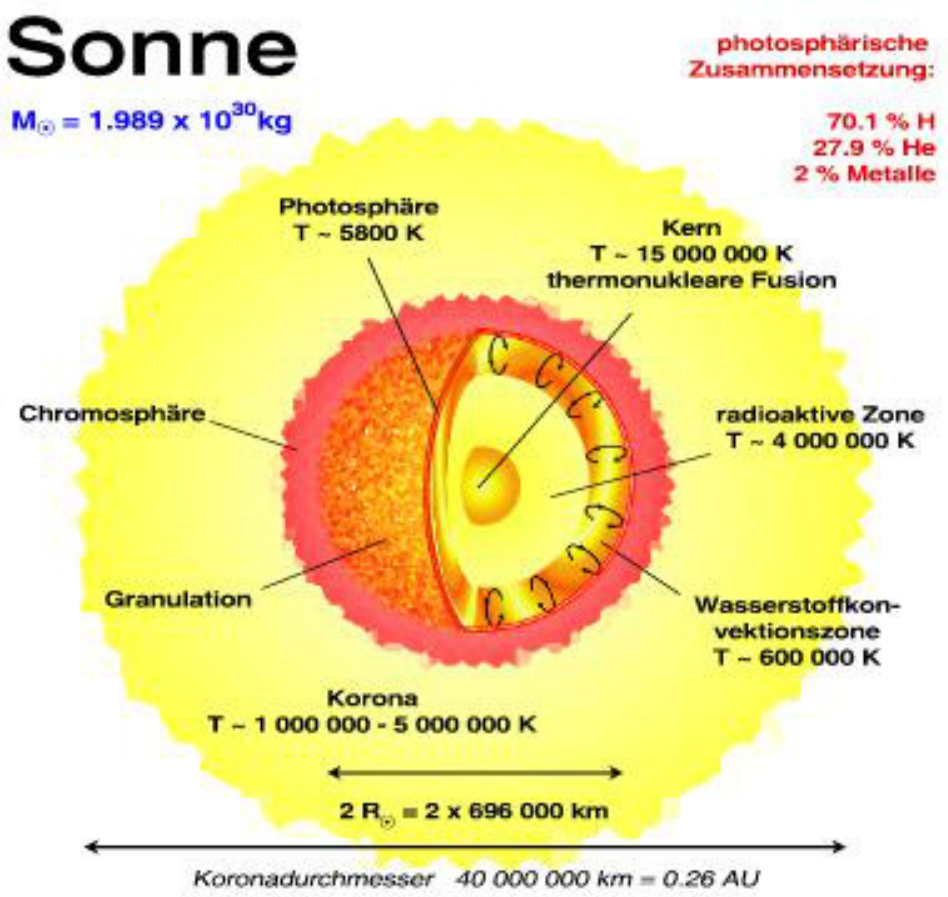


Abb. 6.15: Aufbau der Sonne und der in den Bereichen vorherrschenden Temperaturen. Das Sonneninnere besteht aus einem heißen ($15 \cdot 10^6$ K) Kern, in dem die hier interessierenden Fusionsprozesse ablaufen [**?**].

Beispiele aus der Sonnenforschung:

In Tab. 6.2 sind wichtige Eigenschaften der Sonne zusammengefasst. Nehmen wir, die Sonne wäre ein großer Brocken Kohle und aus diesem Energievorrat (Brennwert von Koh-

Masse	M_{sun}	$2 \cdot 10^{30}$ kg
Radius	R_{sun}	$7 \cdot 10^8$ m
Luminosität	L_{sun}	$4 \cdot 10^{26}$ W

Tab. 6.2: Masse, Radius und Leuchtkraft der Sonne.

le: H_{Kohle}=30·10^6 J/kg). Mit diesen Informationen kann man die Brenndauer abschätzen:

$$\begin{aligned} t_{Kohle} &= \frac{H_{Kohle} \cdot M_{sun}}{L_{Sun}} \\ t_{Kohle} &= \frac{(30 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}) \cdot (2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg})}{4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}} \\ t_{Kohle} &= 1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{s} = 4.8 \cdot 10^3\,\mathrm{a} \end{aligned} \tag{6.27}$$

Das ist deutlich zu niedrig und kommt deshalb nicht als Energiequelle in Frage.

Alternativ könnte die Gravitation als Energielieferant dienen. Die thermische Zeitskala, die Kelvin-Helmholtz-Zeit, kann man ansehen als Zeitspanne, die ein Stern bei konstanter Helligkeit braucht, um bei gleichzeitiger Kontraktion durch die Gravitation als weiteren Energielieferanten, seinen Vorrat an thermischer Energie abzustrahlen. Die Rate, mit der die Energie abgestrahlt wird, ist die Leuchtkraft. Die thermische Zeitskala vergleicht also den Vorrat an thermischer Energie mit dem Energieverlust durch Lichtabstrahlung.

$$\begin{aligned} t_{thermo} &= \frac{G_N \cdot M_{sun}^2}{R_{Sun}} \cdot \frac{1}{L_{Sun}} \\ t_{thermo} &= \frac{(6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}) \cdot (2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg})^2}{7 \cdot 10^8\,\mathrm{m}} \frac{1}{4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}} \\ t_{thermo} &= 9 \cdot 10^{14}\,\mathrm{s} = 30 \cdot 10^6\,\mathrm{a} \end{aligned} \tag{6.28}$$

Zum Vergleich: Die Forschung geht davon aus, dass sich tierisches Leben im Phanerozoikum vor 541 Millionen Jahren entwickelte. Das Ergebnis steht also im Widerspruch zur Theorie von Charles Darwin, nach der evolutionäre Prozess auf deutlich längeren Zeitskalen ablaufen.

Berechnen wir nun die verfügbare Energiemenge durch die Umwandlung von Masse in Energie. Betrachtet man die in der Sonne ablaufenden Fusionsprozesse, so wird andauernd Masse in Energie und Masse umgewandelt. Der Anteil der dabei freigesetzten Energie ist etwa ε=10^{-3}. Dabei spielt nahezu keine Rolle, welcher Fusionsprozess im Einzelnen betrachtet wird.

$$\begin{aligned} t_{nuclear} &= \varepsilon \cdot \frac{E_{nuclear}}{L_{Sun}} \\ t_{nuclear} &= \varepsilon \cdot \frac{M_{sun} \cdot c^2}{R_{sun}} \end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned} t_{nuclear} &= (10^{-3}) \frac{(2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}) \cdot (3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2}{4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}} \\ t_{nuclear} &= 4.5 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 1.4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{a} \end{aligned} \tag{6.30}$$

Diese Rechnung ergibt schließlich einen realistischen Wert, der mit den Ergebnissen der Geologen und Biologen im Einklang ist. Der anerkannte Wert für das Alter der Sonne ist $4.6 \cdot 10^9$ Jahre.

Energie auf die Waagschale[4LP]

Kann man Licht wiegen? Im Prinzip JA! Licht kann man aufgrund der Einsteinschen Gleichung eine Masse=Energie/c^2 zuordnen. Wie könnte das Experiment aussehen? Man sperre Licht in einen Container mit perfekt reflektierenden Wänden ein und messe die Massendifferenz. Eine kurze Überschlagsrechnung zeigt aber, dass der sich ergebende Unterschied ziemlich gering ist und mit empfindlichen Messgeräten kaum nachgewiesen zu werden kann.

Beispiele aus der Chemie:

Die Einträge im Periodensystem weisen eine Massenänderung auf. Man muss aber vorsichtig sein. Hier tauchen krumme Zahlen auf. Die im Periodensystem angebende Masse eines Elements ist der Mittelwert der Massen der Isotope. Die Masse der Atom setzt sich zusammen aus der Summe der Massen von Protonen und Neutronen. Ein Element im Periodensystem ist charakterisiert durch die Anzahl an Protonen, z.B. Lithium mit 3 Protonen (Ordnungszahl Z=3). Die Anzahl der Neutronen kann allerdings variieren. Man nennt Atomkerne mit einer bestimmten Anzahl an Protonen, aber unterschiedlicher Anzahl an Neutronen die Isotope eines chemischen Elements. Eine in diesem Zusammenhang wichtige Ausnahme ist beispielsweise Gold mit 79 Protonen und genau 118 Neutronen. Hier gibt keine weiteren Isotope. Das Prinzip der Massenerhaltung kann damit an Gold gut überprüft werden. In Tab. 6.3 sind anderen so genannten Reinelemente aufgeführt.[14] Die Masse sollte

$$79\, m_p + 118\, m_n = 198.6033\,\text{amu} \tag{6.31}$$

betragen. Man stellt aber fest, dass das Goldatom nur eine Masse von 196.97 amu hat. Der einzige Unterschied ist, dass die Nukleonen im Kern durch Bindungskräfte gebunden sind. Die Kernbildung verursacht also augenscheinlich einen Massenverlust.

Zur genaueren Veranschaulichung der Energieverhältnisse wird das Wasserstoffisotop Deuterium betrachtet. Dieses besteht aus einem Proton und einem Neutron. Setzt man die Werte ein, ergibt sich, dass bei der Bildung des Kerns eine Energie von 2.22 MeV freigesetzt wird. Energieerhaltung verlangt, dass diese Energie auf irgendeine Weise zur Verfügung gestellt wird. Da man sich in einem abgeschlossenen System befindet, reduziert sich durch die Formung des Kerns die Masse. Andererseits muss für den umgekehrten Prozess, die Trennung des Protons vom Neutron, eine Energie von 2.22 MeV zur Verfügung gestellt werden. Die eingesetzte Energie taucht als Masse in den separierten Teilchen wieder auf.

Das Neutron hat eine höhere Ruheenergie als das Proton. Ein freies Neutron ist deshalb nicht stabil und zerfällt mit einer Halbwertszeit von etwa 15 Minuten in einem β-Zerfall

[14] PSE: Periodensystem der Elemente

	Z ♯p	A	$Z \cdot m_p$ [amu]	♯n	$(A-Z) \cdot m_n$ [amu]	$Z \cdot m_p$ $+(A-Z) \cdot m_n$ [amu]	m_{PSE} [amu]	Δm [amu]
Be	4	9	4.02910	5	5.04332	9.07242	9.012	0.060424
F	9	19	9.06548	10	10.08664	19.15212	18.998	0.154124
Na	11	23	11.08003	12	12.10396	23.18400	22.989	0.195004
Al	13	27	13.09458	14	14.12129	27.21588	26.981	0.234884
P	15	31	15.10914	16	16.13862	31.24776	30.973	0.274764
Ar	18	40	18.13096	22	22.19060	40.32157	39.962	0.359576
Sc	21	45	21.15279	24	24.20793	45.36073	44.995	0.365732
Mn	25	55	25.1819	30	30.25992	55.44182	54.938	0.503820
Co	27	59	27.19645	32	32.27724	59.4737	58.933	0.540700
Yt	39	89	39.28376	50	50.4332	89.71696	88.906	0.810964
Nb	41	93	41.29831	52	52.45052	93.74884	92.906	0.842844
Rh	45	103	45.32742	58	58.50251	103.82993	102.906	0.923932
J	53	127	53.38562	74	74.64113	128.02676	126.905	1.121764
Cs	55	133	55.40018	78	78.67579	134.07597	132.906	1.169972
Tb	65	159	65.47294	94	94.81441	160.28735	158.925	1.362356
Ho	67	165	67.48749	98	98.84907	166.33656	164.93	1.406564
Tm	69	169	69.50204	100	100.8664	170.36844	168.934	1.434444
Au	79	197	79.57480	118	119.0223	198.59715	196.966	1.631156
Bi	83	209	83.60390	126	127.0916	210.69557	208.980	1.715572
Th	90	232	90.65484	142	143.2302	233.88512	232.039	1.846128
Pu	94	244	94.68394	150	151.2996	245.98354	244.000	1.983544

Tab. 6.3: Liste der Reinelemente mit Massen und Massendefekt. Von einem Reinelement existiert in der Natur nur ein einziges Isotop. Alle Kerne dieses Elements bestehen aus einer gleichen Anzahl an Protonen und Neutronen. Es gibt 22 Elemente, die zu dieser Gruppe gehören [**?**].

in ein Proton, ein Elektron und ein nahezu masseloses Antineutrino [**?**].

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu} \tag{6.32}$$

Bei der Reaktion wird kinetische Energie in Höhe von $1.25 \cdot 10^{-13}$ J freigesetzt.

Ruheenergie des Neutrons: 939.565 MeV

Ruheenergie des Protons: 938.272 MeV

Ruheenergie des Elektrons: 511 keV

Damit ergibt sich ein Energieunterschied von 0.782 MeV oder $1.25 \cdot 10^{-13}$ J. Die frei werdende Energie wird vollständig in kinetische Energie der Reaktionsprodukte umgesetzt.

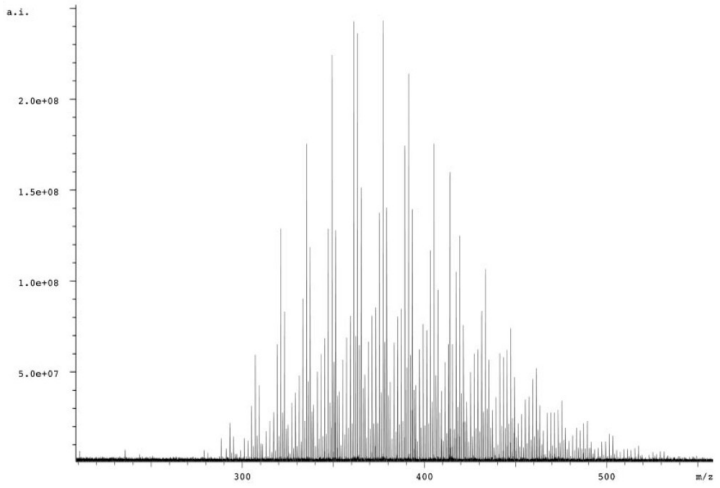


Abb. 6.16: FTICR[a]-Massenspektrum eines Rohölextrakts, dass Naphthensäuren enthält [?].

[a]FTICR: Fourier-Transform Ionenzyklotronresonanz

Anwendungen[4LP]

Die Analyse der Zusammensetzung organischer Proben in der Chemie ist oft sehr komplex. Abb. 6.16 zeigt das Beispiel einer massenspektrometrischen Untersuchung[15] eines Rohölextrakts, dass Naphthensäuren enthält. Gibt es Möglichkeiten, die Zusammensetzung dieser unübersichtlichen Massenspektren zu bestimmen? JA! Aus einer Anpassung der Definition des Massendefekt ergibt sich der Kendrick-Massendefekt [?]. Die Kendrick-Massenskala erleichtert die Analyse komplexer Gemische aus organischen Substanzen, die beispielsweise CH_2-Wiederholungen enthalten. Zu diesem Zweck berechnet man die Masse nicht auf der Grundlage von Kohlenstoff ($^{12}_{6}C$), sondern man weist CH_2 die Masse 14 statt 14.01565 amu zu. Der Kendrick-Massendefekt ist deshalb die Differenz zwischen der exakten und der nominellen Kendrick-Masse. Der Hauptvorteil der so definierten Massenskala besteht darin, dass alle Moleküle einer homologen Reihe, die sich nur in der Anzahl der Grundeinheiten unterscheiden, denselben Massendefekt aufweisen. Eine Auftragung des Kendrick-Massendefekts gegen die nominelle Kendrick-Masse vereinfacht die komplexen Datensätze aus der Massenspektroskopie, indem sie Informationen über die Anzahl der Grundeinheiten liefert [?], siehe Abb. 6.17. Diese Methode der Analyse wird in der hochauflösenden Massenspektroskopie [?], Umweltanalytik [?], Proteomik [?], Petroleomik [?],[16] Metabolomik [?][17] und Polymeranalytik [?] eingesetzt.

The use of mass defect in modern mass spectrometry [?]: Mass defect between a compound's exact mass and its nominal mass is being increasingly used in modern mass

[15] *Lexikon:* Die **Massenspektrometrie** ist eine hochempfindliche Methode, um das Masse-zu-Ladung Verhältnisses m/q von Atomen und Molekülen zu bestimmen. Bei bekanntem Ladungszustand q kann daraus die Masse m des Partikels ermittelt werden. In der Physik wird die Massenspektroskopie eingesetzt, um die Massen von Elementarteichen, Atomkernen oder Isotopengemischen zu bestimmen. In der Chemie wird das Verfahren zur Analyse von Substanzen verwendet.

[16] Die Proteomik erforscht die Dynamik derin einer Zelle oder einem komplexen Organismus vorliegenden Proteine.

[17] Die Metabolomik versucht chemischen Charakteristika des Zellstoffwechsels aufzulösen.

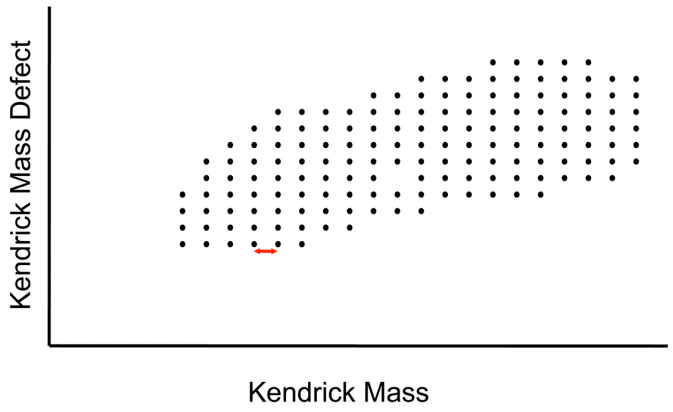


Abb. 6.17: Die Kendrick-Massendefektanalyse ist eine leistungsfähige Visualisierungs- und Datenverarbeitungsmethode für die Analyse von Massenspektren natürlicher und synthetischer Polymere geworden. In der Analyse wird die IUPAC-Massenskala,[a] die auf der Masse von ^{12}C (12 amu) basiert, durch die Kendrick-Massenskala basierend auf der Masse von CH_2 (14 amu) ersetzt. Durch diesen kleinen Trick wird man empfindlich auf kohlenstoffhaltige Proben wie Erdöl [**?**].

[a] IUPAC: International Union of Pure and Applied Chemistry

spectrometry. This is mainly due to the growing use of high resolution mass spectrometers capable of exact mass measurements. Filtering based on known mass defects allows the selective profiling of specific compound classes. Mass defect filtering has become so important that automated mass defect data processing tools are currently incorporated in all high resolution mass spectroscopy platforms. This approach is applicable to many areas in analytical and bioanalytical chemistry. In this tutorial the principle of the use of mass defect and the various mass defect filtering tools in different applications in environmental and life sciences are described.

Beispiele aus der Kernphysik:

Wie unterscheiden sich die Elemente in Bezug auf die Bindungsenergie der Nukleonen E_B im Atomkern? Das ist eine interessante Frage und sie führt auf das Tröpfchenmodell der Kernphysik.[18] Man würde vermuten, dass die Bindungsenergie mit jedem Nukleon zunimmt. Wie sich herausstellt, ist dies nicht der Fall, da die Reichweite der starken Wechselwirkung mit 1-2 fm nur gering ist. Zur Illustration betrachtet wir nicht den Massendefekt, sondern die entsprechende Bindungsenergie der Atomkerne und wichten sie mit der Anzahl der Nukleonen A, siehe Abb. 6.18. Diese wichtige Abbildung findet man in jedem Lehrbuch über Kernphysik. Sie zeigt, dass E_B/A zunächst steil ansteigt und sich zwischen 12 amu und 238 amu bei einem Wert von 8 MeV, das sind 1% der Masse des

[18] Kapitel *Kernmodelle*

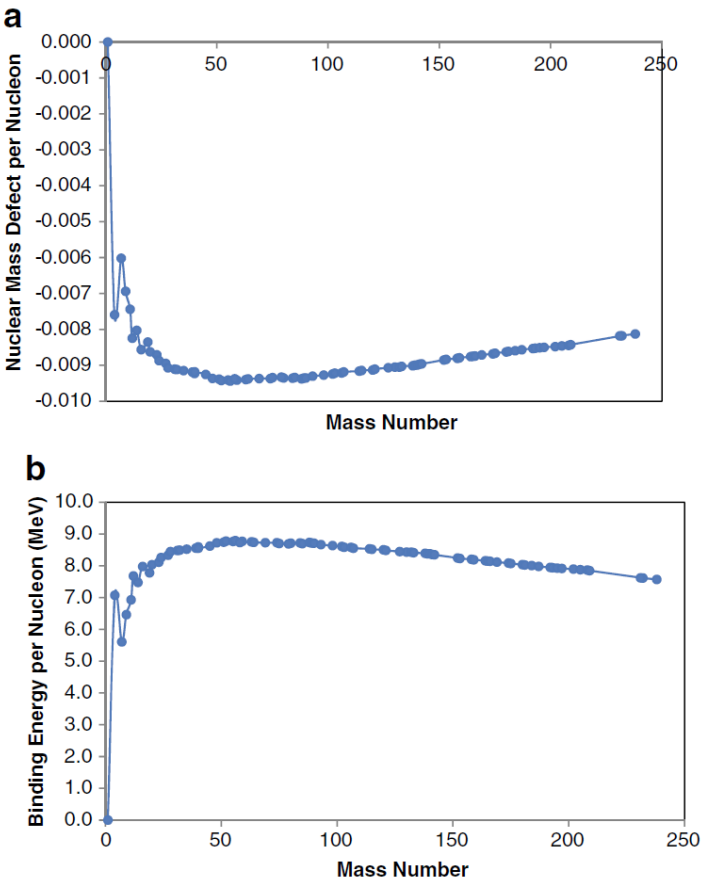


Abb. 6.18: (a) Kernmassendefekt pro Nukleon basierend auf der ^{12}C-Massenskala (b) Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von der Massenzahl für die häufigsten Isotope [**?**].

Protons, einpendelt. Das bedeutet, dass ein Zusammenschluss kleinerer Kerne Energie freisetzt. Nach dem Maximum von E_B/A, dass bei A=57 (Eisen Z=26) erreicht wird, sinkt der Wert langsam ab. Das bedeutet, dass das Spalten des Atomkerns energetisch günstig wird und ebenfalls Energie freisetzt. Kennen Sie die zugehörigen physikalischen Reaktionsprozesse?[19] Das in der Abbildung erkennbare Maximum beim Element Eisen hat astrophysikalische Bedeutung! Die Stabilität einer Sonne hängt vom Gleichgewicht von Gravitations- und Plasmadruck ab. Der Stern kann seine Temperatur nur halten, wenn die Fusionsprozesse Energie liefern. In Tab. 6.4 ist dargelegt, auf welchen Zeitskalen die unterschiedlichen Fusionsprozesse auflaufen. Ab dem Element Fe ist Fusion energetisch nicht günstig und der Heizprozess kommt zum Erliegen. Elemente schwerer als Eisen werden in einer Sonne nicht erzeugt und müssen über andere Prozesse generiert werden. Damit stellt sich eine Frage: Wie sind die schwereren Elemente entstanden?[20]

[19] Antwort: Kernfusion und Kernspaltung
[20] Antwort: Unter anderem durch Supernova Explosionen.

Periode	Zeitdauer
Wasserstofffusion	$7 \cdot 10^6$ a
Heliumfusion	$5 \cdot 10^5$ a
Kohlenstofffusion	600 a
Neonfusion	1 a
Siliziumfusion	1 d
Gravitationskollaps	<1 s

Tab. 6.4: Chronik eines Stern einer Masse von 25 Sonnenmassen

Mass Defect from Nuclear Physics to Mass Spectral Analysis [?]: Mass defect is associated with the binding energy of the nucleus. It is a fundamental property of the nucleus and the principle behind nuclear energy. Mass defect has also entered into the mass spectrometry terminology with the availability of high resolution mass spectrometry and has found application in mass spectral analysis. In this application, isobaric masses are differentiated and identified by their mass defect. What is the relationship between nuclear mass defect and mass defect used in mass spectral analysis, and are they the same?

Ein Beispiel aus der Elementarteilchenphysik:

Die Entdeckung neuer Teilchen geht einher mit einer tiefer greifenden Erkenntnis über die Rolle fundamentaler Kräfte. Abb. 6.19 zeigt, wie die Entdeckungen beginnend α-, β- und γ-Strahlung bis zum Z^0 Teilchen vorangeschritten. ist. Der Plot macht klar, dass man für die Entdeckung neuer Physik die Leistungsfähigkeit der Teilchenbeschleuniger immer weiter hochschrauben muss.

Masses of exotic calcium isotopes pin down nuclear forces [?]: The properties of exotic nuclei on the verge of existence play a fundamental part in our understanding of nuclear interactions. Exceedingly neutron-rich nuclei become sensitive to new aspects of nuclear forces. Calcium, with its doubly magic isotopes ^{40}Ca and ^{48}Ca, is an ideal test for nuclear shell evolution, from the valley of stability to the limits of existence. With a closed proton shell, the calcium isotopes mark the frontier for calculations with three-nucleon forces from chiral effective field theory. Whereas predictions for the masses of ^{51}Ca and ^{52}Ca have been validated by direct measurements, it is an open question as to how nuclear masses evolve for heavier calcium isotopes. Here we report the mass determination of the exotic calcium isotopes ^{53}Ca and ^{54}Ca, using the multi-reflection time-of-flight mass spectrometer of ISOLTRAP at CERN. The measured masses unambiguously establish a prominent shell closure at neutron number N=32, in excellent agreement with our theoretical calculations. These results increase our understanding of neutron-rich matter and pin down the subtle components of nuclear forces that are at the forefront of theoretical developments constrained by quantum chromodynamics.

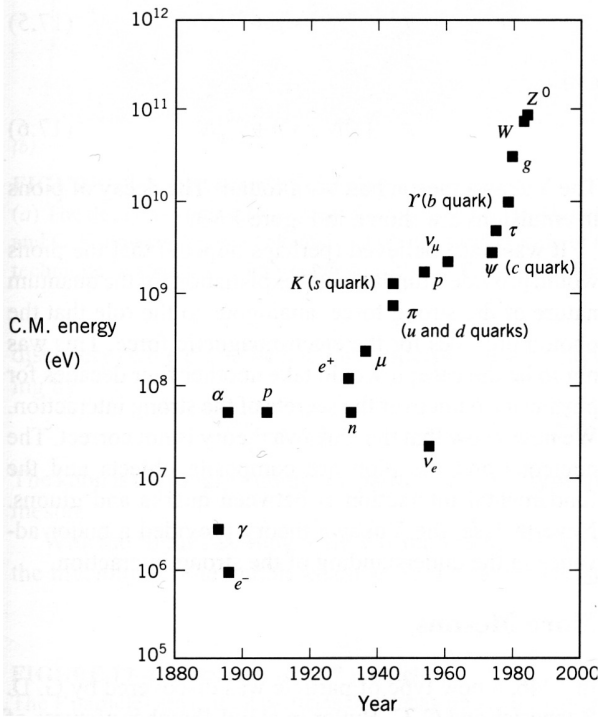


Abb. 6.19: Energie, bei man fundamentale Teilchen entdeckt hat in Abhängigkeit vom Jahr der Entdeckung [**?**].

Ein Beispiel aus der Fertigungstechnik:

Eine Anwendung in der Industrie, bei der der relativistische Massenzuwachs einen Rolle spielt, ist das Prinzip der Elektronenstrahlverdampfung (EBM[21]). Elektronen werden dazu auf 50 bis 200 kV beschleunigt und auf ein Werkstück gelenkt. Um eine optimale Fokussierung zu erreichen, müssen für die Berechnung der Potenziale an den Linsen, der relativistische Massenzuwachs berücksichtigt werden. Die dadurch erreichbaren Leistungsdichten liegen in der Größenordnung von $10^4\,\mathrm{kW/mm^2}$. Der fokussierte Strahl trifft auf ein Werkstück, wo die kinetische Energie der Elektronen in Wärme umgewandelt wird. Abb. 6.20 zeigt den Aufbau eines Elektronenstrahl-Verdampfers. Der Energieeintrag reicht aus, um Materialien zu schmelzen und zu verdampfen, wobei auch spröde und zerbrechliche Materialien bearbeitet werden können. Ein weiterer Vorteil ist, dass es keinen mechanischen Kontakt zwischen Werkzeug und Werkstück gibt. Abtragsraten von $40\,\mathrm{mm^3/s}$ können erreicht werden. Im Allgemeinen erfolgt die Elektronenstrahlbearbeitung in einer Vakuumkammer, um eine Defokussierung durch Streuung der Elektronen zu vermeiden. Mit dieser Methode können extrem feine Strukturen und Löcher erzeugt werden. Abb. 6.21 zeigt, wie durch Elektronenstrahlverdampfung eine Struktur aus einem Pulver generiert wird.

[21]EBM: *electrom beam machining*

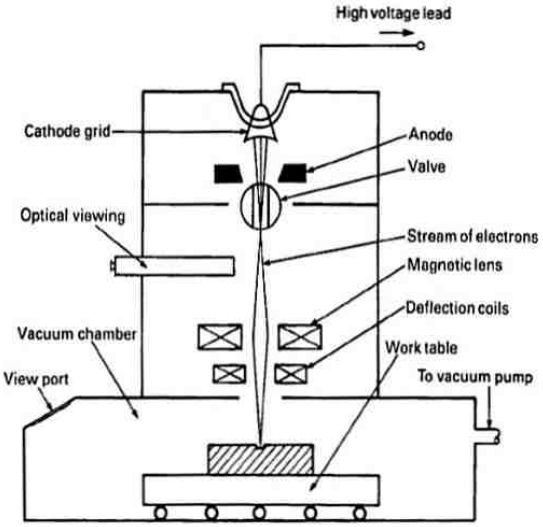


Abb. 6.20: Schematischer Aufbau eines Elektronenstrahl-Verdampfers.



Abb. 6.21: Pulverbett-Verfahren, bei dem mit einem Elektronenstrahl ein Werkstück hergestellt wird [**?**].

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 2.1: Im Bohrschen Atommodell des Wasserstoffatoms umkreist das Elektron (Masse m_e) das ruhende Proton mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit v_e auf einer Bahn mit Radius r_e. Wie groß ist der Massendefekt für das gebundene System?

Die kinetische und potenzielle Energie des Elektrons ist

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2 \\ E_{pot} &= -k_C \cdot \frac{e^2}{r_e} \end{aligned}$$

wobei k_C die Coulomb-Konstante ist. Als Gesamtenergie ergibt sich damit:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2 - \frac{k_C \cdot e^2}{r_e}$$

Das Elektron wird auf seiner Bahn aufgrund des Kräftegleichgewichts von Coulomb- und Zentripedalkraft gehalten:

$$\begin{aligned} m_e \frac{v_e^2}{r} &= \frac{k_C \cdot e^2}{r^2} \\ \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 &= \frac{1}{2} \frac{k_C \cdot e^2}{r} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für E_{ges}:

$$E_{ges} = -\frac{1}{2} \frac{k_C \cdot e^2}{r}$$

Die Bindungsenergie ist also negativ und entspricht einem Massendefekt Δm_H im Wasserstoffatom von:

$$\begin{aligned} \Delta m_H &= \frac{E_{ges}}{c^2} \\ \Delta m_H &= \frac{1}{2} \frac{k_C \cdot e^2}{c^2 \cdot r} \\ \Delta m_H &= \frac{8.99 \cdot 10^9 \,\mathrm{V \cdot m \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}}}{2 \cdot (2.998 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s})^2} \cdot \frac{(1.602 \cdot 10^{-19} \,\mathrm{C})^2}{0.529 \cdot 10^{-10} \,\mathrm{m}} \\ \Delta m_H &= 2.42 \cdot 10^{-35} \,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Das Verhältnis Δm_H zur Masse des Protons m_p ist

$$\frac{\Delta m_H}{m_p} = \frac{2.5 \cdot 10^{-35} \,\mathrm{kg}}{1.673 \cdot 10^{-27} \,\mathrm{kg}} = 1.47 \cdot 10^{-8}$$

Gebundenes System	$\Delta M/M$
Deuteriumkern	10^{-3}
Wasserstoffatom	$1.47 \cdot 10^{-8}$
System Sonne-Erde	$1.4 \cdot 10^{-14}$

Tab. 6.5: Vergleich der relativen Massendefekte in den besprochenen Verbundsystemen.

Um den Effekt aufzulösen müssen die Massen von Proton, Elektron und Wasserstoffatom auf mindestens acht Stellen nach dem Komma bestimmt werden, was experimentell nicht schwierig ist.

Aufgabe 2.2: Die Erde (Masse m_E=$5.97 \cdot 10^{24}$ kg) umkreist die Sonne (Masse M_S=$1.99 \cdot 10^{30}$ kg) auf einer nahezu kreisförmigen Bahn mit Radius r=$1.5 \cdot 10^{11}$ m. Wie groß ist der Massendefekt für das System Sonne-Erde?

Die Analyse ist genauso wie in der vorherigen Aufgabe. Die Bindungsenergie ist

$$E_{ges} = \frac{1}{2} G_N \cdot \frac{M_S \cdot m_E}{r}$$

und es ergibt sich ein Massendefekt von:

$$\begin{aligned}
\Delta M &= \frac{E_{ges}}{c^2} \\
\Delta M &= \frac{G_N}{2 \cdot c^2} \cdot \frac{m_E \cdot M_S}{r} \\
\Delta M &= \frac{6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}}{2 \cdot (2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \cdot \frac{(5.97 \cdot 10^2 4\,\mathrm{kg}) \cdot (1.99 \cdot 10^3 0\,\mathrm{kg})}{1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}} \\
\Delta M &= 2.93 \cdot 10^{16}\,\mathrm{kg}
\end{aligned}$$

Als Verhältnis ergibt sich:

$$\frac{\Delta M}{M_S} = 1.4 \cdot 10^{-14}$$

Um diesen Effekt experimentell aufzulösen, müsste man die Massen von Sonne und Erde unabhängig voneinander messen können. Außerdem stellt die erforderliche Messgenauigkeit erheblich höhere Anforderungen an die experimentelle Technik. Eine vergleichbare Rechnung lässt sich auch für den Deuteriumkern durchführen, dessen Kern aus einem Proton und Neutron besteht. Tabelle. 6.5 fast die Ergebnisse zusammen. Die Werte verdeutlichen, warum man den Effekt des Massendefekts zuerst an Kernen nachgewiesen hat.

Aufgabe 2.3: Welche Energiemenge ergibt eine Masse von 1 g Sand? Vergleichen Sie mit der freiwerdenden Wärme bei der Verbrennung derselben Menge Kohle ($29 \cdot 10^3$ J/g).

$$
\begin{aligned}
E_{Sand} &= m_0 \cdot c^2 \\
E_{Sand} &= (1 \cdot 10^{-3})\,\mathrm{kg} \cdot (2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}) \\
E_{Sand} &= 9 \cdot 10^{13}\,\mathrm{J} \\
E_{Kohle} &= (10^{-3}\,\mathrm{kg}) \cdot (29 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}) \\
E_{Kohle} &= 2.9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} \\
\frac{E_{Sand}}{E_{Kohle}} &= 3.1 \cdot 10^9
\end{aligned}
$$

Allerdings macht man sich an dieser Stelle etwas vor. Da die Gesamtanzahl der Protonen und Neutronen in jeder Kernreaktion erhalten bleibt (Kapitel *Kerne*), kann die gesamte Masse nicht in Energie umgewandelt werden.

Aufgabe 2.4: Eine abgeschlossener Container enthält die gleiche Menge an Materie und Antimaterie. Die Gesamtmasse des Container und seines Inhalts vor Beginn der Reaktion ist M. Materie und Antimaterie vernichten sich und werden vollständig in Licht umgewandelt. Wie groß ist die Gesamtmasse von Kiste und Inhalt nach der Annilihation?[22]

(a) Größer als M!

(b) Kein Unterschied!

(c) Kleiner als M!

Aufgabe 2.5: Ein Wasserstoffatom absorbiert ein so genanntes Lyman-α Photon (λ=121 nm). Um wie viel schwerer wird das Atom?

Masse des Wasserstoffatoms: 1.00784 amu[23]

Im Kapitel *Materiewellen* werden wir die Plancksche Gleichung für das Lichtpaket genannt Photon kennenlernen:

$$
\begin{aligned}
E_{ph} &= h \cdot \nu = h\frac{c}{\lambda} \\
E_{ph} &= 1.64 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

Die Masse des Wasserstoffatoms ist

$$
\begin{aligned}
m_H &= 1.00784 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \\
m_H &= 1.67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \\
E_H &= m_H \cdot c^2 \\
E_H &= 1.51 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} \\
\frac{E_{ph}}{E_H} &= 1.1 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}
$$

[22] Antwort: (b)
[23] 1 amu=$1.66 \cdot 10^{-27}$ kg

Aufgabe 2.6: Wie groß ist die Massenänderung, wenn ich einen Wecker (Masse 1 kg) unter Einsatz einer Energie von 1 J aufziehe?

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{\Delta E}{c^2} = 1.1 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{kg} \\ \frac{\Delta m}{m} &= \frac{1.1 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{kg}} = 1.1 \cdot 10^{-17} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.7: Ein Plattenkondensator (Fläche: A_0=0.06 m^2; Plattenabstand: d=0.002 m) wird durch die Berührung mit einer Spannungsquelle auf 500 V aufgeladen. Wie hoch ist der Massenzuwachs?

Für das elektrische Feld E_e und die Feldenergie W_e

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{U_e}{d} \\ E_e &= \frac{500\,\mathrm{V}}{0.002\,\mathrm{m}} \\ E_e &= 2.5 \cdot 10^5\,\mathrm{V/m} \\ W_e &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot E_e^2 \cdot A_0 \cdot d \\ W_e &= \frac{\varepsilon_0 \cdot U_e^2 \cdot A_0}{2\,d} \\ W_e &= \frac{8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}} \cdot (500\,\mathrm{V})^2 \cdot (0.006\,\mathrm{m^2})}{2\,(0.002\,\mathrm{m})} \\ W_e &= 3.32 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J} \\ m &= \frac{W_e}{c^2} \\ m &= \frac{3.32 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}}{(2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \\ m &= 3.69 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.8: Die Einsteinsche Gleichung besagt, dass Energie[24]

(a) gleich der Masse, die sich mit Lichtgeschwindigkeit zum Quadrat bewegt.

(b) gleich der bewegten Masse ist.

(b) fundamental anders ist als Masse

(d) und Masse eng verwandt sind.

Aufgabe 2.9: Was wiegt mehr?[25]

[24] Antwort: (d)
[25] Antwort: (b)

(a) Zwei Bälle verbunden mit einer entspannten Feder.

(b) Zwei Bälle verbunden mit einer gespannten Feder.

(c) Ist egal!

Aufgabe 2.10: Wie hoch ist die maximale Energie kosmischer Strahlung, auch bekannt unter dem Namen GZK-cutoff [**?** **?**]?[26]

Der Hauptanteil der kosmischen Teilchenstrahlung, die auf der Erde auftrifft, sind Protonen. Auf ihrem Weg zur Erde stoßen die Protonen mit 3 Kelvin Photonen der Kosmischen Hintergrundstrahlung (Kapitel *Schwarzer Strahler*). Oberhalb einer bestimmten kinetischen Energie können im Stoßprozess Pionen erzeugt werden. Der Energieverlust verlangsamt die Protonen. Diesen Vorgang zu beschreiben, erfordert eine umfangreiche Rechnung, die den Rahmen des Skripts sprengen würde. Statt dessen berechnen wir die Photonenenergie, die notwendig ist, ein Pion (Masse m_π=0.14 GeV/c^2) im Stoß mit einem niederenergetischen Proton zu erzeugen. Im Ruhesystem des Proton können Photonen der Energie $E_\gamma > m_\pi c^2$ Pionen erzeugen. Im zweiten Schritt erhöhen wir über den γ-Faktor die Ruheenergie des Protons, um das eigentliche System (Energetisches Proton, niederenergetische Kosmische Hintergrundstrahlung) zu berechnen. Der γ-Faktor errechnet sich mit

$$\gamma = \frac{m_\pi \cdot c^2}{E_\gamma}$$

Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie eines Ensembles von Teilchen. Beispielsweise ergibt sich für ein ideales monoatomares Gas eine kinetische Energie von:

$$E_{kin} = \frac{3}{2} k_B \cdot T_K$$

Boltzmann-Konstante: $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$

Daraus kann man den Wert der Boltzmann-Konstanten in der Einheit eV/K berechnen:

Boltzmann-Konstante: $k_B = 10^{-4}\,\mathrm{eV/K}$

Setzen wir die 3 Kelvin Strahlung des Kosmischen Hintergrunds in die obige Gleichung ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1.4 \cdot 10^8\,\mathrm{eV}}{(3\,\mathrm{K}) \cdot (10^{-4}\,\mathrm{eV/K})} \\ \gamma &= 10^{12} \end{aligned}$$

[26] Der Greisen-Sazepin-Kusmin-cutoff bezeichnet den charakteristischen Abfall in der spektralen Verteilung der kosmischen Teilchenstrahlung [**?**].

Die maximale Energie der Protonen berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} E_p &= \gamma \cdot m_p \cdot c^2 \\ E_p &= 10^{21}\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

Das sind umgerechnet 10^2 J und entspricht in etwa der kinetischen Energie eines scharf geschossenen Fußballs.

Aufgabe 2.11: If 5 lb of lead could be completely annihilated, how many joules would be produced?[27]

Aufgabe 2.12: If the following masses could be annihilated, how much energy, in MeV, is created?[28]

(a) 0.0216 atomic mass unit

(b) 0.0589 atomic mass unit.

[27] Answer: $20.4 \cdot 10^{16}$ J
[28] Answer: (a) 20.1, (b) 54.8

Konzeptionelle und andere Fragen

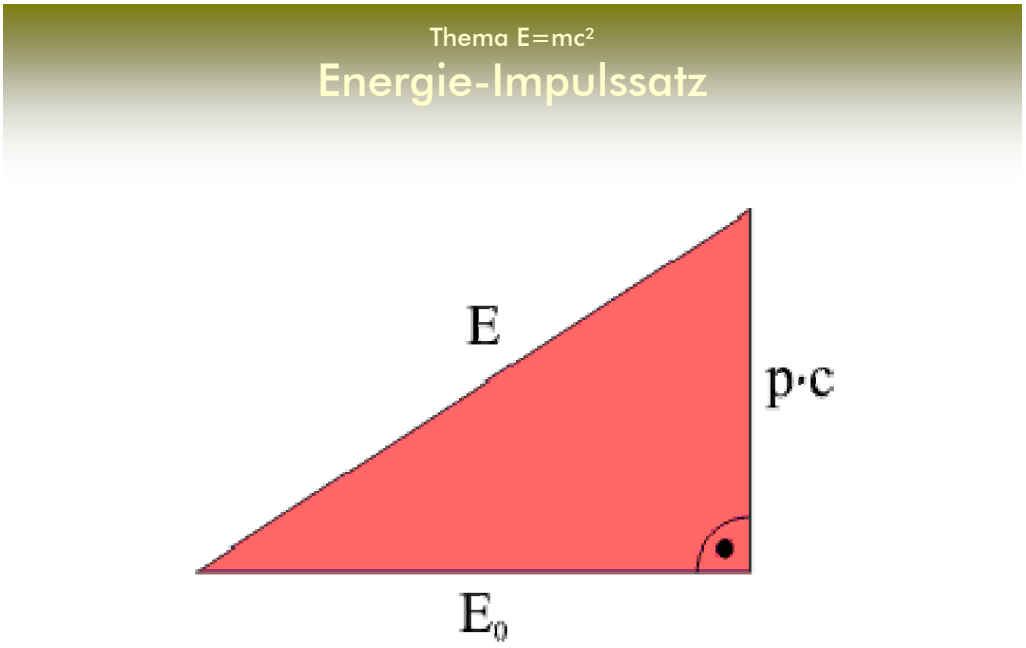
1. Wird Materie in einem Kernreaktor in Energie umgewandelt?
2. Wird Materie in einer brennenden Kerze in Energie umgewandelt?
3. Wird Materie in Ihrem Körper in Energie umgewandelt?
4. Ändert sich die Masse der Handybatterie, wenn Sie mit ihrem Smartphone telefonieren?
5. Ein Atom emittiert Lichtblitze. Was ist mit der Masse des Atoms?
6. Ein heißer Körper kühlt auf einer Waage ab. Liefert ein Ausschlag der Waage einen eindeutigen Hinweis auf die Änderung der Ruhemasse?
7. Haben eine entspannte und eine gespannte Feder eine unterschiedliche Masse?
8. Eine gestauchte Feder wird in ein Säurebad gelegt und löst sich auf. Was wird aus der gespeicherten elastischen Energie?
9. Die Ruhemasse eines Protons hat den Wert $937\,\mathrm{MeV}/c^2$. Warum wird die Masse in der Einheit Energie/c^2 angegeben?
10. Erläutern Sie, warum die Masse eines Atoms geringer als die Masse der Protonen, Neutronen und Elektronen ist?
11. Die Ruheenergie eines Elektrons beträgt 511 keV. Können Sie ohne lange nachzudenken angeben, welche Geschwindigkeit ein Elektron mit einer Gesamtenergie von 1 GeV hat?
12. Wie unterscheiden sich chemische und nukleare Reaktionen in Bezug auf die Massenerhaltung?
13. Warum setzt eine Kernreaktion deutlich mehr Energie frei im Vergleich zu einer chemischen Reaktion?
14. Verletzen Kernreaktionen den Massenerhaltungssatz?
15. Wie produzieren Sterne ihre enorme Menge an Energie?
16. Eine Supernova stößt bei der Explosion in kürzester Zeit einen Schwall an Neutrinos aus. Auf der Erde beobachtet man, das die Neutrinos zu unterschiedlichen Zeiten eintreffen. Kann man daraus ableiten, dass Neutrinos Masse haben?
17. Im Weltraum gibt nur eine geringe Reibung. Warum kann man dann nicht mit einer Rakete die Lichtgeschwindigkeit erreichen?
18. Was würde passieren, wenn ein Gummibärchen mit $0.9999c$ auf die Erde treffen würde?

19. Was vermuten Sie ist größer, die Ruheenergie einer Mücke oder die kinetische Energie eines Jumbojets bei voller Fahrt?

20. Was passiert mit Wasser in einem Topf bei Abkühlung. Wir setzen mal voraus, dass keine Moleküle entweichen oder hinzukommen? Ist das in der Praxis beobachtbar?

21. Der Kernbrennstoff in einem Reaktor verringert sich beim Betrieb um einen nachweisbaren Betrag. Gilt diese Überlegung auch für die Verbrennung von Kohle mittels Sauerstoff in einem konventionellen Kraftwerk? Wenn ja, stellt sich die Frage, ob der Prozess nachweisbar wäre?

6.3 Energie-Impulssatz



Nachdem geklärt wurde, wie sich die Ruheenergie berechnet, stellt sich die Frage, wie der Energieerhaltungssatz in bewegten Inertialsystemen formuliert werden muss. Das Dreieck oben deutet es schon an: Nach Pythagoras! Dahinter steckt keine tiefschürfende geometrische Einsicht. Sie hilft nur, sich den Relativistischen Energie-Impulssatz zu merken. Welcher Impuls ergibt sich in unterschiedlichen Bezugssystemen? In der klassischen Physik hat das Konzept des Impulses viele Anwendungen. Am wichtigsten ist unzweifelhaft der Impulserhaltungssatz. Für einen Anzahl von n Körpern mit Impulsen $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$ gilt ohne äußere Kräfte, das sich der Gesamtimpuls des Ensembles nicht ändert:

$$\sum \vec{p}_{ges} = \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_n \tag{6.33}$$

Welche Forderung müssten wir für relativistische Bedingungen machen?

- Für $v \ll c$ sollte sich $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ ergeben.
- In jedem Inertialsystem sollte der Gesamtimpuls erhalten bleiben.

Die erste Bemerkung zielt darauf, dass relativistische Bedingungen nahtlos in die klassischen Verhältnisse bei geringen Geschwindigkeiten übergehen. Die zweite Bemerkung

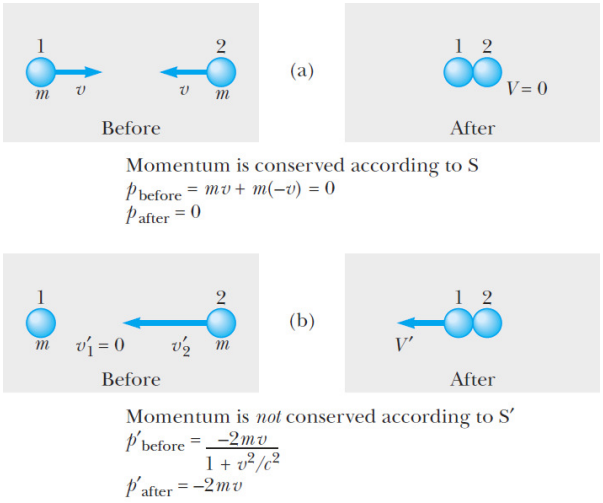


Abb. 6.22: Oben: Inelastischer Stoß zweier Teilchen aus Sicht eines ruhenden Beobachters (Bezugssystem S). Unten: Dasselbe Ereignis aus Sicht eines Beobachters in einem anderen Inertialsystem (Bezugssystem S') [**?**].

fordert Impulserhaltung in allen Inertialsystemen. Offen ist allerdings, ob man eine solche Aussage in der Relativitätstheorie aufstellen kann.

Zur Einstimmung ein Gedankenexperiment zu einem vollständig elastischen Stoß. Nehmen wir an, Bob beobachtet als ruhender Beobachter den zentralen Stoß zweier gleich schwerer Teilchen, die sich mit einer Geschwindigkeit von jeweils $\pm 0.6c$ seiner Position nähern. Wie geht das Experiment aus? Die Teilchen kleben nach dem Stoß zusammen und ruhen relativ zu Bob. Nun zu Alice. Sie befindet sich in einem anderen Bezugssystem und bewegt sich mit $0.6c$ auf Bob zu. Das heißt, für Sie ruht das eine Teilchen und das andere kommt mit $1.2c$ auf sie zu. Das stimmt natürlich nicht, wie wir inzwischen wissen. Die Lorentztransformation ergibt eine relative Geschwindigkeit von $0.88c$. Nach dem Stoß hat -ganz klassische Mechanik- der Klumpen eine Geschwindigkeit von $0.44c$. Uuups! Wenn für Bob die Klumpen steht und Alice sich mit $0.6c$ bewegt, dann muss sich der Klumpen relativ zu Alice mit einer Geschwindigkeit von $0.6c$ entfernen. Das bedeutet, dass die Welt von Galilei und der Impulserhaltungssatz unterschiedliche Ergebnisse liefert. Abb. 6.22 illustriert das Problem. Wie löste Einstein das Problem? Er tastet das Trägheitsprinzip nicht an, sondern postuliert, dass im Bezugssystem von Alice die Massen der beiden Körper unterschiedlich sind.

Relativistischer Impuls

Welche Auswirkung hat die Einsteingleichung auf andere wichtige physikalische Größen, wie beispielsweise den Impuls?

Dazu zunächst der Blick auf die klassische Physik. Die Definition des Impuls gibt den Hinweis, wie man verfahren muss.

$$p_{Newton} = m \cdot v \tag{6.34}$$

$$p_{Newton} = m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{6.35}$$

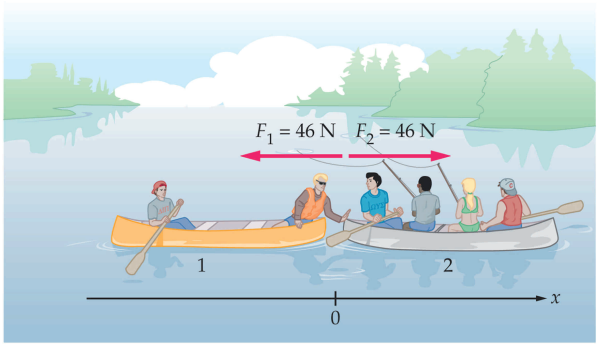


Abb. 6.23: Der Gesamtimpuls eines mechanisch abgeschlossenen Systems ist konstant ($\vec{p}_{initial} = \vec{p}_{final}$).

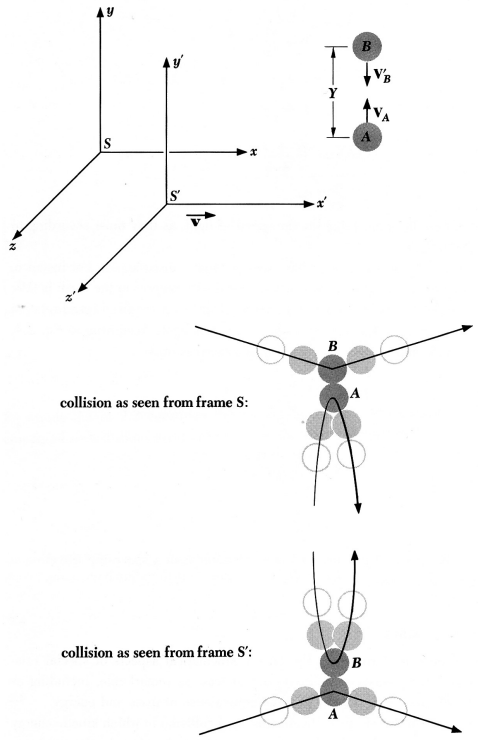


Abb. 6.24: Elastischer Stoß, beobachtet aus zwei unterschiedlichen Bezugssystemen [**?**].

Abb. 6.23 illustriert denn Impulserhaltungssatz im Rahmen der Newtonschen Physik. Wir hatten schon festgestellt, dass Relativgeschwindigkeiten anders berechnet werden. Keine Sorge, der Impulserhaltungssatz gilt auch im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie, er muss nur neu formuliert werden, um Ungereimtheiten aufgrund der Analyse in unterschiedlichen Bezugssystemen zu vermeiden.

Zur Illustration analysieren wir den elastischen Stoß zweier Teilchen A, B (Massen m_A, m_B) und betrachten den Prozess aus den beiden Bezugssystemen S und S', die sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit v zueinander bewegen, siehe Abb. 6.24. S' bewegt sich in Bezug auf S in Richtung +x. Teilchen A ist vor dem Stoßprozess aus Sicht des Bezugssystems S und Teilchen B aus von S' in Ruhe. Im selben Moment wird Teilchen A in +y und Teilchen B in -y Richtung bewegt, wobei

$$|v_A| = |v_B| \tag{6.36}$$

Das bedeutet, dass das Verhalten von A aus Sicht von in S identisch ist mit dem von B allerdings aus Sicht von S'. Beide Teilchen stoßen miteinander und durch den elastischen Stoß bewegt sich nach dem Stoß A in $-y$ und B in $+y'$ Richtung. Nehmen wir an, der y-Abstand der Teilchen sei Y, bevor sie sich in Bewegung setzen. Dann erfolgt der Zusammenstoß bei $y = Y/2$ in S und $y' = Y/2$ in S'. Wie sieht es mit den Zeiten aus, die die Teilchen brauchen, um an ihren Ursprungsort zurückzukehren?. Die Zeit T_0, die A im Bezugssystem S benötigt, ist

$$T_0 = Y/v_A \tag{6.37}$$

Dasselbe gilt für das Teilchen B, allerdings im Bezugssystem S', in das Teilchen zu Beginn ruhte. Wenn der Impulserhaltungssatz in S gilt, muss gelten

$$m_A \cdot v_A = m_B \cdot v_B \tag{6.38}$$

v_A, v_B sind aber die Geschwindigkeiten, die in S gemessen werden, das heißt aber, dass für die Beobachter in den beiden Bezugssystemen die Zeiten nicht übereinstimmen. Also schreibt man statt T_0 für die Zeitdauer des Experiments die Zeitspanne T auf:

$$v_B = Y/T \tag{6.39}$$

Aus der Sicht von S bewegt sich das Teilchen B unter einem bestimmten Winkel zum Stoßort und benötigt damit eine längere Zeit, um an den Ursprungsort zurückzukommen.

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{6.40}$$

Damit ergibt sich folgendes: Beobachter in S und S' beobachten dasselbe Ereignis. Sie bemerken aber, dass die Zeiten, die die beiden Teilchen benötigen, um an ihren Anfangsort zurückzugelangen unterschiedlich sind. Im Bezugssystem S benötigt Teilchen B scheinbar eine längere Zeit und scheint sich also langsamer zu bewegen

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{Y}{T_0} \\ v_B &= \frac{Y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{T_0} \end{aligned} \tag{6.41}$$

Wir setzen dieses Ergebnis in die Impulsbilanz ein

$$\begin{aligned} m_A \cdot v_A &= m_B \cdot v_B \\ m_A \cdot \frac{Y}{T_0} &= m_B \cdot \frac{Y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{T_0} \\ m_A &= m_B \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \tag{6.42}$$

Die Masse der Körper hängt also vom gewählten Bezugssystem ab. Die gleiche Beobachtung macht im Übrigen auch eine Person im Bezugssystem S'.

Anhand der Zeitdilatation, die wir in der Vorlesung *Gleichzeitigkeit* kennengelernt haben, ergibt sich, dass aus unserer Sicht, ein Beobachter in einem bewegten Bezugssystem einen anderen Wert für den Impuls eines Objektes bestimmt.

$$\begin{aligned} p &= m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t_{ruhend}} \\ p &= m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t_{ruhend}} \cdot \frac{\Delta t_{bewegt}}{\Delta t_{bewegt}} \\ p &= m \frac{\Delta x}{\Delta t_{bewegt}} \cdot \frac{\Delta t_{bewegt}}{\Delta t_{ruhend}} \\ p &= \gamma \cdot m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t_{bewegt}} \end{aligned} \tag{6.43}$$

Wie man erkennt, ist der Ausdruck nicht identisch mit dem Ergebnis der Galilei-Transformation.

$$p = \frac{m \cdot v_{object}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \cdot m \cdot v_{object} \tag{6.44}$$

Eine wichtige Konsequenz resultiert aus dem γ-Faktor im Ausdruck für den relativistischen Impuls. Objekte können sich nicht schneller bewegen als das Licht. Das ist also anders als in der klassischen Mechanik. Hier können wir einen Körper mit konstanter Beschleunigung auf beliebige Geschwindigkeiten bringen.

Wie lange dauert es klassisch, einen Körper bei einer Beschleunigung von $9.81\,\mathrm{m/s^2}$ auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen?
Mit dieser Definition des relativistischen Impulses ergibt sich sofort auch die relativistische Version von Newton 2

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt}(p) \\ F &= \frac{d}{dt}(m \cdot v) \\ F &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \end{aligned} \tag{6.45}$$

Die Neudefinition des Impulses hat weitreichende Konsequenzen. Es bedeutet nämlich, dass die Newtonsche Formel

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a \\ F &= m \cdot \frac{d\,v}{dt} \end{aligned} \tag{6.46}$$

relativistisch betrachtet nicht richtig ist. Tatsächlich gilt:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot v) = m\frac{d\,v}{dt} + v\frac{d\,m}{dt} \tag{6.47}$$

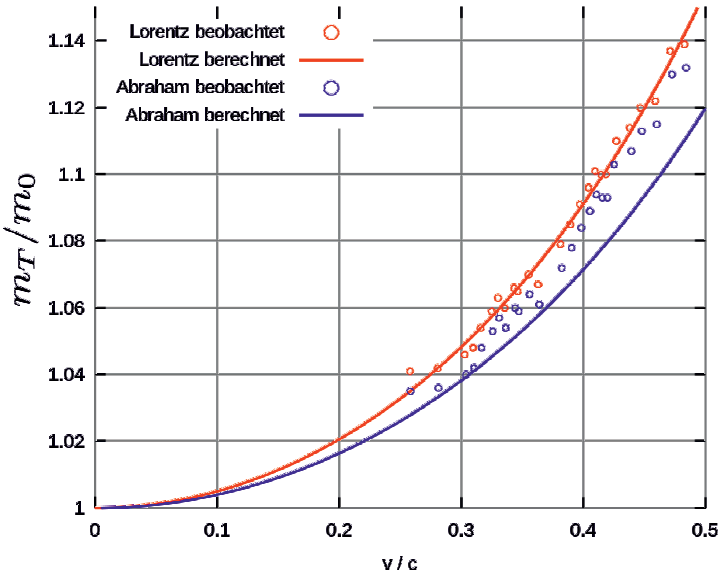


Abb. 6.25: Ablenkung von Kathodenstrahlen bei Geschwindigkeiten von 0.25 bis 0.5c. Das experimentell bestimmte Verhältnis aus bewegter Masse m und Ruhemasse m_0 ist in Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie [? ?].

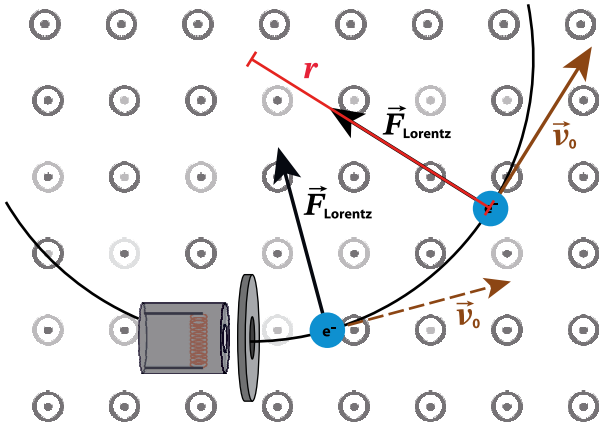


Abb. 6.26: Bewegung einer Ladung im Magnetischen Feld [?].

Kaufmann und andere haben dazu Messungen mit schnellen Elektronen im Labor durchgeführt und die Abhängigkeit des Impulses von Elektronen von ihrer Geschwindigkeit untersucht. Die Resultate konnten Einsteins Vorhersagen bestätigen [?]. Abb. 6.25 zeigt das Ergebnis der Experimente von Guye und Lavanchy [?]. Mittlerweile sind Messungen der so genannten elektromagnetischen Masse auch in Physikpraktika möglich, siehe beispielsweise Refs. [? ?].

Über die Kreisbewegung (Radius r) einer bewegten Ladung (q_e, Geschwindigkeit v_e) in einem homogenen Magnetfeld (Abb. 6.26)[29] (B_M) lässt sich aus der Lorentzkraft der Im-

[29] *Lexikon:* **Drei-Finger-Regel:** Weist der Daumen in die elektrische Stromrichtung, der Zeigefinger in Richtung der Feldlinien, so zeigt der Mittelfinger in Richtung der Kraft. Für positive Ladungen nehme man die rechte Hand, für negative Ladungen, wie das Elektron, die linke Hand.

puls (p_e) des geladenen Teilchens unter der Bedingung, dass das Teilchen sich senkrecht zum Magnetfeld bewegt, folgendermaßen bestimmen.[30]

$$\begin{aligned} F_M &= q_e \cdot B_M \cdot v_e \\ F_R &= m \cdot \frac{v^2}{r} \end{aligned} \tag{6.48}$$

Das Kräftegleichgewicht aus Lorentz- und Zentripetalkraft liefert den Radius:

$$r = \frac{m_e \cdot v_e}{q_e \cdot B_M} = \frac{p_e}{q_e \cdot B_M} \tag{6.49}$$

Kennt man die kinetische Energie des Teilchens und damit seinen Impuls p, ergibt sich klassisch ein Bahnradius r_{nrel} in einem Magnetfeld der Stärke B_M=2.0 T.

$$\begin{aligned} p_{nrel} &= \sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{kin}} \\ p_{nrel} &= \sqrt{2 \cdot (9.1 \cdot 10^{-31}\text{kg}) \cdot (10^6\,\text{MeV}) \cdot 1.6 \cdot 10^{13}\,\text{J/MeV}} \\ p_{nrel} &= 1.7 \cdot 10^{-21} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned} r_{nrel} &= \frac{p_{nrel}}{q_e \cdot B_M} \\ r_{nrel} &= \frac{1.7 \cdot 10^{-21} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 2.0 \cdot \text{T}} \\ r_{nrel} &= 0.053\,\text{m} \end{aligned} \tag{6.51}$$

Betrachtet man die Gleichung, erkennt man, dass im Experiment das Verhältnis von Ladung-zu-Masse q_e/m_e abgetastet wird:

$$\frac{q_e}{m_e} = \frac{v_e}{r \cdot B_M} \tag{6.52}$$

Die Messungen ergaben, dass das Ladung-zu-Masse Verhältnis $q_e/\,m_e$ bei höheren Geschwindigkeiten stark abnahm. Abb. 6.27 zeigt das Ergebnis von Kaufmann [**?**]. Das heißt, dass die Masse des Elektrons bei Annäherung an die Geschwindigkeit des Lichts zunimmt [**?**]. Damit ist zu erwarten, dass sich die Werte für die Energie und Impuls eines Körpers in anderen Inertialsystemen ebenfalls ändern. Wir werden diesen Aspekt auslassen, aber auch die Kraft erfährt im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie eine Neudefinition, siehe [**?**]. In der Analyse wurde das Masse-zu-Ladung Verhältnis analysiert. Damit stellt sich folgende Frage: Könnte nicht auch die Ladung einer Lorentz-Transformation unterliegen? Tatsächlich gibt es keine Hinweise darauf, dass sich der Wert der elektrischen Ladung in einem anderen Bezugssystem ändert. Der Wert der Elementarladung hängt nicht von der Geschwindigkeit des Teilchens ab [**? ?**], siehe Abb. 6.28. Damit ist die Messung ein Test der Masse des sich schnell bewegenden Objekts, obwohl im Experiment nur q_e/m_e bestimmt wurde.

[30] Man beachte, dass sowohl $\vec{a}$ als auch $\vec{v}$ und $\vec{B}_M$ Vektoren sind.

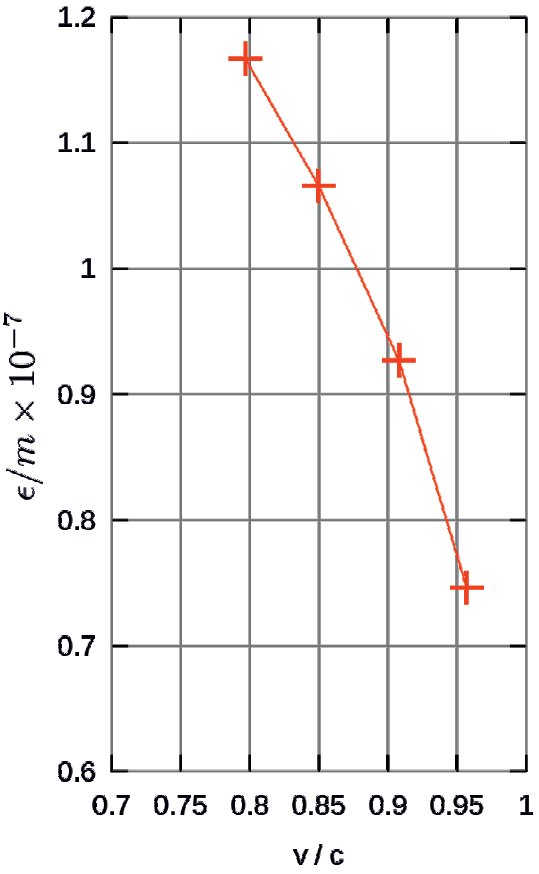


Abb. 6.27: Abnahme des Ladung-Masse-Verhältnisses mit der Geschwindigkeit [? ?].

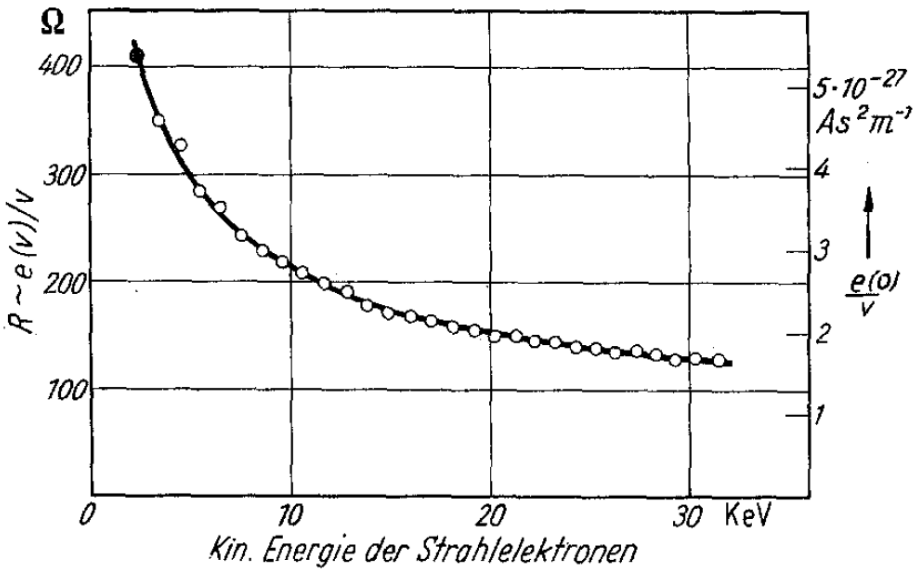


Abb. 6.28: Messung des Verhältnisse e/m bei Beschleunigungsenergien zwischen 2.5 und 30 keV. Die experimentellen Messpunkte weisen auf eine geschwindigkeitsunabhängige Ladung hin [?].

Relativistische Energie

In der klassischen Physik hat man den Ausdruck $1/2\,m\,v^2$ als Maß für die Kinetische Energie kennengelernt. Im Gegensatz dazu muss, bei einer Energiebetrachtung im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie, für ein bewegtes Bezugssystem, die Ruheenergie des Teilchens berücksichtigt werden. Wie im Fall des Impulses hätten wir auch für die Energie bestimmte Forderungen:

- Für langsame Objekte sollte der relativistische Ausdruck die klassische Betrachtung wiedergeben.

- Die Gesamtenergie eines Ensembles von Teilchen sollte in jedem Inertialsystem erhalten sein.

An dieser Stelle ist es angebracht, ein vielleicht aufkommendes Missverständnis aufzuklären: Die Masse eines Körpers verändert sich nicht mit seiner Geschwindigkeit. Ein Beobachter kann die Masse eines ruhenden Körpers -die Ruhemasse also- über die Gravitation (Newton 2) messen. Wenn sich Körper bewegen, kann man seine Masse nicht unabhängig von seinem Impuls bestimmen. Denken Sie in diesem Zusammenhang eher an die Trägheit eines Körpers. Je weiter sich die Geschwindigkeit eines Körpers der Lichtgeschwindigkeit nähert, desto größer werden die Trägheitskräfte. Dadurch steigt der Energieaufwand aufgrund von γ extrem an. In der Speziellen Relativitätstheorie formuliert man den Energieerhaltungssatz wie in der klassischen Physik, nur angepasst an die relativistischen Verhältnisse,[31] als Summe aus Ruheenergie E_0 und kinetischer Energie E_{kin}.

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_0 + E_{kin} \\ \gamma E_0 &= E_0 + E_{kin} \\ E_{kin} &= \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 \\ E_{kin} &= m_0 \cdot c^2 \cdot (\gamma - 1) \end{aligned} \tag{6.54}$$

In der klassischen Physik geht man davon aus, dass die Masse eines Körpers erhalten bleibt. Die Masse ist also eine unveränderliche Größe. Weiter erinnere man sich daran, dass in Bezug auf die potentielle und kinetische Energie es nichts ausmachte, wenn man einen konstanten Wert hinzuaddierte, da man stets Energieunterschiede betrachtet. Der Nullpunkt der Energie ist eben frei wählbar. Für geringe Geschwindigkeiten ist die relativistische Energie eines Körpers die klassische kinetische Energie PLUS einer in diesem Kontext bedeutungslosen Konstante $m_0 \cdot c^2$. Unsere oben aufgestellten Forderungen sind damit erfüllt. Man beachte, dass gilt $\gamma \geq 1$ und damit ist die Kinetische Energie, wie in

[31] Für die Herleitung aus der Beziehung zwischen Kraft F und Arbeit W:

$$W = \int_{x1}^{x_2} F \cdot dx \tag{6.53}$$

, siehe [**?**].

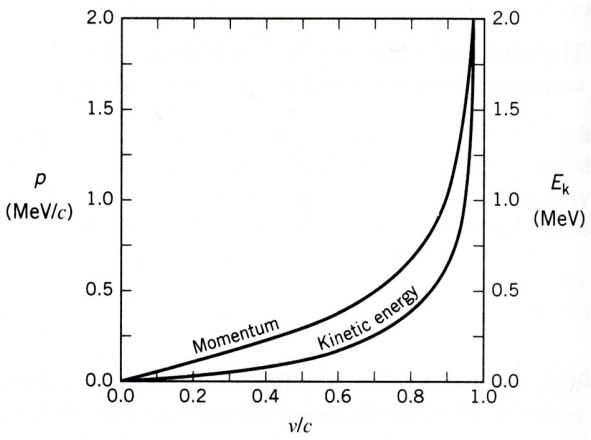


Abb. 6.29: Impuls und Kinetische Energie eines Elektrons als Funktion der Geschwindigkeit [**?**].

der Klassischen Physik, stets positiv. Man kann die relativistische Gesamtenergie E_{ges} also folgendermaßen aufschreiben:

$$E_{ges} = \gamma \cdot E_0 = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 \tag{6.55}$$

Damit ergibt sich ein Ausdruck für die Kinetische Energie in einem anderen Inertialsystem, siehe Abb. 6.29 zur Illustration, wie sich p und E_{kin} mit v/c entwickeln. Wichtig ist, dass dieser Ausdruck für JEDES Teilchen und JEDES Teilchenensemble gilt, also Elektronen, Atome, Moleküle, Fußbälle und Raketen. Für JEDES Inertialsystem ergibt sich, das die Gesamtenergie erhalten bleibt. Das ändert sich auch NICHT, wenn man in ein anderes Inertialsystem wechselt. Auf der Abbildung erkennt man, dass der Ausdruck für die kinetische Energie gegen den Wert UNENDLICH geht, wenn sich die Geschwindigkeit des Teilchens der Lichtgeschwindigkeit annähert. Die Lichtgeschwindigkeit kann der Körper also im Einklang mit den Einsteinschen Postulaten nicht erreichen. Außerdem zeigt der Verlauf, dass die Energie zur Beschleunigung des Körpers die technischen Möglichkeiten übersteigen würde. Es ist interessant, sich das Verhältnis von kinetischer Energie zur Gesamtenergie mal anzuschauen. Abb. 6.30 liefert Beispiele. Da es sich hier um Unterschiede handelt, die viele Zehnerpotenzen auseinander liegen (Fußgänger vs Paarbildung), macht es Sinn eine logarithmische Darstellung zu wählen. Ein weiterer Aspekt betrifft die Behandlung masseloser Teilchen. Die Gleichungen 6.44 und 6.55 können nicht für solche Situationen verwendet werden. Wie ermittelt man diese Werte? Zur Illustration betrachten wir einen Prozess in dem nur ein masseloses Teilchen beteiligt ist, nämlich die photoinduzierte Trennung von Wasserstoff in Proton und Elektron:

$$\gamma + \mathrm{H} \rightarrow p + e \tag{6.56}$$

In dem Prozess wird das γ-Photon vom Wasserstoffatom absorbiert und verschwindet von der Bildfläche. H, e und p sind Teilchen mit Masse und haben damit definierte Impulse und Energien. Energie- und Impulserhaltung gestatten es die entsprechenden Werte für das Photon zu bestimmen.

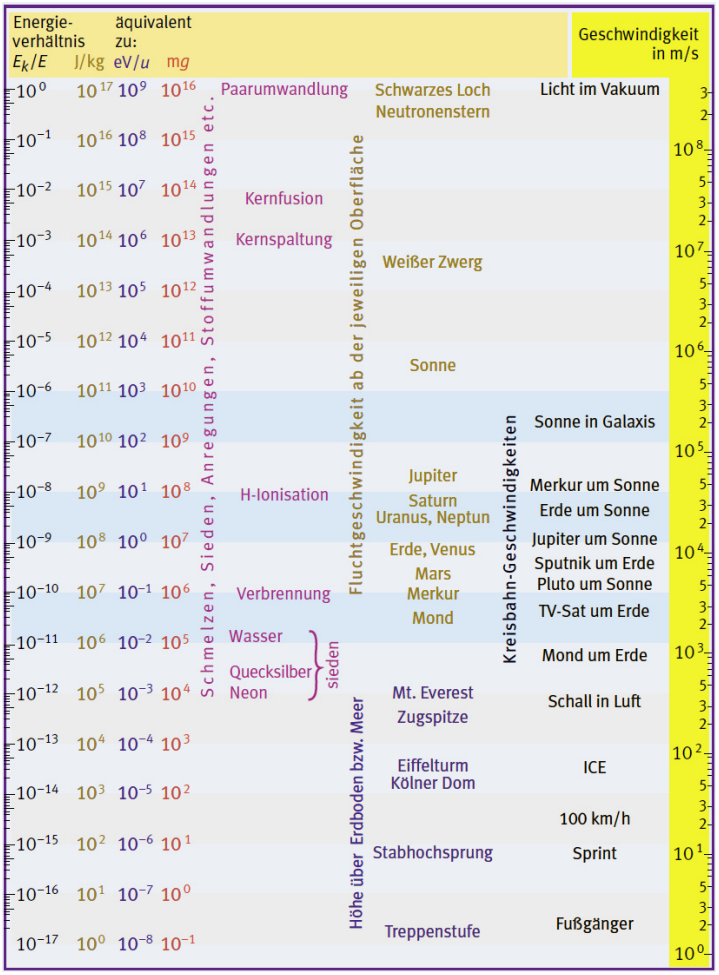


Abb. 6.30: Das Verhältnis von kinetischer Energie zu Gesamtenergie, aufgetragen auf einer logarithmischen Skala für ausgewählte physikalische Prozesse. Zur Einordnung sind typische Geschwindigkeiten angegeben [**?**].

Wie sieht die Gleichung für die Kinetische Energie bei niedrigen Geschwindigkeiten ($v \ll c$) aus? Dazu entwickeln wir den γ-Faktor in einer Potenzreihe:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} &= 1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 + \dots \end{aligned} \tag{6.57}$$

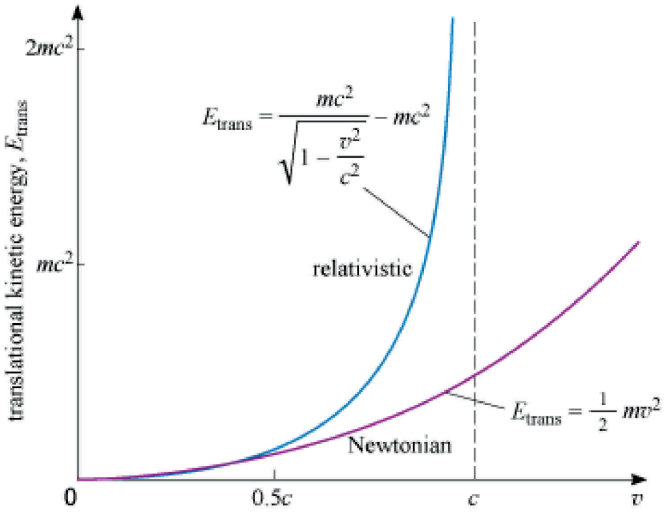


Abb. 6.31: Die kinetische Energie eines Teilchens als Funktion der Geschwindigkeit. Die Newtonsche Beziehung ist eine Näherung der relativistischen Gleichung für Geschwindigkeitswerte, die klein sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit.

Diese Reihe setzten wir in die relativistische Gleichung für die Kinetische Energie ein:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= m_0 \cdot c^2 \cdot (\gamma - 1) \\ E_{kin} &= m_0 \cdot c^2 \cdot (1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 + \ldots - 1) \\ E_{kin} &\approx m_0 \cdot c^2 \cdot (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1) \\ E_{kin} &\approx \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Die Analyse zeigt, dass sich bei geringen Geschwindigkeiten der Ausdruck für die Kinetische Energie aus der klassischen Physik ergibt. Abb. 6.31 illustriert das Verhalten. Man sollte sich folgendes merken:

- Für Geschwindigkeiten geringer als $0.1c$ ist es nicht notwendig, relativistisch zu rechnen. Beispielsweise beträgt die Bahngeschwindigkeit des Elektrons im Wasserstoffatom $0.01c$. Wie man feststellen wird, ist die nicht-relativistische Betrachtung vollkommen ausreichend (Kapitel *Wellenfunktion*) und man kommt zu einer guten Übereinstimmung von Theorie und Experiment.

- Für Geschwindigkeiten größer $0.1c$ sollte man relativistisch rechnen. Ansonsten erhält man nur angenäherte Werte, die immer mehr abweichen, je höher die Geschwindigkeit wird. Man kann den Wechsel in der Beschreibung auch mit der Ruheenergie abschätzen. Für $0.1c$ beträgt die Kinetische Energie in etwa $0.01\, m_0 \cdot c^2$

- Masselose Teilchen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit und man muss relativistisch rechnen. In der Lichtemission aus Atomen kann man das Atom nicht-

relativistisch behandeln, das ausgesendete Photon unterliegt in ihrer Beschreibung allerdings der Relativitätstheorie.

- Ist ein Teilchen in Ruhe, beinhaltet es trotzdem noch Energie, die Ruheenergie $E_0{=}m_0 \cdot c^2$. Aufgrund des Wertes von c kann diese Energie enorm hoch sein, zum Beispiel $9 \cdot 10^{19}\,\mathrm{J}$ für einen Apfel mit Masse 100 g.

Anwendungen[4LP]

Ein Beispiel aus der Kernphysik

Im einem radioaktiven Zerfall wandelt sich das Element ^{14}C ($6p$, $8n$) in ^{14}N ($7p$, $7n$) um.

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow ^{14}_{7}\mathrm{N} + e^- + \overline{\nu} \tag{6.59}$$

Dabei tritt ein Massendefekt Δm auf. Näheres werden wir im Rahmen der Vorlesung *Kerne* beleuchten. Die Massen der C-14 und N-14 Kerne, sowie ihres Massendefekts ergeben sich mit

$$\begin{aligned} m_{C-14} &= 13.999950\,\mathrm{amu} \\ m_{N-14} &= 13.999234\,\mathrm{amu} \\ \Delta m &= 0.000716\,\mathrm{amu} \end{aligned}$$

Aus dem Massendefekt Δm kann man den Grad der Energiefreisetzung berechnen.

$$\begin{aligned} \Delta E &= (\Delta m) \cdot c^2 \\ \Delta E &= (0.000716\,\mathrm{amu}) \cdot \left(\frac{1.66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{1.0 \cdot \mathrm{amu}}\right) \cdot \left(3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}\right)^2 \\ \Delta E &= 1.07 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} \\ \Delta E &= \frac{1.07 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}}{1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}} \\ \Delta E &= 668\,\mathrm{keV} \end{aligned} \tag{6.60}$$

Wir setzen diesen Wert in Relation zur Ruheenergie des Elektrons ($m_e \cdot c^2$) und geben das Ergebnis ebenfalls in der atomaren Einheit eV an.

$$\begin{aligned} E_0^{electron} &= m_e \cdot c^2 \\ E_0^{electron} &= (9.109 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}) \cdot (3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2 \\ E_0^{electron} &= 8.187 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} \\ E_0^{electron} &= 511 \cdot 10^3\,\mathrm{eV} \\ E_0^{electron} &= 511\,\mathrm{keV} \end{aligned} \tag{6.61}$$

Die im Zerfall freigesetzte Energie ΔE ist demnach vergleichbar zur Ruheenergie des Elektrons $m_e \cdot c^2$. Dieser so genannte β-Zerfall wird uns noch eingehender im Rahmen des

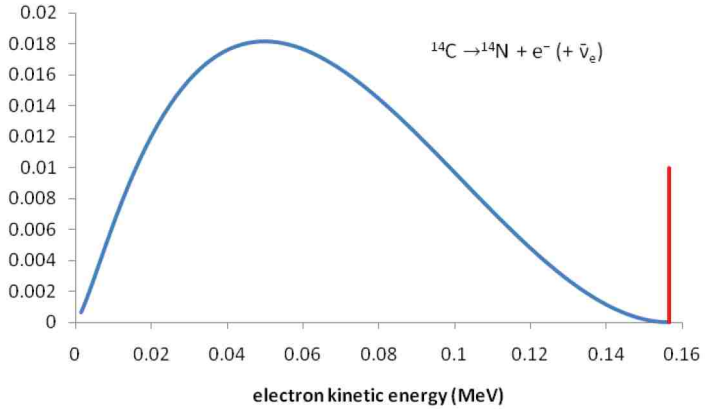


Abb. 6.32: Energiespektrum der Elektronen beim β-Zerfall von C-14. Die breite Energieverteilung der Elektronen schien zunächst den Impulserhaltungssatz zu verletzen und konnte erst durch den Betrag eines kaum detektierbaren Teichens, des Neutrinos aufgeklärt werden.

Kapitels *Ionisierende Strahlung* beschäftigen. Tatsächlich war das Energiespektrum der Elektronen zunächst ein großes Rätsel der Physik, da scheinbar der Impulserhaltungssatz verletzt schien, siehe Abb. 6.32. An dieser Stelle nehmen wir mal an, dass das Elektron die gesamte überschüssige Energie aus dem Zerfall in Form kinetischer Energie erhält. Die Frage ist: Welche Geschwindigkeit ergibt sich für das Elektron und ist diese relativistisch? Wir nutzen den Ausdruck für die relativistische Energie, um die Geschwindigkeit anhand von γ zu extrahieren.

$$
\begin{aligned}
E_{kin} &= m_e \cdot c^2 \cdot (\gamma - 1) \\
\gamma &= 1 + \frac{E_{kin}}{m_e \cdot c^2} \\
\gamma &= 1 + \frac{668\,\mathrm{keV}}{511\,\mathrm{keV}} \\
\gamma &= 2.31 \qquad (6.62) \\
\gamma^2 &= \frac{1}{1-\beta^2} \\
\frac{1}{\gamma^2} &= 1 - \beta^2 \\
\beta &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.9 \qquad (6.63)
\end{aligned}
$$

Das Elektron erreicht damit eine maximale Geschwindigkeit von 90% der Lichtgeschwindigkeit. Es lohnt sich also, das Ergebnis einer klassischen Rechnung zu betrachten, die

zeigt, dass in diesem Fall die Lichtgeschwindigkeit deutlich überschritten wäre.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2 \\ v_e &= \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m_e}} \\ v_e &= 4.24 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} \\ v_e/c &= 1.41 \end{aligned} \tag{6.64}$$

Energie-Impuls-Beziehung

In Experimenten wird in der Regel der Impuls und die Energie von Teilchen und nicht seine Geschwindigkeit bestimmt. Es ist deshalb sinnvoll, eine Beziehung zu finden, die relativistischen Impuls und Gesamtenergie beinhaltet. In der klassischen Physik verbindet der Ausdruck

$$E = \frac{p^2}{2\,m} \tag{6.65}$$

Energie und Impuls. Ein ähnlicher Ausdruck, wie für die kinetische Energie, ergibt sich auch in der Speziellen Relativitätstheorie. Zunächst quadrieren wir p:

$$p = \gamma \cdot m_0 \cdot v \tag{6.66}$$

$$p^2 = \gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot v^2 \tag{6.67}$$

$$p^2 \cdot c^2 = \gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot v^2 \cdot c^2 \tag{6.68}$$

$$p^2 \cdot c^2 = \gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot c^4 \cdot \frac{v^2}{c^2} \tag{6.69}$$

Kurze Zwischenrechnung,

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \tag{6.70}$$

$$1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \tag{6.71}$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \tag{6.72}$$

$$\tag{6.73}$$

um $\beta{=}v/c$ auf der Grundlage der Definition von γ zu berechnen.

$$p^2 \cdot c^2 = \gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot c^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \tag{6.74}$$

$$p^2 \cdot c^2 = \gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot c^4 - m_0^2 \cdot c^4 \tag{6.75}$$

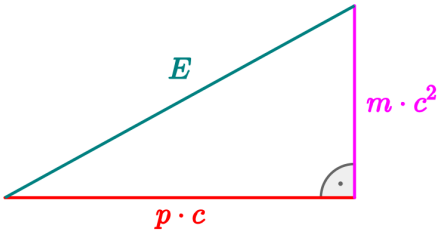


Abb. 6.33: Das Dreieck veranschaulicht den Zusammenhang zwischen Gesamtenergie, Ruheenergie, Kinetischer Energie und Impuls

Bei dem Term $\gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot c^4$ handelt es sich um das Quadrat der Gesamtenergie E_{ges} und damit ergibt sich der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls.

$$E_{ges}^2 = (p \cdot c)^2 + (m_0 \cdot c^2)^2 \tag{6.76}$$

Gl. 6.76 ist DIE Gleichung der Speziellen Relativitätstheorie. Sie ist für alle Teilchen universell gültig und man kennt keine Ausnahmen! Für ein Teilchen in Ruhe (p=0) findet man $m_0 \cdot c^2$. Die Gesamtenergie entspricht der Ruheenergie. Für masselose Teilchen ist m=0 und man erhält E_{ges}=$p \cdot c$. Diese Gleichung gilt für Photonen. Man wird feststellen, dass man hier und in den meisten Anwendungen nicht den Impuls p, sondern $p \cdot c$ verwendet. Der Ausdruck $p \cdot c$ hat die Dimension Energie und wird deshalb in der Einheit eV angegeben und der Impuls hat damit die Einheit eV/c. Als Eselsbrücke kann den relativistischen Energie-Impulssatz auch kurz anhand des Satzes von Pythagoras zusammenfassen, wie Abb. 6.33 zeigt.

Zur Vertiefung wählen wir einen alternativen Zugang zum Energie-Impulssatzes auf der Grundlage des Raum-Zeitintervalls (s). Im Kapitel *Gleichzeitigkeit* wurde gezeigt, dass das Raumzeitintervall s im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie eine invariante Größe darstellt. Ein in einem beliebigen Bezugssystem bestimmter Wert für s wird in allen anderen Bezugssystemen mit genau dem gleichen Wert bestimmt. Die Multiplikation des Raum-Zeitintervalls mit ($m_0/\,\Delta\tau$) ($\Delta\tau$: Eigenzeit-Intervall) liefert einen Ausdruck, der auch den Impuls enthält, da

$$p = m_0 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \tau} \tag{6.77}$$

Unter Berücksichtigung der Zeitdilatation kann man zwischen unterschiedlichen Bezugssystemen wechseln und man erhält nach Multiplikation mit c schließlich den Ausdruck

$$\left(\gamma \cdot m_0 \cdot c^2\right)^2 - (p \cdot c)^2 = INVARIANT \tag{6.78}$$

Wie schon erwähnt, hat die invariante Größe ein und denselben Wert in allen Inertialsystemen. Es ist einfach, den Wert dieser Größe zu berechnen. Dafür betrachten wir ein ruhendes Teilchen in unserem Ruhesystem. Das bedeutet, dass p=0 und γ=1 und finden

$$INVARIANT = \left(m_0 \cdot c^2\right)^2 \tag{6.79}$$

Das bedeutet, dass die Größe m_0c^2 eine invariante Größe in allen Bezugssystemen ist. Also gilt

$$c^2 \cdot (\Delta t_A)^2 - (\Delta x_A)^2 = c^2 \cdot (\Delta t_B)^2 - (\Delta x_B)^2 \tag{6.80}$$

Experimentatoren in unterschiedlichen Inertialsystemen (A, B) stellen bei einem Experiment an einem Teilchen folgendes fest

$$\left(\gamma^A \cdot m_0 \cdot c^2\right)^2 - (p^A \cdot c)^2 = \left(\gamma^B \cdot m_0 \cdot c^2\right)^2 - (p^B \cdot c)^2 \tag{6.81}$$

Es ist klar, dass aufgrund der relativen Bewegung zueinander, jeder Forscher einen anderen Wert für den Impuls bestimmt, wobei natürlich jede Messung den Impulserhaltungssatz erfüllt. Es scheint also so, dass der Term $(\gamma \cdot m_0 \cdot c^2)^2$ sich so ändert, dass die Summe aus diesem Ausdruck und $(p \cdot c)^2$ konstant bleibt. Betrachtet man den Ausdruck $(\gamma \cdot m_0 \cdot c^2)^2$ stellt man fest, dass γ dimensionslos und c die Einheit [m/ s], also Geschwindigkeit, hat. Die Einheit von $(\gamma \cdot m_0 \cdot c^2)^2$ ist also, wie bei der kinetischen Energie $(1/\,2\, m_0 \cdot v^2)$, Joule, also Energie.

Eine Reihenentwicklung für geringe Geschwindigkeiten ($v << c$) liefert

$$\gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c2}} \approx \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 \tag{6.82}$$

Der zweite Term entspricht der Newtonschen kinetischen Energie, also Bewegung. Der erste Ausdruck besagt, dass es einen Energieterm gibt, der mit der Eigenschaft Masse zusammenhängt. Das ist neu. Damit lässt sich eine Gleichung für die relativistische Gesamtenergie E_{ges} erstellen

$$E_{ges} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2 = E_0 + E_{kin} \tag{6.83}$$

Zur Einordnung folgendes Beispiel: Bei einem relativistischen Elektronen (c=.999c) ist die kinetische Energie E_{kin}=1.75i̇10^{12} J deutlich größer als die Ruheenergie (E_0=8.2 $\cdot$ 10^{-14} J). Der Energieerhaltungssatz lässt sich relativistisch so formulieren:

Die Energie eines abgeschlossenen Systems von Teilchen (E_i=$\sum E_i$) bleibt erhalten, wobei E_i=$\gamma \cdot m_i \cdot c^2$.

Mit diesen Erkenntnissen lässt sich der relativistische Energie-Impulssatz formulieren

$$E_{ges}^2 - (p \cdot c)^2 = E_0^2 \tag{6.84}$$

wobei die Größe $(m_0 \cdot c^2)$, wie schon mehrfach erwähnt, invariant in allen Bezugssystemen ist. Die kinetische Energie ergibt sich aus der relativen Geschwindigkeit des Körpers in Bezug auf den Beobachter. Weiter lässt sich aus der Beziehung für den relativistischen Impuls ($p = \gamma\, m_0 v$) ableiten

$$p \cdot c = (\gamma \cdot m_0 \cdot v) \cdot c = \frac{v}{c}\left(\gamma \cdot m_0 \cdot c^2\right) \tag{6.85}$$

Da $(\gamma \cdot m_0 \cdot c^2)$ die Gesamtenergie ist und $(\beta = v/c)$, ergibt sich

$$p \cdot c = \beta \cdot E_{ges} \tag{6.86}$$

Magnetfelder analysieren den Impuls eines geladenen Körpers. Wir betrachten deshalb die Bewegung eines Teilchens in einem homogenen Magnetfeld. Die Analyse im Rahmen der klassischen Physik hatten wir schon durchgeführt und für 10 MeV Elektronen und einem Magnetfeld von 2 T einen Bahnradius von 0.53 m berechnet.

Anhand der Energie-Impulsbeziehung lässt sich der relativistische Impuls berechnen. Tatsächlich ist die Geschwindigkeit des 10 MeV Elektrons relativistisch.[32] Daraus ergibt sich, dass vorher gefundene Ergebnis falsch berechnet wurde.

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{c} \cdot \sqrt{(E_{kin} + m_0 \cdot c^2)^2 - m_0^2 \cdot c^4} \\ p &= \frac{1}{2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} \cdot \sqrt{(10 + 0.511)^2 - (0.511)^2} \cdot \mathrm{MeV} \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-13} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{MeV}}\right) \\ p &= 5.6 \cdot 10^{-21} \cdot \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{6.87}$$

Aus dem so berechneten Relativistischen Impuls berechnet man den Bahnradius:

$$\begin{aligned} r &= \frac{m_0 \cdot v}{q_e \cdot B_M} \\ r &= \frac{p}{q_e \cdot B_M} \\ r &= \frac{5.6 \cdot 10^{-21} \cdot \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}}}{(1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (2\,\mathrm{T})} \\ r &= 1.8\,\mathrm{cm} \end{aligned} \tag{6.88}$$

Man erkennt, dass, im Vergleich zur klassischen Rechnung, der Bahnradius stark ansteigt. Da sich der Wert der Elementarladung NICHT ändert, ist dieses Experiment zum Verhältnis (q/m) also tatsächlich eine Messung des relativistischen Massenzuwachses bei hohen Geschwindigkeiten. Es lohnt sich, an dieser Stelle die gefundenen Erkenntnisse zusammenfassen:

- Relativistische Gesamtenergie

$$E_{ges} = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m_0^2 \cdot c^4} \tag{6.89}$$

- Relativistischer Impuls

$$p = \gamma \cdot m_0 \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.90}$$

[32] Die kinetische Energie des Elektrons übersteigt die Ruheenergie des Elektrons deutlich.

- Relativistische Kinetische Energie

$$\begin{aligned} E_{kin} &= m_0 \cdot c^2 \cdot (\gamma - 1) \\ E_{kin} &= m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \end{aligned} \tag{6.91}$$

- Lorentzfaktor γ

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 \cdot c^2}} \\ \gamma &= 1 + \frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} \end{aligned} \tag{6.92}$$

- β-Parameter

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + E_{kin}/m_0 \cdot c^2)^2}} \tag{6.93}$$

Damit lässt sich beispielsweise v/c aus dem Verhältnis von kinetischer Energie zu Ruhemasse berechnen.

Betrachten wir abschließend nochmal das Beispiel des zu Beginn des Kapitels diskutierten inelastischen Stoßes zweier Teilchen (Vor dem Stoß: Zwei Massen m; Nach dem Stoß´: Eine Masse M, Geschwindigkeit u), diesmal in relativistischer Sichtweise.

$$E_{initial} = E_{final} \tag{6.94}$$

$$\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = M \cdot c^2 \tag{6.95}$$

$$\frac{2\,m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = M \tag{6.96}$$

Da $\sqrt{1 - u^2/c^2} < 1$ ist $M > 2\,m$. Die Massendifferenz ΔM ergibt sich aus der Kinetischen Energie:

$$\Delta M = \frac{2\,E_{kin}}{c^2} = \frac{2}{c} \left(\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m \cdot c^2 \right) \tag{6.97}$$

Das ist ein Beispiel für die Umwandlung von Energie in Masse. In relativistisch betrachteten inelastischen Stößen kommt es nicht zu einem Verlust an Kinetischer Energie, sondern zu einem Zuwachs an Masse des Objekts. In klassisch betrachteten inelastischen Stößen bleibt der Impuls erhalten, die Energie aber nicht. In relativistisch analysierten

Stößen ist sowohl die Energie, als auch der Impuls erhalten!

Ein Beispiel für die Erhaltung von Masse UND Energie sind Kernspaltungsprozesse (Kapitel *Kernmodelle*), wie

$$^{239}_{94}\mathrm{Pu} +^{1}_{0} n \rightarrow^{144}_{56} \mathrm{Ba} +^{94}_{38} \mathrm{Sr} +^{2}_{0} n \tag{6.98}$$

bei dem ein schwerer Atomkern, hier stimuliert durch Neutronenbeschuss, in energiereiche kleinere Kerne zerfällt ($M \rightarrow M_1 + M_2 + M_3$; u_i, i=1,2,3).

$$M \cdot c^2 = \frac{m_1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + \frac{m_1}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}} + \frac{m_1}{\sqrt{1 - u_3^2/c^2}} \tag{6.99}$$

Da die alle Wurzeln kleiner als EINS sind, gilt:

$$M > M_1 + M_2 + M_3 \tag{6.100}$$

Die Massendifferenz taucht in der Reaktion als Kinetische Energie der Fragmente wieder auf. Man nennt den Term auch den Q-Faktor:

$$Q = (M - (M_1 + M_2 + M_3)) \cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2 \tag{6.101}$$

Newtonsche Geister

Jetzt eine Überlegung zur Rolle MASSELOSER Teilchen. Wie gezeigt, kann KEIN massebehafteter Körper die Lichtgeschwindigkeit erreichen. Nach der Newtonschen Mechanik weisen solche Objekte KEINEN Impuls auf. Auch der Werte für die kinetische Energie ist NULL. Masselose Teilchen können auch KEINE Kräfte auf andere Teilchen ausüben.

Der relativistische Energie-Impulssatz wird nun für masselose Teilchen ausgewertet. Als Ruhemasse setzen wir den Wert NULL ein.

$$\begin{aligned} E_{ges} &= p^2 \cdot c^2 + m_0 \cdot c^2 \\ E_{ges} &= p^2 \cdot c^2 \end{aligned} \tag{6.102}$$

Für die Gesamtenergie gilt weiterhin:

$$E_{ges} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 \tag{6.103}$$

Auf der anderen Seite kennen wir den Ausdruck für den Relativistischen Impuls:

$$p = \gamma \cdot m_0 \cdot v \tag{6.104}$$

$$p \cdot c = \gamma \cdot m_0 \cdot v \cdot c \tag{6.105}$$

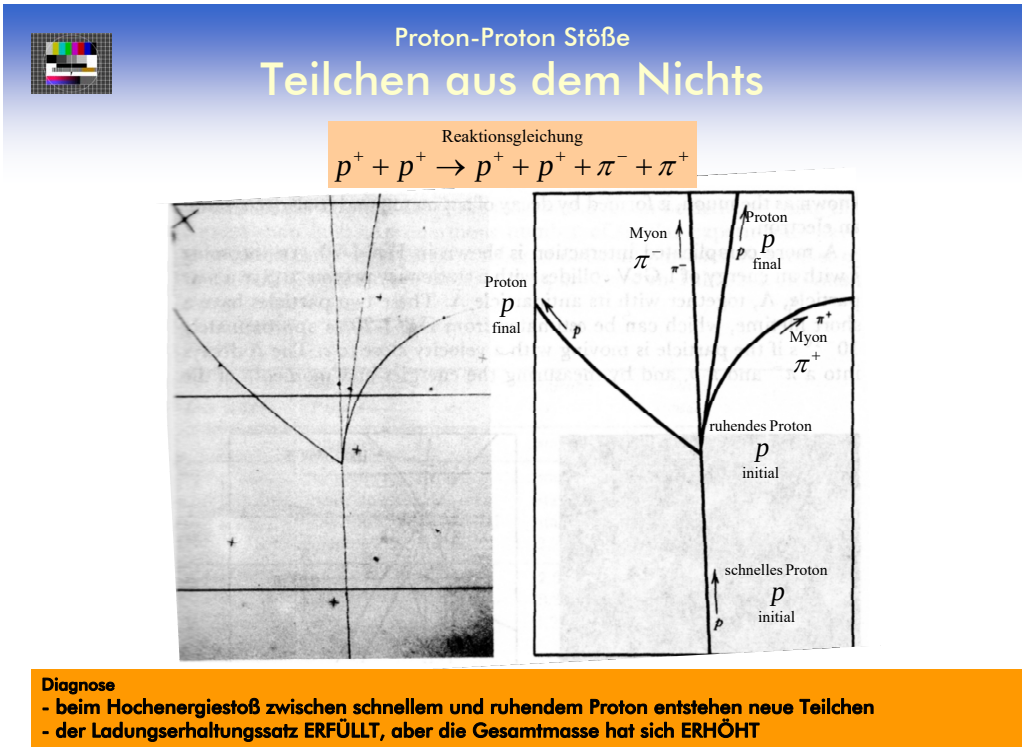
Vergleicht man die Gleichungen stellt man folgendes fest:

$$\gamma \cdot m_0 \cdot v \cdot c = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 \tag{6.106}$$

Die Analyse liefert eine überraschende Bedingung für solche Objekte: $v{=}c$.

Masselose Teilchen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit.

Dazu zählen insbesondere Photonen, aber auch Gluonen. In der *Quantenfeldtheorie* wird gezeigt, dass Photonen die Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung sind. Da das Photon eine Ruhemasse von NULL hat, besitzt die elektromagnetische Wechselwirkung eine unendliche Reichweite.



Teilchen, scheinbar aus dem Nichts

Die Abb. 6.34 stellt einen Prozess dar, der im ganz normalen Alltag wohl nicht stattfinden wird. Zwei Golfbälle prallen zusammen und in der Wechselwirkung entstehen zusätzlich zwei Medizinbälle. Die Frage stellt sich: Kann man folgende Reaktion in der Mikrophysik auslösen

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- + p^+ + p^- \tag{6.107}$$

Im Zusammenstoß von zwei Elektronen entstehen ZWEI deutliche schwerere Protonen. Wie kann das sein? Nun, nach der Einsteinschen Energiegleichung spricht allerdings nichts dagegen. Wichtig wäre, dass die Erhaltungssätze erfüllt sind.

Beispiele aus der Elementarteilchenphysik

Solche Prozesse, die in der makroskopischen Welt unvorstellbar erscheinen, sind in der Hochenergiephysik normal und eröffnen der Physik ungeahnte Möglichkeiten. Oben dargestellt ist das Beispiel der Bildung eine Myon-Antimyon Paares im Stoß zwischen zwei Protonen. Ein anderes Beispiel ist der Nachweis des Antiprotons ($\overline{p}$), das im Jahr 1955



Abb. 6.34: Stoßprozesse erzeugen Materie?

beim Stoß von 6.2 GeV Protonen mit Kupferkernen erstmals erzeugt wurde [**?**].[33]

$$p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p} \tag{6.108}$$
$$p + n \rightarrow p + n + p + \overline{p} \tag{6.109}$$

Das Antiproton ist negativ geladen und hat die gleiche Masse wie das Proton. Die Schwierigkeit in dem Experiment war, dass im Stoßprozess auch jede Menge Myonen erzeugt wurden:

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- \tag{6.110}$$
$$p + n \rightarrow p + n + \pi^+ + \pi^- \tag{6.111}$$

Auf EIN Antiproton kamen 62 000 negative Pionen! Beide haben gleichen Impuls, nämlich 1.19 GeV/c. Nur aufgrund ihrer Masse ($m_{\overline{p}}$=940 MeV/c^2; m_{π^-}=140 MeV/c^2) konnte man die beiden Produkte unterscheiden. Zwei Methoden wurden verwendet, um die Signale der Teilchen aufzulösen. Zu Einen sind die Flugzeiten zum Detektor, d=12 m entfernt, aufgrund des Massenunterschieds nicht identisch.

- Für das Pion (Ruhemasse 0.14 GeV/c^2) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{v_{\pi^-}}{c} &= \frac{p \cdot c}{E} \\ \frac{v_{\pi^-}}{c} &= \frac{1.19\,\text{GeV}}{\sqrt{(1.19\,\text{GeV})^2 + (0.14\,\text{GeV})}} \\ \frac{v_{\pi^-}}{c} &= 0.99 \end{aligned} \tag{6.112}$$

[33] The Nobel Prize in Physics 1959 was awarded jointly to Emilio Gino Segre and Owen Chamberlain *for their discovery of the antiproton*

Das ergibt eine Flugzeit von

$$t_{\pi^-} = \frac{d}{0.99c} = 39 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s} = 39\,\mathrm{ns} \tag{6.113}$$

- Für das Antiproton (Ruhemasse $0.94\,\mathrm{GeV}/c^2$) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{v_{\overline{p}}}{c} &= \frac{p \cdot c}{E} \\ \frac{v_{\overline{p}}}{c} &= \frac{1.19\,\mathrm{GeV}}{\sqrt{(1.19\,\mathrm{GeV})^2 + (0.94\,\mathrm{GeV})}} \\ \frac{v_{\overline{p}}}{c} &= 0.78 \end{aligned} \tag{6.114}$$

Das ergibt eine Flugzeit von

$$t_{\overline{p}} = \frac{d}{0.78c} = 39 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s} = 51\,\mathrm{ns} \tag{6.115}$$

Weiter wurden zwei Tscherenkow-Zähler (Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*) verwendet, um das Signal der Antiprotonen von denen der Myonen zu unterscheiden. Einer war empfindlich auf $\beta > 0.79$. Der zweite differentiell arbeitende Detektor war so konstruiert, dass er nur bei Signalen von Teilchen im Bereich $0.75 < \beta < 0.79$ ansprach. Denkt man das zu Ende, könnte es doch möglich sein, gezielt Teilchen zu schaffen, die man sonst kaum beobachten kann.

An dieser Stelle wollen wir minimale Energie bestimmen, die notwendig ist, um neue Teilchen in einem Stoßprozess zu erzeugen.[34] Da es sich um eine endotherme Reaktion handelt, benötigt man zusätzlich Energie. Diese muss durch die Kinetische Energie des stoßenden Teilchens geliefert werden. Da die Energien dieser Teilchen recht hoch sind (TeV), kommt man nicht darum herum, relativistisch zu rechnen. Wir betrachten den Prozess

$$m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4 + m_5 \tag{6.116}$$

Abb. 6.35 (a) zeigt, wie der Stoßprozess im Laborsystem (*lab*)abläuft. Bei den angegebenen Energien (E_1, E_2, ...) handelt es sich um die Gesamtenergien. Ebenfalls angegeben sind die dazu gehörigen Impulsvektoren. Die Stoßenergie (E_1+E_2) kann nicht vollständig in Masse umgewandelt werden, da man Impulserhaltung sicherstellen muss. Die für die Reaktion benötigte Energie ist im Gegensatz zu einer exothermen Reaktion nicht gleich, sondern größer als der Massendefekt.Wie kann man die Energieschwelle berechnen, ohne den Impulserhaltungssatz zu verletzen? Die Antwort lautet: Man wählt ein anderes Bezugssystem, und zwar eines, bei dem der Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß NULL ist. Das gesuchte Inertialsystem ist das Schwerpunktsystem (*CM*), siehe Abb. 6.35 (b).

[34] The Nobel Prize in Physics 1951 was awarded jointly to Sir John Douglas Cockcroft and Ernest Thomas Sinton Walton *for their pioneer work on the transmutation of atomic nuclei by artificially accelerated atomic particles*

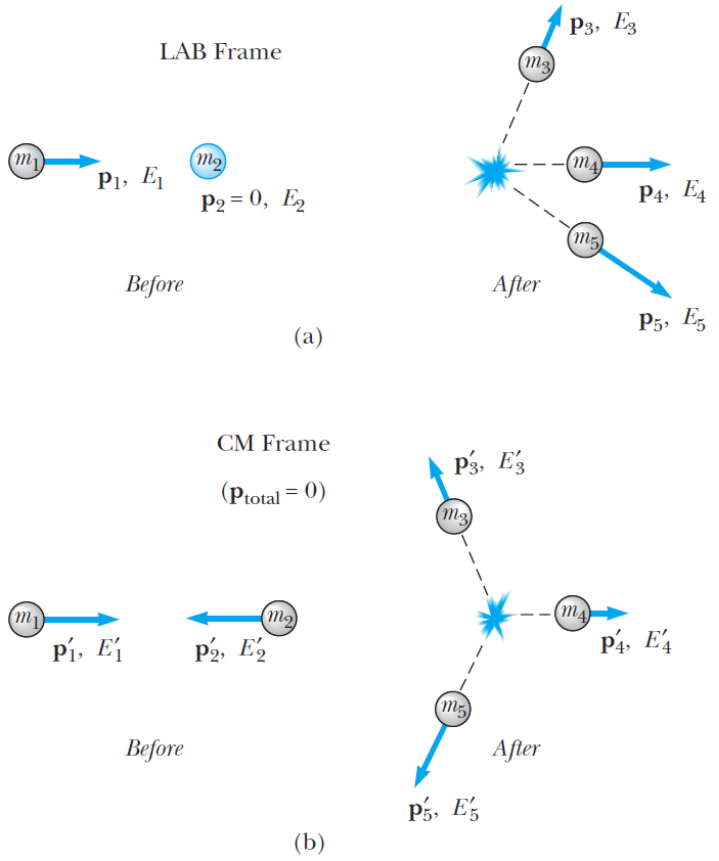


Abb. 6.35: (a) Die Reaktion $m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4 + m_5$ im Bezugssystem Labor. Das Teilchen m_2 ist anfänglich in Ruhe. Die relativistischen Gesamtenergien ergeben sich aus Kinetischer Energie und Ruheenergie. (b) Dieselbe Reaktion aus Sicht des Inertialsystems Massenschwerpunkt. In dieser Betrachtung ist Gesamtimpuls stets NULL, was für die Rechnung vorteilhaft ist [**?**].

In diesem System berechnet man das Ergebnis und transformiert dann ins Laborsystem zurück. Die minimale Stoßenergie ergibt sich in diesem Bezugssystem, wenn die drei erzeugten Teilchen mit NULL Impuls erzeugt werden. Die Anforderungen aus dem Impulserhaltungssatz sind erfüllt. Zur Umrechnung ins Laborsystem erinnere man sich daran, dass der Ausdruck $E_{ges}^2 - p^2c^2$ eine invariante Größe ist und in JEDEM Inertialsystem ein und denselben Wert hat. Vor dem Stoß gilt:

$$(E_{CM}^i)^2 - (p_{CM}^i)^2 \cdot c^2 = (E_{lab}^i)^2 - (p_{lab}^i)^2 \cdot c^2 \tag{6.117}$$

Der Wert von p_{CM}^i ist NULL. Im Laborsystem bewegt sich nur Teilchen 1 (m_1, p_1), während Teilchen 2 (m_2, p_2=0) ruht, also

$$E_{lab}^i = E_1 + m_2 \cdot c^2 \tag{6.118}$$
$$p_{lab}^i = p_1 \tag{6.119}$$

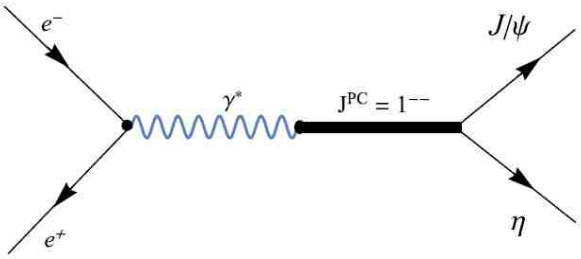


Abb. 6.36: Feynman-Diagramm der Erzeugung des Psions [**?**].

Daraus folgt, unter Ausnutzung von $E_1^2 = p_1^2c^2 + m_1^2c^4$:

$$\begin{aligned}(E_{CM}^i)^2 &= (E_1 + m_2 \cdot c^2)^2 - p_1^2 \cdot c^2 \\ (E_{CM}^i)^2 &= 2\,E_1 \cdot m_2 \cdot c^2 + (m_1^2 + m_2^2) \cdot c^4 \end{aligned} \tag{6.120}$$

In ähnlicher Weise findet man, da die Teilchen in Ruhe sind und Energieerhaltung gilt:

$$E_{CM}^f = E_{CM}^i = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot c^2 \tag{6.121}$$

Die Energieschwelle E_{th} berechnet sich aus $E_1 = E_{kin}^{th} + m_1 \cdot c^2$. Damit kann man E_{kin}^{th} als Funktion der einzelnen Teilchenmassen ermitteln:

$$E_{kin}^{th} = \frac{(m_3 + m_4 + m_5)^2 \cdot c^2 - (m_1 + m_2)^2 \cdot c^2}{2\,m_2} \tag{6.122}$$

Allgemein gilt die Gleichung:

$$E_{kin}^{th} = \frac{(m_3 + m_4 + m_5 + \ldots)^2 \cdot c^2 - (m_1 + m_2)^2 \cdot c^2}{2\,m_2} \tag{6.123}$$

Annihilation^{4LP}

Entdeckung des Psions

Exactly twenty five year ago, on November 10, 1974 two experimental groups announced the discovery of a new particle (Fig. 6.36) at 3095 MeV whose lifetime was about 1000 times longer than that of other particles of comparable mass. This announcement set on fire the world of high energy physics and is now known in the physics community as the November revolution. Like many revolutions, its meaning was not clear at first. To appreciate the surprise, imagine if one suddenly discovers a new pyramid, twice as heavy as the largest one known so far and yet a thousand times narrower and thus higher! The unprecedented large life time (or narrowness of the peak) led to a host of theoretical speculations and vigorous experimental activity. During the next one year, more than seven hundred papers were written related to this discovery which was a record in physics (if not in entire science) at that time. Its impact on the development of high energy physics was tremendous and within two years of its discovery, in 1976, the two men Samuel Ting and Burton Richter who led those two group were awarded

Generic name	*Particle*	*Mass* (*MeV*)	*Lifetime* (*s*)	*Decay mode*	
	photon γ	0	stable		
Leptons	neutrino ν_e	0	stable		
	neutrino ν_μ	0	stable		
	electron e	0.511	stable		
	muon μ	105.7	2.2×10^{-6}	$e\nu\bar{\nu}$	
Hadrons (Mesons)	pion $\pi^\pm$	139.6	2.6×10^{-8}	$\mu\nu$	
	pion π^0	135.0	8.3×10^{-17}	$\gamma\gamma$	
	$\kappa^\pm$	493.7	1.2×10^{-8}	$\mu\nu$	64%
				$\pi\pi^0$	21%
				$\pi\pi^-\pi^+$	6%
	κ_S^0	497.7	8.9×10^{-11}	$\pi^+\pi^-$	69%
				$\pi^0\pi^0$	31%
	κ_L^0	197.7	5.2×10^{-8}	$\pi^0\pi^0\pi^0$	21%
				$\pi^+\pi^-\pi^0$	12%
				$\pi\mu\nu$	27%
				$\pi e\nu$	39%
	proton p	938.3	stable		
	neutron n	939.6	918	$pe\bar{\nu}$	
	Λ	1115.6	2.6×10^{-10}	$p\pi^-$	64%
				$n\pi^0$	36%
Hadrons (Baryons)	Σ^+	1189.4	8×10^{-11}	$p\pi^0$	52%
	Σ^0	1192.5	$<10^{-14}$	$n\pi^+$	48%
				$\Lambda\gamma$	
	Σ^-	1197.4	1.5×10^{-10}	$n\pi^-$	
	Ξ^0	1314.9	3.0×10^{-10}	$\Lambda\pi^0$	
	Ξ^-	1321.3	1.7×10^{-10}	$\Lambda\pi^-$	
	Ω^-	1672.2	1.3×10^{-10}	$\Xi^0\pi^-$	
				$\Xi^-\pi^0$	
				$\Lambda\kappa^-$	

Abb. 6.37: Tabelle zu Elementarteilchen und ihren Eigenschaften [?].

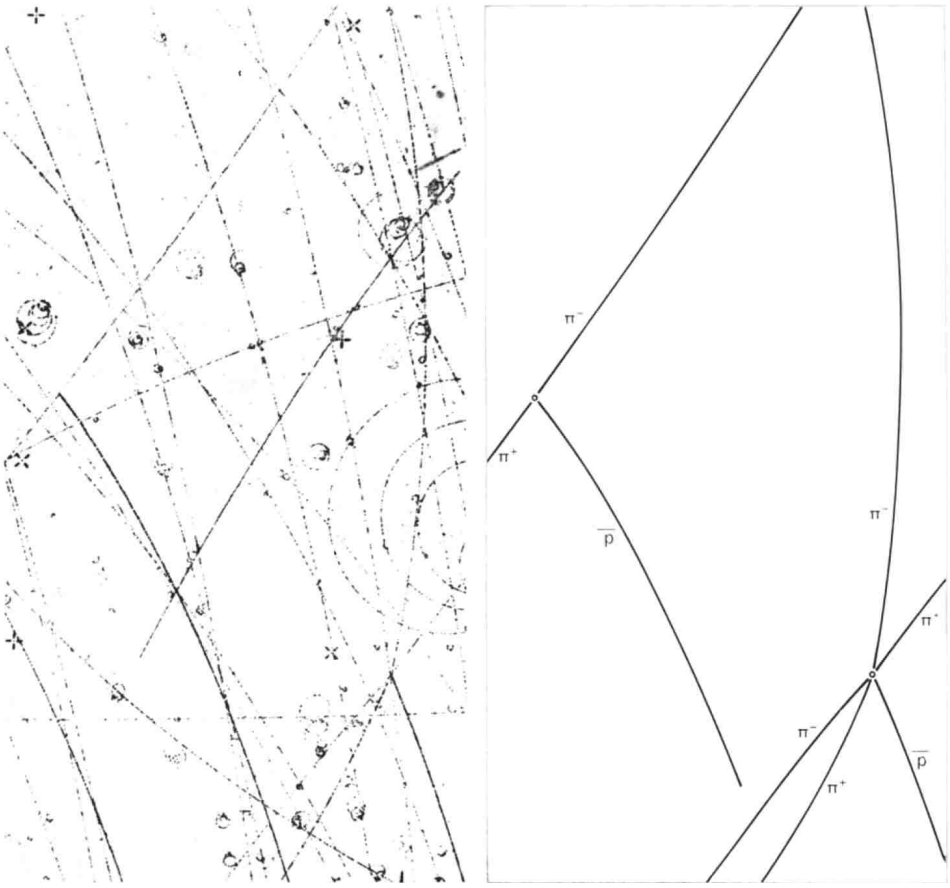


Abb. 6.38: Vernichtung eines Proton-Antiproton-Paares beobachtet in einer Blasenkammer (Kapitel *Ionisierende Strahlung*). Der Prozess ist rechts hervorgehoben. Das Antiprotons $\bar{p}$ stoppt plötzlich, weil es dort mit einem ruhenden Proton p stößt. Die Ladungs- und Impulserhaltung kann durch die Analyse der Spuren der Pionen bestätigt werden, die den Kollisionspunkt verlassen [**?**]

the Nobel prize in physics.[35] Apart from Raman effect[36] and parity violation,[37] there are not many other discoveries which were recognized that soon by the Nobel committee.

Die Äquivalenz von Masse und Energie führt zur Entdeckung neuer Elementarteilchen, wie dem so genanten Psion J/Ψ. In Stößen von Elektronen (e^-) und Positronen[38] (e^+)

[35] he Nobel Prize in Physics 1976 was awarded jointly to Burton Richter and Samuel Chao Chung Ting *for their pioneering work in the discovery of a heavy elementary particle of a new kind.*

[36] The Nobel Prize in Physics 1930 was awarded to Sir Chandrasekhara Venkata Raman *for his work on the scattering of light and for the discovery of the effect named after him.*

[37] The Nobel Prize in Physics 1957 was awarded jointly to Chen Ning Yang and Tsung-Dao (T.D.) Lee *for their penetrating investigation of the so-called parity laws which has led to important discoveries regarding the elementary particles.*

[38] *Lexikon:* Das **Positron** (e^+) ist das positiv geladene Antiteilchen des Elektrons. Es hat dieselbe Masse und unterscheidet sich vom Elektron nur durch seine entgegengesetzte Ladung.

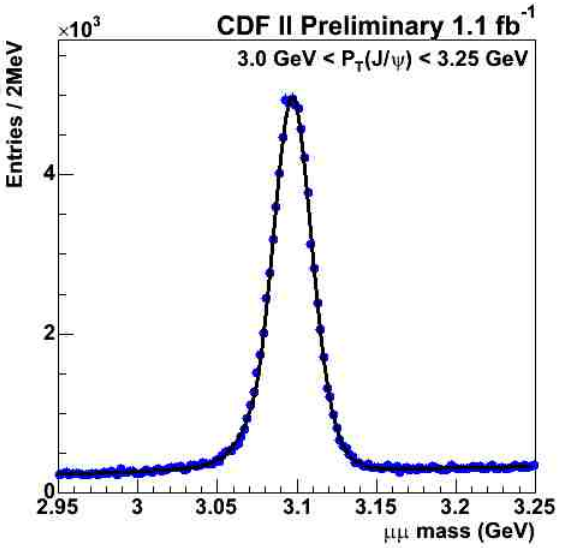


Abb. 6.39: Das J/Ψ ist ein gebundener Zustand aus einem Charm- und einem Anti-Charm-Quark. Das Teilchen ist langlebig und hat eine Masse von 3097 MeV/c^2 und eine Zerfallsbreite von 92,9 keV/c^2, was einer Lebensdauer von 10^{-20} s entspricht [**?**].

beobachtet man bei einem Impuls der beiden Teilchen von jeweils 1.55 GeV/ c, dass ein bislang nicht bekanntes Teilchen erzeugt wird. Es trägt den Namen J/Ψ. Das ist eine Konsequenz der Einsteingleichung. Die kinetische Energie der Teilchen verwandelt sich in Masse.
Betrachten wir den Prozess aus Sicht der Impuls- und Energiehaltung genauer. Im zentralen Stoß der beiden Teilchen gilt Impulserhaltung.

$$\begin{aligned} p_{ges} &= p_1 + p_2 \\ p_{ges} &= 1.55\,\mathrm{GeV}/c + 1.55\,\mathrm{GeV}/c = 0 \end{aligned} \tag{6.124}$$

Aus dem Energie-Impulssatz ergibt sich, dass die Summe aus kinetischer Energie und Ruheenergie zur Bildung des J/Ψ-Teilchens aufgewendet werden muss. Man beachte, dass Elektron und Positron gleiche Masse haben.

$$\begin{aligned} E_{J/Psi} &= E_{e^-} + E_{e^+} \\ E_{J/Psi} &= \sqrt{(p_{e^-}\cdot c)^2 + (m_{e^-}\cdot c^2)^2)} + \sqrt{(p_{e^+}\cdot c)^2 + (m_{e^+}\cdot c^2)^2)} \\ E_{J/Psi} &= \sqrt{(1.55\,\mathrm{GeV})^2 + (0.000511\,\mathrm{GeV})^2} + \sqrt{(1.55\,\mathrm{GeV})^2 + (0.000511\,\mathrm{GeV})^2} \\ E_{J/Psi} &\approx 1.55\,\mathrm{GeV} + 1.55\,\mathrm{GeV} \\ E_{J/Psi} &= m_{J/\Psi}\cdot c^2 \approx 3.1\,\mathrm{GeV} \end{aligned} \tag{6.125}$$

Abb. 6.39 zeigt, dass das Teilchen erst bei Erreichung einer bestimmten Kollisionsenergie erzeugt wird. Die Anzahl der Ereignisse als Funktion der Stoßenergie verdeutlicht die Effizienz des Erzeugungsprozesses. Der Vorgang der Erzeugung von Masse aus Energie macht nochmal die Bedeutung des Ausdrucks $E_0 = m_0 \cdot c^2$ klar. In ähnlicher Weise wurde in Experimenten an Teilchenbeschleunigern eine Vielzahl neuer Elementarteilchen entdeckt, siehe die Tabelle in Abb. 6.37.

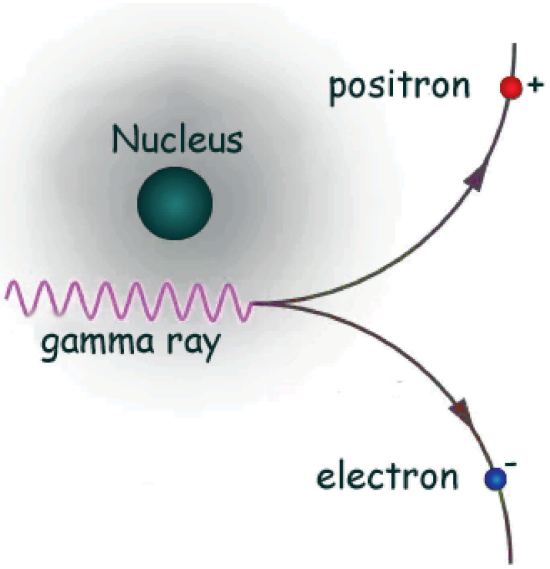


Abb. 6.40: Bei ausreichender Photonenenergie kann in der Nähe eines Atoms der Prozess der Elektron-Positron Paarbildung stattfinden [**?**].

Elektron-Positron Paarbildung

Man sollte an dieser Stelle noch die Bedeutung der Erhaltungssätze hervorheben. Die Erzeugung neuer Teilchen ist eine Folge von Energieerhaltung und Energietransfer. Allerdings muss man stets berücksichtigen, dass auch die anderen Erhaltungssätze, wie die Ladungserhaltung, erfüllt sein müssen. Dies gilt insbesondere für den Impulserhaltungssatz. Abb. 6.38 zeigt dies am Beispiel der Umwandlung beim Stoß von Proton und Antiproton. Es gibt kein einziges Experiment in der Physik, bei dem dieser Erhaltungssatz verletzt wird. Beim schon erwähnten β-Zerfall hat man das zunächst geglaubt. Wie sich herausstellte, hatte man die Rechnung ohne das Neutrino gemacht. Deshalb spricht man in der Physik in diesem Zusammenhang oft von Dreikörperstößen, beispielsweise wenn aus einem hochenergetischen Photon ein e^+e^- Paar entsteht. Um Impulserhaltung zu garantieren, nimmt ein beim eigentlichen Stoßprozess unbeteiligtes Teilchen den überschüssigen Impuls auf. Abb. 6.40 zeigt den Prozess der Paarerzeugung in der Nähe eines Kerns

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
☐ geraten; ☐ unsicher; ☐ unentschieden; ☐ sicherlich richtig; ☐ mit Sicherheit richtig

Die Kinetische Energie eines Teilchens wird oft in der Energieeinheit Elektronenvolt eV angegeben. Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten des Elektrons bietet es sich an, den Ausdruck für die Kinetische Energie mit (c^2/c^2) zu multiplizieren und sich daran zu erinnern, das die Ruheenergie des Elektrons 511 keV beträgt:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 \cdot \frac{c^2}{c^2} \\ E_{kin} &= \frac{1}{2} \cdot (m_0 \cdot c^2) \cdot \frac{v^2}{c^2} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{\frac{2\,E_{kin}}{m_0 \cdot c^2}} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{\frac{2\,E_{kin}}{511\,\mathrm{keV}}} \end{aligned}$$

Gleiches kann man auch machen, wenn man aus dem Impuls p die nicht-relativistische Kinetische Energie und umgekehrt berechnen soll:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2\,m_0} \cdot \frac{c^2}{c^2} = \frac{p^2 \cdot c^2}{2\,m_0 \cdot c^2}$$

Aufgabe 3.1: Ein Teilchen hat eine kinetische Energie, die exakt der Ruhemasse entspricht. Welche Geschwindigkeit hat der Körper?

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{kin} + m_0 \cdot c^2 \\ m \cdot c^2 &= 2\,m_0 \cdot c^2 \\ \frac{m_0}{m} &= \frac{1}{2} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{1 - \frac{1^2}{2^2}} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \frac{v}{c} &= 0.866 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2: Welchen Impuls hat ein Elektron, dass sich mit $0.985c$ bewegt?

$$
\begin{aligned}
p &= \gamma \cdot m \cdot v \\
p &= \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
p &= \frac{(9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (0.985) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{\sqrt{1 - \frac{(0.985 \cdot c)^2}{c^2}}} \\
p &= 1.56 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{kg \cdot m/s}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.3: Eine Autobatterie liefert 600 A·h bei einer Spannung von 12 V. Berechnen Sie die Zunahme an Ruhemasse, wenn eine ungeladene Batterie voll aufgeladen wird?

Die potenzielle Energie E_{pot} in der Elektrostatik ist das Produkt aus Ladung q und Spannung U_e

$$E_{pot} = q \cdot U_e$$

und die zugehörige Ladungsmenge q errechnet sich aus aus der Dauer des elektrischen Stroms I_e:

$$q = I_e \cdot t$$

Damit lässt sich der Massenzuwachs berechnen:

$$
\begin{aligned}
\Delta m &= \frac{E_{pot}}{c^2} \\
\Delta m &= \frac{q \cdot V}{c^2} \\
\Delta m &= \frac{I_e \cdot t \cdot V}{c^2} \\
\Delta m &= \frac{(600\,\mathrm{A \cdot h}) \cdot (12\,\mathrm{V})}{(2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2} \\
\Delta m &= \frac{(600\,\mathrm{C/s} \cdot (3600 \cdot \mathrm{s/h}) \cdot (12\,\mathrm{J/C})}{(2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2} \\
\Delta m &= 2.88 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}
\end{aligned}
$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass 1 kg·m^2/s^2=1 J. Bei einer Masse der Batterie von 20 kg ist der relative Massenzuwachs:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{2.88 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}}{20\,\mathrm{kg}} = 1.44 \cdot 10^{-9}$$

Aufgabe 3.4: Wie hoch ist die Kinetische Energie eines Elektrons, dass sich mit der Geschwindigkeit 0.992c bewegt?

$$
\begin{aligned}
E_{kin} &= (\gamma - 1) \cdot m_e \cdot c^2 \\
E_{kin} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \cdot m_e \cdot c^2 \\
E_{kin} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0.992\,c)^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot (9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) e \cdot (2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2 \\
E_{kin} &= 5.67 \cdot 10^{-13}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.5: Man zeige, dass gilt $\beta = (p \cdot c)/E$!

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
E &= \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
\frac{p}{E} &= \frac{v}{c^2} \\
\beta &= \frac{v}{c} = \frac{p \cdot c}{E}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.6: Wenn es eine Obergrenze für die Geschwindigkeit von Teilchen gibt, existiert dann eine obere Grenze für[39]

(a) den Impuls.

(b) die kinetische Energie.

(c) die Temperatur

(d) Alles stimmt.

(e) Nichts von alledem stimmt.

Aufgabe 3.7: Die relativistische Gleichungen für Zeitdilatation, Längenkontraktion und relativistischen Impuls und Energie sind richtig für[40]

(a) Geschwindigkeiten nahe c.

(b) Fahrräder, Autos und die Saturn V.

(c) alle Geschwindigkeiten

[39] Antwort: (e)
[40] Antwort: (c)

(d) allerdings nur ansatzweise

Aufgabe 3.8: Die höchsten je gemessenen Teilchengeschwindigkeiten ist:

$$\beta = 0.999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,95$$

was in etwa einem γ-Faktor von 10^{11} entspricht. Die kinetische Energie eines so schnellen Protons entspricht in etwa[41]

(a) einem 1 kg schweren Stein, das sich mit der Geschwindigkeit von 5.5 m/s bewegt.

(b) einem 1 g leichten Staubteilchen, das sich mit der Geschwindigkeit von 624 km/h bewegt.

(c) Stimmt beides!

(d) Stimmt beides nicht!

Aufgabe 3.9: Berechnen Sie klassisch die Geschwindigkeit eines Protons der Energie 300 GeV!

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2\,E_{kin}}{m}} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{\frac{2\,E_{kin}}{m \cdot c^2}} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{\frac{2\,(300\,\mathrm{GeV})}{(0.94\,\mathrm{GeV})}} \\ \frac{v}{c} &= 25 \end{aligned}$$

Tatsächlich hat das Proton eine Geschwindigkeit nahe c.

Aufgabe 3.10: Wie hoch ist die Geschwindigkeit eines Körpers bei gegebenem Massenzuwachs?

$$\begin{aligned} m^2c^4 &= \gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot c^4 \\ m^2 &= \frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2} \\ 1 - v^2/c^2 &= \frac{m_0^2}{m^2} \\ \frac{v^2}{c^2} &= 1 - \frac{m_0^2}{m^2} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} \end{aligned}$$

[41] Antwort: (c), in etwa 15 J

Aufgabe 3.11: Atomic particles in the form of a beam have a velocity of 95% the speed of light. What is their relativistic mass compared with their rest mass?[42]

Aufgabe 3.12: Two atomic particles, each with a rest mass of $2.0 \cdot 10^{-25}$ kg, approach each other in head-on collision. If each has an initial velocity of $2.0 \cdot 10^{8}$ m/s, what is[43]

(a) the velocity of one atom as seen from the other?

(b) the relativistic mass of one as seen by the other?

Aufgabe 3.13: An electron has a kinetic energy equivalent of 2 MeV. What is its velocity relative to the velocity of light?[44]

Aufgabe 3.14: In a nuclear disintegration process, a mass of 0.00820 amu is annihilated and 95% of the liberated energy is imparted as kinetic energy to an alpha particle. Find[45]

(a) its energy in MeV.

(b) its range.

[42] Answer: $m/m_0 = 3.20$
[43] Answer: (a) $2.77 \cdot 10^{8}$ m/s, (b) $5.10 \cdot 10^{-25}$ kg
[44] Answer: 97.9%
[45] Answer: (a) 7.25 MeV, (b) 6.5ċm

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was ändert sich in Bezug auf den Impulserhaltungssatz durch die Spezielle Relativitätstheorie?
2. Welchen Impuls hat ein Teilchen, wenn man seine Geschwindigkeit von $c/2$ verdoppelt?
3. Begründen Sie, warum man unter Einwirkung einer konstanten Beschleunigung ein Teilchen nicht auf Lichtgeschwindigkeit bringen kann!
4. Wie werden die klassischen Gesetze der Energie- und Massenerhaltung durch die Relativitätstheorie modifiziert?
5. Ist es möglich, dass eine äußere Kraft auf ein System einwirkt und der relativistische Impuls erhalten bleibt?
6. Kann Licht angesichts der Tatsache, dass es sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, eine Masse haben?
7. Warum hat Licht, obwohl es keine Masse hat, einen Impuls?
8. Warum können wir nicht schneller als das Licht reisen?
9. Wie unterscheidet sich das zweite Newtonsche Gesetz von der relativistischen Sichtweise?
10. Was stellt sich der Massenverlusts einer Rakete aus relativistischen Sicht dar?
11. Macht es einen Unterschied, ob man einen Körper kalt oder erhitzt einer beschleunigenden Kraft aussetzt?
12. Reicht es im Zusammenhang mit der Speziellen Relativitätstheorie nicht aus, im zweiten Newtonschen Gesetz die Masse durch die Ruhemasse ersetzen?
13. Ein Teilchen bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $c/2$. Was ist mit dem Impuls, wenn man die Geschwindigkeit verdoppelt?
14. Der Impulserhaltungssatz besagt, dass der Impuls in einem beliebigen Stoß erhalten bleibt. Was passiert im eigentlichen Stoßprozess? Denken Sie beispielsweise an eine elastische Verformung der Körper.
15. Ist es richtig, dass ein Teilchen, dass Energie trägt, auch Impuls haben muss?
16. Ein Teilchen mit Masse kann niemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen. Gibt es deshalb einen maximalen Impuls oder eine maximale kinetische Energie?
17. Kann es sein, dass ein Stoßprozess im einen Inertialsystem elastisch und in einem Anderen inelastisch ist?

18. Welche Eigenschaften würden sich ändern, wenn es ein wenn es ein relativistisches Transformationsgesetz für die elektrische Ladung gäbe?

19. Mit welchen Experimenten könnte man nachweisen, dass die elektrische Ladung sich nicht mit der Geschwindigkeit ändert?

20. Warum werden bei der Vernichtung eines $e^- e^+$-Paares zwei Photonen erzeugt?

21. Wie kann Materie einfach so aus dem Nichts auftauchen?

22. Wie ändern sich die klassischen Erhaltungssätze von Masse und Energie durch die Erkenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie?

23. Wie ändert sich die Masse von Wasser wenn es abkühlt, lässt man mal solche Vorgänge wie Verdampfung etc. außer acht?

24. Sie platzieren einen luftgefüllten Ballon auf einer Waage und stellen ihn nach draußen. Ändert sich die Masse des Ballons im Tagesablauf und sehen Sie eine Chance, den Vorgang zu messen?

25. Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen gelten:

    (a)
    $$E_{kin} = m_0 \cdot c^2 \cdot \sqrt{\gamma - 1}$$

    (b)
    $$E_{kin} = c \cdot \sqrt{p^2 + m_0^2 \cdot c^2} - m_0 \cdot c^2$$

    (c)
    $$m_0 = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - p^2 \cdot c^2}$$

    (d)
    $$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_{kin} \cdot (E_{kin} + 2\, m_0 \cdot c^2)}$$

Was ist relevant für die Klausur?

- Lichtimpuls (Gl. 6.1)

$$p = E/c$$

- Ruhemasse
- Ruheenergie eines Körpers (Masse-Energie Relation Gl. 6.13)

$$E_0 = m_0 \cdot c^2$$

- Masseneinheiten amu und MeV/c^2
- Ruhemasse des Elektrons: $511\,\mathrm{keV}/c^2$
- Massendefekt
- Nukleare Bindungsenergie
- Relativistischer Impuls (6.44)

$$p = \frac{m_0 \cdot v_{object}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- Relativistische kinetische Energie (Gl. 6.54)

$$E_{kin} = m_0 \cdot c^2 \cdot (\gamma - 1)$$

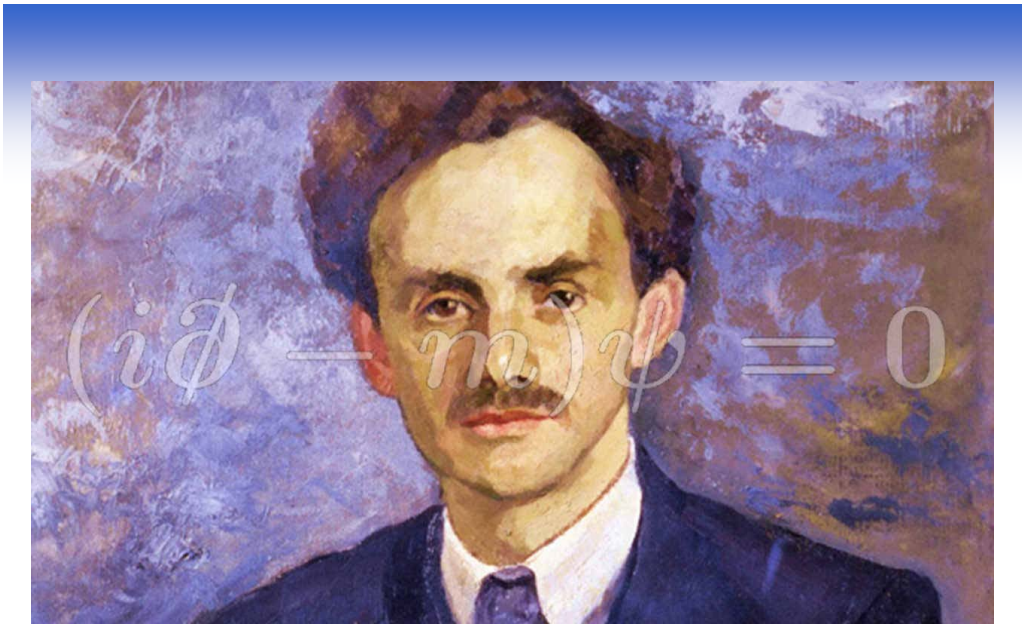
- Relativistische Energie (Gl. 6.55)

$$E_{ges} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$$

- Relativistischer Energie-Impulssatz (Gl. 6.76)

$$E_{ges}^2 = (p \cdot c)^2 + (m_0 \cdot c^2)^2$$

7 Chemie schwerer Elemente



Chemie schwerer Elemente

Wir leben in einer Welt mit endlicher Lichtgeschwindigkeit. Dennoch bezieht sich die existierende Theoretische Chemie auf eine imaginäre Welt, in der die Lichtgeschwindigkeit unendlich ist. Wir definieren im folgenden relativistische Effekte als den Unterschied zwischen diesen beiden Fällen [**?**].

P. Pyykkö, J. P. Desclaux

[1]Relativistische quantenphysikalische Berechnungen an Atomen und Molekülen zeigen, dass die anomalen Abweichungen von den generellen Trends im Periodensystem für die schweren Atome auf relativistische Effekte zurückgeführt werden können. Die theoretischen Grundlagen wurden geschaffen durch die Arbeiten von Paul Dirac,[2] der eine

[1]Dieses Kapitel der Modernen Physik ist für die Klausur nicht relevant.

[2] The Nobel Prize in Physics 1933 was awarded jointly to Erwin Schrödinger and Paul Adrien Maurice Dirac *for the discovery of new productive forms of atomic theory*

relativistische Formulierung der Schrödingergleichung (Kapitel *Wellenfunktion*) erarbeitete. Dadurch gelang:

- die Vorhersage von Antimaterie, insbesondere des Positrons.
- eine Vorhersage für den Wert des Spins und des Landé-Faktors des Elektrons.
- die Aufklärung der Feinstruktur des Wasserstoffspektrums.

Relativistic effects are therefore of no importance in the consideration of atomic and molecular structure and ordinary chemical reactions [**?**].[3]

Paul A. M. Dirac, 1929

[3] Es ist eine Ironie des Schicksals, dass Dirac als Wegbereiter, die Rolle relativistischer Effekte in der Chemie unterschätzte. Es dauerte lange, bis man den Irrtum erkannte.

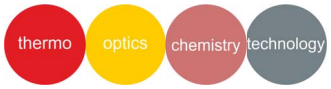
Inhalt

Chemie schwerer Elemente

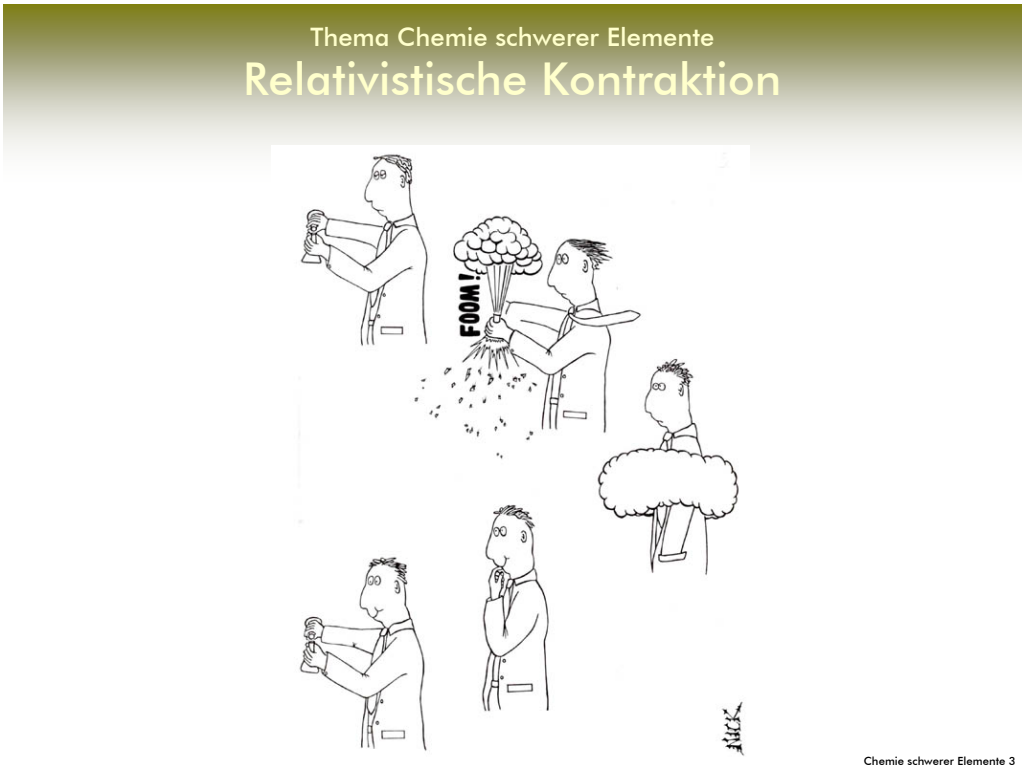
Kapitel 1
Relativistische Kontraktion



Kapitel 2
Hybridisierung



7.1 Relativistische Kontraktion



If Gold ruste, what shal iron doo?

Canterbury Tales by Geoffrey Chaucer, 1387

Im Kapitel *Beyond Bohr* werden wir Quantenzahlen und das Pauli-Prinzip[4] kennenlernen und erkennen nach welchen Prinzipien das Periodensystem der Elemente aufgebaut ist.[5] Elemente die, aufgrund ihrer ähnlichen Elektronenkonfiguration, ähnliche chemische Eigenschaften haben, stehen in der Tabelle untereinander. Diese Einteilung scheint für die schweren Elemente, im Vergleich zu den leichteren Elementen derselben Gruppe nicht mehr zu stimmen, wie das Beispiel der IV Hauptreihe demonstriert:

- Silizium ist ein schwer verformbarer Halbleiter mit einem hohen Schmelzpunkt von 1683 K. Seine Mohshärte siehe Tabelle in Abb. 7.1 beträgt 6.5

- Blei ist ein giftiges Schwermetall, ist leicht verformbar (Mohshärte: 1.5) und hat einen niedrigen Schmelzpunkt von 600 K.

[4] The Nobel Prize in Physics 1945 was awarded to Wolfgang Pauli *for the discovery of the Exclusion Principle, also called the Pauli Principle*

[5] Zum Verständnis dieses Kapitels ist es hilfreich, zu wissen, was man unter Elektronenorbitalen versteht.

	Mohshärte
Asphalt	1.3
Zinn, Blei, Graphit	1.5
Kalzium Cadmium, Schwefel	2.0
Aluminium, Silber, Gold	2.5-3.0
Kupfer	3.0
Nickel, Eisen	4
Stahl, Platin	4.0-4.5
Kobalt, Obsidian[a]	5.0
Glas	5.0-5.6
Quarzglass, Pyrit	6.0-7.0
Gehärteter Stahl	7.5-8.0
Wolfram, Carbyne,[b] Titankarbid	9.0-9.5
Diamand	10

Tab. 7.1: Die Mohshärte gibt die Härte von Materialien auf einer Skala von 1 bis 10 an [**?**].

[a]Obsidian ist ein Magmagestein, das als natürliches Glas vorkommt und durch die schnelle Abkühlung zähflüssiger Lava aus Vulkanen entsteht.

[b]Carbyne sind Kohlenstoffatome, die, im Gegensatz zu Graphen, nicht in einem Wabenmuster anordnet sind, sondern entlang einer Kette. Das Material ist extrem leicht und weist eine doppelt so hohe Reißfestigkeit und Zähigkeit im Vergleich zu Graphen auf. Es leitet elektrische Ströme wie jedes andere Kohlenstoffmaterial. Mögliche Einsatzzwecke sind elektronische Nanobauteile und Brennstoffzellen.

Um die erheblichen Unterschiede zu verstehen, greifen wir auf unsere Erkenntnisse aus der Relativitätstheorie zurück. Für das Elektron im Wasserstoffatome ist die Bahngeschwindigkeit mit $0.1c$ gering im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit. Die relativistische Masse ist das 1.00003-fache der Ruhemasse des Elektrons. Dadurch verursachte Effekte kann man getrost vernachlässigen. Für die innersten Elektronen bei protonenreichen Kernen gelten andere Maßstäbe. Die Bahngeschwindigkeit des Elektrons um den Kern, in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit, ergibt sich aus der Kernladung und kann mit Hilfe der Feinstrukturkonstante[6] α berechnet werden

$$\beta = Z \cdot \alpha \tag{7.1}$$

Das hat Auswirkungen auf das gesamte Elektronensystem, insbesondere das der schweren Elemente. Die Bahngeschwindigkeiten und die Bahnradien sind proportional zur Ordnungszahl Z und die Bindungsenergien zu Z^2. Für Gold (Au) (Z=79) ergibt sich als Bahngeschwindigkeit der innersten Elektronen ein Wert von $0.58c$. Es sollte klar sein, dass dies Auswirkungen auf die Masse des Elektrons hat:

[6] *Lexikon:* Die **Feinstrukturkonstante** ($\alpha = e^2/(\hbar \cdot c) \approx 1/137$), siehe auch Kapitel *Beyond Bohr*, ist eine dimensionslose Konstante, die die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung angibt und zur Beschreibung der Feinstrukturaufspaltung der Spektrallinien im Wasserstoffspektrum dient.

$$
\begin{aligned}
m_e^{Au} &= \gamma \cdot m_e \\
m_e^{Au} &= m_e \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\
m_e^{Au} &= m_e \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(0.58)^2}} \\
m_e^{Au} &= m_e \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0.34}} \\
m_e^{Au} &= 1.23 \cdot m_e
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

Für den ruhenden Kern ist das Elektron also deutlich schwerer geworden. Ein Vorgriff auf das Kapitel *Bohrsche Atommodell* liefert folgende Beziehung zwischen Bahnradius und Elektronenmasse:

$$
\frac{r_{Au}}{r_{Bohr}} = \frac{m_e}{m_e^{Au}} = \frac{1}{1.23} = 0.81 \tag{7.3}
$$

Quantum chemical calculations show that the uranium molecule U_2 has a quintuple bond [?]: Covalent bonding is commonly described by Lewis's theory, with an electron pair shared between two atoms constituting one full bond. Beginning with the valence bond description for the hydrogen molecule, quantum chemists have further explored the fundamental nature of the chemical bond for atoms throughout the periodic table, confirming that most molecules are indeed held together by one electron pair for each bond. But more complex binding may occur when large numbers of atomic orbitals can participate in bond formation. Such behaviour is common with transition metals. When involving heavy actinide elements, metal-metal bonds might prove particularly complicated. To date, evidence for actinide-actinide bonds is restricted to the matrix-isolation of uranium hydrides, including H_2U–UH_2, and the gas-phase detection and preliminary theoretical study of the uranium molecule, U_2. Here we report quantum chemical calculations on U_2, showing that, although the strength of the U_2 bond is comparable to that of other multiple bonds between transition metals, the bonding pattern is unique. We find that the molecule contains three electron-pair bonds and four one-electron bonds (that is, 10 bonding electrons, corresponding to a quintuple bond), and two ferromagnetically coupled electrons localized on one U atom each - so all known covalent bonding types are contributing.

Das bedeutet, dass sich der Bahnradius aufgrund der relativistischen Effekte um fast 20% reduziert. Die Größe der Atome ist also ein Maß für den Grad der Kontraktion. Man vermutet, dass das in Kernstößen

$$
{}^{64}_{28}\mathrm{Ni} + {}^{209}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{272}_{111}\mathrm{Rg} + {}^{1}_{0}\,n \tag{7.4}
$$

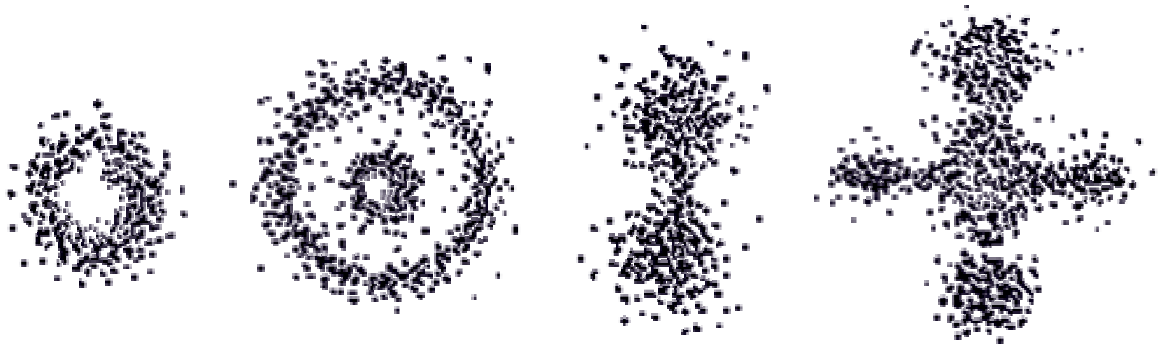


Abb. 7.1: Schnappschüsse der Position von Elektronen in unterschiedlichen $n\ell$-Orbitalen. Ganz links: $1s$ (n=1, ℓ=0); links: $2s$ (n=2, ℓ=0); rechts: $2p$ (n=2, ℓ=1); ganz rechts: $3d$ (n=3, ℓ=1). Abhängig von n und ℓ halte sich die Elektronen in bestimmten Bereichen des Atoms auf.

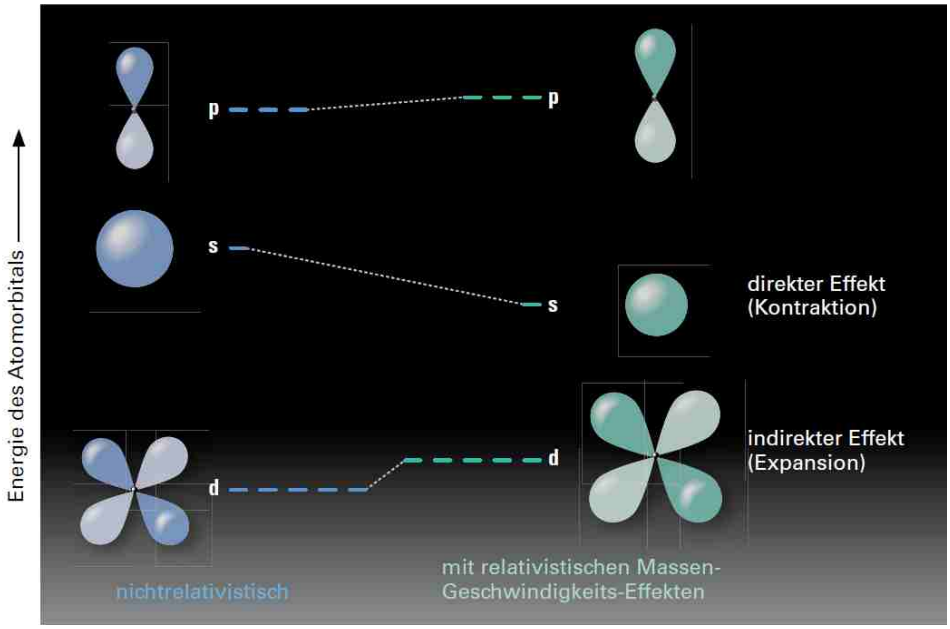


Abb. 7.2: Wenn Elektronen in schweren Atomkernen sich dem Kern nähern, erreichen sie fast Lichtgeschwindigkeit. Dies erhöht ihre Masse, wodurch ihr Abstand vom Kern abnimmt. Das zugehörige Orbital schrumpft und die Bindungsenergie erhöht sich. Dieser Effekt ist besonders ausgeprägt für s-Elektronen, die sich mit hoher Wahrscheinlichkeit in der Nähe des Kern aufhalten. Die d- und f-Elektronen bewegen sich in Bereichen, die weiter weg sind vom Kern. Die stärkere Lokalisierung der s-Elektronen führt zu einer erhöhten Kernabschirmung, wodurch sich diese Orbitale stärker dehnen und weniger stark gebunden sind. Bei den p-Elektronen gleichen sich die Effekte annähernd aus, das Orbital bleibt annähernd identisch und die energetische Lage der Niveaus ändert sich kaum [**?**].

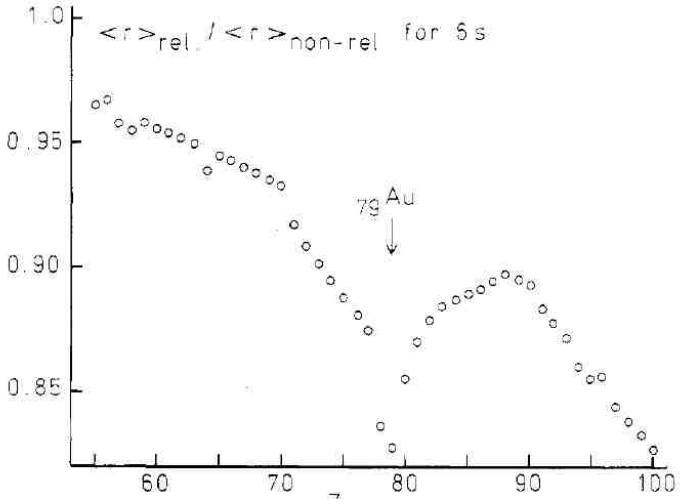


Abb. 7.3: Die relativistische Kontraktion der 6s-Schale in der Elemente Caesium Cs (Z=55) bis Fermium Fm (Z=100) im Vergleich zur nicht-relativistischen Rechnung (Wert 1.0). Die Kontraktion nimmt während der Auffüllung der 4f-Schale mit Elektronen erheblich zu und ist besonders ausgeprägt, wenn die 5d-Schale mit 10 Elektronen aufgefüllt ist. Die ausgeprägte Kontraktion bei Gold ($5d^{10}$) macht dieses Element einzigartig. Man beachte, dass eine vergleichbare relativistische Kontraktion erst beim deutlich schwereren Element Fermium beobachtet wird [**?**].

erzeugte Röntgenium sich durch einen besonders geringen Atomradius auszeichnet [**?**]. Das Element gehört zu der Klasse der Edelmetalle (Kupfer, Silber, Gold). Obwohl das Atom 272 Nukleonen hat, erwartet man, dass der Radius kleiner ist als bei Kupfer.

Die relativistische Kontraktion betrifft im Wesentlichen das 1s-Orbital. Wie muss man sich ein Orbital vorstellen? Sie photographieren in vielen Einzelaufnahmen die Position des Elektronen und erkunden damit den Aufenthaltsbereich. Abb. 7.1 zeigt Beispiele

	Au-79	Hg-80
Dichte	19.32 g/cm^3	13.53 g/cm^3
Leitfähigkeit	$4.26 \cdot 10^5$ S/m	$1.04 \cdot 10^4$ S/M
Schmelzpunkt	1064 ^{o}C	-39 ^{o}C
Schmelzwärme	12.8 kJ/mol	2.3 kJ/mol
Schmelzentropie	9.29 J/K	9.81 J/K

Tab. 7.2: Eigenschaften von Gold und Quecksilber, die zeigen, dass die beiden Metalle aufgrund ihrer thermodynamischen und elektrischen Eigenschaften ziemlich verschieden sind, obwohl sie im Periodensystem aufeinander folgen. Man erkennt anhand der Daten, dass die Bindungskräfte bei Hg geringer sind als bei Au [**?**].

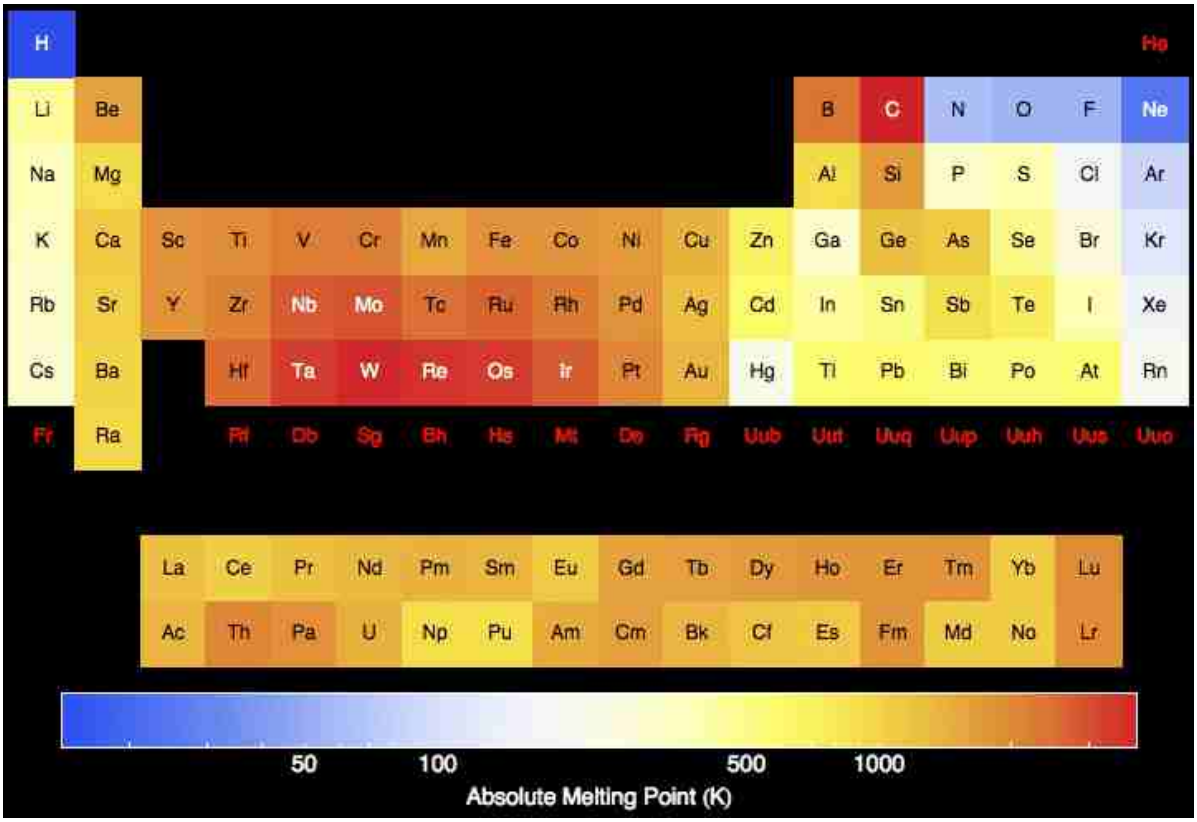


Abb. 7.4: Schmelzpunkte der Elemente. Auffällig ist der erhebliche Unterschied in den Werten für Gold und Quecksilver, die im Periodensystem nebeneinander stehen. Man beachte die logarithmische Skala [**?**].

für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten von Elektronen in unterschiedlichen Orbitalen, die durch die Haupt- n und Drehimpulsquantenzahl ℓ charakterisiert sind, siehe Kapitel *Beyond Bohr*. Die Überlegung für das $1s$-Orbital gilt aber auch für alle anderen s-Orbitale. Das führt dazu, dass sich der Bindungsenergie des Grundzustands zu höheren Bindungsenergien verschiebt. Die größere Nähe der s-Elektronen zum Kern erhöht die Abschirmung der Kernladung. Abhängig von der Elektronenkonfiguration kann das dazu führen, dass äußere Elektronen eine geringere oder erhöhte Kernladung spüren. Speziell weiten sich die Orbitale mit höherem Drehimpuls räumlich aus, siehe Abb. 7.2. Wie sich zeigt, nehmen die relativistischen Effekte mit der stark zu. Die relativistische Kontraktion sorgt dafür, dass das Quecksilberatom chemisch Helium, also einem Edelgas, ähnelt. Die experimentelle Beobachtung deutet in diese Richtung. Quecksilber ist bei Raumtemperatur flüssig. Schauen wir uns das nochmal genauer an (siehe Abb. 7.4) und stellen die Eigenschaften Gold und Quecksilber[7] gegenüber, siehe die Tab. 7.2. Von ihrer Elektronenkonfiguration (Kapitel *Beyond Bohr*) sind sie eigentlich ähnlich (Au: Xe $4f^{14}5d^{10}6s^1$; Pb: Xe $4f^{14}5d^{10}6s^2$). Keine anderen nebeneinander liegenden Elemente

[7] Im antiken Griechenland wurde Quecksilber *wässriges Silber* genannt.

Element	I_p	D_0	Spin-Bahn
C	11.26	6.1	0.005
Si	8.15	3.2	0.03
Ge	7.88	2.8	0.17
Sn	7.34	2.0	0.42
Pb	7.42	1.0	1.32

Tab. 7.3: Charakteristische Energiewerte für die Elemente der vierten Hauptgruppe, angegeben in der Eenrgieeinheit Elektronenvolt. Anhand der Werte erkennt man, dass der Spin-Bahn-Term für alle leichten Elemente gering, aber in Blei größer als die Bindungsenergie im Molekül ist [**?**].

zeichnen sich durch einen solch drastischen Unterschied im Schmelzpunkt aus.[8] Große Unterschiede ergeben sich auch für die elektrische Leitfähigkeit. Schließlich sei darauf verwiesen, dass bei Quecksilber die Supraleitung-Sprungtemperatur[9] nur 4.15 K beträgt. In Zinn, in derselben Spalte im Periodensystem, beträgt sie 0.86 K [**?**].

Woran mag das liegen? Muss man sich klarmachen, dass die Wechselwirkung zwischen den Atomen im Wesentlichen über die äußeren Elektronen erfolgt. Es muss also einen Einfluss der inneren Elektronen auf das Valenzsystem geben. Der Einfluss auf die Valenzelektronen ist indirekt, da die Elektronen nicht-relativistisch behandelt werden können. Sie spüren aber die Orbitalkontraktion der kernnahen Elektronen. Wie sich herausstellt ist es tatsächlich das stark kontrahierte $6s^2$ Orbital, was den Unterschied macht. Abb. 7.3 zeigt das Ergebnis einer Rechnung, die den Effekt demonstriert [**?**].

Spin-Bahn-Kopplung

Im Atom sind alle elektronischen Zustände der Elektronen, neben der Hauptquantenzahl n unter anderem charakterisiert durch Bahndrehimpuls und Spin quantisiert, siehe die Kapitel *Bohrsches Atommodell* und *Beyond Bohr*. Die Kopplung von Bahndrehimpuls (L) und Spin (S), die Spin-Bahn-Wechselwirkung ist ein relativistischer Effekt. Tab. 7.3 liefert Werte für das Ionisationspotenzial (I_p), die Bindungsenergie zweiatomiger Moleküle (D_0) und die Stärke der Spin-Bahn Kopplung. Für die leichten Elemente kann man die Spin-Bahn-Wechselwirkung vernachlässigen. Die Spin- und Bahndrehimpulse werden separat bestimmt und anschließend zum Gesamtdrehimpuls zusammengefasst. Man spricht von (LS- oder Russel-Saunders Kopplung). Bei den schwereren Atome findet man dagegen die JJ-Kopplung ($j = \ell + s$). Dabei werden zunächst für jedes Teilchen (i) Spin- und Bahndrehimpuls addiert (j_i) und dann zum Gesamtdrehimpuls aller Teilchen J zusammengesetzt. Die Spin-Bahn-Wechselwirkung bewirkt eine Aufspaltung der Energieniveaus und ist verantwortlich für alle magnetische Phänomene.

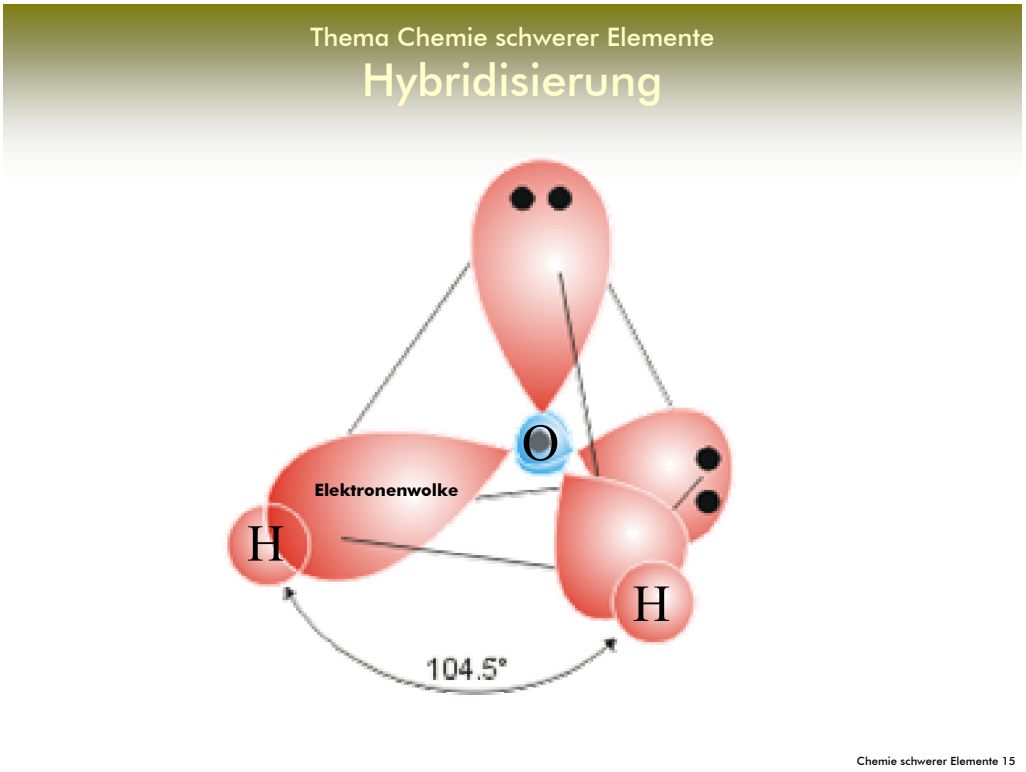
[8] Das stimmt nicht ganz, wenn man sich Lithium und Beryllium anschaut.

[9] The Nobel Prize in Physics 1913 was awarded to Heike Kamerlingh Onnes "for his investigations *on the properties of matter at low temperatures which led, inter alia, to the production of liquid helium*

Konzeptionelle und andere Fragen:

1. Warum ist die Schrödingergleichung nicht in der Lage, die Eigenschaften schwerer Elemente zu beschreiben?
2. Welche Bedeutung hat die Feinstrukturkonstante?
3. Warum unterscheiden sich die physikalisch-chemischen Eigenschaften der schweren Elemente so deutlich von denen der leichteren Elemente.
4. Einige Atomorbitale werden durch relativsitische Effekte kontrahiert. Warum ist das so?
5. Die Spalte im Periodensystem charakterisiert das allgemeine chemische Natur der Elemente. Gilt das generell?
6. Rechnungen zu den chemischen Eigenschaften des Urandimers U_2 haben die Forscher elektrisiert. Warum?

7.2 Hybridisierung



These give rise to difficulties only when high-speed particles are involved, and are therefore of no importance in the consideration of atomnic and molecular structure and ordinary chemical reactions, in which it is, indeed, usually sufficiently accurate if one neglects relativity variation of mass with velocity and assumes only Coulomb forces between the various electrons and atomic nuclei [**?**].

Paul Dirac, 1929

Wie wirkt sich das Phänomen der Kernradien-Kontraktion in den schweren Elementen auf die makroskopischen Eigenschaften aus?

Ein Beispiel aus der Thermodynamik

Es zeigt sich, dass es für eine stärkere Bindung notwendig ist, dass die s- und p-Orbitale in der Hauptgruppe des Periodensystems II sowie IIa überlappen. Man spricht von Hybridisierung. In Quecksilber sind diese Orbitale durch die relativistischen Effekte energetisch stärker voneinander getrennt und die Bindungskräfte dadurch reduziert. Dies äußert sich unter Anderem in einem extrem niedrigen Schmelzpunkt, siehe Abb. 7.4. Geht man im Periodensystem nach Links, kommt man zu den Übergangsmetallen. Deren Schmelzpunkt

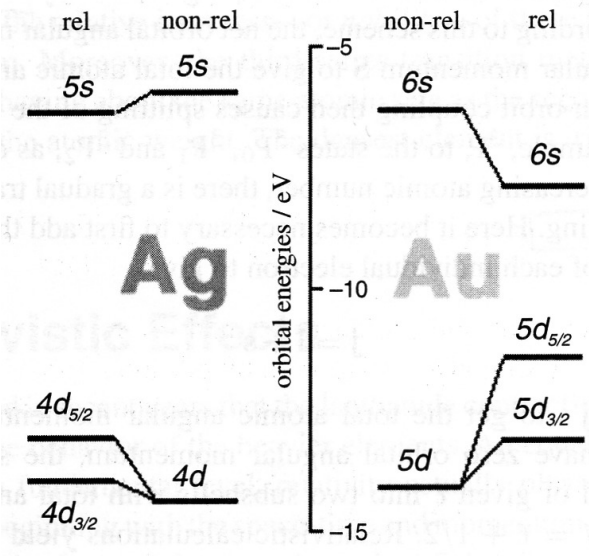


Abb. 7.5: Valenzschalen-Energieniveaus der Elemente Silber (Ag) und Gold (Au). Dargestellt ist der Vergleich der tasächlicher Lage der Niveus und nicht-relativistischen Rechnungen [**?**].

wird wesentlich durch die *d*-Elektronen bestimmt. Die *d*-Orbitale dehnen sich durch die relativistischen Effekte aus und dies erhöht die Bindungskräfte. Wolfram, Rhenium, Osmium und Iridium zeichnen sich, im Gegensatz zu den leichteren Elementen derselben Gruppe, tatsächlich durch höhere Schmelztemperaturen aus.

Ein Beispiel aus der Optik

Betrachtet man die Lage der Energieniveaus von Silber und Gold nicht-relativistisch, findet man kaum Unterschiede (Abb. 7.5). In sofern würde man vermuten, dass sowohl die optischen als auch die chemischen Eigenschaften nahezu identisch sind. Tatsächlich stellt man fest, dass Gold Licht im sichtbaren Spektralbereich deutlich stärker absorbiert und die Reaktivität stark reduziert ist. Wieder sind relativistische Effekte verantwortlich. Abb. 7.5 zeigt, wie die relativistischen Effekte die elektronischen Zustände von Gold - im Gegensatz zu Silber- beeinflussen. Die relativistische Absenkung des 6*s*- und die dadurch verursachte Anhebung des 5*d*-Niveaus in Gold verringert die Energielücke und hat merkliche Auswirkungen auf die physikalischen und chemischen Eigenschaften. Geht man vom einzelnen Atom zum Festkörper über, verbreitern sich die Orbitale und es bilden sich Bänder. Im Valenzband[10] findet man die äußeren Elektronen. Dazu gehören in Gold auch die *d*-Elektronen, da sich durch die relativistischen Effekte deren Bindungsenergie erniedrigt hat. Das Leitungsband, gebildet aus den *s*-Elektronen erniedrigt sich

[10] *Lexikon:* Valenz- und Leitungsband bezeichnen Elektronenorbitale unterschiedlicher Energie. Das Valenzband bildet sich aus den Elektronen der Valenzschale eines Atoms. Das Leitungsband ist das Band, in die Elektronen des Valenzband über eine Anregung gelangen können. Die Energiedifferenz zwischen dem höchsten besetzten Energiezustand des Valenzbandes und dem niedrigsten unbesetzten Zustand des Leitungsbandes, bezeichnet man als Bandlücke. Eine große Bandlücke bedeutet, dass eine größere Energie nötig ist, um Valenzelektronen in das Leitungsband anzuregen. Wenn, wie bei Metallen, Valenz- und das Leitungsband überlappen, können Elektronen leicht zwischen den Bändern wechseln, was zu einer hohen elektrischen Leitfähigkeit führt. Elektronen im Leitungsband können sich frei im Material bewegen. Diese Bewegung der Elektronen resultiert in einem elektrischen Strom.

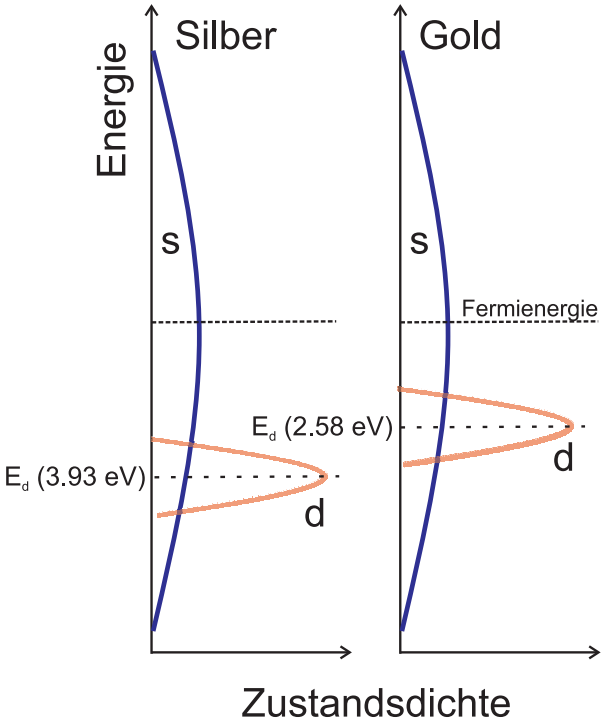


Abb. 7.6: Zustandsdichte von Silber und Gold. Die Lage des *d*-Bandes in Bezug auf die Fermi-Energie ist angegeben. Im Festkörper sind alle elektronischen Zustände bis zur Fermienergie mit Elektronen aufgefüllt. Man erkennt, dass der Energieabstand des *d*-Bands von Gold geringer ist, als bei Silber, Damit sind Anregungen aus dem *d*-Band in unbesetzte Zustände des *s*-Bandes, d.h. oberhalb der Fermienergie, mit geringerer Energie möglich. Die durch die Absorption verursachte Lücke im Optischen Spektrum gibt den Metallen ihre charakteristische Farbe.

dagegen. Der Energieabstand zwischen *s*- und *d*-Band verringert sich also. Das ist in Silber anders. Hier benötigt man erheblich höhere Energien (ultraviolettes Licht), um Elektronen anzuregen. Abb. 7.6 zeigt einen Vergleich der Zustandsdichten von Silber und Gold. Den Unterschied erkennt man deutlich in den Reflektionskurven der Metalle, siehe Abb. 7.7. Aus diesem Unterschied resultiert die Farbe der beiden Metalle. Photonen geringer Energie (längerer Wellenlänge) reichen aus, damit Gold Licht absorbiert. Daraus ergibt sich die gelbe Farbe (Komplementärfarbe). Nicht-relativistisches Gold würde silbrig erscheinen [**?**]!

Ein Beispiel aus der Kernphysik

Interessant wird es, wenn es darum geht die chemischen Eigenschaften superschwerer Elemente zu bestimmen, da die relativistischen Effekte die Elektronenkonfiguration durcheinander wirbeln und die Stellung im Periodensystem nicht eindeutig ist. Untersuchungen, wie im Fall von Röntgenium (Z=104), sind schwierig, da alle Elemente radioaktiv

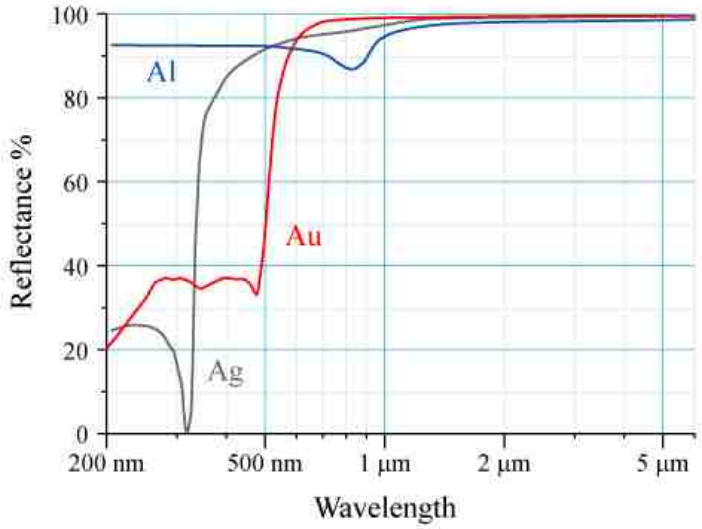


Abb. 7.7: Reflexionskurven für Metallspiegel aus Aluminium (Al), Silber und Gold bei senkrechtem Einfall. Man erkennt, dass Silber, im Gegensatz zu Gold, im gesamten optischen Spektralbereich eine hohe Reflektivität aufweist[**?**].

sind und oft innerhalb kürzester Zeit zerfallen. Eine chemische Analyse ist deshalb nur in seltenen Fällen möglich. Es ist eine Herausforderung, die Eigenschaften anhand von Experimenten an weniger als 10 Atomen zu bestimmen. Teils ergab sich, dass die chemischen Eigenschaften so gar nicht zu ihrer Stellung im Periodensystem passen. Ein Beispiel ist Dubnium (Ordnungszahl 105). Eigentlich sollte das Element wie Tantal (Ordnungszahl 73) reagieren, tatsächlich verhält es sich wie Proactinium (Ordnungszahl 91). Ähnliches findet man im Fall von Flerovium. Das Element 114 findet man in der Hauptgruppe IV und sollte sich chemisch wie Blei verhalten. Tatsächlich ist es eher ein Edelmetall. Auf der anderen Seite ist es so flüchtig, dass es bei Raumtemperatur als Gas vorliegt [**?**]. Ist dieses abweichende Verhalten nun die Ausnahme oder die Regel? Hier ein Beispiel für eine chemisch *normales* Element:

Oddly ordinary seaborgium [?]: The correct position of new elements in the periodic table is not a trivial matter. We understand the periodic table in terms of the filling of electron shells - a process that would seem to be entirely predictable. But relativistic effects can make the heaviest elements behave in unexpected ways. Now chemistry has been extended to element 106 (seaborgium) (Fig. 7.8) [**?**]. Experiments on just seven atoms, each lasting a few seconds, place seaborgium firmly in group six of the periodic table, under tungsten and molybdenum, raising the question of why it behaves in such a conventional way.

Ein Beispiel aus der Batterieforschung

Relativistische Effekte beeinflussen auch die chemischen Eigenschaften, wie beispielswei-

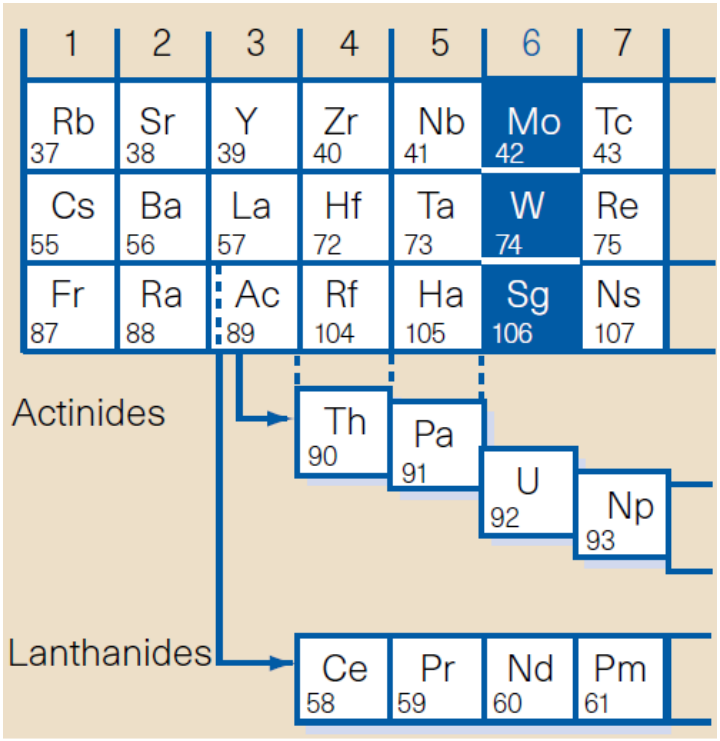


Abb. 7.8: Ausschnitt aus dem Periodensystems mit den drei kürzlich chemisch analysierten Elemente: Rutherfordium (Rf, 104); Hahnium[a] (Ha, 105); und Seaborgium (Sg, 106) [**?**].

[a] Hahnium wird mittlerweile Dubnium (Db) genannt.

se das Redoxpotenzial.[11] In der IV Hauptgruppe sinkt die Oxidationsstufe von Kohlenstoff zu Blei von vierwertig auf zweiwertig. Dieser Effekt hat Einfluss auf die Arbeitsweise von Autobatterien. Die Mitte des 19. Jahrhunderts entwickelte Blei-Säure-Zelle ist schwer und ziemlich umweltbelastend. Die geringen Kosten und die hohen Leistung führten aber dazu, dass Bleibatterien praktisch in alle Fahrzeuge eingebaut wurden. Das Konzept einer Blei-Säure-Batterie ist denkbar einfach. Jede der sechs Zellen der Batterie besteht aus zwei Elektroden, die in eine Lösung aus 35% Schwefelsäure und 65% Wasser getaucht sind. Die Anode besteht aus Blei(IV)oxid und die Kathode aus Blei. Das Eintauchen in die Schwefelsäure bewirkt, dass die Bleikathode Elektronen abgibt, die sich an der PbO_2-Anode sammeln. Zwischen den Bleiplatten der Batterie stellt sich jeweils eine Potenzialdifferenz von mehr als 2 Volt ein. Das ist höher als bei den meisten anderen Batterien. Aber warum sie so gut sind, war ein Rätsel. Wie sich herausstellt, resultieren 80% der Potenzialdifferenz aus relativistischen Effekten. Statt 0.39 V ergibt sich ein Wert von 2.13 V. Diese Erkenntnis gibt auch Aufschluss darüber, warum Autos keine Zinn-Batterien haben. Zinn steht im Periodensystem direkt über Blei und ist, da leichter, technologisch interessant. Die geringeren relativistischen Effekte verhindern

[11] *Lexikon:* Das **Redoxpotenzial** beschreibt die Bereitschaft von Atomen oder Molekülen, Elektronen abzugeben oder aufzunehmen.

aber einen Einsatz als effiziente Batterie [**?**].

Finally, we note that cars start due to relativity.

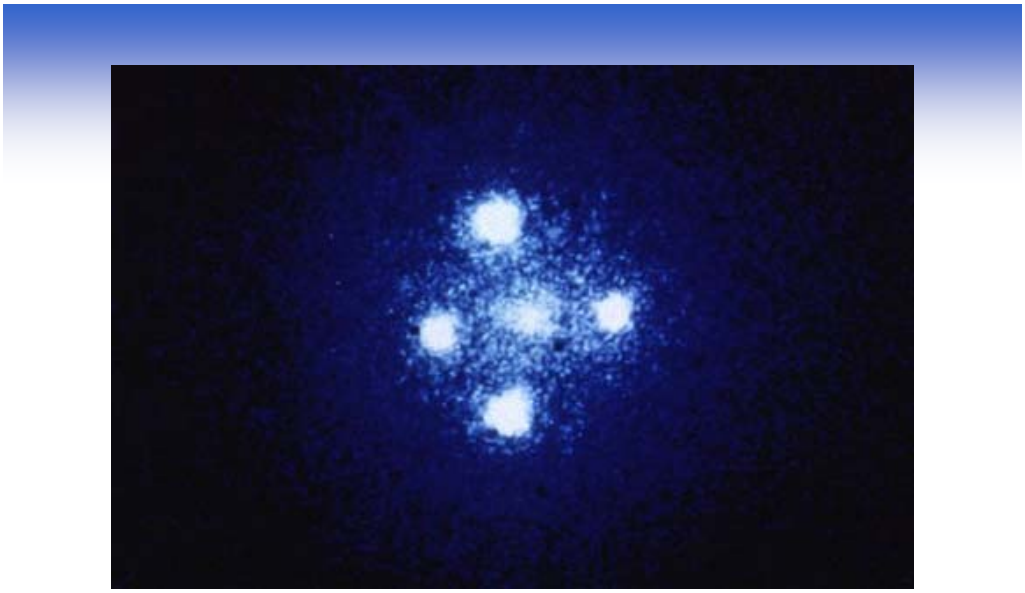
Ahuja et al. [**?**], 2011

Konzeptionelle und andere Fragen:

1. Warum gibt es so erhebliche Unterschiede in en Schmelztemperaturen der schweren Elemente?
2. Beeinflussen relativistische Effekte auch chemischen Reaktionen?
3. Gold gilt in der Chemie als edel. Stimmt das wirklich?
4. Kann man Gold als Katalysator verwenden?
5. Warum unterscheiden sich die optischen Eigenschaften von Silber und Gold.
6. Warum verwendet man nicht weniger toxische Metalle in der Batterietechnik anstelle von Blei?

Was ist relevant für die Klausur?

8 Allgemeine Relativitätstheorie



Allgemeine Relativitätstheorie

Es war 1907, als mir der glücklichste Gedanke meines Lebens kam. ... Das Gravitationsfeld hat nur eine relative Existenz, weil für einen Beobachter, der frei vom Dach eines Hauses fällt -zumindest in seiner Umgebung- kein Gravitationsfeld existiert. Tatsächlich bleiben alle von diesem Beobachter fallen gelassenen Gegenstände im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, unabhängig von ihrer chemischen oder physikalischen Natur.

Albert Einstein, 1920

[1]Bevor wir tiefer in dieses Thema einsteigen, schon mal eine Zusammenfassung der Kernaussagen im Zusammenhang mit dem Prinzip der Relativität. Für die Spezielle Relativitätstheorie gilt aufgrund der Einsteinsche Postulate:

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

- Es gibt kein Medium genannt Äther, der für die Ausbreitung von Licht- und Radiowellen und elektromagnetischer Strahlung allgemein sorgt.
- Physikalische Gesetze haben in allen gleichförmig bewegten Systemen die gleiche Form.
- Raum und Zeit können nicht unabhängig voneinander betrachtet werden.
- Es gibt keine absolute Gleichzeitigkeit.
- Die Lichtgeschwindigkeit ist eine Naturkonstante und hängt nicht von der Bewegung zur Lichtquelle ab.
- Energie und Materie sind äquivalente Größen. Die Masse ist ein Maß für die in einem Körper enthaltene Energie.

Für die Allgemeine Relativitätstheorie findet man:

- Die Gravitation ist keine Kraft im Sinne der Newtonschen Dynamik, sondern eine Eigenschaft von Raum und Zeit.
- Materie krümmt die Raumzeit, wobei die Stärke der Krümmung von der Masse des Objektes abhängt. Raum und Zeit sind dynamische Größen, die Einfluss auf die Bewegung von Körpern haben.
- Die Zeit spielt in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle. Uhren in der Nähe eines massereichen Objekts gehen aufgrund der Gravitationswechselwirkung langsamer als Uhren, die sich in weiter Entfernung von der Masse befinden.

Erst mit seiner Allgemeinen Relativitätstheorie war es Einstein möglich, die Konzepte Relativität und Gravitation zu vereinen. Um diese Aufgabe zu lösen, musste die Vorstellung, dass Raum und Zeit unabhängig voneinander sind, aufgegeben werden. Die schon angesprochene Raumzeit (Kapitel *Gleichzeitigkeit*) ist eine dynamische Größe, die Materie verzerrt und durch die Bewegung von Körpern beeinflusst wird. Die Wechselwirkung zwischen Raumzeit und Materie wird durch Einsteins relativistische Theorie der Schwerkraft beschrieben. Die Schlüsselidee ist also, die Gravitation nicht als Ursache einer Kraft zu betrachten. Vielmehr ist die Gravitation eine Eigenschaft der Geometrie von Raum und Zeit. Einstein hat die in der Speziellen Relativitätstheorie aufgestellten Postulate auf alle Bezugssysteme erweitert:

- Die Gesetze der Physik beruhen auf Gesetzen, die in allen Bezugssystemen die gleiche Form haben, unabhängig von ihrem Bewegungszustand.
- Ein Beobachter in einem isolierten Labor kann durch kein Experiment herausfinden, ob die Masse durch die Gravitation oder eine entsprechende Beschleunigung des Laboratoriums hervorgerufen wird (träge Masse ist gleich schwerer Masse) (Äquivalenzprinzip).

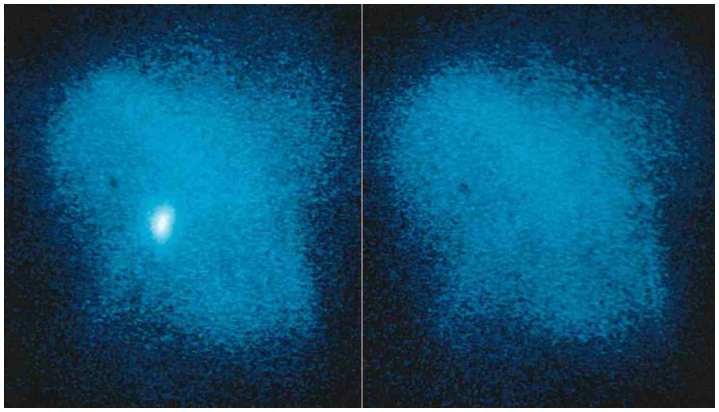


Abb. 8.1: Stroboskopischer Blick auf den Pulsar im Krebsnebel. Wenn die Röntgenbeobachtungen zeitlich auf die Frequenz des Pulsars abgestimmt sind, sieht man, wie der Pulsar an- und ausgeht [**?**].

Im Jahr1973 beobachtet Jocelyn Bell schnelle Änderuungen in dim Signal einer weit entfernten Radioquelle,die mit einer konstanten Periode von 1.337001 s auftraten, siehe Abb. 8.1. Zuerst vermutete sie, dass die Signale von Außerirdischen stammen könnten, die Aufmerksamkeit erregen wollten. Ein Stern konnte es auch nicht sein, denn man kann sich keinen Prozess vorstellen, der zu so schnellen Änderungen in einem Stern führen könnte.

Was war die Antwort?

Shortly after the discovery of pulsars I wished to present an interpretation of what pulsars were, at this first pulsar conference: namely that they were rotating neutron stars. The chief organiser of this conference said to me: *Tommy, if I allow for that crazy an interpretation, there is no limit to what I would have to allow.* I was not allowed five minutes floor time, although I in fact spoke from the floor. A few months later, this same organiser started a paper with the sentence, *It is now generally considered that pulsars are rotating neutron stars [**?**].*

Thomas Gold, 1967

Die Allgemeine Relativitätstheorie sorgt für Überraschungen. Eine erste Vorhersage, die spektrale Rotverschiebung von Licht im Gravitationsfeld wurde durch Pound und Rebka im Jahr 1959 nachgewiesen [**?**]. Weiter wird Licht durch die Gravitation abgelenkt, wie astronomische Beobachtungen nachwiesen.[2] Die Auffassung, dass die Schwerkraft

[2]Es ist eine interessante Fußnote der Geschichte, dass erst die Allgemeine Relativitätstheorie die experimentell ermittelte Ablenkung vorhersagt. Einstein hatte das Experiment 1913 vorgeschlagen, allerdings auf der Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie, die eine zu geringe Ablenkung vorhersagt (Faktor ZWEI). Der Ausbruch des 1. Weltkrieges führte zu einer Verzögerung, so dass das Experiment erst 1919 durchgeführt werden konnte. Die Übereinstimmung zwischen der 1915 vervollständigten Theorie der Allgemeine Relativitätstheorie und der astronomischen Beobachtung wäre weniger spektakulär ausgefallen. Ein Glücksfall für die Entwicklung der Physik.

Albert Einstein to George Ellery Hale[1]

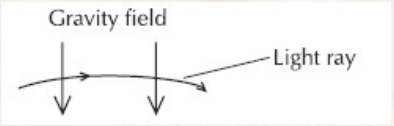
Translated and annotated by Bertram Schwarzschild

Einstein writes to Hale (1868–1938), director of the Mount Wilson Observatory near Los Angeles, seeking advice about the observability of the gravitational bending of light he had recently deduced from the equivalence principle.[2] Einstein's 1913 prediction is only half the deflection predicted by the full general theory of relativity, completed two years later.

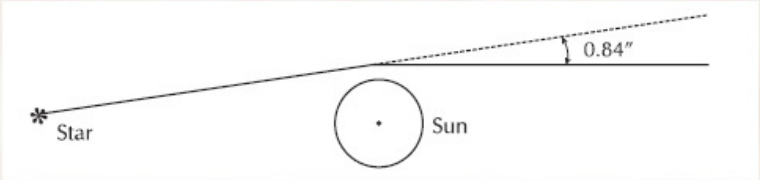
Zurich, 14 October 1913

Highly honored colleague,

A simple theoretical consideration makes it plausible to assume that light rays in a gravitational field experience bending.



At the edge of the Sun, the total deviation should be 0.84 arcseconds, and it should fall off like $1/R$ (R being the ray's [closest] distance from the Sun's center).



It would therefore be of the greatest interest to know how close to the Sun fixed stars could be seen *in daylight* with the strongest magnification.

On the advice of my colleague, Professor [Julius] Maurer, I therefore ask you to let me know what you—with your rich experience in these things—take to be achievable with the best modern instruments.

Yours very respectfully,

A. Einstein

Technische Hochschule Zürich

Hale responded that "there is no possibility of detecting the effect in full sunlight." But he did pronounce the alternative of exploiting a solar eclipse "very promising."[3]

The rest of the story has become Einstein lore: A German team set out to measure the effect in Russia during an upcoming 1914 eclipse. But the outbreak of war intervened. In a sense, that was fortunate, because the team would have been comparing the measurement with Einstein's first, incorrect *prediction. By the time Arthur Eddington's eclipse expedition set out in 1919, the predicted effect had doubled and the war was over. Eddington's confirmation of the general-relativistic bending of light, albeit with a large observational uncertainty, made Einstein instantaneously famous.*

References

1. *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 5, M. J. Klein, A. J. Fox, R. Schulmann, eds., Princeton U. Press, Princeton, NJ (1993), p. 559.
2. A. Einstein, proceedings of *Schweizerische Naturforschende Gesellschaft* **96**, part 2, 137 (1913), in *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 4, M. J. Klein, A. J. Fox, J. Renn, R. Schulmann, eds., Princeton U. Press, Princeton, NJ (1995), p. 475.
3. *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 5, M. J. Klein, A. J. Fox, R. Schulmann, eds., Princeton U. Press, Princeton, NJ (1993), p. 566.

Abb. 8.2: Einstein schreibt im Jahr 1913 an George Ellery Hale, Direktor des Mount-Wilson-Observatoriums, und bittet um Rat bezüglich der Beobachtbarkeit der gravitativen Lichtbeugung, die er kürzlich aus dem Äquivalenzprinzip abgeleitet hatte.

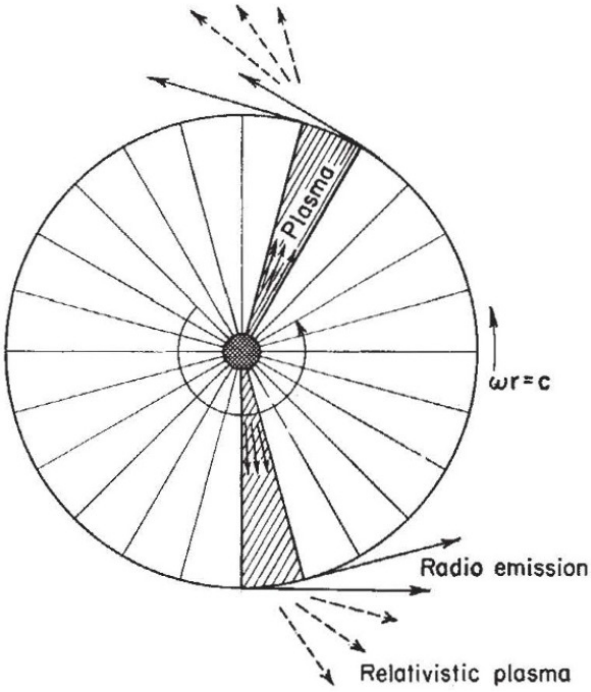


Abb. 8.3: Mechanismus der Emission von Radiowellen und relativistischen Gasteilchen. Der rotierende Neutronenstern besitzt eine mitrotierende Magentosphäre, bei der die Winkelgeschwindigkeit vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit ist. Plasma an der Oberfläche wird auf relativistische Geschwindigkeiten beschleunigt und aus der Magnetosphäre heraus geschleudert [**?**].

Licht ablenken kann, vertrat erstmals Simon Laplace. Schon im Jahr 1800 berechnete der bayrische Geodät Johann Söldner als 25jähriger diese Abweichung.[3] Tatsächlich verbiegt sich der Raum. Man nennt diesen Effekt Raumzeitkrümmung. Im Jahr 1913 schrieb Einstein an den Astronomen G. E. Hale und fragte, ob ein Test der Allgemeinen Relativitätstheorie ohne Sonnenfinsternis durchgeführt werden könne (Abb. 8.2). Gravitation bewirkt also Phänomene, die wir schon im Kapitel *Optik* kennen gelernt haben. Das Titelbild zeigt das berühmte Einsteinkreuz. Im Zusammenhang mit Gravitationslinsen kommen wir auf dieses Thema zurück. Auch die Existenz von Schwarzen Löchern oder Gravitationswellen wird durch die Theorie vorhergesagt und ist inzwischen bestätigt worden. Eine wichtige Rolle bei der Überprüfung der Allgemeinen Relativitätstheorie spielen Pulsare [**?**]. Dies sind schnell rotierende Neutronensterne, die als kosmische Uhren fungieren, da sie wie ein Leuchtturm in regelmäßigen Abständen Radiowellen in Richtung Erde aussenden, siehe Abb. 8.3.

Grossmann, you must help me or else I'll go crazy [**?**].

Albert Einstein an Marcel Grossmann (1912)

[3] Wenn also ein Lichtstrahl an einem Weltkörper vorbeigeht, so wird er durch die Attraktion desselben genötigt, anstatt in der geraden Richtung fortzugehen, eine Hyperbel zu beschreiben, deren konkave Seite gegen den anziehenden Körper gerichtet ist... Wenn man in der Formel für tan ω die Beschleunigung der Schwere auf der Oberfläche der Sonne substituiert, und den Halbmesser dieses Körpers für die Einheit annimmt, so findet man ω=0.84". Wenn man Fixsterne sehr nahe an der Sonne beobachten könnte, so würde man wohl darauf Rücksicht nehmen müssen. Da dies aber bekanntlich nicht geschieht, so ist auch die Perturbation durch die Sonne zu vernachlässigen [**?**].

Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Relativitätstheorie

- Gravitation oder beschleunigte Bewegung?
- Licht wird im Gravitationsfeld abgelenkt
- Uhren im Gravitationsfeld gehen langsamer
- interferometrischer Nachweis von Gravitationswellen

Kapitel 1
Relativistisches Äquivalenzprinzip — mechanics

Kapitel 2
Gravitationslinsen — optics, astro

Kapitel 2
Zeitrechnung — astro

Kapitel 4
Gravitationswellen — electro, optics, astro

8.1 Relativistisches Äquivalenzprinzip



*Einstein:*Was ich an Ihrer Kunst am meisten bewundere, ist ihre Universalität. Sie sagen kein Wort, aber die ganze Welt versteht Sie!
Chaplin: Stimmt. Aber Ihre Kunst ist noch größer! Die ganze Welt bewundert Sie, auch wenn keiner ein Wort davon versteht, was Sie sagen.

Albert Einstein und Charlie Chaplin im Gespräch, 1931

Das Erste Newtonsche Gesetz haben wir im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie verwendet. Es ging um Bezugssysteme, die sich zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. In diesen Systemen wirkt auf einen ruhenden Körper keine Kraft. Anders im Zweiten Newtonschen Gesetz. Das Gesetz sagt aus, dass eine Kraft wirkt, wenn ein Körper eine Beschleunigung erfährt, siehe Abb. 8.4. Weiter erinnern wir uns an:

Masse hat ein Körper, wenn er schwer ist.

Diese Eigenschaft der Anziehung zweier Massen wird durch das Newtonsche Gravitationsgesetz beschrieben

$$F_G = G_N \frac{m_s \cdot M}{r^2} \tag{8.1}$$

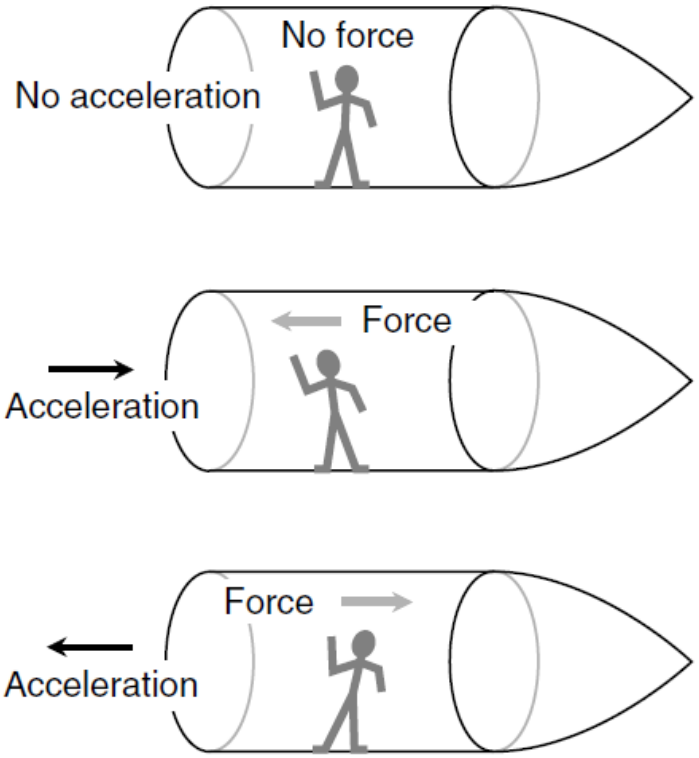


Abb. 8.4: Wenn ein Raumschiff nicht beschleunigt, gibt es keine Kraft auf die Objekte in seinem Inneren. Bei einer Beschleunigung der Rakete, ergibt sich eine Kraft auf die Objekte im Innern [**?**].

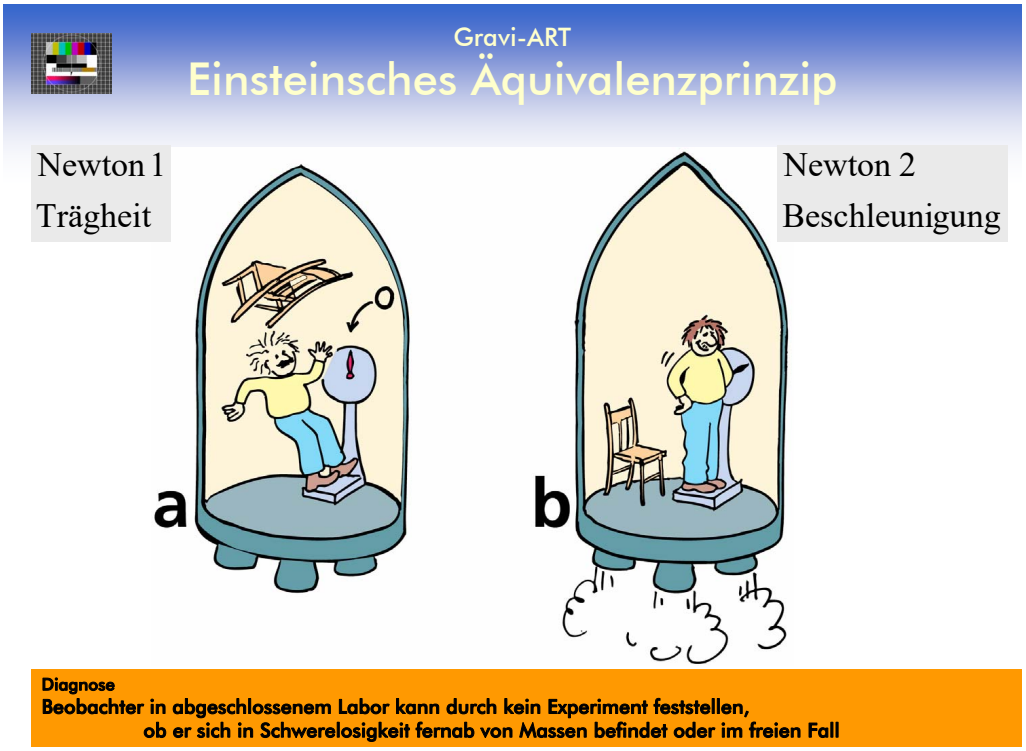
wobei m_s, M zwei Massen, r ihr Abstand und G_N die Gravitationskonstante[4] ist. Die Bestimmung von G_N geht auf Cavendish zurück, der 1898 sein berühmtes Drehwaagen-Experiment durchführte. Man spricht hier von schwerer Masse m_s.

Eine Masse m_t ganz anderer Art kommt im Zweiten Newtonschen Gesetz vor

$$F = m_t \cdot a \tag{8.2}$$

wobei a die Beschleunigung ist. Hier ist die Masse ein Maß für den Widerstand, den ein Körper der Änderung seiner Geschwindigkeit entgegensetzt. Bei gleicher Kraft ist die Beschleunigung eines Körpers umso geringer, je größer seine Masse ist, und umgekehrt. Man spricht hier von träger Masse. Schwere und träge Masse werden unabhängig voneinander definiert und die Frage stellt sich, ob es einen fundamentalen Unterschied gibt.

[4] $G_N = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$



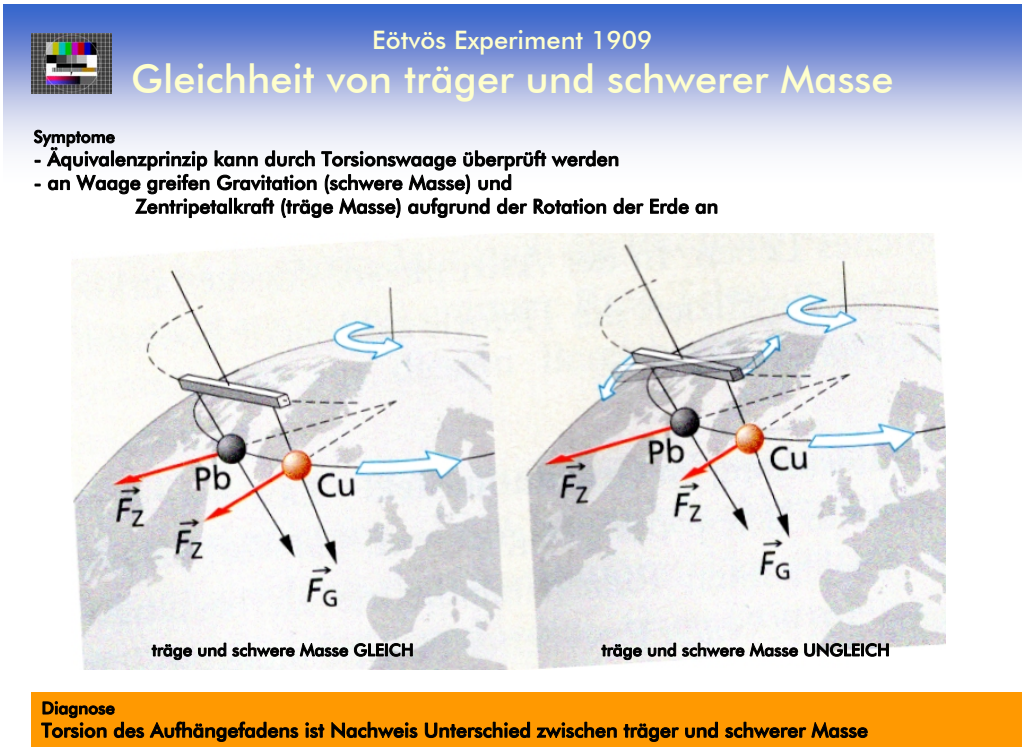
Neulich an Bord der Hansa4Ever

Stellen Sie sich Astronaut Anderthalbstein in einem Raumschiff vor. Leider hat der Konstrukteur vergessen, Luken einzubauen. Anderthalbstein führt nun Fall- und Wurfexperimente durch und bestätigt die Vorhersagen der Newtonschen Gesetze. Durch die Analyse seiner Studien kommt Anderthalbstein zu dem Schluss, dass er sich immer noch auf der Erde befinden. Weil die Rakete immer noch nicht gestartet ist schaltet er sein Funkgerät ein, um sich zu beschweren. Der Funker ist überrascht und teilt mit, dass Anderthalbstein schon längst gestartet ist und sich sein Gefährt schon mit konstanter Beschleunigung von $9.81\,\mathrm{m/s^2}$ durchs All bewegt.

Was soll uns die kleine Anekdote sagen?

Eine Person in einem abgeschlossenem Labor kann durch kein Experiment feststellen, ob er sich in Schwerelosigkeit fernab von Massen befindet oder im freien Fall. Gravitation und Beschleunigung sind äquivalent. Die Werte von a und g kann man bestimmen. Es gibt aber keine Möglichkeit, die Ursache der Kraft zu erfassen.

Zur Demonstration von Schwerelosigkeit im Unterricht, gibt es eine Reihe von einfach zu realisierenden Experimenten [? ? ? ? ?].



Schwere und träge Masse

In the early 20th century Roland von Eötvös used a torsion balance which compared the gravitational force on two objects composed of different substances with the centrifugal force on those objects. This allowed him to demonstrate the equality of gravitational and inertial mass to one part in a billion [**?**].

Diese Gleichheit von träger und schwerer Masse nennt man das Einsteinsche Äquivalenzprinzip [**?**]. Tatsächlich geht der Ansatz von Einstein deutlich über die Mechanik hinaus. Es postuliert, dass dass das Äquivalenzprinzip für alle Gesetze der Physik gültig ist!

Wie kann man die Unterschiede zwischen träger und schwerer Masse experimentell auflösen?

Eötvös hat dazu ein cleveres Experiment mit einer Torsionswaage durchgeführt [**?**]. Abb. 8.5 zeigt ein Schema des historischen Aufbaus. Die Grundidee ist, dass die schwere Masse durch Gravitation und die träge Masse durch die Zentripetalkraft unabhängig voneinander beeinflusst wird. Beide Kräfte sind auf der Erde ohne jeden Aufwand verfügbar. Die Gravitationskraft wird durch die Masse der Erde und die Zentripetalkraft durch die Erdrotation bereit gestellt. Sind beide Kräfte gleich, sollte sich kein Drehmoment aus-

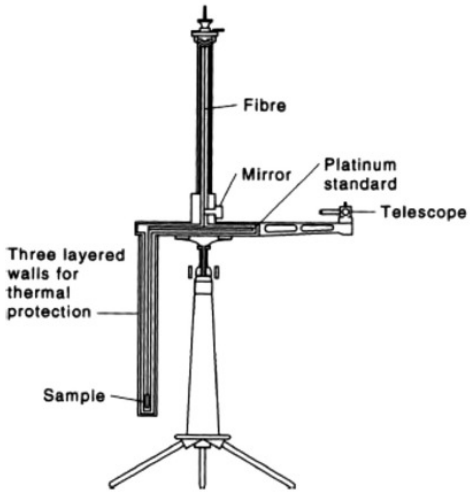


Abb. 8.5: Experimenteller Aufbau des Experiments, wir es von Lorand Eötvös verwendet wurde, um zu überprüfen, ob Körper aus unterschiedlichen Materialien in voneinander abweichende Richtungen fallen [**?**].

bilden und die Torsionswaage bleibt in ihrer Ruhestellung. Stimmen dagegen die beiden Massen nicht überein, ergibt sich ein Drehmoment und der Faden verdrillt sind. In seinem Experiment konnte Eötvös mit einer Genauigkeit von 10^{-8} keinen Unterschied zwischen schwerer und träger Masse nachweisen. Damit wurde das Einsteinsche Äquivalenzprinzip bestätigt. Vor einiger Zeit wurde das Eötvös-Experiment an Bord eines Satelliten wiederholt und die Auflösung signifikant verbessert [**?**]. Es gibt also keinen Zweifel daran, dass träge und schwere Masse äquivalent sind.

Ein Beispiel aus der Science Fiction Welt

Wie sieht es mit Antimaterie aus? In den 1950er Jahren erwachte das Interesse an der Science-Fiction-Idee der Antigravitation. Bei diesem Konzept wurde spekuliert, dass sich Materie und Antimaterie gegenseitig abstoßen würden. Jetzt hat man dieses Phänomen untersucht, wobei die experimentelle Schwierigkeit darin besteht, dass die Gravitation im Vergleich zu den andren drei Wechselwirkungen extrem schwach ist und Antimaterie bei jeder Berührung mit normaler Materie zerstrahlt (Kapitel *Einsteingleichung*). Im Experiment wurden Antiwasserstoffatome fallen gelassen. Die Ergebnisse stellten keinen Unterschied zwischen Materie und Antimaterie fest. Man konnte auch eine abstoßende Schwerkraft, also Antigravitation zwischen Erde und Antimaterie ausschließen.

The MICROSCOPE satellite mission has tested the equivalence principle with unprecedented precision, showing no deviations from the predictions of general relativity. Using data collected over 120 orbits around Earth, the team calculated the dimensionless Eötvös parameter, which quantifies the difference in the two masses' accelerations and should thus be zero unless the principle is violated. A statistical analysis of the data

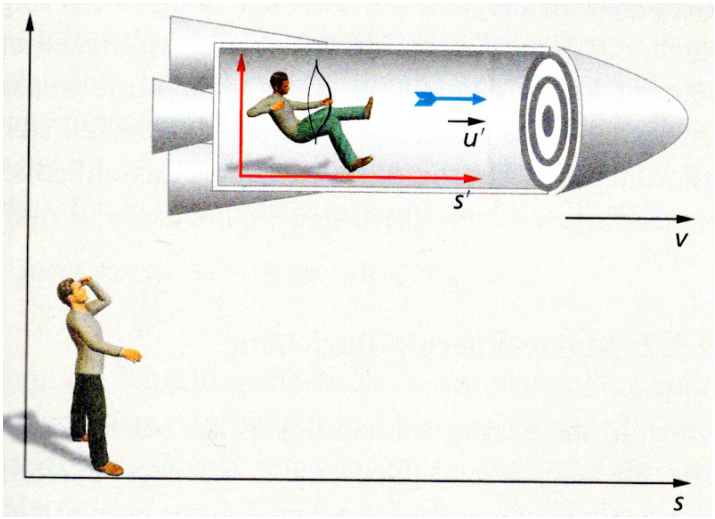


Abb. 8.6: Bewegung eines Pfeils in einem Raumschiff aus der Sicht eines Beobachters [?].

showed that they are consistent with zero with a precision of 10^{-14} [?].

Neulich wieder auf der Hansa4Ever

Ein Raumfahrer in einer Rakete schießt einen Pfeil auf eine 100 m entfernte Zielscheibe ab, siehe Abb. 8.6. Der Astronaut bestimmt die Flugzeit mit 1 s und schließt daraus, dass sich der Pfeil mit einer Geschwindigkeit von 100 m/s bewegt. Ein Beobachter auf der Erde beobachtet den Schuss und weiß natürlich, dass Effekte der Zeitdilatation und der Längenkontraktion auftreten. Für ihn verlängert sich die Flugzeit des Pfeils und die Entfernung zur Scheibe schrumpft. Er vermerkt in seinem Laborbuch Geschwindigkeit des Pfeils, die geringer ist als 100 m/s. Die Rakete wird langsamer immer schneller. Der Bogenschütze kümmert sich nicht darum und schießt Pfeil um Pfeil auf die Scheibe ab. Im Laborbuch steht, dass der Pfeil immer langsamer wird. Der Raumfahrer schreibt dem Laboranten, dass er seinen Bogen stets mit der gleichen Kraft spannt. Der Beobachter auf der Erde deutet seine Beobachtung folgendermaßen: Es gibt eine Kraft, die die Beschleunigung des Pfeils hemmt. Als Ursache vermutet er eine größere Trägheit des Pfeils und somit eine höhere träge Masse.

Einstein's birthday present

Ein einfaches, aber sehr beeindruckendes Experiment ist Einsteins Geburtstagsgeschenk, siehe Abb. 8.7. Es besteht aus einem Trichter aus dem an einem Gummi oder Feder gehalten ein kleiner Ball hängt. Die Aufgabe ist es, den Ball in den Trichter zu bekommen. Hört sich einfach an, aber glauben sie mir, die wenigsten Personen finden den Trick

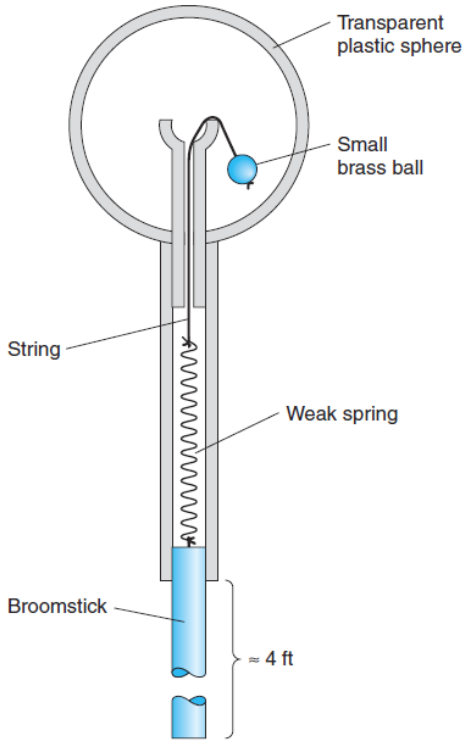


Abb. 8.7: Experiment zum Äquivalenzprinzip. Ein Geburtstagsgeschenk von E. M. Rogers an Albert Einstein. Das Ziel ist es, die hängende Kugel in den Becher zu befördern. Die Feder ist gedehnt, aber zu schwach, um den Ball im Ruhezustand hineinzuziehen [**?**].

heraus.

Link to video **Einstein's Birthday Present**

Einstein began to walk down the corridor toward the study. Suddenly he turned and called: *Wait. Wait. I must show you my birthday present.* As I returned to the study Miss Dukas explained to me that Eric Rogers, who teaches physics at Princeton, had made a gadget for Einstein as a present for his 76th birthday, and that Professor Einstein had been delighted with it. Back in the study, I saw Einstein take from the corner of the room what looked like a curtain rod five feet tall, at the top of which was a plastic sphere about four inches in diameter. Coming up from the rod into the sphere was a small plastic tube about two inches long, terminating in the center of the sphere. Out of this tube there came a string with a little ball at the end. *You see,* said Einstein, *this is designed as a model to illustrate the equivalence principle. The little ball is attached to astring, which goes into the little tube in the center and is attached to a spring. The spring pulls on the ball, but it cannot pull the ball up and into the little tube because the spring is not strong enough to overcome the gravitational force which pulls down on the ball.* A big grin spread across his face and his eyes twinkled with delight as he said:

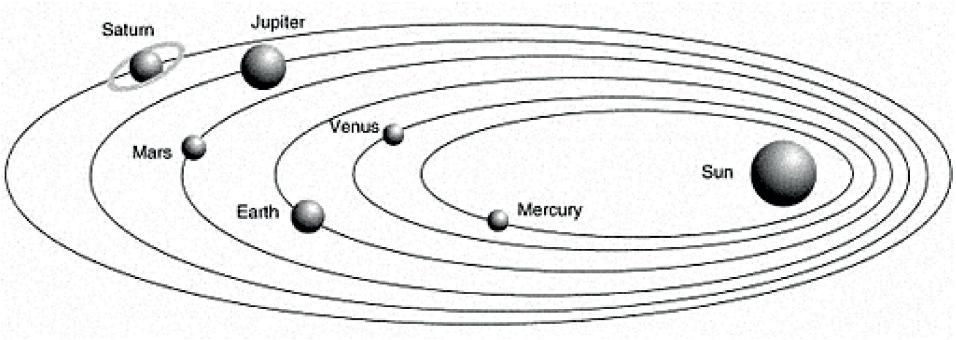


Abb. 8.8: Keplerbahnen der Planeten um die Sonne.

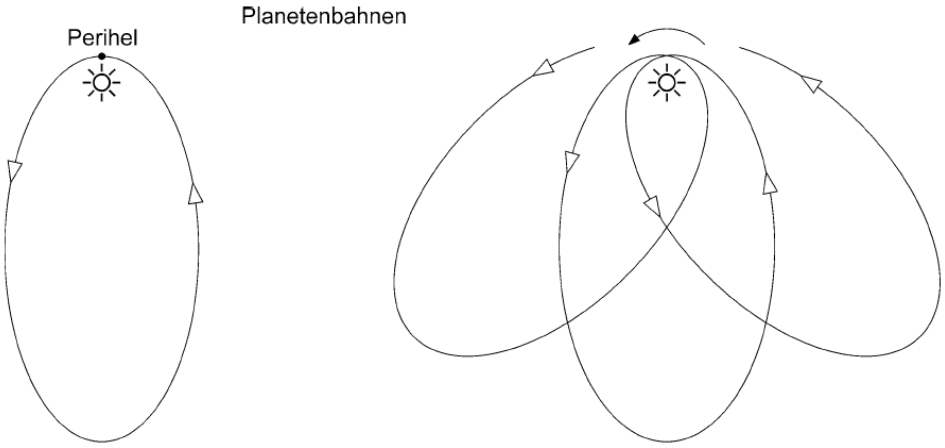
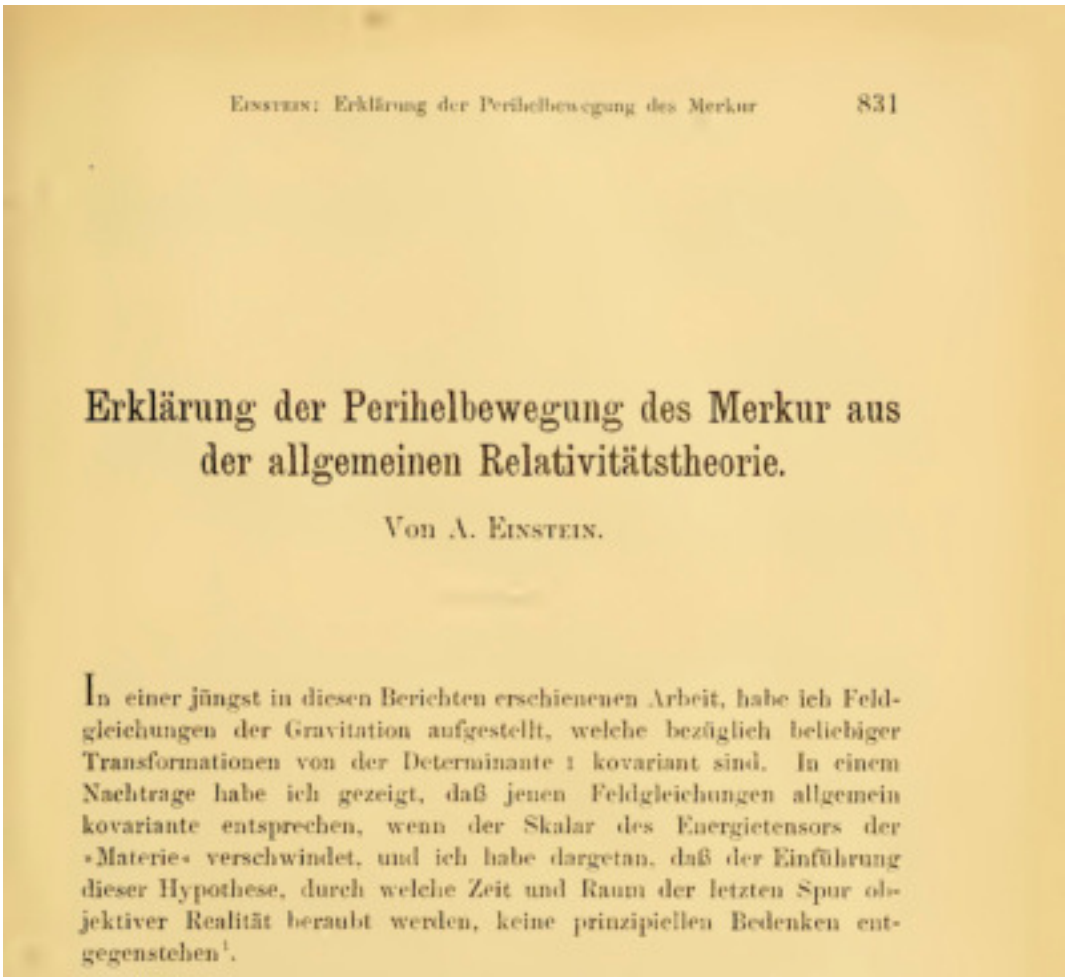


Abb. 8.9: Nach der Newtonschen Mechanik würde ein einzelner Planet stets auf einer stabilen Ellipsenbahn um seine Sonne kreisen (links). Einstein sagte eine Periheldrehung, also eine stetige Änderung des sonnennächsten Bahnpunktes, voraus, was in einer Rosettenform des Planeten resultiert (rechts).

And now the equivalence principle. Grasping the gadget in the middle of the long brass curtain rod, he thrust it upward until thesphere touched the ceiling. *Now I will let it drop*, he said, *and according to the equivalence principle there will be no gravitational force. So the spring will now be strong enough to bring the little ball into the plastic tube.* With that he suddenly let the gadget fall freely and vertically, guiding it with his hand, until the bottom reached the floor. The plastic sphere at the top was now at eyelevel. Sure enough, the ball nestled in the tube.

Bernad Cohen, Scientific American, July 1955



EINSTEIN: Erklärung der Perihelbewegung des Merkur 831

Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. EINSTEIN.

In einer jüngst in diesen Berichten erschienenen Arbeit, habe ich Feldgleichungen der Gravitation aufgestellt, welche bezüglich beliebiger Transformationen von der Determinante 1 kovariant sind. In einem Nachtrage habe ich gezeigt, daß jenen Feldgleichungen allgemein kovariante entsprechen, wenn der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet, und ich habe dargetan, daß der Einführung dieser Hypothese, durch welche Zeit und Raum der letzten Spur objektiver Realität beraubt werden, keine prinzipiellen Bedenken entgegenstehen[1].

Abb. 8.10: Veröffentlichung von Albert Einstein, in dem er die Periheldrehung des Merkur auf der Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie erklärt [**?**].

Die Bahn des Merkur

Im Jahr 1859 veröffentlichte Urbain Le Verrier, Direktor des Pariser Observatoriums, Beobachtungen zu einer Anomalie in der Bahn von Merkur. Die Präzession des Perihels[5] von Merkur hatte eine Präzession von 574 Bogensekunden pro Jahrhundert. Da er vermutete, dass die anderen Planeten die Ursache seien, berechnete er die Präzessionsrate nach Newton mit 531 Sekunden pro Jahrhundert. Woher die fehlende Zeitspanne von 43 Sekunden blieb unklar. Vermutet wurde auch, dass ein noch nicht entdeckter Planet die Ursache sei.

Nach der Newtonschen Mechanik sollte sich der Planet auf Keplerbahnen um die Sonne bewegen, siehe Abb. 8.8. Dies sind elliptische Bahnen, wobei dem in einem der Brennpunkte die Sonne steht. Dabei ist die Bahn stabil, d.h. man erwartet, dass die Planeten

[5]Punkt der geringsten Entfernung zur Sonne

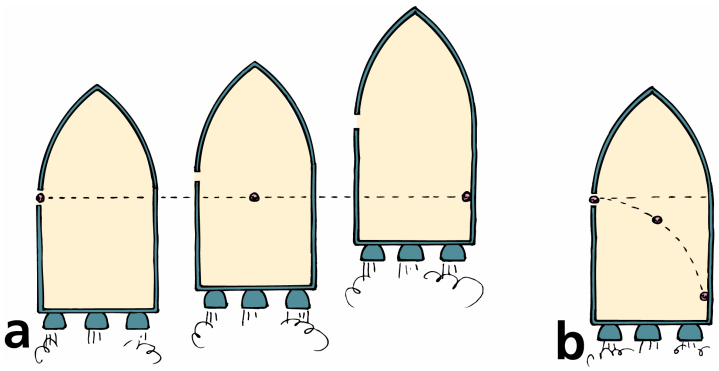


Abb. 8.11: Lichtausbreitung aus der Sicht eines externen Beobachters.

nach jedem Umlauf wieder an derselben Position im All auftauchen, siehe Abb. 8.9, links. Tatsächlich beeinflussen Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie und dabei wesentlich das Gravitationsfeld der Sonne die Bahnen der Planeten. Die Bahn des Planeten sind keine geschlossenen Ellipsen, sondern eine Art Rosette, bei der sich der sonnennächste (Perihel) und der sonnenfernste Bahnpunkt (Aphel) bei jedem Umlauf ein wenig verschieben, siehe Abb. 8.9, rechts. Insbesondere gilt des für den sonnennächsten Planeten Merkur, der diesen Effekten besonders stark ausgesetzt ist. Für Merkur erwartet man eine geringe Perihelionbewegung des Merkur. Tatsächlich ist der ermittelte Wert doppelt so groß. Einstein [**?**] berechnete die Perihelbewegung des Merkur und konnte auf der Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie die beobachtete Rosettenbewegung erklären, siehe Abb. 8.10. Die genaue Rechnung ergibt folgenden Ausdruck für den Perhelwinkel δ [**?**]:

$$\delta \quad = \tag{8.3}$$

Die Ablenkung eines Lichtstrahls, der in der Entfernung D an einer Masse M vorbeifliegt beträgt [**?**]:

$$\Theta = \frac{2\,G_N}{c^2}\frac{M}{D} \tag{8.4}$$

Astronomen bestimmen die Rosettenbewegung, indem sie in jeder Periode den sonnennächsten Punkt ausmessen. Deshalb nennt man den Effekt relativistische Periheldrehung. Im Vergleich zur Gesamtperipeldrehung beträgt die Korrektur etwa 7%. Aufgrund seiner sonnennahen Bahn ist beim Merkur die relativistische Korrektur am größten. An Venus, Erde und Mars konnte der Effekt aber ebenfalls nachgewiesen werden.

Der Korrekturfaktor zum Newtonschen Gravitationsgesetz ist

$$\gamma_{ART} = \left(\sqrt{1 - \frac{2G_N \cdot M}{R \cdot c^2}}\right)^{-1} \tag{8.5}$$

Man sieht, dass der Korrekturterm für große Abstände R gegen Null geht. Insofern ist für solche Fälle das Newtonsche Gravitationsgesetz eine hervorragende Näherung. Der

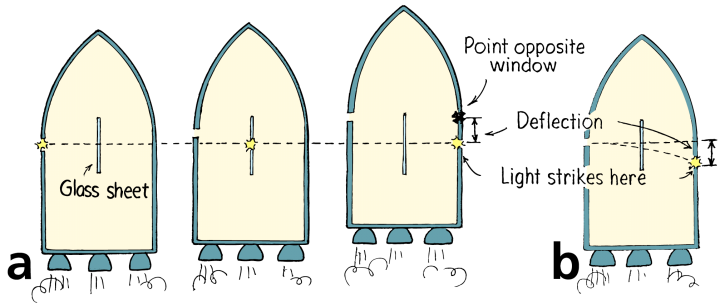


Abb. 8.12: Wie Abb. 8.11, aber der Sicht eines Beobachters im Raumschiff.

Einfluss strebt bei schwarzen Löchern gegen Unendlich. Die Gravitationskraft nähert sich dem Wert Unendlich.

Licht werfen

Nun machen wir ein weiteres Gedankenexperiment mit unserem etwas verwirrten Raumfahrer Anderthalbstein und schauen uns Wurfparabeln an. Dazu werfen wir in einem waagerechten Wurf einen Stein durch die Luke eines beschleunigenden Raumschiffs, siehe Abb. 8.11. Der Raumfahrer hat gar gar nicht bemerkt, dass die Luke offen steht und er steht außerdem mit dem Rücken zur Öffnung. Er beobachtet, dass der Stein an ihm vorbei fliegt und fällt. Anderthalbstein kommt zu dem Schluss, dass der Stein aufgrund der Gravitation fällt und er immer noch nicht gestartet ist. Alles klar. Die Rückfrage ergibt das bekannte Dilemma. Wieder kann der Raumfahrer nicht unterscheiden, ob er sich auf der Erde oder schon im Weltraum befindet.

Es gibt keinen messbaren Unterschied zwischen der Wirkung eines homogenen Gravitationsfeldes und der Wirkung einer beschleunigenden Kraft.

Nun foppen wir ihn ein weiteres Mal. Diesmal senden wir einen Lichtstrahl durch die Luke, siehe Abb 8.12. Anderthalbstein sieht den Lichtfleck auf der gegenüber liegenden Wand, dreht sich sofort um und stellt fest, das das Fenster durch den der Lichtstrahl eingefallen ist, sich auf einer anderen Höhe befindet. Anderthalbstein weiß jetzt, dass er sich in einem beschleunigenden Raumschiff befindet. Nach den Postulaten der Speziellen Relativitätstheorie ist ihm klar, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist und der Effekt der scheinbaren Lichtablenkung durch die Bewegung der Rakete kommt. Er bedankt sich bei der Bodenstation, bekommt aber nur die ausweichende Antwort, dass es mit dem Start noch etwas dauern könnte.

Fazit: Wenn der Raumfahrer keine Kenntnis über seinen Bewegungszustand hat, kann er NICHT zwischen Gravitation und beschleunigter Bewegung unterscheiden. Auch anhand eines Experiments mit Licht kann er seine Situation nicht klären. Damit kommen wir zu einem völlig überraschenden Resultat:

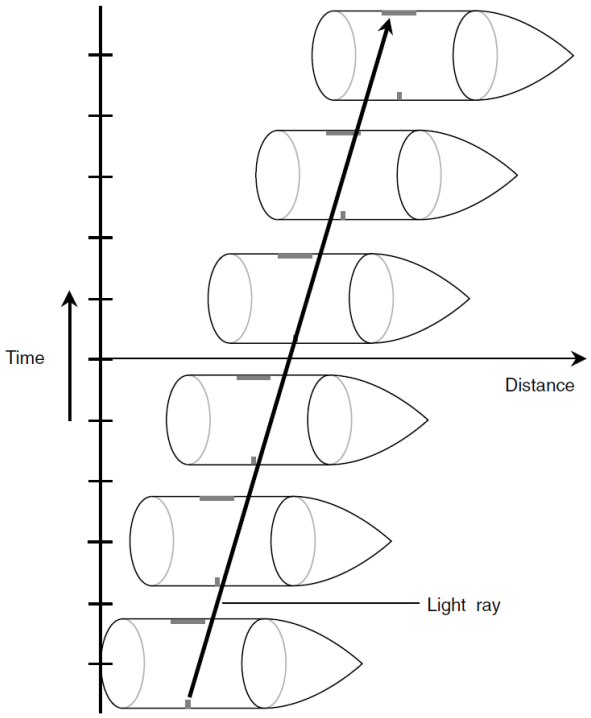


Abb. 8.13: Von einem *ruhenden* Bezugssystem außerhalb des Raumschiffes aus betrachtet, ist es die Beschleunigung der Rakete, die dafür sorgt, dass sich der Lichtstrahl nicht mehr geradlinig ausbreitet, so dass dieser abgelenkt auf die gegenüberliegende Wand trifft [**?**].

Licht wird durch ein Gravitationsfeld abgelenkt!

Analog zu den Einsteinschen Postulaten zur Speziellen Relativitätstheorie, kann man die Phänomene, die in der Allgemeinen Relativitätstheorie beobachtet werden, in zwei Postulaten zusammenfassen:

1. Die Naturgesetze haben für Beobachter in jedem Bezugssystem, unabhängig von möglichen Beschleunigungen des Systems, die gleiche Form.

2. Für jeden Ort ist ein Gravitationsfeld gleichbedeutend mit einem beschleunigten Bezugssystem ohne Gravitationseinflüsse. (Äquivalenzprinzip)

Abb. 8.13 verdeutlicht das Experiment nochmals aus der Sicht eines ruhenden Beobachters. Eine weitere Konsequenz: Ein frei fallender Beobachter würde feststellen, dass sich das Licht gradlinig ausbreitet.

Was ist Gravitation? Zur Anschauung des Modells des expandierenden Universums (Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*) hatten wir einen Luftballon mit Markierungen versehen und ihn dann weiter aufgeblasen. Drückt am den Ballon an einer Stelle ein, würde

ein Murmel in die Vertiefung hereingleiten. Stellt man sich die Vertiefung als Sonne und die Murmel als Planet vorstellen, dann hat man eine Vorstellung davon, wie Gravitation wirkt. Nach Einsteins Theorie ist Gravitation eine Krümmung des Raumes. Je näher man der Sonne kommt, desto größer ist die Raumkrümmung. Die Wege der Planeten, Sterne, Galaxien sind die kürzest möglichen Pfade in dieser Geometrie. Man nennt sie Geodäten.

Die mathematische Beschreibung der Phänomene der Allgemeinen Relativitätstheorie mit Hilfe der Differentialgeometrie ist aufwendig und soll hier nicht aufgearbeitet werden. Wie geht man prinzipiell vor? Die Spezielle Relativitätstheorie definiert Masse als eine eigenständige Energieform. Auf dieser Erkenntnis wird die Gravitation als ein Effekt behandelt, der zu einer Krümmung der Raumzeit[6] führt. Raumzeit ist ein Konzept, das den dreidimensionalen Raum und Zeit mit einander verschränkt. Raumverzerrungen ergeben sich durch den Energieeintrag Masse. Die mathematische Grundlage liefern die Einsteinschen Feldgleichungen:[7]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\,\pi \frac{G_N}{c^4} \cdot T_{\mu\nu} \tag{8.6}$$

Die linke Seite der Gleichung befasst sich mit der Geometrie der Raumzeit und die rechte Seite mit der Wirkung von Energie (Masse). Je massiver ein Objekt ist, desto mehr krümmt es die Raumzeit.

[6] *Lexikon:* Eine einfache Vorstellung über das Konzept **Raumzeit** erhält man über die Analogie einer in einem Rahmen gespannten Gummihaut. Ist die Oberfläche eben, erhält man eine flache Raumzeit. Dieser Fall tritt ein, wenn es in der Umgebung keine Massen gibt. Legt man eine Metallkugel auf die Gummihaut, krümmt sich die Haut und die Raumzeit erhält eine Delle oder eine gekrümmte Raumzeit. Information über die Zeit- und Raumdimension gehen dabei verloren. Die Tiefe der Delle ist ein Maß für die Krümmung der Raumzeit.

[7] Hierbei ist $R_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor, R der Krümmungsskalar und $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Ein Physikant hält sich in einem Labor auf, das sich mit einer konstanten Geschwindigkeit durch den Raum bewegt. Leider hat der Raum keine Fenster und keinen Internetzugang, so dass eine Kommunikation mit der Außenwelt nicht möglich ist. Wie bestimmt man die Reisegeschwindigkeit des Labors?[8]

(a) Man wirft einen Ball und bestimmt die Geschwindigkeitsänderung des Balls!

(b) Man bestimmt die Geschwindigkeitsänderung eines Laserstrahls!

(c) Eine klärende Messung ist nicht durchführbar!

Aufgabe 1.2: Zwei Kräfte wirken, wenn man sich auf eine konventionelle Badezimmerwaage stellt (Schwerkraft und Normalkraft N). Führt das das Experiment in einem Aufzug durch, beobachtet man dass die Anzeige hin und her schwankt. Ursache ist:[9]

(a) $m \cdot g$

(b) N

(c) beides

(d) Beides nicht relevant.

Aufgabe 1.3: Wenn man einen Flummi horizontal zwischen zwei parallele Platten wirft und er springt immer von links nach rechts, dann fällt er in einer Sekunde um 4.9 m. Stellen Sie sich vor, die Wände wären ideale Spiegel und sie schießen einen Lichtstrahl in die Anordnung und das wird hin und her reflektiert. In einer Sekunde fällt der Lichtstrahl um[10]

(a) 0 m.

(b) zwischen 0 und 4.9 m.

(c) 4.9 m.

(d) mehr als 4.9 m.

Aufgabe 1.4: *Zero g?* Finden Sie die Antwort zu der Frage, die in Abb. 8.14 gestellt wird [**?**]![11]

[8] Antwort: (c)
[9] Antwort: (b)
[10] Antwort: (c)
[11] Antwort: (c)

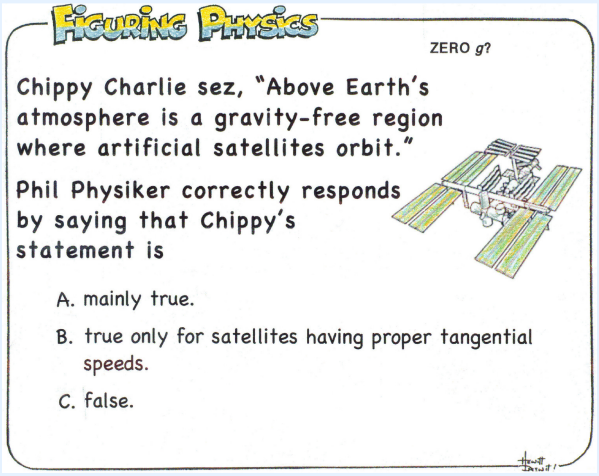


Abb. 8.14: *Zero g?* Zu Aufgabe 1.4.

Aufgabe 1.5: Ein Forscher behauptet: *Im gravitationsfreien Raum oberhalb der Erdatmosphäre kreisen die Satelliten!*[12]

(a) Das stimmt im wesentlichen!

(b) Stimmt, aber nur für Satelliten mit bestimmter Tangentialgeschwindigkeit!

(c) Das stimmt nicht!

[12] Antwort: (c)

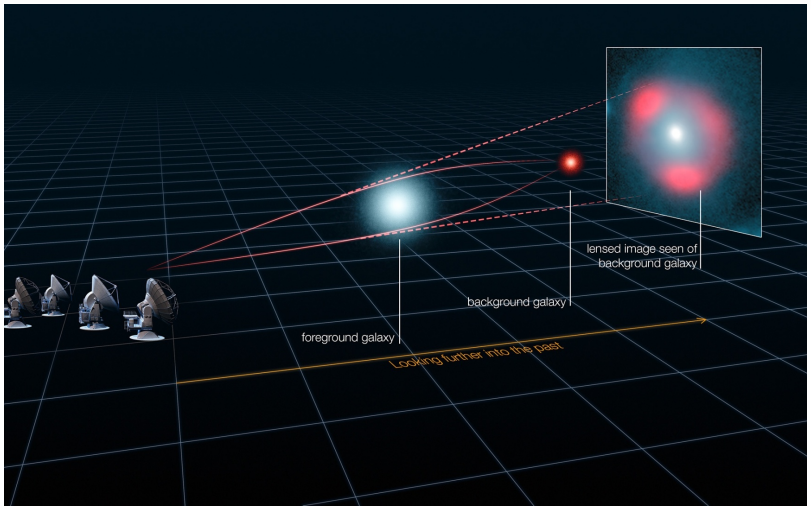
Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie unterscheidet sich die Allgemeine Relativitätstheorie in Bezug auf die Bezugssysteme von der Speziellen Relativitätstheorie?
2. Wie erkennen Astronomen den Unterschied zwischen den verschiedenen Arten von Rotverschiebungen?
3. Könnte ein Astronaut seine Armbanduhr benutzen, um die relativistische Zeitdilatation zu messen?
4. Ist die Schwerkraft entfernter Objekte die Ursache der Trägheit?
5. Wie ist es, an einem Ort ohne Schwerkraft zu sein?
6. Gibt es Gravitonen?

8.2 Gravitationslinsen

Thema ART

Gravitationslinsen



Ich saß im Berner Patentamt in einem Sessel, als mir plötzlich der Gedanke kam: Wenn sich ein Mensch im freien Fall befindet, wird er seine eigene Schwere nicht empfinden können. Mir ging ein Licht auf. Dieser einfache Gedanke beeindruckte mich nachhaltig. Die Begeisterung, die ich da empfand, trieb mich zur Gravitationstheorie.

Albert Einstein in Kyoto 1922

Der erste Nachweis der relativistischen Lichtablenkung gelang Arthur Stanley Eddington 1919. Eddington nutze die Ablenkung bei einem astronomischen Großereignis, einer Sonnenfinsternis. Licht eines Stern, welches nahe am Sonnenrand vorbei streicht, verbiegt sich. Dadurch ändert sich die Richtung, aus der uns das Licht eines entfernten Sterns erreicht. Die Position scheint am Firmament verschoben. Bei einer Sonnenfinsternis kann man Licht beobachten, dass nahe am Sonnenrand vorbeifliegt, ohne dass das grelle Sonnenlicht den Effekt überblendet. Durch einen Vergleich von photographischen Aufnahmen an anderen Tagen lässt sich feststellen, dass sich die Position des Sterns verschoben hat. Die Daten von Eddington bestätigten die Vorhersagen Einsteins. Tabelle 8.1 gibt einen Überblick über die gemessene Lichtablenkungen bei verschiedenen Sonnenfinsternissen. Darüber hinaus kann das Gravitationsfeld einer Sonne oder noch schwerer Objekte wie eine optische Linse wirken [**?**]. Galt diese Einsteinsche Vorhersage

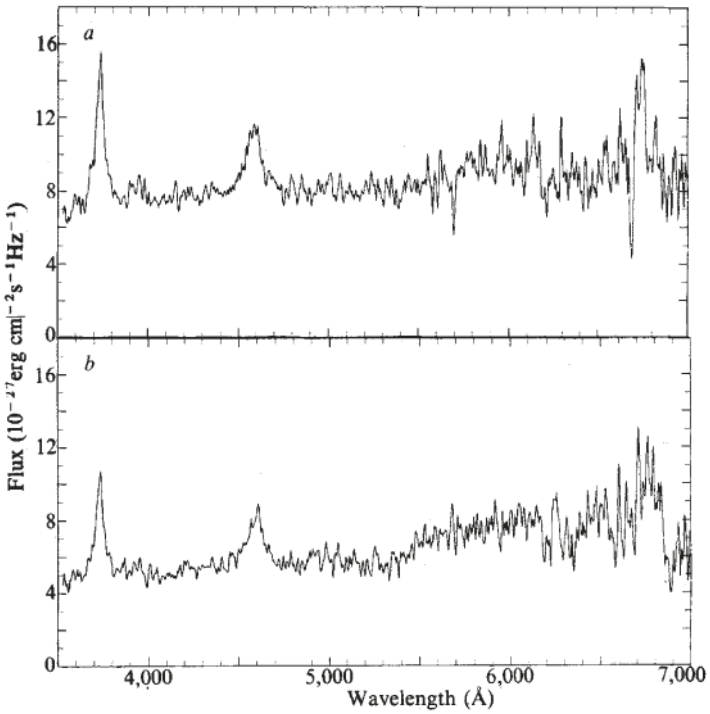


Abb. 8.15: Optische Spektren von 0957+561 A(a) und B(b), die zeigen, dass es sich bei den Quasaren um ein und dasselbe Objekt handelt [**?**].

zunächst als rein akademische Überlegung, wurde das Interesse der Forscher geweckt, als Astronomen im Jahr 1979 die erste Gravitationslinse entdecken [**?**]. Wir werden feststellen, dass Gravitationslinsen ein wichtiges Werkzeug der modernen Astronomie sind. Man kann aus der Lichtablenkung auch die Masse des Objekts ermitteln, wie kürzlich am Beispiel eines Weißen Zwergs gezeigt [**?**], oder den Radius eines Neutronensterns bestimmen [**?**]. Dazu wurde die Ablenkung der Emission aus der heißen magnetischen Polregion eines nahen Pulsars nahe dem Stern bestimmt. Die Messungen ergaben einen Radius von $9 \pm 3\,\mathrm{km}$.

Die Abbildung durch eine Gravitationslinse führt zu überraschenden Lichteffekten in den astronomischen Aufnahmen. So wurde aufgrund des geringen Abstands zunächst vermutet, dass es sich beim dem Objekt 0957+561 um einen Zwillingsquasar[13] handelt. Später erkannte durch einen spektroskopische Analyse, dass durch eine Gravitationslinse zwei Bilder ein und desselben Quasars entstehen, siehe Abb. 8.15 [**?**]. Die Effekte der

[13] *Lexikon:* Ein **Quasar** ist der extrem leuchtende aktive Kern einer Galaxis, der aus einem supermassiven Schwarzen Loch ($10^6 - 10^{10}\odot$) und einer gasförmigen Akkretionsscheibe besteht. Gas in der Scheibe heizt sich durch Reibung und setzt intensive elektromagnetische Strahlung frei. Quasare können eine Leuchtkraft entwickeln, die 10^3-mal höher ist, als die Strahlungsabgabe unserer gesamten Milchstraße. Der erste Quasar wurde von Maarten Schmidt entdeckt [**?**]. Der endgültige Name Quasar geht auf den Astrophysiker Hong-Yee Chiu zurück [**?**].[14] Der bislang am weitesten entferntest Quasar ist J0313-1806 mit $1.6 \cdot 10^9\odot$ (z=7.64, $13.03 \cdot 10^9$ Lj oder $670 \cdot 10^6$ Jahre nach dem Urknall) [**?**].

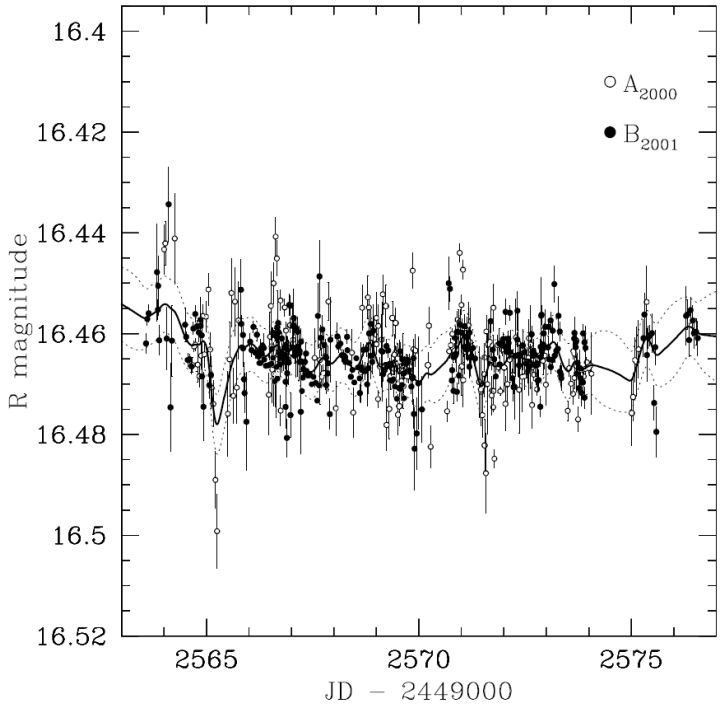


Abb. 8.16: Vergleich der im Januar 2000 gemessenen Helligkeitsschwankungen (A, offene Kreise) mit den im Jahr 2001 gemessenen Schwankungen März (B, ausgefüllte Kreise) (Zeitverzögerung 417.1 Tage) [**?**].

Raumkrümmung sorgen außerdem für eine Zeitverzögerung zwischen den beobachteten Spektren der beiden Abbilder des Quasars [**?**]. Für die Bestimmung des Zeitabstands nutze man Fluktuationen in der Helligkeit der beiden Lichtpunkte. Durch eine Verschiebung der Zeitentwicklung um 417 Tage ergab sich eine gute Übereinstimmung der Daten, siehe Abb. 8.16.

Oh leave the Wise our measures to collate

Jahr der Sonnenfinsternis	Gemessenen Ablenkung
1919	1.98”
1919	1.61”
1922	1.78”
1922	1.77”
1929	1.75”
1947	2.01”
1952	1.70”

Tab. 8.1: Vergleich der Lichtbeugung bei Sonnenfinsternissen aus Messungen zwischen 1919 und 1952 [**?**].

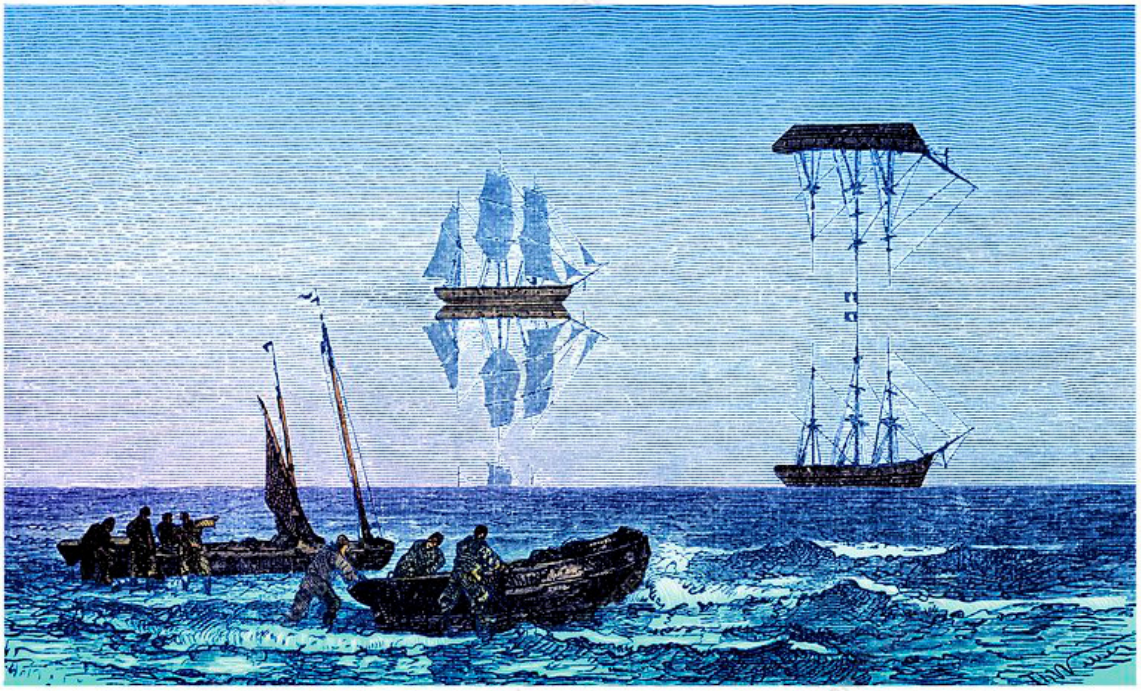


Abb. 8.17: Illustration aus dem 19. Jahrhundert zum optischen Naturerscheinung Fata Morgana [**?**].

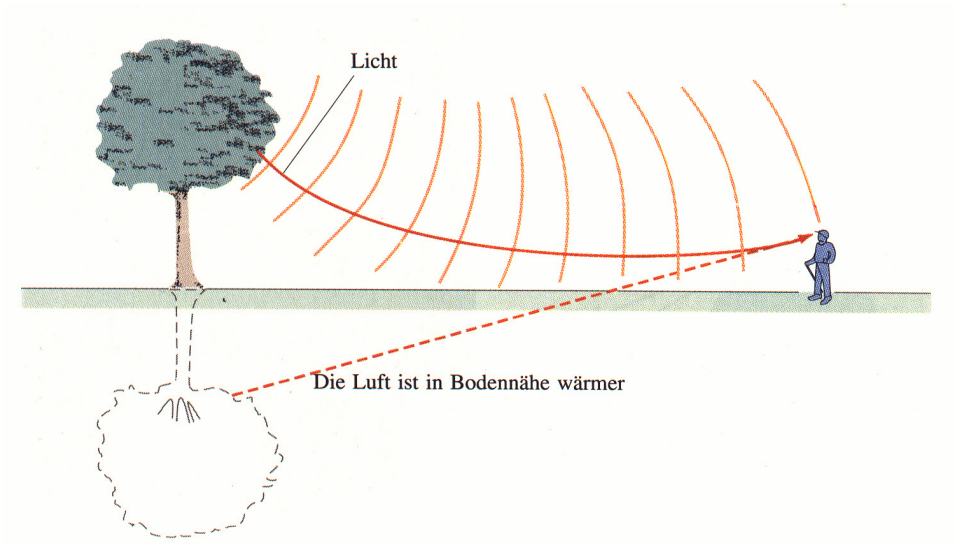


Abb. 8.18: Illustration, die das Phänomen der Fata Morgan verdeutlicht. Diese kommt aufgrund von Dichteunterschieden in der Atmosphäre zustande [**?**].

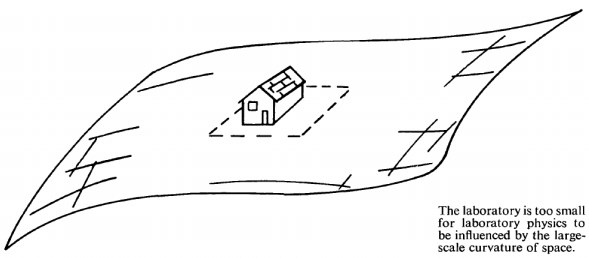


Abb. 8.19: Ein Haus ist zu klein, um von der Krümmung des Raums beeinflusst zu werden [**?**].

One thing at least is certain, LIGHT has WEIGHT,
One thing is certain, and the rest debate -
Light-rays, when near the Sun, DO NOT GO STRAIGHT.

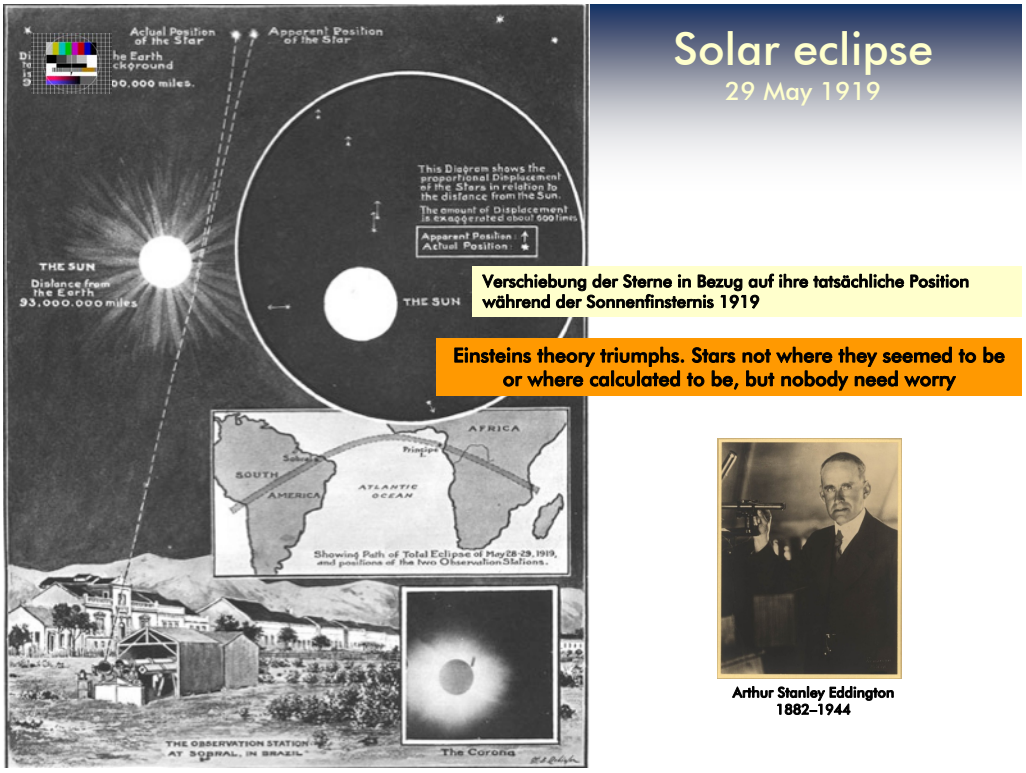
Arthur Eddington

Fata Morgana

Als Einstieg die Thematik ist es sinnvoll, einen ähnlich gelagerten Effekt aus dem Bereich der Vorlesung *Optik* zu betrachten. Hier haben wir ein ähnliches Phänomen kennen gelernt. Im Zusammenhang mit der Brechung von Licht haben sie das Naturereignis Fata Morgana kennengelernt, siehe Abb. 8.17 für die Darstellung des Phänomens auf einem Gemälde. Eine *Fata Morgana* entsteht, wenn kalte und warme Luft sich übereinander schichten. Und zwar befindet sich die warme oberhalb der kalten Luft. An der Grenzschicht ändert sich der Brechungsindex kontinuierlich und die Luft wird auf krumme Wege gelenkt, siehe Abb. 8.18. So entstehen Luftspiegelungen, die reale Objekte an Stellen auftauchen lassen, an der sie sich gar nicht befinden. Selbst mehrere hundert Kilometer weit entfernte Objekte können so für einen Beobachter sichtbar werden. Warum verwirrt uns diese Naturerscheinung? Das kommt daher, weil wir die Gesetze der geometrischen Optik verinnerlicht haben. Das Auge vermutet eine gradlinige Ausbreitung von Lichtstrahlen in der Luft und verlagert die Objekte an virtuelle Orte.

This is the most important result obtained in connection with the theory of gravitation since Newton's day, and it is fitting that it should be announced at a meeting of the society so closely connected with him... The result is one of the highest achievements of human thought.

J.J.Thomson 1919



Die Sonnenfinsternis von 1919

Lights All Askew in the Heavens

The New York Times (10.11.1919)

Im Jahr 1919 ergab sich eine sieben Minuten andauernde totale Sonnenfinsternis.[15] Sie wurde von Astronomen genutzt, um die Allgemeine Relativitätstheorie zu überprüfen [**?**]. Abbildung 8.20 zeigt die Sonnenfinsternis von 1919, wobei die damalige Aufnahme durch Bildverarbeitung in ihrer Auflösung verbessert wurde. Sie zeigt Details der Sonnenkorona, eine Protuberanz und Sterne des Sternbilds Stier. Die Position dieser Sterne wurden zur Überprüfung der Allgemeinen Relativitätstheorie herangezogen. Abb. 8.21 zeigt das Ergebnis der Analyse der Astronomen Arthur Eddington, Frank Dyson und Andrew Crommelin. Sie zeigt die Verschiebung der Sterne während der Sonnenfinsternis in Bezug zur Position der Sonne. Es zeigt sich eine klare Abhängigkeit. Sterne in der Nähe der Sonne werden stärker verschoben als weiter weg stehende. Die Verschiebung entspricht den Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie (durchgezogene Line) und ist doppelt so groß wie über die Newtonsche Mechanik berechnet (gepunktete Linie).

[15] Das oben gezeigte Bild erschien am 22.11.1919 im *The Illustrated London News*.

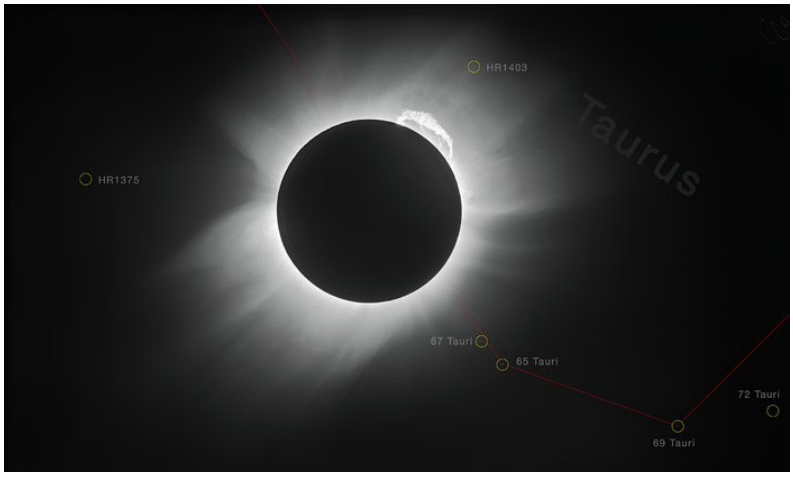


Abb. 8.20: Die Aufnahme zeigt die Sonnenfinsternis von 1919 und wurde durch die Anwendung moderner Bildverarbeitungstechniken aufgearbeitet. Dazu zählen Bildwiederherstellung, Rauschunterdrückung und die Entfernung von Abbildungsfehlern. Es zeigt Details in der Sonnenkorona, eine riesige Protuberanz am oberen Rand der Sonne und Sterne des Sternbilds Taurus, die zur Überprüfung der Allgemeinen Relativitätstheorie herangezogen wurden [**?**].

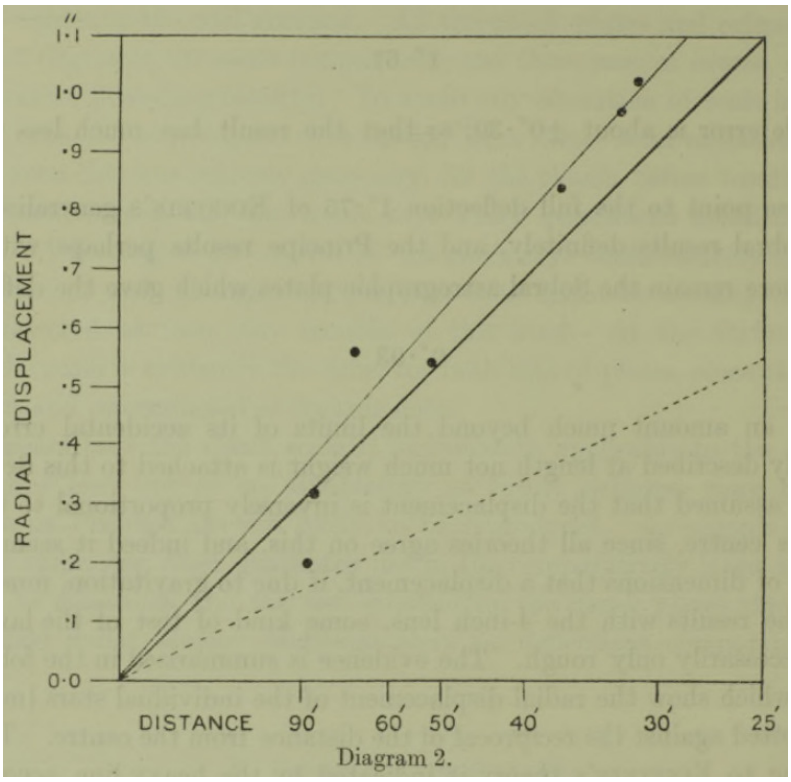


Abb. 8.21: A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919 [**?**]

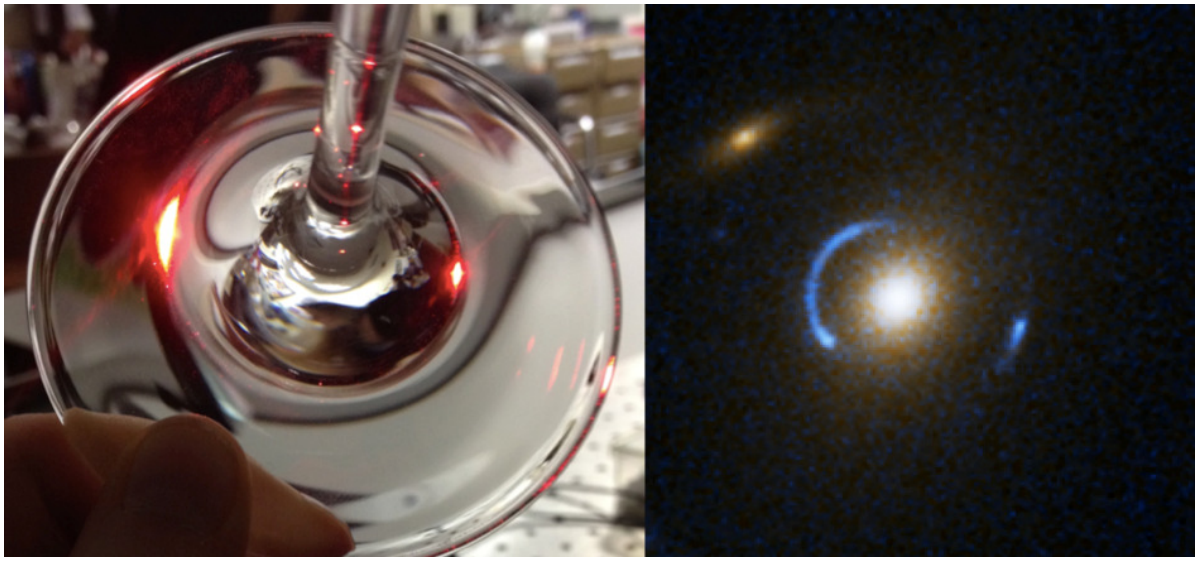


Abb. 8.22: Links: Zwei Bögen, die erscheinen, wenn eine LED durch den Boden eines Weinglases betrachtet wird. Rechts: Astronomisches Objekt SDSS J120540.43+491029.3 (Rotverschiebungen Objekt im Vordergrund z=0.215, Objekt im Hintergrund z=0.4808).

Man kann die Ablenkung der Lichttrajektorien (Ablenkwinkel Θ) nahe der Sonnenoberfläche berechnen [**?**]. In der Einheit Bogenmaß ergibt sich ein Winkel von:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{4 \cdot G_N \cdot M_{sun}}{R_{sun} \cdot c^2} \\ \Theta &= \frac{4 \cdot (6.67 \cdot 10^{-11} \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^2) \cdot (2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg})}{(7 \cdot 10^8\,\mathrm{m}) \cdot (3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \end{aligned} \tag{8.7}$$

Die Rechnung ergibt einen Wert von etwa einer Bogensekunde, also 0,00049^o.

Man kann sich eine Gravitationslinse mit einfachen Mittel selbst bauen. Dazu benötigt man nur eine LED und ein Weinglas. Abb. 8.22 zeigt links eine Struktur mit zwei Bögen, wenn man die LED durch den Boden des Weinglases betrachtet. Rechts ist ein astronomisches Objekt mit Namen SDSS J120540.43+491029.3 wiedergegeben, an dem einen ähnlichen Effekt beobachten kann.

Einsteinkreuz

Die Ablenkung von Licht durch massive Sterne eröffnet der Astrophysik neue Möglichkeiten der Fernbeobachtung. Abb. 8.23 zeigt, dass es zu einer Abbildung weit entfernter Objekte kommen kann, wenn sich auf der Sichtlinie ein massereiches Objekt befindet. Die dahinter liegenden Sterne werden vergrößert und tauchen sogar mehrmals auf den

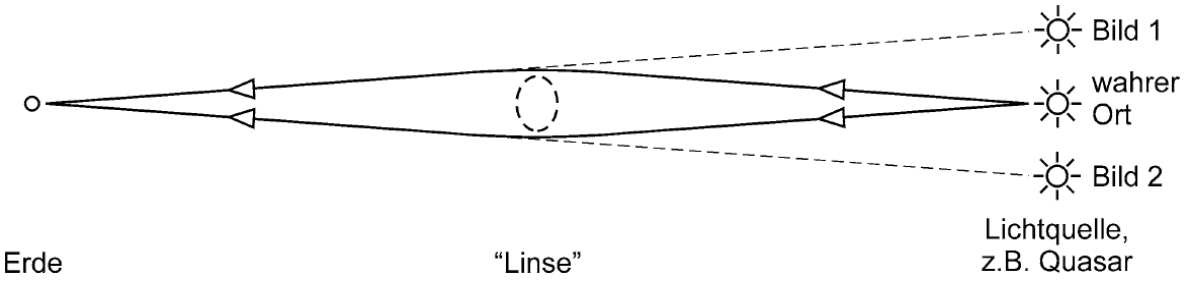


Abb. 8.23: Effekt einer Gravitationslinse auf die Abbildung eines entfernter Objekts, die zur Ausbildung eines Einsteinrings führt.

Photoplatten auf. Bei den Mehrfachbildern ist nicht nur deren Aufspaltung von Interesse. Das Licht der einzelnen Bilder legt durch das All unterschiedliche Wege zurück. Dies lässt sich nachweisen, wenn das abgebildete Objekt flackert. Manchmal sind diese Helligkeitsunterschiede nicht gleichzeitig. Die Art der Abbildung gibt außerdem Auskunft über die Zusammensetzung der Gravitationslinse. Es kann sich um Sterne, ein schwarzes Loch oder einen so genannten Galaxienhaufen handeln. Galaxienhaufen bestehen aus einer Vielzahl von Galaxien, die mit ihrer enormen Anziehungskraft ihre Umgebung beeinflussen. Sie wirken ebenfalls wie Gravitationslinsen. Astronomen sehen dadurch weit hinter dem Haufen liegende Objekte verzerrt, vergrößert und zum Teil auch deutlich in ihrer Leuchtkraft verstärkt. Die Abbildung 8.24 zeigt den Galaxienhaufen Abell 2218. Rechts oben sieht man die Verschmelzung zweier kleinerer Galaxienhaufen. Um den Haufen herum erkennt man Dutzende kleiner farbiger Lichtbögen. Dies ist das Licht junger Galaxien, die mehr als sechs Milliarden Lichtjahre hinter Abell 2218 liegen. Ohne den Gravitationslinseneffekts wären diese jungen Galaxien nicht sichtbar. Abell 2218 ist ein natürliches Brennglas. Abb. 8.25 zeigt weitere Beispiele für Einsteinringe. Einen weiteren Effekt stellt man fest, wenn man das Licht ferner Sterne beobachtet. Die kosmische Strahlung gibt Auskunft über Großereignisse wie Supernova-Explosionen. Diese schnellen Teilchen erreichen die Erde mit Lichtgeschwindigkeit. Bei der Analyse der Supernova 1987A (Abb. 8.26) stellte man fest, dass das optische Licht erst mit einer Verzögerung von 9 Monaten eintraf. Auch dies ein Effekt der Relativitätstheorie.

Die bekannteste Gravitationslinse wird von der Galaxie PGC 69457 $4 \cdot 10^6$ Lichtjahre von uns entfernt, siehe Abb. 8.27. Sie formt das so genannte Einsteinkreuz. Die Lichtquelle ist ein Quasar, der sich genau auf der Sichtlinie hinter der Galaxie befindet. Durch den Effekt der Gravitationslinse entstehen vier nahezu gleich helle Abbildungen des $8 \cdot 10^9$ Lichtjahre entfernten Quasars in Form eines Kreuzes.

Wie kann man nachweisen, dass es sich nicht um vier unterschiedliche Objekte handelt?

Dazu löst man das Licht der vier Objekte spektral auf. Abb. 8.28 zeigt eine spektroskopische Untersuchung des Einsteinkreuzes anhand einer charakteristischen Emissionslinie. Dabei stellt man fest, dass sich die optischen Spektren gleichen. Damit ist der Nachweis

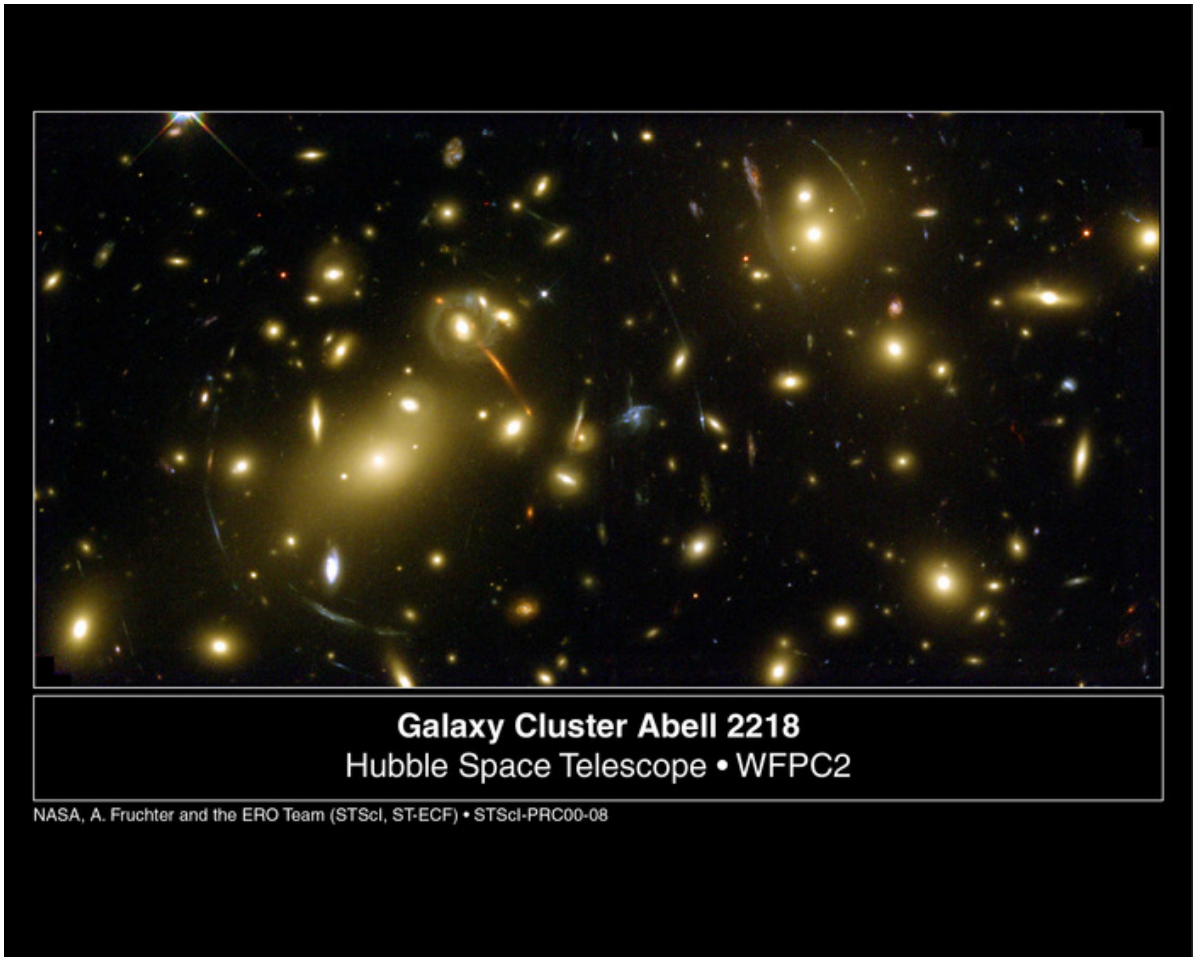


Abb. 8.24: Der Galaxienhaufen Abell 2218 ist so massereich und kompakt, dass seine Gravitation Licht dahinter liegenden Galaxien beugt und fokussiert. Als Resultat ergeben sich Mehrfachbilder dieser Hintergrundgalaxien, Abell 2218 ist $3 \cdot 10^9$Lj entfernt. Der Gravitationslinseneffekt führte zum Nachweis einer Galaxie mit einer rekordverdächtigen Rotverschiebung von 5.6 [**?**].

erbracht, dass es sich tatsächlich um das Vierfach-Abbild eines noch weiter entfernten astronomischen Objekts handelt.

Eine weitere besondere Gravitationslinse ist SDSS J162746.44-005357.5. Diese so genannten Einsteinringe (Abb. 8.29) entstehen durch zwei Galaxien, die nahezu perfekt hintereinander stehen. Die sichtbare Galaxie steht rot-weiß leuchtend im Vordergrund. Der blaue Ring rührt von einer doppelt so weit entfernten verdeckten Galaxie her. Insgesamt lässt sich feststellen, dass Gravitationslinsen keine Seltenheit sind, sondern eine häufige Beobachtung am Himmel. Die Abbildungen sind in der Regel verzerrt, weil die Linsen nicht perfekt sind, siehe Abb. 8.30.

Die Vergrößerungseffekt der Gravitationslinsen durch Galaxienhaufen kann genutzt wer-

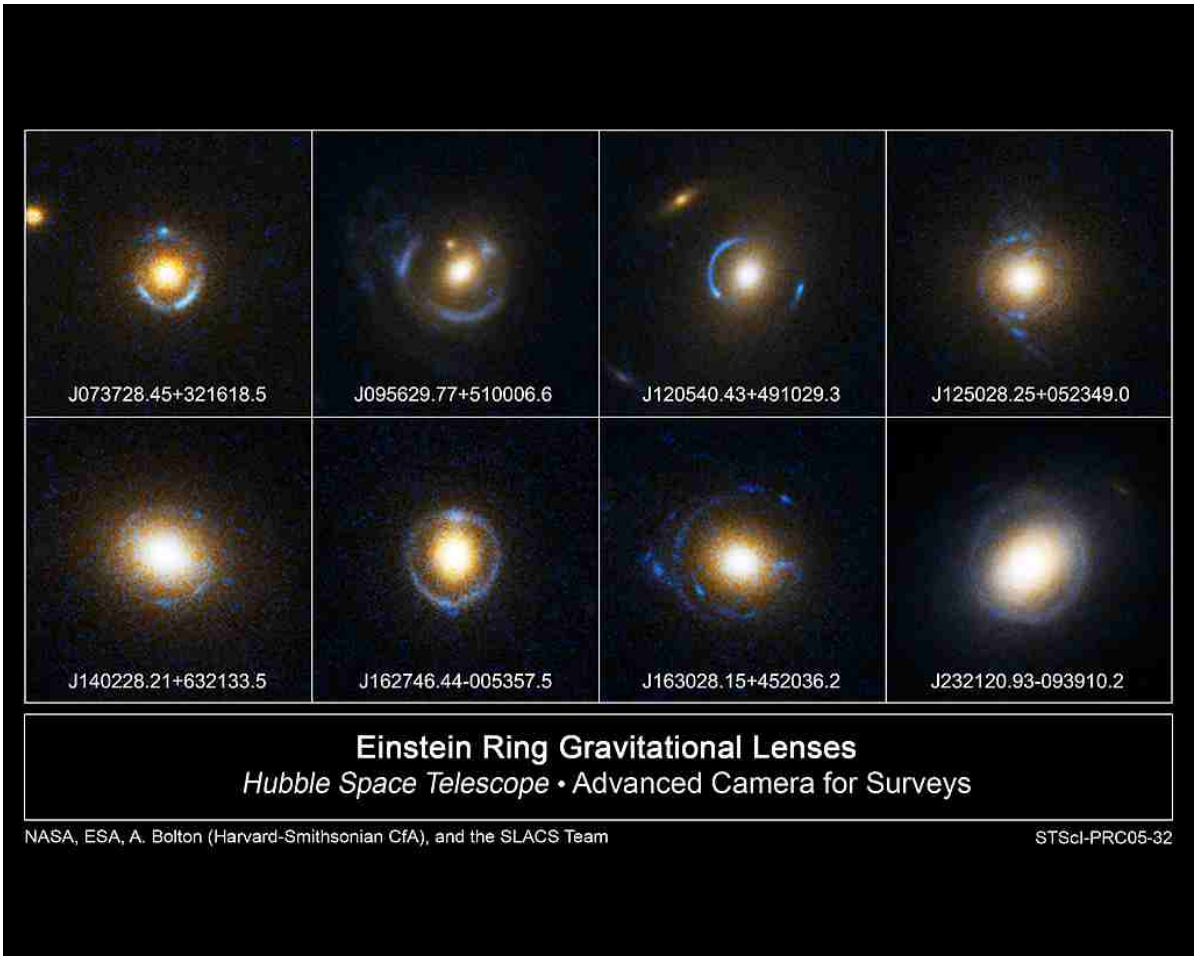


Abb. 8.25: Beispiele für Gravitationslinsenphänomene beobachtet vom Weltraumteleskop Hubble [**?**].

den, um Galaxien mit hoher relativistischer Rotverschiebung zu entdecken. So vergrößerte Galaxien erscheinen heller und zeigen Einzelheiten, die man mit normaler Astronomie nie erhalten würde . Man kann dadurch weit entfernte, lichtschwache Objekte beobachten [**?**]. Das Projekt der NASA nennt sich RELICS (Reionization Lensing Cluster Survey) (Fig. 8.31) und nutzt die Weltraumteleskope Hubble und Spitzer.[16] Im Verlauf der Messungen wurde unter anderem über den Gravitationslinseneffekt die Galaxis SPT0615-JD entdeckt, siehe Abb. 8.32. Anhand der Wasserstoffabsorptionskante konnte eine Rotverschiebung von 10 ermittelt werden. Das Licht der Galaxie stammt damit aus einer Zeit nur 500 Millionen Jahre nach dem Urknall [**?**]. Kürzlich hat man mit Hilfe deiner Gravitationslinse einen Stern entdeckt, den es schon $9 \cdot 10^{11}$ Jahre nach dem Urknall gab [**?**]. Ein Galaxienhaufen vor dem Stern verstärkt seine scheinbare Helligkeit um einen Faktor von mehreren tausend, und konnte so mit Hubble entdeckt werden. Die

[16] *Lexikon:* Das **Spitzer Weltraumteleskop** wurde im Jahr 2003 in seine Umlaufbahn geschickt und arbeitete bis 2020. Ziel der Mission war eine Infrarotabtastung des Universums und so Bereiche des Weltraums zu erkunden, die optischen Teleskopen verborgen sind.

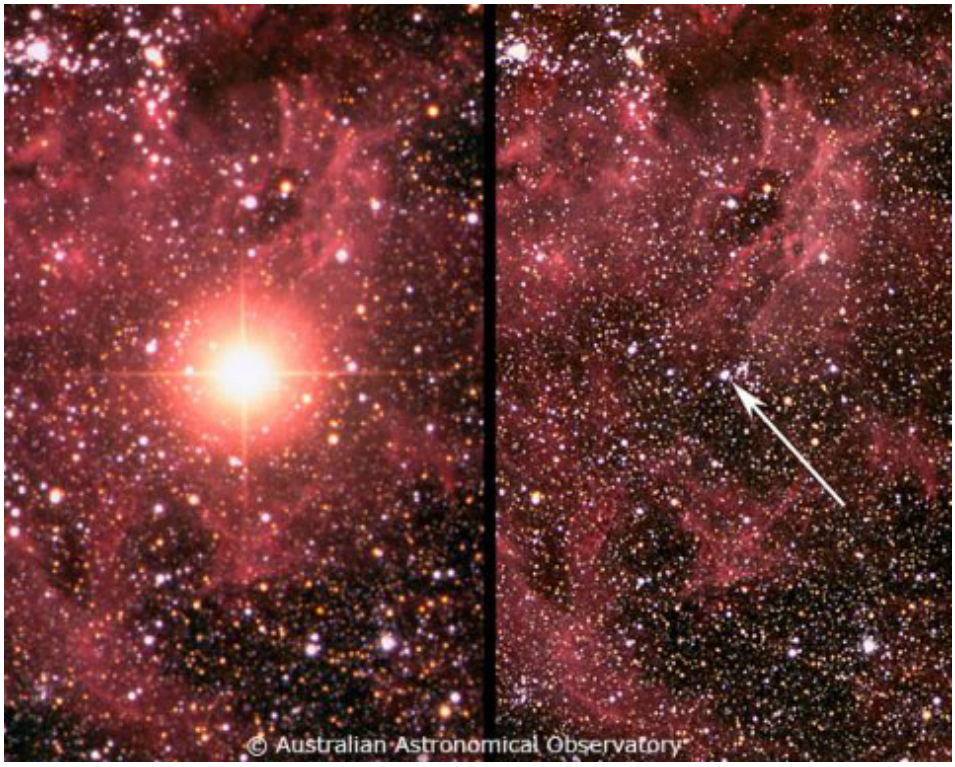


Abb. 8.26: Sie Supernova SN 1987 nach ihrer Explosion im Februar 1987 (links) und ein Bild desselben Bereichs innerhalb des Tarantelnebels in der Großen Magellanschen Wolke vor der Explosion (rechts).

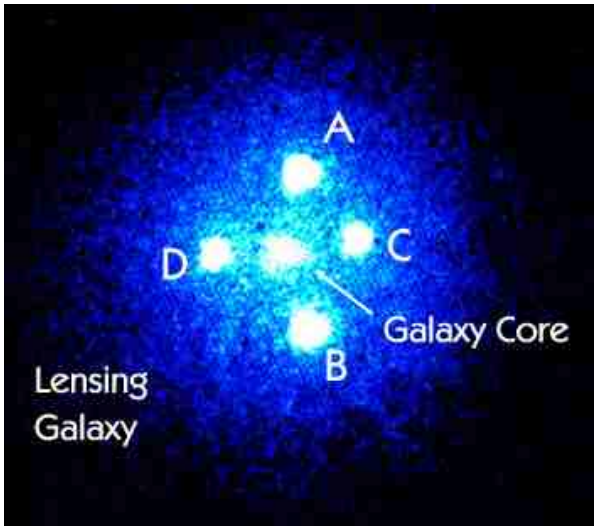


Abb. 8.27: Eine Galaxie, die sich zwischen der Erde und einem entfernten Quasar befindet, erzeugt eine Gravitationslinse, die das Licht des Quasars beugt und so die vier hellen äußeren Objekte in diesem Bild erzeugt. Das Objekt ist unter dem Namen Einsteinkreuz bekannt [**?**].

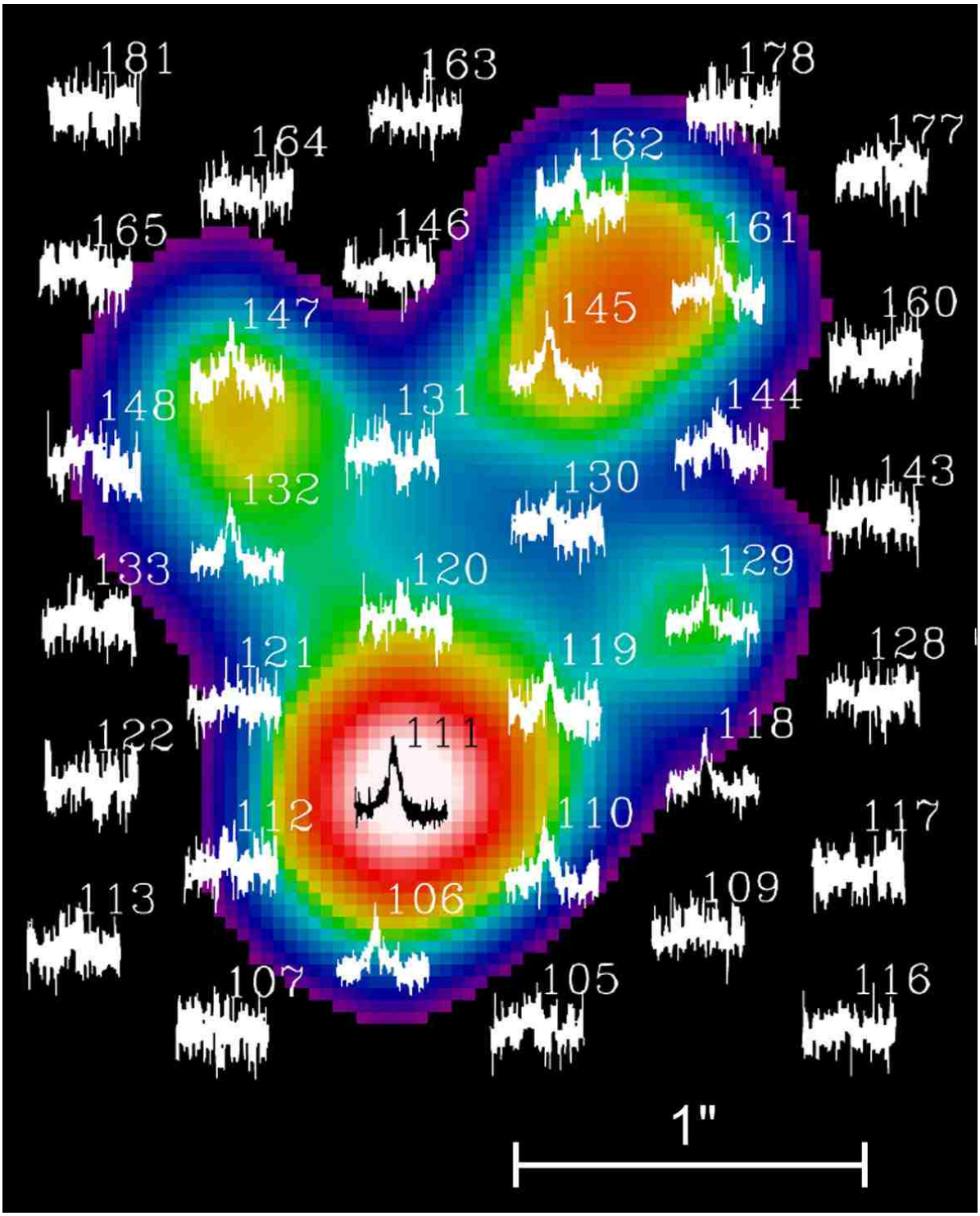


Abb. 8.28: Optische Spektren aufgenommen an unterschiedlichen Stellen des Einsteinkreuzes. Deutlich ist zu erkennen, dass an den hellen Stellen die spektralen Fingerabdrücke übereinstimmen [**?**].

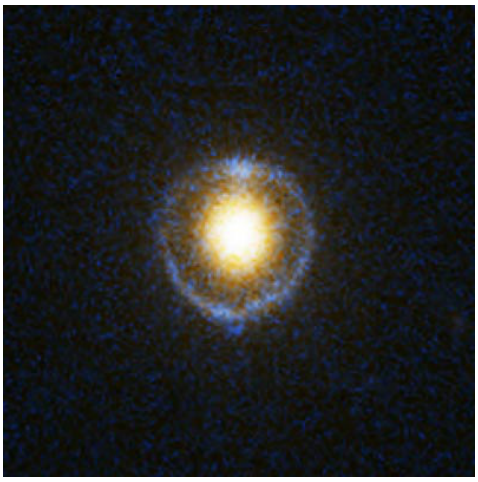


Abb. 8.29: SDSS J162746.44-005357.5 ist eines von acht ähnlichen Objekten, die durch die Kombination von Sloan Digital Sky Survey und Hubble gefunden wurden. Einsteinringe entstehen, wenn zwei Galaxien hintereinander fast perfekt ausgerichtet sind. Im Photo befindet sich eine rötlich-weiße elliptische Galaxie im Vordergrund. Der dünne blaue Ring um sie herum ist das verzerrte Licht einer anderen Galaxie, die doppelt so weit entfernt ist [**?**].

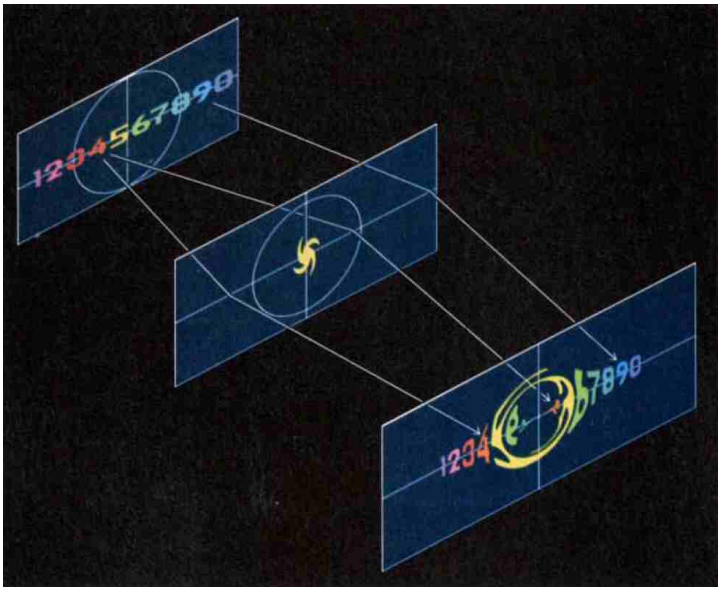


Abb. 8.30: Riesige Zahlen am Himmel würden einem Beobachter auf der Erde aufgrund des Gravitationsfeldes einer dazwischen liegenden Galaxie verzerrt erscheinen. Innerhalb eines kritischen Radius kommt es zu Mehrfachabbildungen. Zahlen, die der Sichtlinie zur Galaxie am nächsten liegen, unterliegen den größten Verzerrungen [**?**].

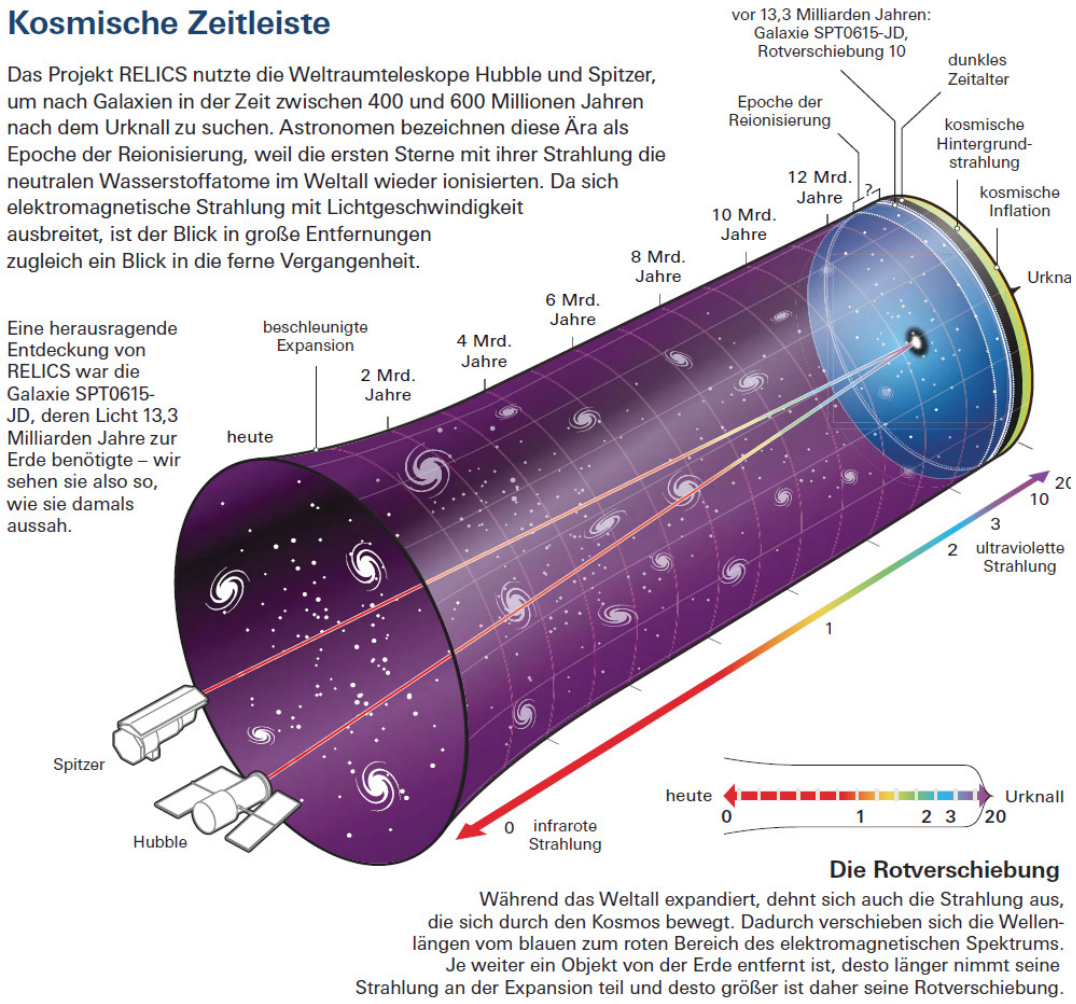


Abb. 8.31: Durch Hubble (Space Telescope Reionization Lensing Cluster Survey (RELICS)) und Spitzer (S-RELICS) können extrem weit entfernte Objekte beobachtet werden [**?**].

Forscher vermuten, dass es sich dabei um eine Riesensonne handelt, die eine Masse von 50 Sonnenmassen aufweist, die aber, aufgrund seiner großen Masse, inzwischen wohl in einer Supernovaexplosion verging.

Microlensing

Welche Möglichkeiten gibt es, Exoplaneten zu entdecken?

- Die Astrometrie nutzt die Änderung der Sternposition, um Exoplaneten zu finden. Minimalen Sternbewegungen können Exoplaneten verraten.Der Nachweis erweist sich allerdings als schwierig, da die astronomischen Instrumente nicht die notwendige Genauigkeit aufweisen.

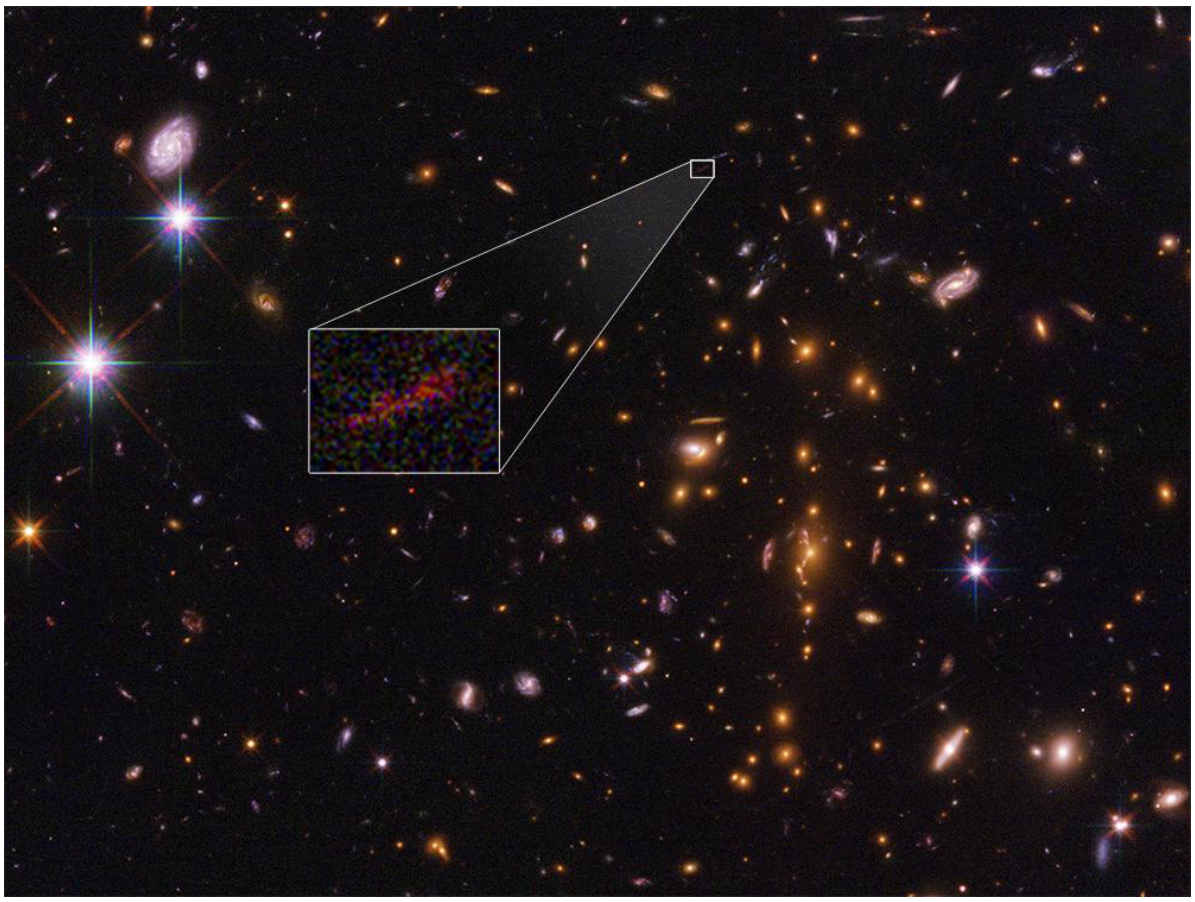


Abb. 8.32: SPT0615-JD, siehe Ausschnittsvergrößerung, ist eine Zwerggalaxie im Sternbild Pictor und die am weitesten entfernte Galaxie, die jemals mit Gravitationslinsen abgebildet wurde [**?**].

- Mit Hilfe des Relativistischen Dopplereffekts kann man Planeten in einem Sonnensystem über die Änderung ihrer Radialgeschwindigkeit finden. Diese Methode funktioniert bis etwa 100 Lj.

- Die Transitphotometrie kann Exoplaneten in mehreren hundert Lj identifizieren.

Gibt es noch weitere Methoden?

Astrophysical applications of gravitational microlensing [?]: Since the first discovery of microlensing events nearly two decades ago, gravitational microlensing has accumulated tens of TBytes of data and developed into a powerful astrophysical technique with diverse applications. Scientific highlights are: (1) Microlensing observations toward the Magellanic Clouds rule out the Milky Way halo being dominated by MAssive Compact Halo Objects (MACHOs). This confirms most dark matter is non-baryonic, consistent with other observations. (2) Microlensing has discovered about 20 extrasolar planets, including the first two Jupiter-Saturn like systems and the only five *cold Nep-*

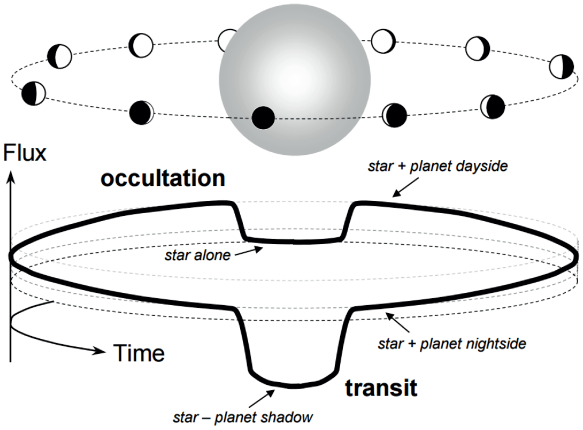


Abb. 8.33: Darstellung der Geometrie des Transits eines Exoplaneten [**?**].

tunes yet detected. They probe a different part of the parameter space and will likely provide the most stringent test of core accretion theory of planet formation. (3) Microlensing provides a unique way to measure the mass of isolated stars, including brown dwarfs and normal stars. Half a dozen or so stellar mass black hole candidates have also been proposed. (4) High-resolution, target-of-opportunity spectra of highly-magnified dwarf stars provide intriguing *age* determinations which may either hint at enhanced helium enrichment or unusual bulge formation theories. (5) Microlensing also measured limb-darkening profiles for close to ten giant stars, which challenges stellar atmosphere models. (6) Data from surveys also provide strong constraints on the geometry and kinematics of the Milky Way bar (through proper motions); the latter indicates predictions from current models appear to be too anisotropic compared with observations. The future of microlensing is bright given the new capabilities of current surveys and forthcoming new telescope networks from the ground and from space.

GJ 367b: A dense, ultrashort-period sub-Earth planet transiting[17] a nearby red dwarf star [?]: Ultrashort-period (USP) exoplanets have orbital periods shorter than 1 day. Precise masses and radii of USP exoplanets could provide constraints on their unknown formation and evolution processes. We report the detection and characterization of the USP planet GJ 367b using high-precision photometry and radial velocity observations. GJ 367b orbits a bright (V-band magnitude of 10.2), nearby, and red (M-type) dwarf star every 7.7 hours. GJ 367b has a radius of 0.718 ± 0.054 Earth-radii and a mass of 0.546 ± 0.078 Earth-masses, making it a sub-Earth planet. The corresponding bulk density is 8.106 ± 2.165 grams per cubic centimeter-close to that of iron. An interior

[17] *Lexikon:* Die **Transitmethode** ist eine photometrische Methode, die Exoplaneten indirekt nachweist. Bei der Methode wird die Leuchtkraft eines Sterns bestimmt und auf regelmäßige Abweichungen der Leuchtkraft untersucht, die durch einen Transit eines Exoplaneten hervorgerufen werden, siehe Abb. 8.33. Der während eines Transits gemessene Leuchtstärke ist gering. Der Transit von Jupiter vor der Sonne reduziert die Leuchtkraft um etwa 1%. Die Erde verringert den Lichteinfall sogar nur um 0.001%. Die Methode liefert Radius und Umlaufdauer des Exoplaneten. Kann man die Masse des Planeten außerdem mit der Radialgeschwindigkeitsmethode bestimmt werden, ist es möglich Angaben über die Dichte zu gewinnen. Mit der Methode gelang es die Existenz von HD209458b zu bestätigen [**?**]. Dieser war vorab durch eine Radialgeschwindigkeitsmessung entdeckt worden.

structure model predicts that the planet has an iron core radius fraction of 86 ± 5%, similar to that of Mercury's interior.

Gravitationslinsen eröffnen der Astronomie neue Möglichkeiten, um Exoplaneten zu entdecken [**?** **?**]. Der Effekt nennt sich Mikro-Gravitationslinse, weil nicht nur das Zentralgestirn, sondern auch der eigentlich nicht sichtbare Planet aufgrund seiner Gravitation zu einer kurzzeitigen Änderung der Helligkeit eines dahinter liegenden Sterns führt, siehe Abb. 8.34. Je nachdem, wie die Bahn des Exoplaneten verläuft, ergeben sich unterschiedliche Signaturen, anhand derer der Planet charakterisiert werden kann. Microlensing kann Planeten in einer Entfernung von mehreren tausend Lichtjahren nachweisen. Die Methode ist besonders geeignet, um Planeten zu finden, die sich in einer engen Bahn (1 bis 10 AE) um das Zentralgestirn bewegen. Auch Exoplaneten mit geringer Masse und in großer Entfernung von der Sonne können so gefunden werden. Hier versagen die Transit- und die Radialgeschwindigkeitsmethode. Nachteilig ist, dass sich ein Ereignis aufgrund von *gravitational microlensing* nicht wiederholt. Planeten, die so entdeckt wurden, können so nicht erneut beobachtet werden. Hinzu kommt, dass die Entfernungen in der Regel so groß sind, dass der Exoplanet mit anderen Methoden nicht weiter untersucht werden kann. Die Astronomen können aber bei der Beobachtung eines solchen Ereignisses viel wertvolle Daten auffangen, die diesen Nachteil kompensieren. Abb. 8.36 zeigt einen Überblick über die Erfolge der unterschiedlichen Methoden Exoplaneten zu entdecken.

Discovery of a cool planet of 5.5 Earth masses through gravitational microlensing [**?**]**:** Over 170 extrasolar planets have so far been discovered, with a wide range of masses and orbital periods, but until last July no planet of Neptune's mass or less had been detected any more than 0.15 astronomical units (AU) from a normal star. (That's close - Earth is one AU from the Sun). On 11 July 2005 the OGLE Early Warning System recorded a notable event: gravitational lensing of light from a distant object by a foreground star revealed a small planet of about 5.5 Earth masses, orbiting at about 2.6 AU from the foreground star (Fig. 8.35). This is the lowest known mass for an extrasolar planet orbiting a main sequence star, and its detection suggests that cool, sub-Neptune mass planets are more common than gas giants, as predicted by the favoured core accretion theory of planet formation.

Welche Bedeutung hat das Phänomen des Microlensing für Astronomie und Astrophysik? Dazu eine Auswahl über die Erfolge [**?**]:

- Beobachtungen in Richtung der Magellanschen Wolken schließen aus, dass der Halo der Milchstraße nicht von MAssive Compact Halo Objects (MACHOs) dominiert wird [**?**]. Daraus wird gefolgert, dass der Großteil der Dunklen Materie nicht baryonisch ist, was mit anderen Beobachtungen übereinstimmt.

- Es wurden bislang über 20 extrasolare Planeten entdeckt, darunter zwei Jupiter-Saturn-ähnliche und fünf kalte Neptun [**?**].

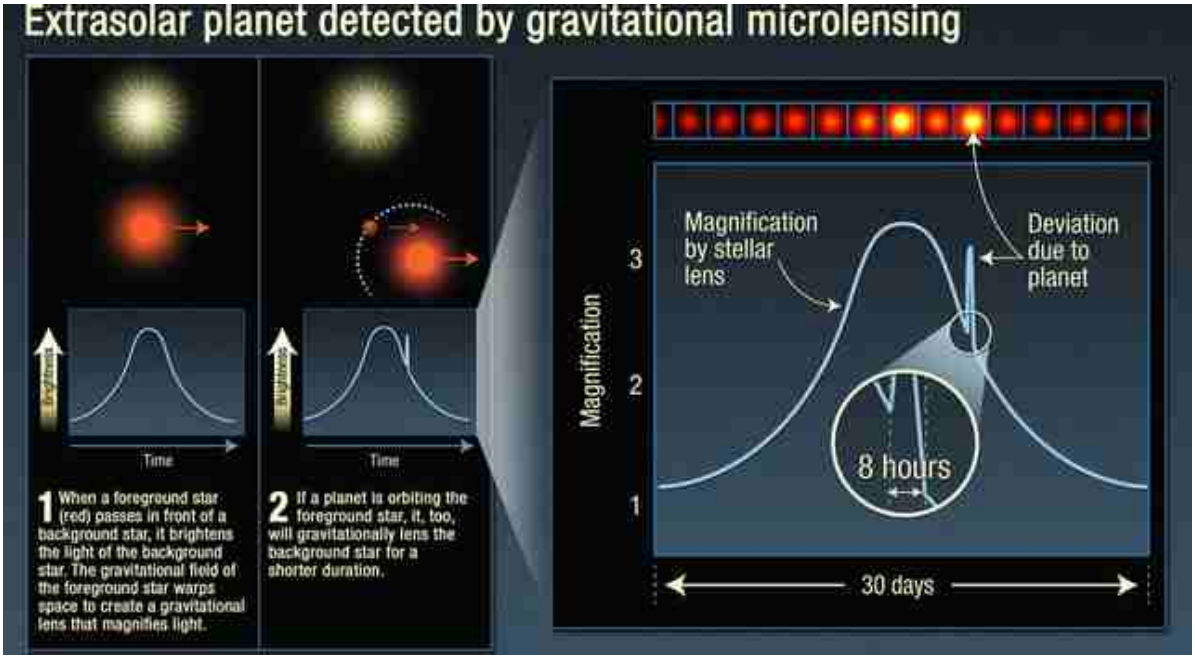


Abb. 8.34: Erklärung für das Auftreten eines Mikro-Gravitationslinseneffekts beim Transit eines Exoplaneten [**?**].

- Microlensing eröffnet Möglichkeiten, die Masse planetenloser Sterne oder Brauner Zwerge zu bestimmen [**?**].

A highly magnified star at redshift 6.2 [**?**]**:** Galaxy clusters magnify background objects through strong gravitational lensing. Typical magnifications for lensed galaxies are factors of a few but can also be as high as tens or hundreds, stretching galaxies into giant arcs. Individual stars can attain even higher magnifications given fortuitous alignment with the lensing cluster. Recently, several individual stars at redshifts between approximately 1 and 1.5 have been discovered, magnified by factors of thousands, temporarily boosted by microlensing. Here we report observations of a more distant and persistent magnified star at a redshift of 6.2 ± 0.1, 900 million years after the Big Bang. This star is magnified by a factor of thousands by the foreground galaxy cluster lens WHL0137-08 (redshift 0.566), as estimated by four independent lens models. Unlike previous lensed stars, the magnification and observed brightness (AB magnitude, 27.2) have remained roughly constant over 3.5 years of imaging and follow-up. The delensed absolute UV magnitude, $?10 \pm 2$, is consistent with a star of mass greater than 50 times the mass of the Sun. Confirmation and spectral classification are forthcoming from approved observations with the James Webb Space Telescope.

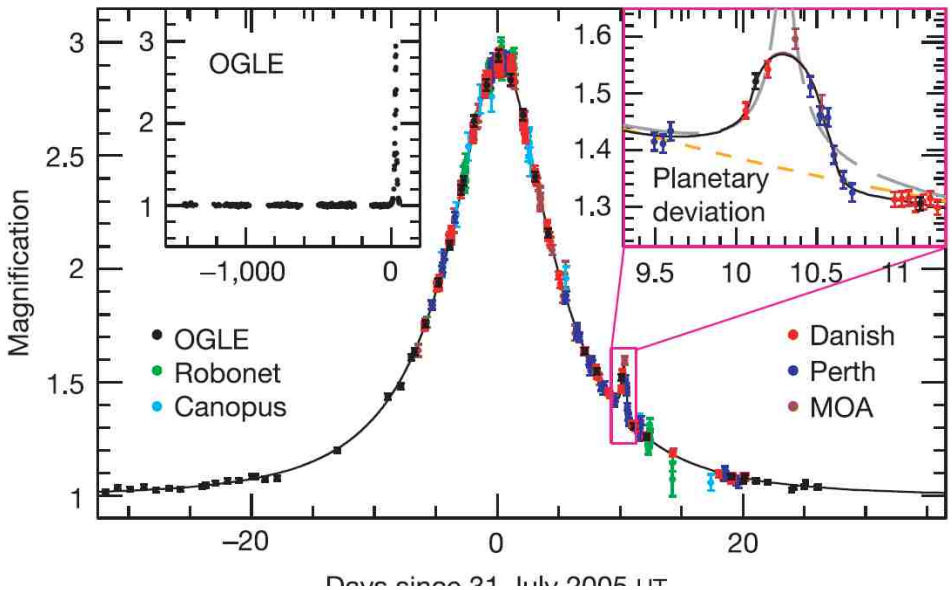


Abb. 8.35: Lichtkurve von OGLE-2005-BLG-390 mit Gravitations-Mikrolinseneffekt und Modellrechnung, aufgetragen als Funktion der Zeit [**?**].

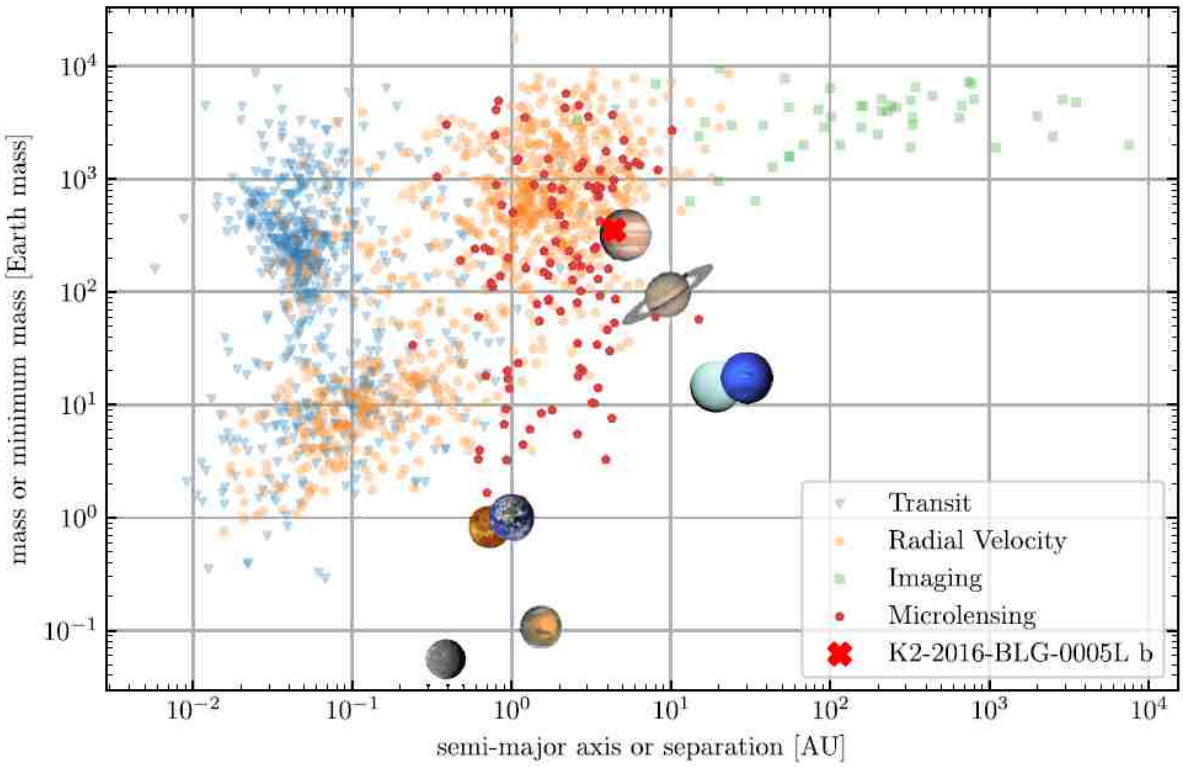


Abb. 8.36: Verteilung der Masse gegenüber der großen Halbachse/Abstand für bestätigte Exoplaneten und die Planeten des Sonnensystems. Die Exoplaneten sind, in Abhängigkeit von der verwendeten Methode, mit unterschiedlichen Symbolen gekennzeichnet [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Wenn die Sonne sich zwischen zwei entfernte Sterne schiebt und es ist gerade eine totale Sonnefinsternis, erscheinen die beiden Sonnen dann[18]

(a) näher zusammen?

(b) weiter auseinander?

(c) verzehrt, aber nicht näher oder weiter zusammen?

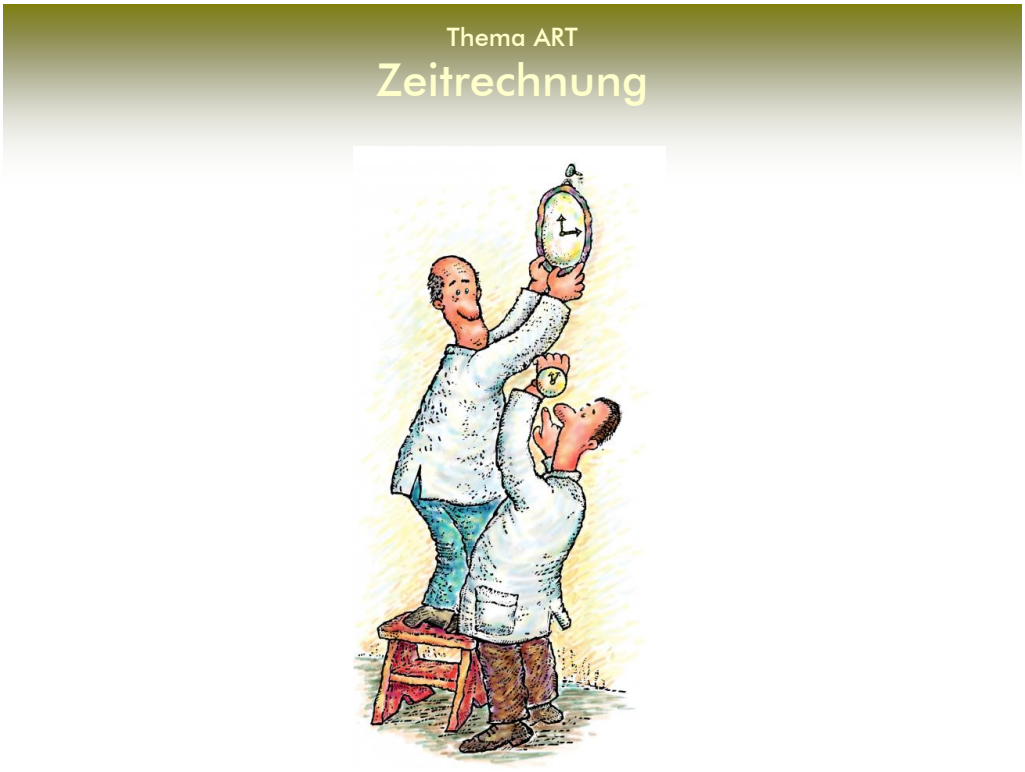
[18] Antwort: (a)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Könnte die Verschiebung von Sternpositionen in der Nähe eines Sterns durch eine Brechung des Lichts in der Sternatmosphäre verursacht worden sein?

2. Entspricht eine Gravitationslinse ehe einer Sammel- oder eher einer Zerstreuungslinse?

8.3 Zeitrechnung



Space tells matter how to move. Matter tells space how to curve.

John Archibald Wheeler, 1973

Betrachten wir zwei Nichtinertialsysteme I_1 und I_2 und die Emission und Absorption von Licht. Im kurzen Moment der Emission und im kurzen Moment des Nachweises kann man annehmen, dass I_1 und I_2 nicht beschleunigen, sondern ruhen und damit Inertialsysteme sind. Im System I1, in dem die Strahlungsquelle in Ruhe ist, wird Licht der Frequenz $\nu_1$emittiert. In I_2 wird die Frequenz ν_2 detektiert. Allerdings beschleunigt I_2 zwischen dem Moment der Aussendung und dem Moment des Nachweises, der detektor entfernt sich und das Licht ist damit rotverschoben. Das beschreibt den Effekt der Dopplerverschiebung von Licht, die wir schon im Kapitel *Relativistische Rotverschiebung* kennen gelernt haben. Das Einsteinsche Äquivalenzprinzip verlangt nun, dass ein ähnliches Phänomen auch im Gravitationsfeld auftritt.

An Atomic Clock with 10^{-18} Instability [?]: Atomic clocks have been instrumental in science and technology, leading to innovations such as global positioning, advanced communications, and tests of fundamental constant variation. Timekeeping precision at 1 part in 10^18 enables new timing applications in relativistic geodesy, enhanced Earth-

and space-based navigation and telescopy, and new tests of physics beyond the standard model. Here, we describe the development and operation of two optical lattice clocks, both using spin-polarized, ultracold atomic ytterbium. A measurement comparing these systems demonstrates an unprecedented atomic clock instability of $1.6 \cdot 10^{18}$ after only 7 hours of averaging.

Eine kleine Anekdote zur Einstimmung: Ein Forscher auf dem Boden eines Planeten sendet ein Frequenzsignal an seinen Kollegen im All, um den Takt von Uhren abzugleichen. Dazu verwendet er monochromatisches Licht. Licht wird durch Gravitation beeinflusst und erhöht seine potenzielle Energie beim Weg zur Rakete. Das reduziert die Energie der Photonen und damit nach Planck $E_{ph} = h \cdot \nu_{ph}$(Kapitel *Materiewellen*) seine Frequenz. Der Forscher im All stellt fest, dass die Uhr des Kollegen auf dem Planeten langsamer geht.

Der Begriff Rotverschiebung wird in der Relativitätstheorie und der Astrophysik häufiger verwendet, siehe Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*. Da es dabei häufig zu Missverständnissen kommt, hier dazu einige Bemerkungen, um die genauen Sachverhalte zu klären. Das Phänomen führt zu einer messbaren Verschiebung des gesamten Lichtspektrum in Richtung des roten Spektralbereichs, wenn sich der Emitter entfernt. Dabei erfahren die einzelnen Linien keine konstante Verschiebung in der Wellenlänge. Tatsächlich hängt $\Delta\lambda$ von der betrachteten Wellenlänge ab! Betrachtet man den Vorgang aus dem Blickwinkel des Energieerhaltungssatzes verliert die Photonen Energie. Tatsächlich muss man hier zwischen Effekten der Speziellen und der Allgemeinen Relativitätstheorie unterscheiden. Die Rotverschiebung erfolgt aufgrund der Vergrößerung des Abstands zum Objekt, aufgrund der Expansion des Raums oder aufgrund von Gravitationsfeldern. Dabei können sich die Effekte auch überlagern, wie das Beispiel des GPS-Systems aufzeigt. Eng mit der Rotverschiebung verbunden sind Zeiteffekte. Betrachtet man statt der Wellenlänge die Frequenz ν, also die Anzahl der Oszillationen pro Sekunde, kann man eine Änderung von ν auch als eine Änderung in der Taktrate deuten. Die Rotverschiebung hat also auch Auswirkungen auf die Zeitmessung. Wie schon im Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt* vorgestellt, lässt sich die Rotverschiebung z angeben über die Lage der betrachteten Linien des Objekts (λ_{obj}) und der Referenz auf der Erde (λ_{ref}):

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda_{obj}}{\lambda_{ref}} - 1 \\ z &= \frac{\nu_{ref}}{\nu_{obj}} - 1 \\ z &= \frac{E_{ref}}{E_{obj}} - 1 \end{aligned} \tag{8.8}$$

Schreibt man die Gleichung um in Abhängigkeit der Frequenz oder der Energie, erkennt man, dass es sich tatsächlich um eine Energieverschiebung handelt. Wegen $E \approx 1/\lambda$ ist die Rotverschiebung in Bezug auf unterschiedliche Wellenlängen deshalb nicht konstant. Abb. 8.37 zeigt die so genannten Balmer-Linien (H_α-H_ε) von Wasserstoff (siehe Kapitel *Der Weg zum Atom*) aufgezeichnet für die nahe Sonne Wega (z=0) und

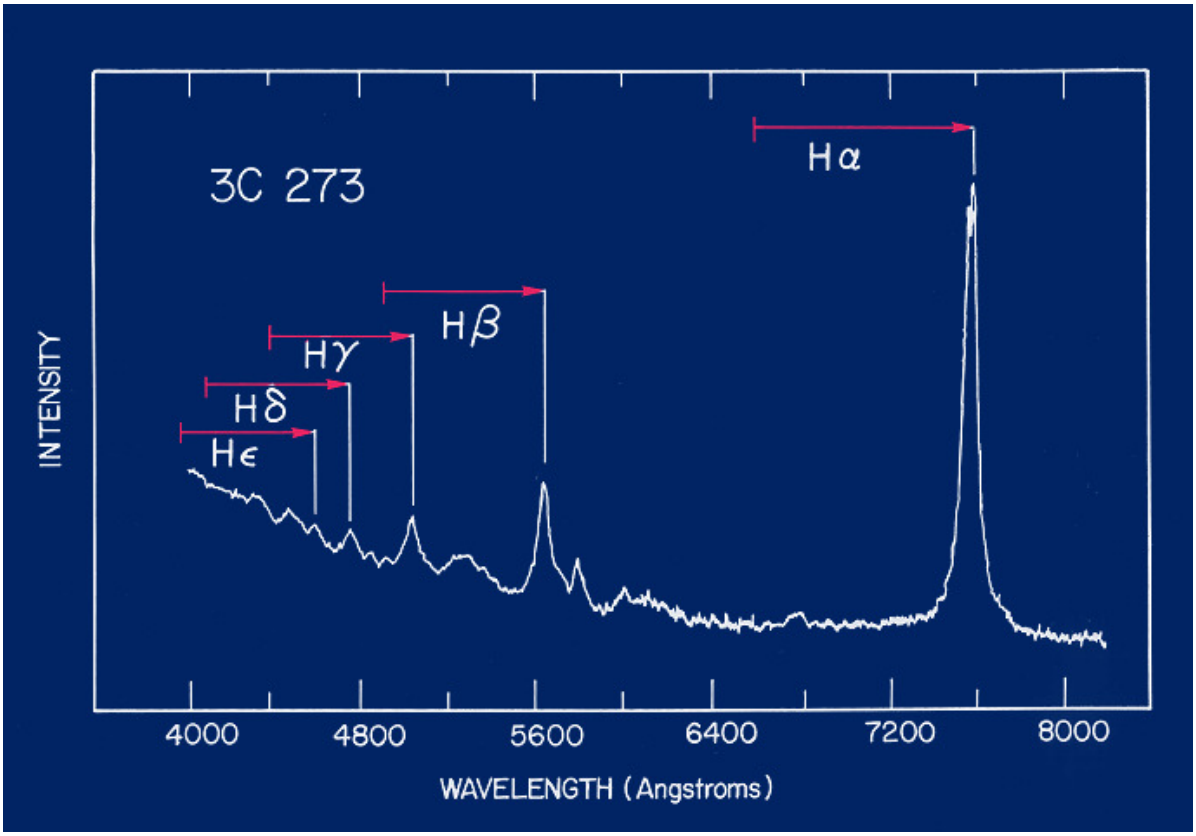


Abb. 8.37: Spektrum des Quasars 3C 273 mit der Verschiebung der Balmer-Linien [**?**].

den Quasar 3C 273, der eine Rotverschiebung von z=0.16 aufweist [**?**]. Tabelle 8.2 liefert die dazugehörigen Zahlenwerte für das angegebene z. Man erkennt, dass die Wellenlängenverschiebung der Linien nicht konstant ist. Die Gleichung 8.8 kann man auch in Abhängigkeit der Periode Δt der Schwingung des Lichtfeldes schreiben:

In the early 1960s, astronomers were puzzled by quasars -sources of intense radio emission that seemed to be stars, but had unintelligible optical spectra. In 1963, Maarten Schmidt solved the puzzle by recognizing the Balmer lines of hydrogen, strongly redshifted, in the spectrum of the quasar 3C 273. Schmidt reached the *most direct and least objectionable* conclusion, that 3C 273 was no star, but the enormously bright nucleus of a distant galaxy.

$$z = \frac{\Delta t_{obj}}{\Delta t_{ref}} - 1 \tag{8.9}$$

$$\Delta t_{obj} = (1+z) \cdot \Delta t_{ref} \tag{8.10}$$

Man kann also erwarten, dass sich Effekte der Gravitation auch im Gang von Uhren äußern. Dazu benötigt man eine gute Zeitmessung, um die Auswirkung der Allgemeinen Relativitätstheorie auf den Gang von Uhren nachzuweisen. Atomuhren gehen verlässlich

	λ_{obj} [nm]	λ_{ref} [nm]	$\Delta\lambda$ [nm]
H_α	761.0	656.3	105.0
H_β	563.8	486.1	77.8
H_γ	503.4	434.0	69.4
H_δ	475.6	410.2	65.6
H_ϵ	460.5	397.0	63.5

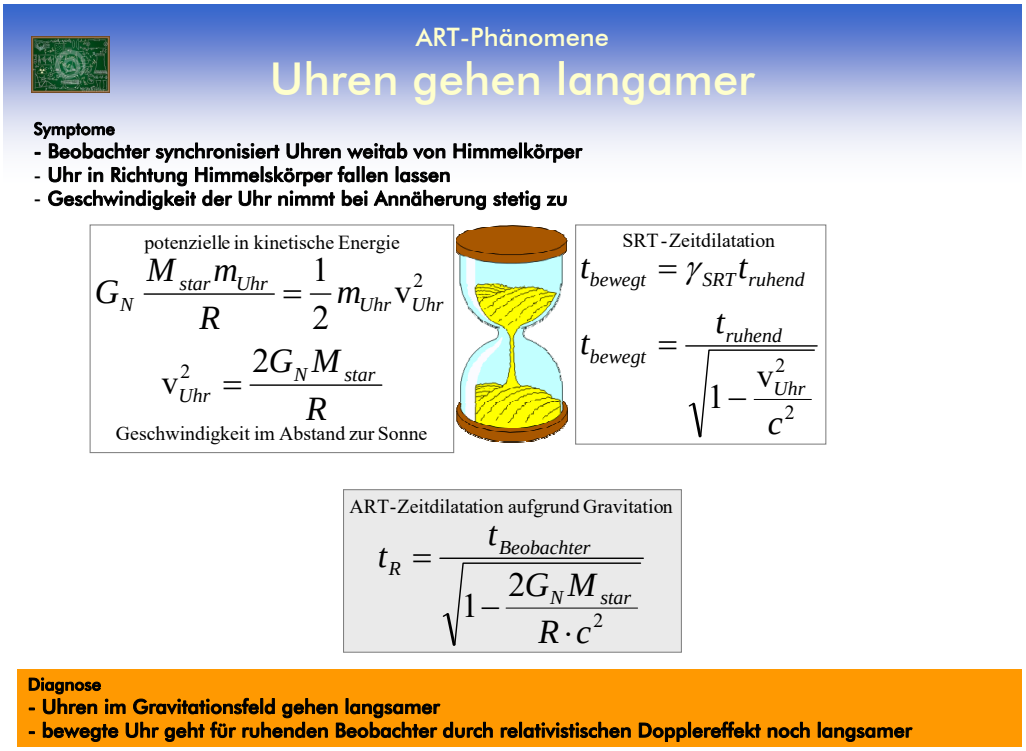
Tab. 8.2: Verschiebung der Balmerlinien beim Quasar 3C 273

auf einer Größenordnung von 10^{-18} [**?**]. Die kürzlich erfolgte und bislang genaueste Messung der gravitativen Zeitdilatation ergab sich durch einen Zufall: 2014 wurden zwei Galileo-Satelliten auf einem falschen Orbit ausgesetzt, so dass die Satelliten die Erde auf Ellipsenbahnen umkreisen. Für das Navigationssystem sind diese Bahnen nicht geeignet. Der Abstand der Satelliten von der Erde variiert bei jeder Umkreisung um etwa 8500 km. Damit lassen sich Effekte der Gravitation erfassen. Speziell gehen Uhren im Gravitationsfeld nach. Es ergab sich im Vergleich der maximalen und minimalen Höhen über der Erde ein Zeitunterschied 0.37μs pro Tag. Mit Hilfe der an Bord befindlichen Wasserstoff-Maser,[19] die als Frequenzstandard dienten, gelang es, die Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie mit einer Messgenauigkeit von 10^{-5} zu bestätigen [**?**].

Geodesy and metrology with a transportable optical clock [**?**]**:** Optical atomic clocks, due to their unprecedented stability and uncertainty, are already being used to test physical theories and herald a revision of the International System of Units. However, to unlock their potential for cross-disciplinary applications such as relativistic geodesy, a major challenge remains: their transformation from highly specialized instruments restricted to national metrology laboratories into flexible devices deployable in different locations. Here, we report the first field measurement campaign with a transportable ^{87}Sr optical lattice clock. We use it to determine the gravity potential difference between the middle of a mountain and a location 90 km away, exploiting both local and remote clock comparisons to eliminate potential clock errors. A local comparison with a ^{171}Yb lattice clock also serves as an important check on the international consisten-

[19] *Lexikon:* **Maser** (*Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*)[20] sind Lichtquellen, die wie ein Laser funktionieren. Allerdings arbeiten Maser nicht im sichtbaren Spektralbereich, sondern erzeugen elektromagnetische Wellen mit Frequenzen ν von 10^5 bis 10^{11} Hz [**?**]. Dies entspricht ($\lambda = c/\nu$) einem Wellenlängenbereich von km bis mm. Der Wasserstoff-Maser[21] nutzt als aktiven Maserübergang die Hyperfeinstruktur des atomaren Wasserstoff, d,h, die parallele und antiparallele Ausrichtung der Spins von Proton und Elektron. Die Energiedifferenz von etwa 10^{-5} eV entspricht einer Frequenz von 1.42 GHz oder einer Wellenlänge von 21 cm (Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*). Wasserstoff-Maser sind sehr frequenzstabil und zeichnen sich durch eine hohe Langzeitstabilität aus. Eine Genauigkeit von weniger als einem 1 Hz sind technisch realisierbar. Aus diesen Gründen dienen Wasserstoff-Maser als hoch genaue Frequenzstandards (Atomuhr) und erlauben Experimente zur Allgemeinen Relativitätstheorie. Weiter werden diese Maser für *Very Long Baseline Interferometry* (Kapitel *Äther*) in der Radioastronomie eingesetzt, um die Signale der verschiedenen Teleskope zeitlich abzugleichen. Weitere Anwendungen sind Messungen zur Kontinentaldrift oder zur Entfernungsbestimmung astronomischer Objekte.

cy of independently developed optical clocks. This campaign demonstrates the exciting prospects for transportable optical clocks.



In einem Gedankenexperiment synchronisiert man weit außerhalb eines Himmelkörpers einen Satz Uhren. Eine der Uhren lassen wir frei und der Körper bewegt sich aufgrund der Gravitationsanziehung mit steigender Geschwindigkeit auf den Stern zu. Die Geschwindigkeit, die der Körper erreicht, wenn er sich dem Himmelkörper nähert, lässt sich unter Zuhilfenahme der Energieerhaltung berechnen.

$$G_N \frac{M_{star} \cdot m_{Uhr}}{R} = \frac{1}{2} m_{Uhr} \cdot v_{Uhr}^2 \tag{8.11}$$

$$v_{Uhr}^2 = \frac{2\, G_N \cdot M_{star}}{R} \tag{8.12}$$

Setzt man diesen Ausdruck für die Geschwindigkeit des Objekts in den Lorentzfaktor γ ein, ergibt im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie der Ausdruck:

$$t_{bewegt} = \frac{t_{ruhend}}{\sqrt{1 - \frac{2 G_N \cdot M_{star}}{R \cdot c^2}}} \tag{8.13}$$

Neben der Zeitdilatation verändert ein Gravitationsfeld also ebenfalls den Gang aller Uhren. Und zwar wird der Streckungsfaktor umso größer, je näher man dem Stern kommt. Eine Atomuhr auf der Oberfläche einer Sonne geht demnach langsamer als eine Atomuhr auf der Erde. Tabelle 8.3 gibt Beispiele. Extreme Zeitunterschiede ergeben sich auf

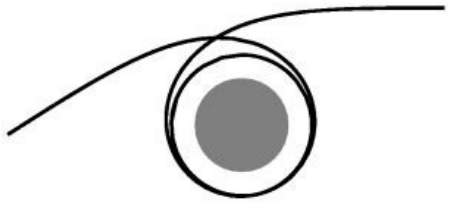


Abb. 8.38: Lichtweg um einen Neutronenstern.

	Masse [kg]	Radius [km]	Δt
Erde	$6 * 10^{24}$	6378	22 Sekunden
Sonne	$2 * 10^{30}$	696000	19 Stunden
Weißer Zwerg	$2 * 10^{30}$	etwa 9500	54 Tage
Neutronenstern	$2 * 10^{30}$	etwa 10	192 Jahre

Tab. 8.3: Verlangsamung des Gangs einer Uhr im Gravitationsfeld nach einer Zeitspanne Δt von 1000 Jahren.

kompakten massereichen Objekten, wie zum Beispiel Neutronensternen. Diese erreichen Massendichten von ρ_{NS}=10^{17} kg/m^3.[22] Die dadurch verursachte enorme Gravitation verlangsamt nicht nur den Gang von Uhren, sondern zwingt Licht auf eine Kreisbahn um den Stern, siehe Abb. 8.38. Prinzipiell könnte man also seinen Hinterkopf sehen.

Hafele-Keating Experiment reloaded

Der Einfluss der Gravitation auf die Zeitmessung hat auch bei dem in Kapitel *Gleichzeitigkeit* besprochenen Hafele-Keating Experiment eine Rolle gespielt. Abb. 8.40 zeigt eine Tabelle, die aufzeigt, in wieweit die Effekte der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie die Experimente beeinflusst haben. Wie man erkennt, führt die Gravitation unabhängig von der Flugrichtung zu einer Zeitdifferenz von +176 ns. Abb. 8.39 liefert eine Abschätzung wie sich Geschwindigkeit und Flugkurve auf die Resultate auswirken. Berücksichtigt man beide Effekte ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Relativitätstheorie.

[22] Zum Vergleich: Wasser hat ein ρ_{H_2O} von 10^3 kg/m^3.

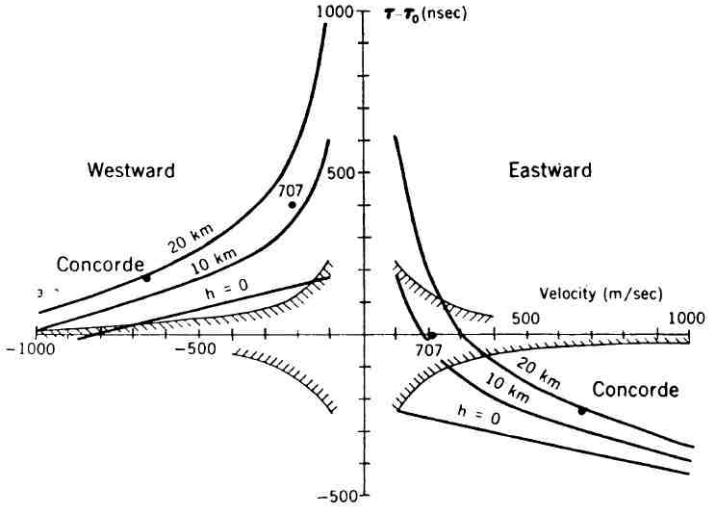
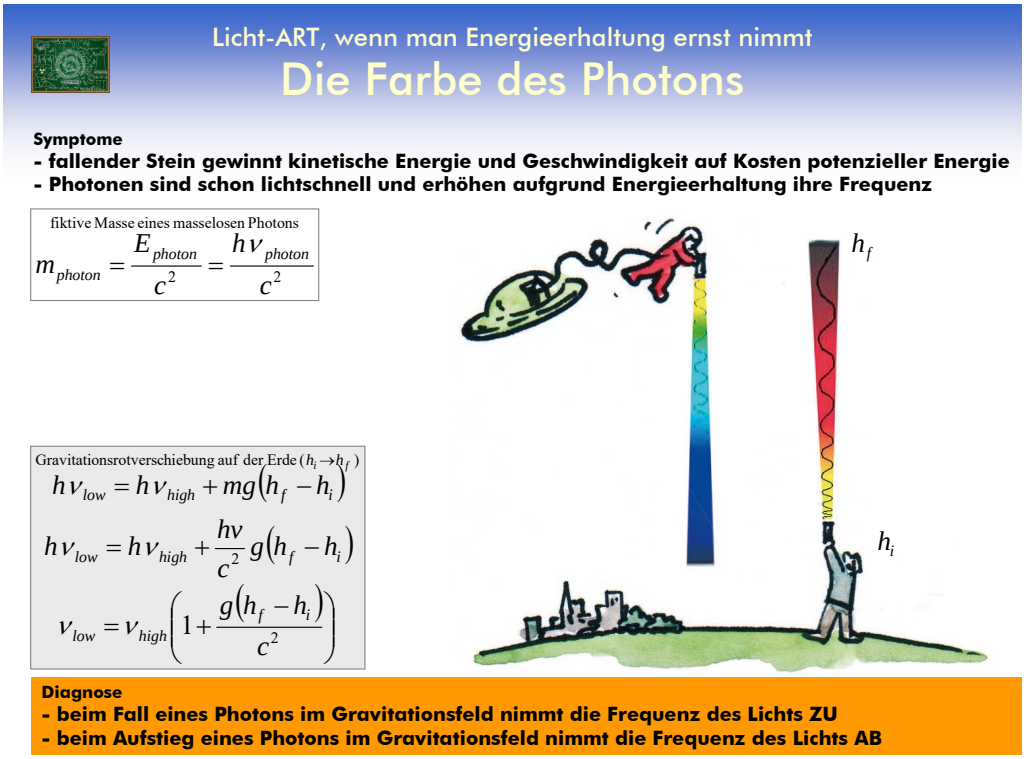


Abb. 8.39: Berechneter relativistischer Zeitgewinn für eine fliegende Uhr nach einer äquatorialen Umrundung in einem nonstop-Flug. Der Punkt auf der x-Achse entspricht einer Reise über Grund. Geschwindigkeiten und Höhenangaben sind für die Möglichkeiten des Überschall-Passagierflugzeugs Concorde[a] angegeben. Der Bereich innerhalb der schraffierten Linien markiert, dass man in einem Experiment mit einer tragbaren Atomuhr den Effekt nicht mehr auflösen könnte [**?**].

[a] Die Concorde erreichte Geschwindigkeiten von Mach 2.23 (2405 km/h).

Uhr	Geschwindigkeit v relativ zur Uhr U am Erdmittelpunkt	Abweichung gegenüber U durch Relativbewegung	Abweichung gegenüber der Uhr am Boden durch den Gravitationseffekt	Gesamtabweichung gegenüber der Uhr am Boden
am Boden	463 m/s	−214 ns	0 ns	0 ns
im Flugzeug auf Ostkurs	685 m/s	−469 ns	176 ns	−469 ns + 214 ns + 176 ns = −79 ns Die Uhr geht um 79 ns nach.
im Flugzeug auf Westkurs	241 m/s	−58 ns	176 ns	−58 ns + 214 ns + 176 ns = +332 ns Die Uhr geht um 332 ns vor.

Abb. 8.40: Zusammenfassung der Ergebnisse des Experiments von Hafele und Keating [**?**]: During October 1971, four cesium beam atomic clocks were flown on regularly scheduled commercial jet flights around the world twice, once eastward and once westward, to test Einstein's theory of relativity with macroscopic clocks. From the actual flight paths of each trip, the theory predicts that the flying clocks, compared with reference clocks at the U.S. Naval Observatory, should have lost 40 ± 23 nanoseconds during the eastward trip, and should have gained 275 ± 21 nanoseconds during the westward trip. The observed time differences are presented in the report that follows this one.



Wenn die Gravitation den Gang von Uhren beeinflusst, stellt sich die Frage, in wieweit auch Licht auf ein Gravitationsfeld reagiert. Wir wissen bereit, dass elektromagnetische Strahlung durch ein Gravitationsfeld abgelenkt wird. Was aber passiert, wenn man beispielsweise Licht von der Erde in den Weltraum schießt. Hat dies Einfluss auf seine Eigenschaften?

Eine wichtige neue Eigenschaft des Lichts -seine Körnigkeit- werden wir in der nächsten Vorlesung *Materiewellen* kennenlernen. Elektromagnetische Strahlung tritt in Energiepaketen der Größe

$$E_{ph} = h\nu_{ph} = \frac{h \cdot c}{\lambda} \tag{8.14}$$

auf, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum ist. Die Gleichung stellt einen direkten Zusammenhang zwischen Energie und der Frequenz der Strahlung her. Über die Beziehung zwischen Lichtgeschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge ergibt sich weiter ein Bezug zur -salopp gesprochen- Farbe des Lichts. Aus der Einsteingleichung lässt sich dem Lichtpaket, genannt Photon, eine fiktive Masse zuordnen.[23]

$$m_{ph} = \frac{E_{ph}}{c^2} = \frac{h \cdot \nu_{ph}}{c^2} \tag{8.15}$$

[23]Das Photon hat die Ruhemasse NULL.

Betrachten wir ein Photon, dass von der Oberfläche eines Stern mit Masse M und Radius R abgestrahlt wird. Die potenzielle Energie einer Masse m auf der Oberfläche des Sterns beträgt:

$$E_{pot} = -G_N \cdot \frac{m \cdot M}{R} \tag{8.16}$$

Analog ergibt sich für ein Photon

$$E_{pot} = -G_N \cdot \frac{h \cdot \nu_{ph} \cdot M}{c^2 \cdot R} \tag{8.17}$$

Damit ergibt sich eine Gesamtenergie des Photons von

$$\begin{aligned} E_{ges} &= h \cdot \nu_{ph} - \frac{G_N \cdot h \cdot \nu_{ph} \cdot M}{c^2 \cdot R} \\ E_{ges}\ nacheiner &= nacheinerh \cdot \nu_{ph} \cdot \left(1 - \frac{G_N \cdot M}{c^2 \cdot R}\right) \end{aligned} \tag{8.18}$$

Fernab von dem Stern ist das Photon durch das Gravitationsfeld nicht beeinflusst und es ergibt sich eine Frequenz von $E_{ges} = h \cdot \nu'$, also

$$\begin{aligned} h \cdot \nu' &= h \cdot \nu \cdot \left(1 - \frac{G_N \cdot M}{c^2 \cdot R}\right) \\ \frac{\nu'}{\nu} &= 1 - \frac{G_N \cdot M}{c^2 \cdot R} \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{\nu - \nu'}{\nu} \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= 1 - \frac{\nu'}{\nu} \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{G_N \cdot M}{c^2 \cdot R} \end{aligned} \tag{8.19}$$

Das Photon hat also auf der Erde eine höhere Frequenz als in größer Entfernung vom Planeten, siehe Abb. 8.41. Verlässt das Photon den Stern, wird die Wellenlänge ins Rote verschoben. Beim Verlassen eines Gravitationsfeldes nimmt die Frequenz des Lichts also ab. Diesen Effekt nennt man **Gravitationsrotverschiebung**.

Die Größenordnung der Verschiebung kann man über die Naturkonstanten in der Gleichung abschätzen. Es ergibt sich ein Wert von

$$G_N/c^2 = 7.41 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{m/kg} \tag{8.20}$$

was verdeutlicht, dass der Effekt im Alltag keine Rolle spielt. Das Phänomen kann nur bei der Emission aus sehr dichten Sternen beobachtet werden. Als Beispiel sei der Quasar 3C 273 genannt [**?**]. Die Gravitations-Rotverschiebung beträgt $\Delta\nu/\nu$=0.158 und verschiebt die Wellenlänge eines 486 nm Photons um 77 nm. Auf der Erde mit seiner geringen Masse ist die erwartete Frequenzverschiebung deutlich geringer. Die folgende

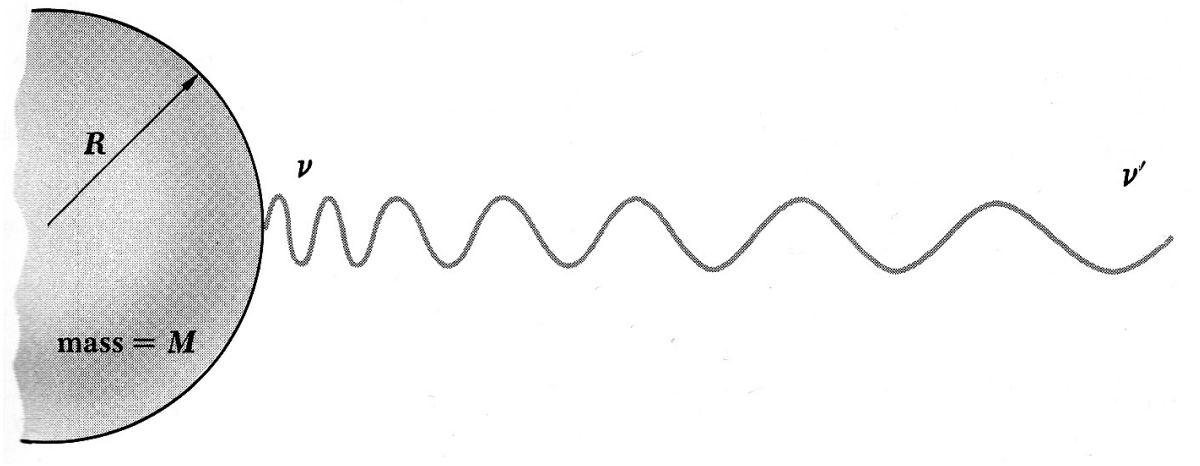


Abb. 8.41: Die Frequenz eines Photons, emittiert von der Oberfläche einer Sonne, verringert sich mit wachsender Entfernung zum Stern [**?**].

Frage stellt sich: Kann man diesen Effekt trotzdem im Labor nachweisen?

Die Änderung der Potenziellen Energie, die sich ergibt, wenn ein Photon von der Erdoberfläche (R) in die Höhe ($R+h$) geschossen wird, ist

$$\Delta E = \frac{G_N \cdot M\left(\frac{E}{c}\right)}{R} - \frac{G_N \cdot M\left(\frac{E}{c}\right)}{R+h} \tag{8.21}$$

Damit ergibt sich für die Erde eine relative Energieänderung in Höhe von

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \left(\frac{G_N \cdot M}{R^2 \cdot c^2}\right) \cdot \left(\frac{h \cdot R}{R+h}\right) \\ \frac{\Delta E}{E} &= \left(\frac{g \cdot h}{c^2}\right) \cdot \left(\frac{R}{R+h}\right) \\ \frac{\Delta E}{E} &= 1.09 \cdot 10^{-16} \cdot \frac{L}{R} \end{aligned} \tag{8.22}$$

Da $h \ll R$ ist, ist der Effekt ziemlich klein, aber Pound und Rebka haben dieses Experiment mit Hilfe des Mössbauer-Effekts erfolgreich durchgeführt (siehe Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*) [**?**]. Eine ^{57}Fe γ-Quelle liefert schmalbandige Strahlung bei einer Photonenenergie von 14.4 keV. Die erwartete Verschiebung ergibt sich mit $\Delta\nu_{ph} = 3.5 \cdot 10^{-5}$ eV. Die relative Frequenzverschiebung beträgt also nur:

$$\frac{\Delta\nu_{ph}}{\nu_{ph}} = 4.9 \cdot 10^{-15} \tag{8.23}$$

Das Experiment ergab einen Wert von $(5.1 \pm 0.5) \cdot 10^{-15}$ in guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Weitere Experimente, wie zum

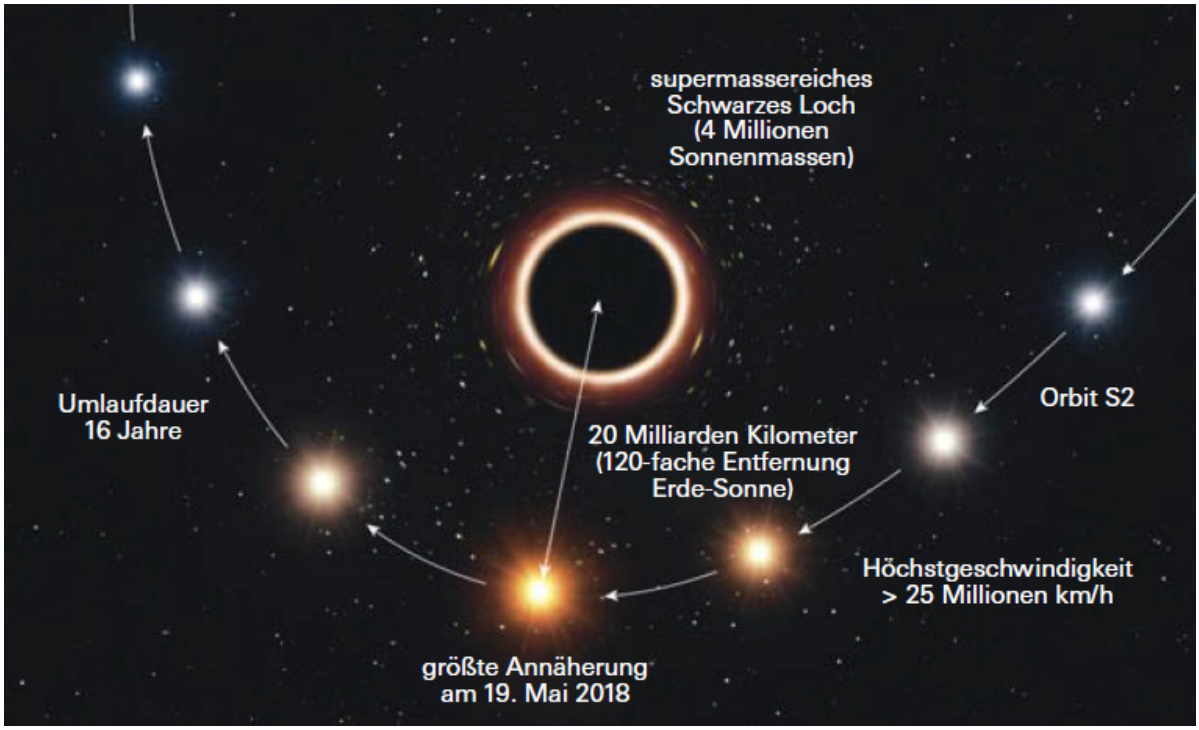


Abb. 8.42: Eine Langzeitbeobachtung des Stern S2, der das supermassive Schwarze Loch Sagittarius A* ($4 \cdot 10^6 \cdot m_\odot$) im Zentrum der Milchstraße umkreist, zeigt das Phänomen der Gravitationsrotverschiebung. Am Perihel entspricht der Abstand der Entfernung zwischen Sonnen und dem Planeten Neptun. Die Geschwindigkeit von S2 beträgt $0.025c$. Daher müssen Effekte der Speziellen Relativitätstheorie berücksichtigt werden. Tatsächlich resultiert der Hauptbeitrag zur Rotverschiebung aus der Bewegung des Sterns weg von der Erde. Die beobachtete Verschiebung kann aber nur erklärt werden, wenn auch Gravitionseffekte der Allgemeinen Relativitätstheorie berücksichtigt werden [**?**].

Beispiel das *Gravity Probe A* Satellitenexperiment [**?**], haben weitere Resultate geliefert, die den Effekt mit nochmal erhöhter Genauigkeit bestätigten. Vor kurzem wurde die Zeitdilatation aufgrund der Gravitation aus einem Höhenunterschied von 33 cm zwischen zwei Atomuhren nachgewiesen [**?**]. Geht es noch genauer? JA! Einzelne Atome dienen dabei als optische Frequenzgeber. Forscher haben die Atome in einem Optischen Gitter bei Temperaturen nahe dem Absoluten Nullpunkt im Abstand von einem Millimeter übereinander im wahrsten Sinne geschichtet. Die Frequenz der von den Atomen emittierten Strahlung war je nach Lage im Gravitationsfeld leicht verschoben- die Oberen leicht ins Blaue; die Unteren leicht ins Rote [**? ?**].

Resolving the gravitational redshift across a millimetre-scale atomic sample [?]: Einstein's theory of general relativity states that clocks at different gravitational potentials tick at different rates relative to lab coordinates -an effect known as the gravitational redshift. As fundamental probes of space and time, atomic clocks have

long served to test this prediction at distance scales from 30 centimetres to thousands of kilometres. Ultimately, clocks will enable the study of the union of general relativity and quantum mechanics once they become sensitive to the finite wavefunction of quantum objects oscillating in curved space-time. Towards this regime, we measure a linear frequency gradient consistent with the gravitational redshift within a single millimetre-scale sample of ultracold strontium. Our result is enabled by improving the fractional frequency measurement uncertainty by more than a factor of 10, now reaching $7.6 \cdot 10^{?21}$. This heralds a new regime of clock operation necessitating intra-sample corrections for gravitational perturbations.

Ein Beispiel aus der Astronomie

Seid fast drei Jahrzehnten beobachten Astronomen das Schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie (Sagittarius A*(). Der Stern *S2* kommt auf seine Umlaufbahn dem Massezentrum dabei besonders nahe. Nahe der maximalen Annäherung erreicht der Stern durch die starke Gravitation des Schwarzen Lochs eine Geschwindigkeit von 2.5% der Lichtgeschwindigkeit. Unter diesen Umständen erwartet man Effekte der Gravitationsrotverschiebung. Die Forscher stellten fest, dass das Licht von *S2* bei der Annäherung an das Schwarze Loch zu längeren Wellenlängen verschiebt, siehe Abb. 8.42 [**?**].
Because, according to the general theory, the speed of a light wave depends on the strength of the gravitational potential along its path, these time delays should thereby be increased by almost $2 \cdot 10{-}4$ sec when the radar pulses pass near the sun. Such a change, equivalent to 60 km in distance, could now be measured over the required path length to within about 5 to 10% with presently obtainable equipment [**?**].

Shapiro-Effekt

Der Einfluss der Gravitation auf die Ausbreitung elektromagnetischer Strahlung, das so genannte Trödelprinzip (Shapiro-Effekt) [**?**] wurde in Satellitenmessungen bestätigt [**?**]. Dazu wurden Signale mit dem *Viking Lander Spacecraft* ausgetauscht und die Zeitdifferenz der Signale bestimmt, wenn sich die Funksignale nahe an der Sonne vorbei bewegen [**?**], siehe Abb. 8.43. Dabei verlangsamt sich die Lichtausbreitung im Gravitationsfeld der Sonne. Zusätzlich legt die Strahlung im gekrümmten Raum einen längeren Weg zurück. Die Messungen zeigen eine deutliche Zeitverzögerung, wenn die Funkwellen knapp an der Sonne vorbeigehen (Abb. 8.44).

Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar [?]: Despite its importance to our understanding of physics at supranuclear densities, the equation of state (EoS) of matter deep within neutron stars remains poorly understood. Millisecond pulsars (MSPs) are among the most useful astrophysical objects in the Universe for testing fundamental physics, and place some of the most stringent constraints on this high-density EoS. Pulsar timing -the process of accounting for every

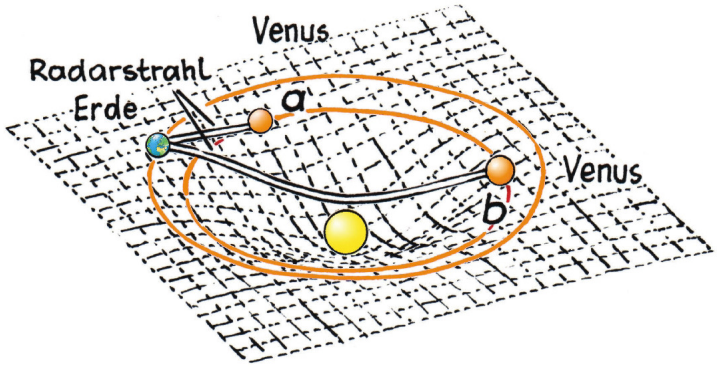


Abb. 8.43: In der Allgemeinen Relativitätstheorie kann Gravitation dazu führen, dass Licht, im Vergleich zur Klassischen Physik, mehr Zeit benötigt, um eine bestimmte Entfernung zurückzulegen. Dieses Phänomen nennt man Shapiro-Effekt. Radarsignale brauchen merklich länger, wenn ihr Weg dicht an der Sonne vorbeiführt.

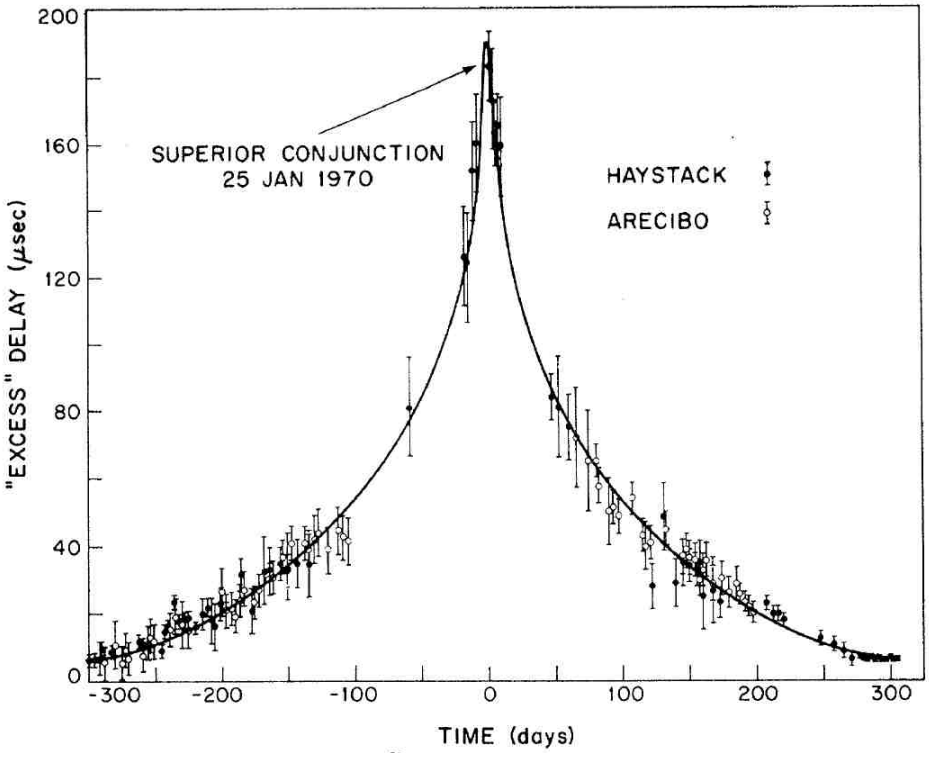
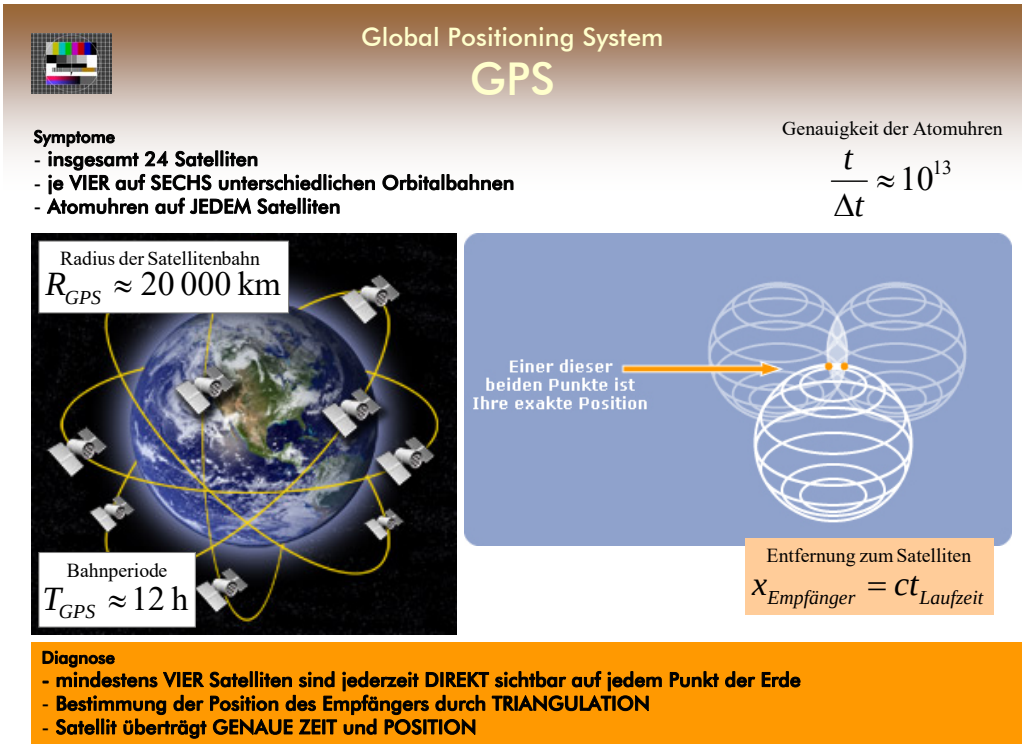


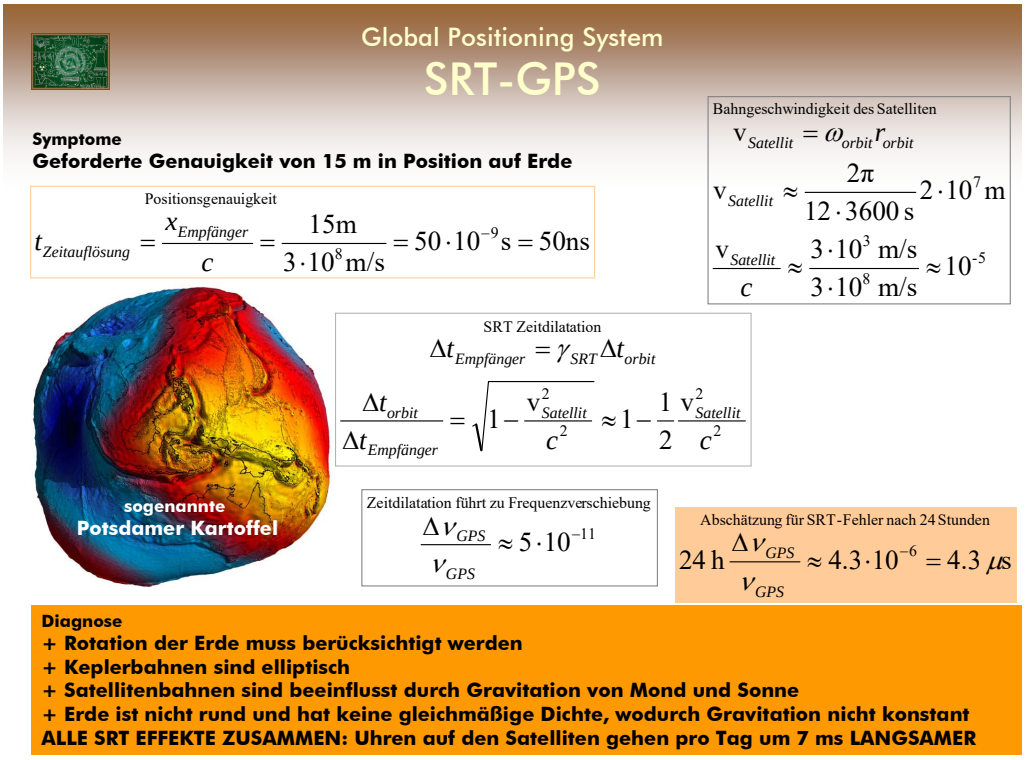
Abb. 8.44: Radarbeobachtungen liefern einen Test des vorhergesagten relativistischen Anstiegs der Echozeiten von Funksignalen (Shapiro-Effekt), die von der Erde gesendet und von Merkur und Venus reflektiert werden [**? ?**].

rotation of a pulsar over long time periods- can precisely measure a wide variety of physical phenomena, including those that allow the measurement of the masses of the components of a pulsar binary system. One of these, called relativistic Shapiro delay, can yield precise masses for both an MSP and its companion; however, it is only easily observed in a small subset of high-precision, highly inclined (nearly edge-on) binary pulsar systems. By combining data from the North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves (NANOGrav) 12.5-yr data set with recent orbital-phase-specific observations using the Green Bank Telescope, we have measured the mass of the MSP J0740+6620 to be $2.14^{+0.20}_{-0.18} M_{\odot}$ It is highly likely to be the most massive neutron star yet observed, and serves as a strong constraint on the neutron star interior EoS.



Global Positioning System

Eine wichtige technologische Anwendung für relativistische Effekte ist die Ortsbestimmung anhand des GPS Verfahrens. Das System besteht aus 24 Satelliten, die sich auf teils unterschiedlichen Orbitalbahnen 20 000 km über der Erde bewegen. An Bord jedes Satelliten befindet sich eine Atomuhr. Die Satelliten sind so verteilt, dass stets mindestens vier von jedem Ort der Erde optisch sichtbar sind. Ständig übertragen die Satelliten ihre genaue Zeit und Position. Der GPS-Empfänger vergleicht die Zeit, zu der das Signal ausgesendet wurde, mit der Zeit, zu der das Signal empfangen wurde. Aus der Zeitdifferenz und der Satellitenposition wird die Entfernung des GPS-Geräts vom Satelliten berechnet. Durch Triangulation kann so der Aufenthaltsort bestimmt werden.



Für GPS benötigt man Ortsgenauigkeit von 15 m. Dies erfordert eine Zeitauflösung von

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{15\,\text{m}}{3\cdot10^8\,\text{m/s}} = 50\cdot10^{-9}\,\text{s} \tag{8.24}$$

Aus dem Radius der Satellitenbahn lässt sich die Bahngeschwindigkeit mit $\beta_{SRT} = 10^{-5}$ berechnen. Die relative Bewegung zwischen einer Person auf der Erde und den Satelliten führt zu einer Zeitdilatation im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie. Die daraus folgende Verlangsamung des Gangs der Atomuhr im All beträgt

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 10^{-11} \tag{8.25}$$

Das erscheint zunächst gering, addiert sich aber im Laufe eines Tages (86 000 s) auf etwa μs. Dieser Beitrag durch die Spezielle Relativitätstheorie ist so hoch, dass es eine genaue Ortsbestimmung ohne Korrektur verhindert. Weitere Effekte, die in der Analyse berücksichtigt werden müssen sind:

- Die Rotation der Erde.
- Die Keplerbahnen sind elliptisch.
- Die Satellitenbahnen sind beeinflusst durch die Gravitationswirkung von Mond und Sonne.

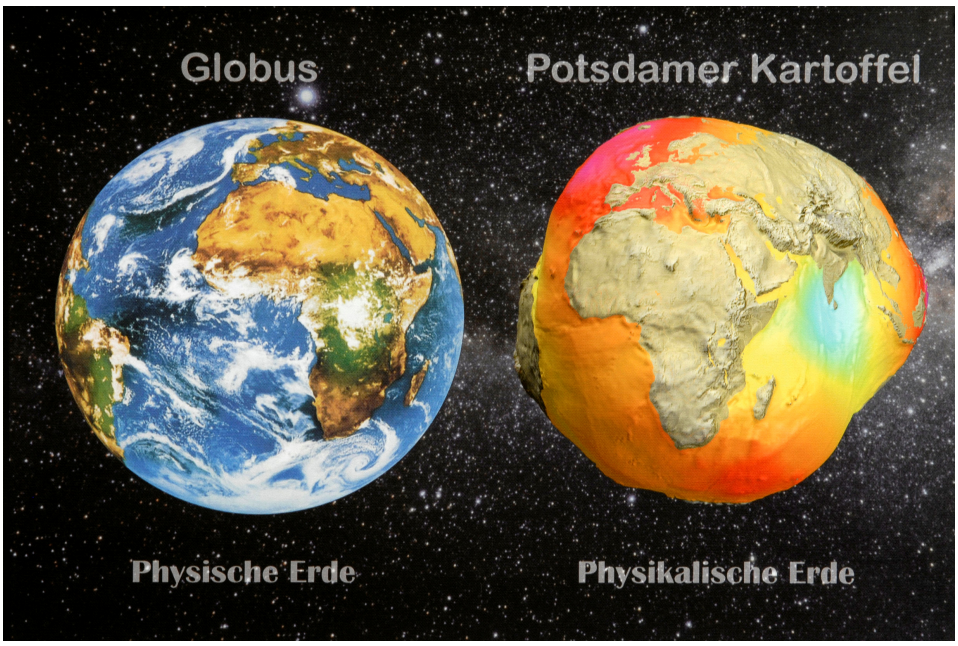
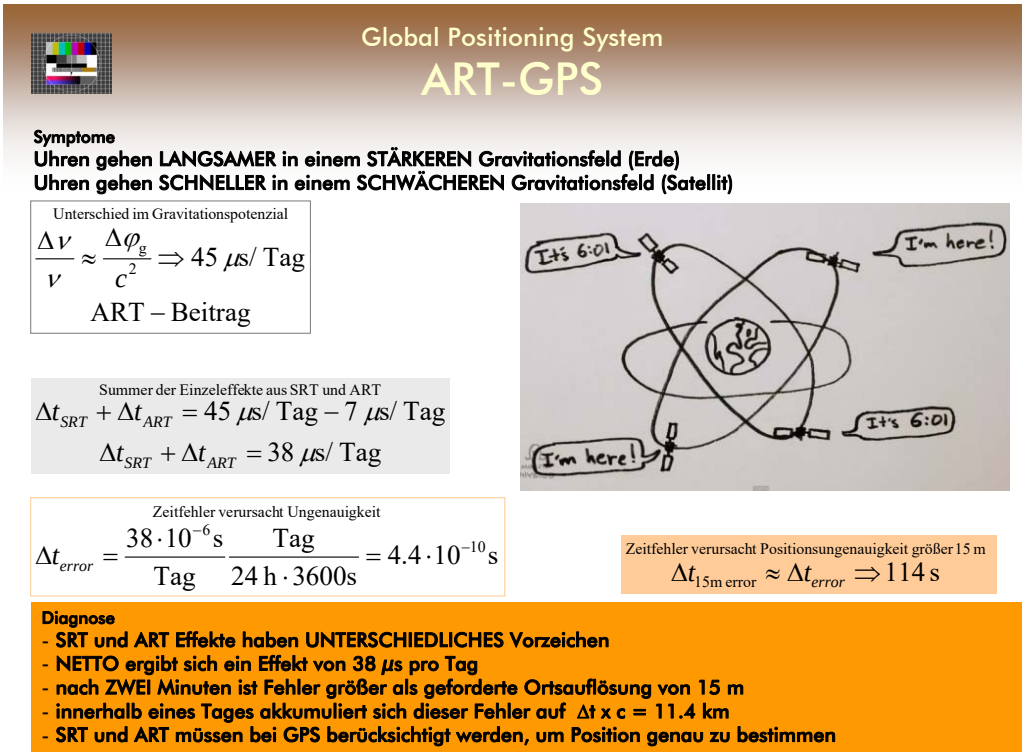


Abb. 8.45: Die Erde ist eine Kartoffel, wie die Daten des Deutschen GeoForschungsZentrum Potsdam belegen.

- Die Erde ist nicht rund und hat keine gleichmäßige Dichte. Die Gravitation ist dadurch nicht konstant. Abb. 8.45 zeigt die sogenannte Potsdamer Kartoffel, die stark überhöht, die Verteilung der Erdmassen und damit das räumlich ungleichförmige Schwerefeld der Erde zeigt.

Alle diese Effekte zusammengenommen ergeben eine Verzögerung der Signale von 7 ms pro Tag.



Damit nicht genug, müssen Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie berücksichtigt werden. Diese summieren sich pro Tag auf $45\,\mu$s. Insgesamt ergibt sich damit ein Korrekturfaktor von

$$\Delta t_{SRT} + \Delta t_{ART} = 45\frac{\mu\text{s}}{\text{Tag}} - 7\frac{\mu\text{s}}{\text{Tag}} = 38\frac{\mu\text{s}}{\text{Tag}} \tag{8.26}$$

Man erkennt, dass die Fehler durch Effekte der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie unterschiedliche Vorzeichen haben, siehe Abb. 8.46. Dies ergibt eine summierte Ungenauigkeit in der Zeitmessung von $4.4 \cdot 10^{-10}\,$s ohne Berücksichtigung relativistischer Effekte. Schon nach nur zwei Minuten ist der Fehler größer als die geforderte Ortsauflösung von 15 m. Innerhalb eines Tages akkumuliert sich dieser Fehler auf 11.4 km. Es ist also zwingend erforderlich, relativistische Effekte beim Betrieb des GPS Systems zu berücksichtigen, um die genaue Ortsposition zu bestimmen. Welche Rolle spielt der Nutzer des GPS? Tatsächlich wird in der Darstellung vorausgesetzt, dass der Beobachter seine eigene Zeit jederzeit exakt bestimmen kann. Das würde aber voraussetzen, dass man ständig eine Atomuhr bei sich tragen müsste. Das wäre teuer und unhandlich! Man geht anders vor. Der Nutzer bestimmt seine genaue Uhrzeit mit Hilfe der Atomuhren auf den Satelliten. Für den Beobachter gibt es vier Unbekannte aufgrund der Unsicherheit in Ort ($\vec{r} = (x, y, z)$) und Zeit (t). Die Informationen von vier Satelliten (j=1-4) reichen aus, das Problem des Beobachters zu lösen und Ort und insbesondere Uhrzeit zur Verfügung zu stellen:

$$|\vec{r} - \vec{r}_j| = c(t - t_j), \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{8.27}$$

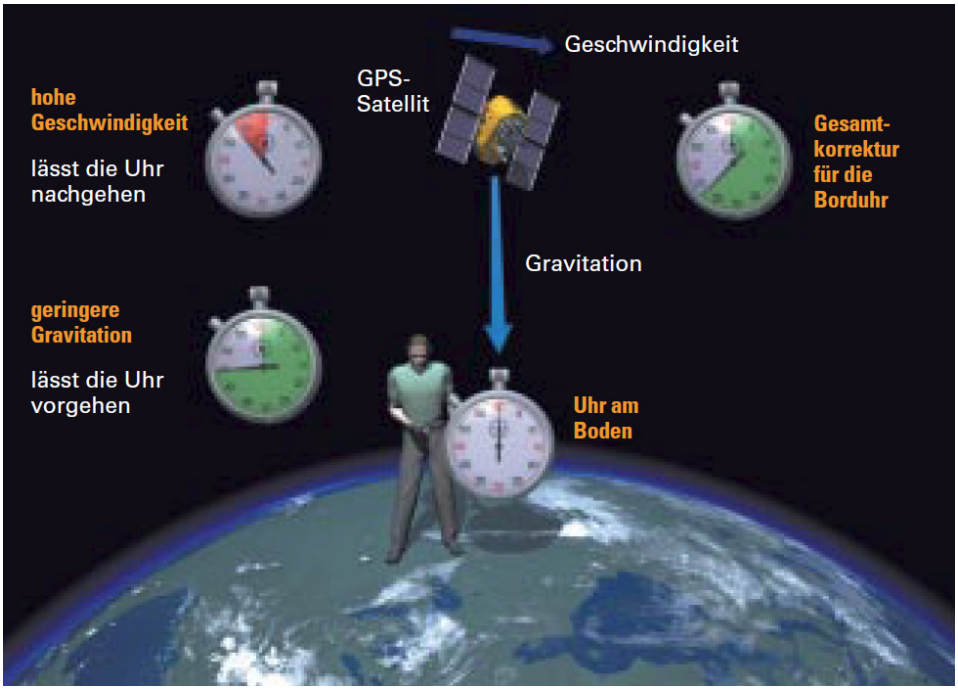


Abb. 8.46: Die Gravitation an der Position der geostationären Satelliten ist geringer als auf der Erde. Dadurch gehen die Uhren an Bord pro Tag 45 μs vor. Die Geschwindigkeit der Satelliten führt dazu, dass die Uhren pro Tag 7 μs nachgehen. Relativistischen Korrekturen sind deshalb notwendig, damit das GPS exakte Daten liefert [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Wie hoch ist die Gravitationsrotverschiebung für (a) die Sonne und (b) einen weißen Zwerg?

(a) Für die Sonne (M=$1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, R=$6.96 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$) ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{G_N \cdot M}{c^2 \cdot R} \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}} \cdot (1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg})}{(2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2 \cdot (6.96 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m})} \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= 2.12 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

(b) Anders sieht die Situation bei einem weißen Zwerg (M=$1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, R=$9 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$) aus

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{G_N \cdot M}{c^2 \cdot R} \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}} \cdot (1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2 \cdot (9 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m})} \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= 1.64 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Bei 500 nm bedeutet das eine Verschiebung von 0.082 nm, was man spektroskopisch auflösen kann. Im Fall von Sirius B hat man den Effekt überprüft und eine gute Übereinstimmung gefunden [**?**]. Die Rechnung ergab $\Delta\nu/\nu$=$5.9 \cdot 10^{-5}$, die Messung $6.6 \cdot 10^{-5}$.

Konzeptionelle und andere Fragen

- Zwei identische Uhren befinden sich im selben Haus, eine auf dem Dachboden und eine im Keller. Welche Uhr geht langsamer?

1. Die Schwerkraft breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Warum enthalten die in der Himmelsmechanik verwendeten Gleichungen dann keine Zeitverzögerungen?

2. Altern Sterne im Inneren und an der Oberfläche gleich schnell?

3. Kann man einen Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch nutzen, um eine Zeitreise zu unternehmen?

8.4 Gravitationswellen



Ladies and gentlemen, we have detected gravitational waves. We did it!

David Reitze, 2016

Einstein hat 1918 die Existenz von Gravitationswellen[24] vorhergesagt [**?**]. Dann dauerte es 100 Jahre bis man sie direkt nachweisen konnte. [**?**]. Erste indirekte Hinweise auf

[24] *Lexikon:* Eine **Gravitationswelle** ist eine unsichtbare Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit im

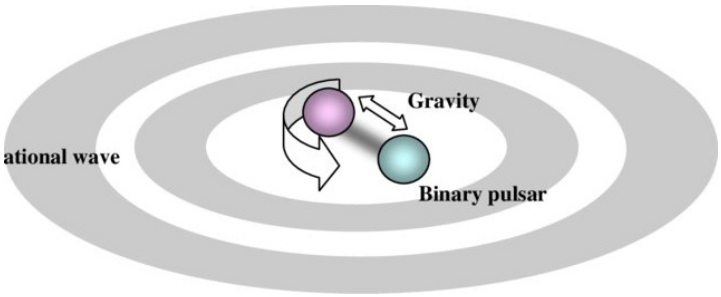


Abb. 8.47: Die Drehbewegung des von der Schwerkraft gebundenen Doppelpulsars verursacht eine Gravitationswelle [**?**].

Gravitationswellen ergaben sich 1974 [**?**]. Mit dem *Arecibo Radio Observatory* in Puerto Rico wurde ein binärer Pulsar (Hulse-Taylor Pulsar)beobachtet, siehe Fig. 8.47. Es wurde untersucht, ob sich die Umlaufbahnen der beiden Sterne im Laufe der Zeit verändern. Nach achtjähriger Beobachtung stellten man fest, dass sich die Sterne genau mit der Geschwindigkeit nähern, die die Allgemeine Relativitätstheorie vorhersagte, wenn das System Gravitationswellen ausstrahlt.

Stellen wir uns folgende Situation vor: Durch einen dummen Zufall (Wurmloch, Darth Vader) verschwindet plötzlich die Sonne. Was würde passieren? Da die Gravitationskraft der Sonne fehlt, die die Erde auf der Bahn hält, bewegt sich unser Planet nach Newton 1 tangential zu seiner bisherigen Bahn weiter. Nun kommt das zweite Postulat der Spezielle Relativitätstheorie zum Tragen (siehe Kapitel *Gleichzeitigkeit*): Die Lichtgeschwindigkeit ist endlich!. Was hat das für Folgen? Die Tangentialbewegung startet erst in dem Moment an dem die Erde feststellt, dass die Sonne nicht mehr da ist. Diese Information trifft aber erst verspätet ein. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird diese Änderung des Gravitationsfeldes über eine Gravitationswelle vermittelt. Die elektrodynamische Analogie ist ein elektrisches Feld, wo die Änderung über eine elektromagnetische Welle einem Beobachter vermittelt wird. Erkennen Sie die weitreichenden Konsequenzen? Die Endlichkeit von c und damit der Übertragungsgeschwindigkeit von Informationen erfordert, dass wir neu über die Newtonsche Vorstellung der unmittelbaren Wirkung von Kräften nachdenken müssen.

Machen wir zu diesem Vorgang ein Gedankenexperiment: Man betrachte zwei Massen, die aufgrund der Gravitationsanziehung aufeinander zustürzen. Eine elastische Feder speichert kinetische Energie beim Zusammenstoß und gibt die gesamte gespeicherte elastische Energie wieder frei, wenn sich die Feder entspannt. Die Massenanziehung durch Gravitation sorgt dafür, dass die Körper, wenn sie sich voneinander entfernen, abgebremst werden. Bei einem bestimmten Abstand ist die kinetische Energie auf NULL abgesunken und der Zyklus beginnt von vorne. Die Massen stürzen wieder aufeinander zu. Unter der unrealistischen Annahme, dass der Vorgang ohne Verluste stattfindet, wiederholt sich der Prozess immer wieder in gleicher Weise. Aus der Sicht der Klassischen Mechanik handelt sich also um einen vollständig elastischen Stoß. Jetzt kommt die Endlichkeit von c in Spiel. Betrachten wir zunächst den Fall, bei dem sich die Massen voneinander entfernen. Die Information über die Stärke der Gravitationswechselwirkung $F(R)$ im Abstand R erreicht den jeweils anderen Körper verspätet. In diesem Moment hat sich

Raum bewegt. Diese Wellen quetschen und dehnen alles auf ihrem Weg durch das Universum. Gravitationswellen werden durch energiereiche astrophysikalische Prozesse im Universum verursacht. Dabei wird die Raumzeit derart gestört, dass sich ein Wellenzug in alle Richtungen von der Quelle weg durch die Raumzeit ausbreitet. Diese kosmischen Wellen beinhalten Informationen über ihren Ursprung. Die Prozesse, die die Gravitationswellen erzeugen, sind am Ursprungsort extrem heftig; erreichen Sie die Erde, sind ihre Auswirkungen kaum nachweisbar. Die Erde wackelt mit einer Amplitude von 10^{-18} m. Das entspricht einem Tausendstel des Durchmessers des Atomkerns. Die stärksten Gravitationswellen werden durch Ereignisse wie kollidierende Schwarze Löcher und Neutronensterne, sowie Supernovas oder durch Überreste der durch den Urknall erzeugten Gravitationsstrahlung erzeugt.

der Abstand der Massen aber inzwischen auf $R' > R$ erhöht und das Newtonsche Gravitationsgesetz sagt uns: $F(R') < F(R)$. Daraus folgern wir, dass die Abbremsung durch die Gravitation stärker ist, als von Newton vorhergesagt. Was passiert, wenn sich die Massen wieder annähern? Die Stärke der momentanen Abbremsung hängt wieder vom *gefühlten* Abstand der Massen ab. Die effektive Distanz ist aber aufgrund der endlichen Lichtgeschwindigkeit geringer als der tatsächliche Abstand. Die Beschleunigung bei der Annäherung ist also geringer als von Newton gefordert. Dadurch verringert sich der Wert der in der Feder gespeicherten elastischen Energie. Als Folge erreichen die Körper nicht mehr die alten Beschleunigungswerte und die maximale kinetische Energie verringert sich bei jedem Zyklus. Zusammenfassend kann man also sagen, dass in einem abgeschlossenen System scheinbar Energie verloren geht!Damit stellt sich die Frage: Wie werden die fundamentalen Kräfte übertragen? Wir klammern die Beantwortung dieser Frage an dieser Stelle aus und verweisen auf das Kapitel *Heisenbergsche Unschärferelation.*

A long time ago in a galaxy far, far away, two black holes, one of mass 36 solar masses and the other of mass 29 solar masses, were dancing their death waltz, leading to their coalescence and the emission of gravitational waves carrying away with them three solar masses of energy. More precisely, it happened 1.3 billion years ago at a distance of 410 Mpc. When the waves were emitted, the most complex life forms on Earth were eukaryotes. As the gravitational waves propagated toward Earth, it changed much. Five hundred million years after the waves were emitted, or 800 million years ago, the first multicellular life forms emerged on Earth. Earth saw the Cambrian explosion 500 million years ago. Sixty-six million years ago the Cretaceous-Paleogene extinction event caused the disappearance of the dinosaurs. The first modern humans appeared 250,000 years ago [**?**].

Die Gravitationskraft und die Coulombkraft haben bis auf die Akteure (Massen m, M, Ladungen Q_1, Q_2) eines gemeinsam: Beide Kräfte hängen quadratisch vom Abstand R der Objekte ab

$$F_G = G_N \frac{m \cdot M}{R^2} \tag{8.28}$$

$$F_e = k_C \frac{Q_1 \cdot Q_2}{R^2} \tag{8.29}$$

wobei

Gravitationskonstante: $G_N = 6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$

Coulombkonstante: $k_C = \dfrac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9 \dfrac{\mathrm{V \cdot m}}{\mathrm{A \cdot s}}$

Es liegt also nahe, zu vermuten, dass die beide Wechselwirkungen in gewisser Weise auch an anderer Stelle ein ähnliches Verhalten zeigen. Ausgehend von der Betrachtungen im Kapitel *Zerfall des Myons* erweitern wir den Merksatz der Elektrodynamik:

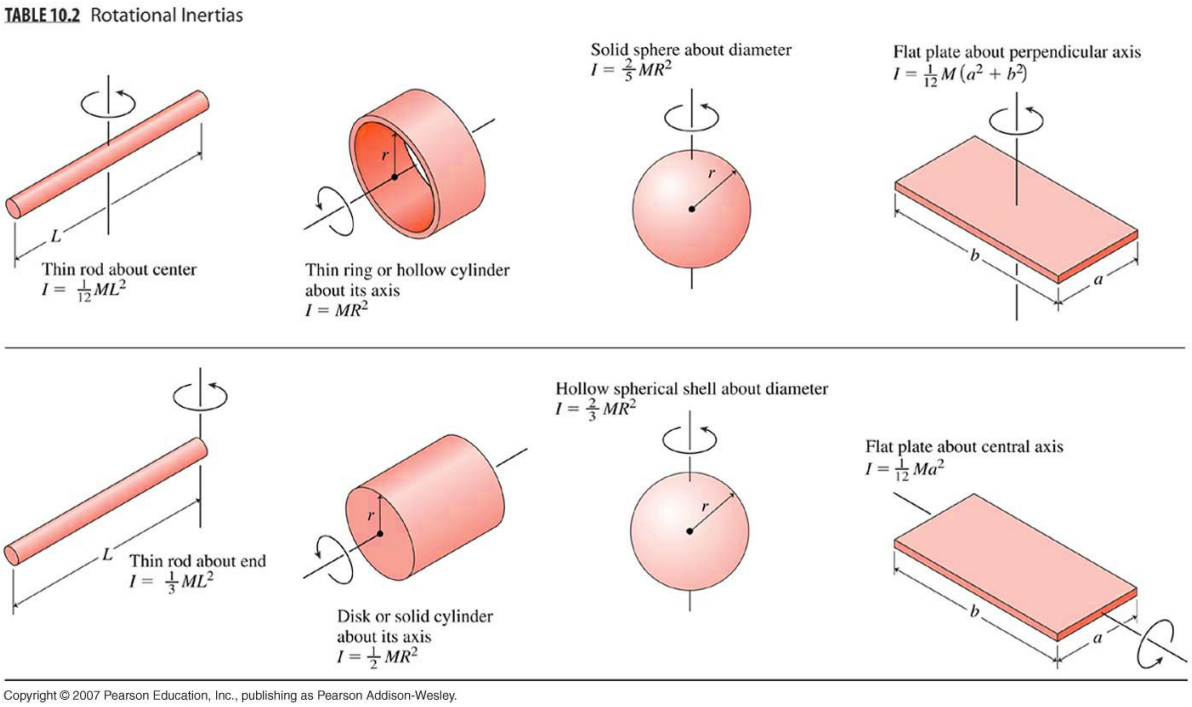


Abb. 8.48: Trägheitsmomente ausgewählter Körper.

Beschleunigte Ladungen strahlen!

und machen eine entsprechende Aussage für die Gravitation:

Beschleunigte Massen strahlen!

Diese ausgesendete Strahlung nennt sich eine Gravitationswelle.[25] Als Auswirkung ergibt sich eine Störung der Raumzeit, das heißt der Raum wird beeinflusst und Zeitabläufe verändern sich. Kurz zusammengefasst ergeben sich folgende Eigenschaften:

- Gravitationswellen breiten sich transversal aus.
- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Gravitationswelle ist c.
- Gravitationswellen lassen sich anhand von Amplitude, Frequenz (Wellenlänge) und Polarisation charakterisieren.
- Die Amplitude der Strahlung als Funktion des Abstands R zur Quelle nimmt mit einem Faktor $1/R$ ab.

[25] Im Gegensatz zu elektromagnetischen Wellen gehorchen Gravitationswellen nicht dem Superpositionsprinzip.

Kennt man die Eigenschaften der Quelle kann man die Leistung P_{GW} der ausgesendeten Gravitationsstrahlung berechnen:

$$P_{GW} = \frac{dE_{GW}}{dt} = \frac{32}{5}\frac{G_N \cdot I_R^2 \cdot \omega^6}{c^5} \tag{8.30}$$

wobei I_R das Trägheitsmoment (Abb. 8.48) und ω die Winkelgeschwindigkeit des Objekts ist. Beispielsweise ergibt sich für einen mit der Frequenz ω=25 rad/s rotierenden Stab (Länge ℓ=20 m, Masse M=5·10^5 kg) und einem sich daraus ergebenden Trägheitsmoment I_R:

$$I_R = \frac{1}{12} M \cdot \ell^2 \tag{8.31}$$

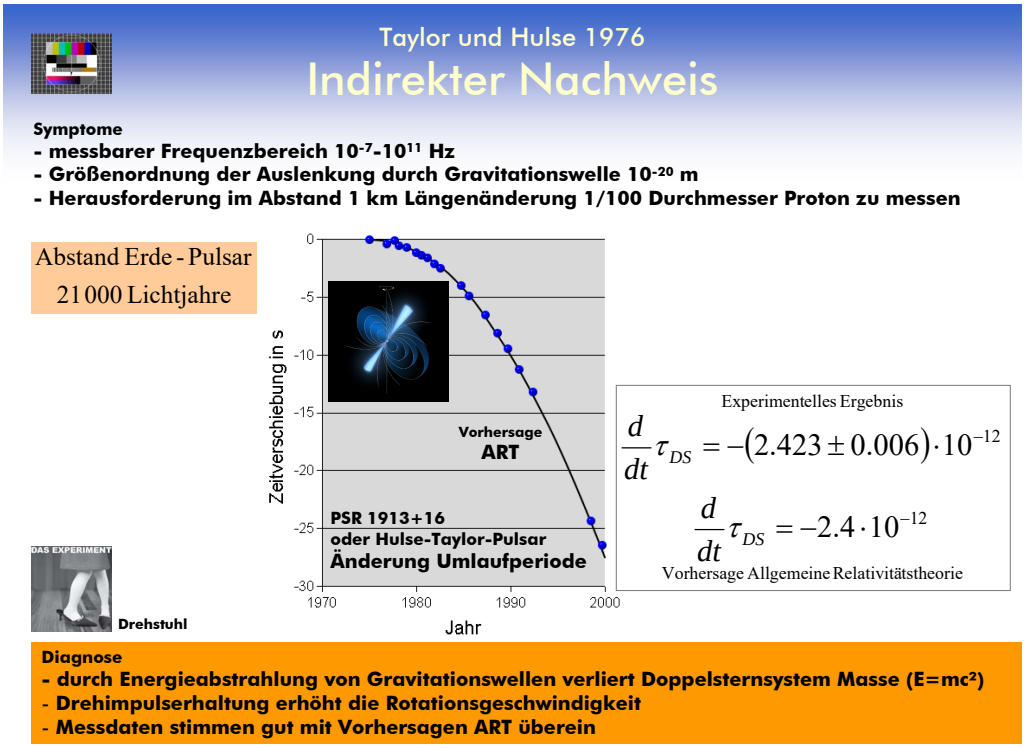
eine Abstrahlung von etwa 10^{-29} W. Zum Vergleich Doppelsternsystem (Masse M_1, M_2, reduzierte Masse μ_{DS}=$M_1 M_2/(M_1 + M_2)$, wo die Sterne im Abstand R umeinander rotieren. Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich mit:

$$\omega_{DS} = \frac{2\,\pi}{T_{DS}} = \sqrt{\frac{G_N\,(M_1 + M_2)}{R^3}} \tag{8.32}$$

Für zwei Neutronensternen mit je einer Masse der Sonne, die voneinander einen Abstand von 100 km haben, ergibt sich ein Wert von P_{GW}=$3.3 \cdot 10^{44}$ W. Schließlich kann man die abgestrahlte Leistung allein aus der Kenntnis der Massen (M_1, M_2) und des Abstands R berechnen:

$$P_{GW} = \frac{32}{5}\frac{G_N^4}{c^5}\frac{(M_1 \cdot M_2)^2 \cdot (M_1 + M_2)}{R^5} \tag{8.33}$$

Kann man diesen Energieverlust nachweisen?



Hulse-Taylor Pulsar

In der Geschichte eines Sterns wird irgendwann ein Punkt erreicht, an dem die Fusionsprozesse stoppen. Dann kann der Stern der Schwerkraft nicht mehr standhalten und fällt in sich zusammen und bilden unter bestimmten Bedingungen einen Neutronenstern. Neutronensterne haben einen Durchmesser einer mittleren Kleinstadt, aber die anderthalbfache Masse unserer Sonne. Sie entstehen in einer Supernovaexplosion, wobei der Eisenkern der sterbenden Sonne (Kapitel *Kernmodelle*) in sich zusammenfällt. Die enorme Schwerkraft Atome wandelt die Protonen und Elektronen der Atome in Neutronen um und es entsteht ein hyperdichtes Objekt, das das Pauli-Prinzip gehorcht (Kapitel *Beyond Bohr*). In diesem Kollaps rotiert das Objekt aufgrund der Drehimpulserhaltung immer schneller. Die Rotationsperiode bei Neutronensternen liegt bei etwa 1 Sekunde. Manche dieser Systeme rotieren aber deutlich schneller. Zum Beispiel dreht sich *XTE J1739-285* pro Sekunde mehr als eintausend mal. Manchmal haben diese schnell rotierenden Neutronensterne zusätzlich noch ein starkes Magnetfeld. Die typischen Magnetfelder sind elf Größenordnungen stärker als das Erdmagnetfeld. Auf der Drehachse findet man die Magnetpole. Hier konzentrieren sich die Magnetfeldlinien und hier entweichen geladene Teilchen und strahlen dabei entlang der Magnetfeldachse Radiowellen aus. Die Radiostrahlung tritt deshalb gebündelt den Polen aus -man denke an einen riesigen kosmischen Leuchtturm. Diese Klasse von Neutronensternen bezeichnet man als

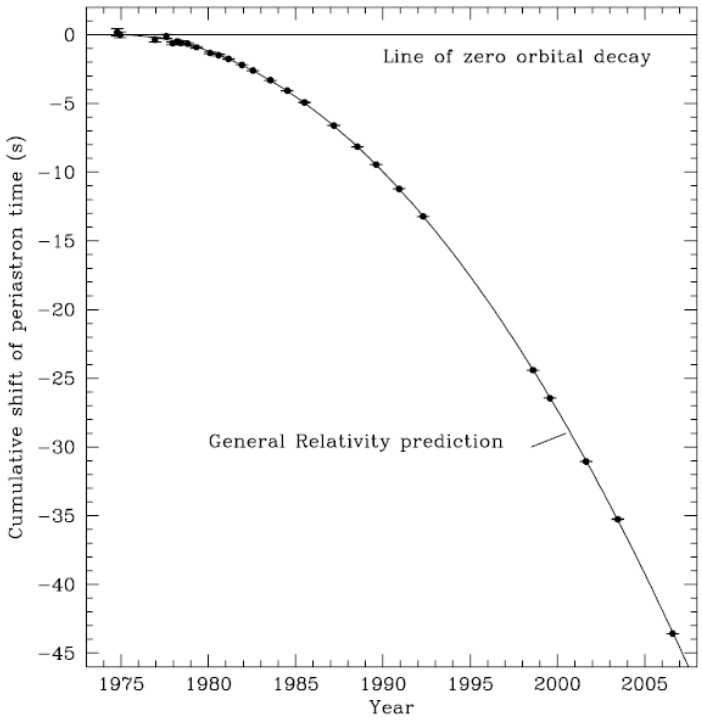


Abb. 8.49: Reduzierung der Periode durch Aussendung von Gravitationsstrahlung. Die Parabel zeigt die erwartete Verschiebung der Periastronzeit[a] relativ zu einer unveränderlichen Umlaufbahn, gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie [**?**].

[a] Das Periastron ist der nächste Punkt eines Körpers auf seiner Bahn um einen Stern.

Pulsare. Da die Dreh- und Magnetfeldachse oft nicht übereinstimmen, beobachtet man einen interstellaren Leuchtturm, der in schöner Regelmäßigkeit aufleuchtet. Man kann die Uhr danach stellen. Der erste entdeckte Pulsar PSR J1921+2153 trug zunächst den Namen Little Green Men:[26]

Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source [**?**]**:** Unusual signals from pulsating radio sources have been recorded at the Mullard Radio Astronomy Observatory. The radiation seems to come from local objects within the galaxy, and may be associated with oscillations of white dwarf or neutron stars.

Kosmische Großereignisse führen, wie die Beispielrechnung aufzeigt, zu enormen Energieausbrüchen. Die Frage stellt sich, ob man die dabei ausgelösten Gravitationswellen nachweisen kann. Ein erster Hinweis ergab sich durch Ausnutzung der Energieerhaltung. Dazu betrachtet man einen Pulsar in einem Doppelsternsystem. Da ein Pulsar durch die

[26] The Nobel Prize in Physics 1974 was awarded jointly to Sir Martin Ryle and Antony Hewish *for their pioneering research in radio astrophysics: Ryle for his observations and inventions, in particular of the aperture synthesis technique, and Hewish for his decisive role in the discovery of pulsars.*

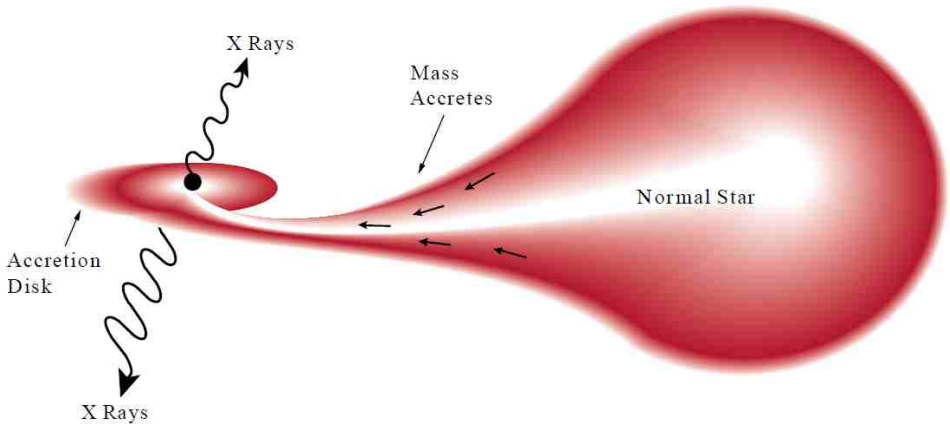


Abb. 8.50: Akkretionsscheibe bei einem Neutronenstern und dadurch verursachte folgende Emission von Strahlung [**?**].

Strahlungsabgabe Energie verliert, wird die Rotation abgebremst. Hulse und Taylor[27] haben ein interessantes kosmisches System untersucht [**?**]: Ein Doppelsternsystem bestehend aus zwei Neutronensternen (*PSR1913+16*), wobei einer der Sterne ein Pulsar ist. Durch die starke Wechselwirkung zwischen den Sternen werden Gravitationswellen emittiert. Das System erlebt durch diese Energieabstrahlung einen Energieverlust. Dieser äußert sich in einer Annäherung der Pulsare, wodurch sich die Rotationsgeschwindigkeit erhöht, die Umlaufperiode also abnimmt. Anhand der Pulsarstrahlung kann dieser Effekt nachgewiesen werden, siehe Abb. 8.49. Für PSR J1915+1606[28] fanden die Forscher einen Wert von

$$\frac{d\tau}{dt} = -2.42 \cdot 10^{-12} \tag{8.34}$$

der gut mit den Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie übereinstimmt:

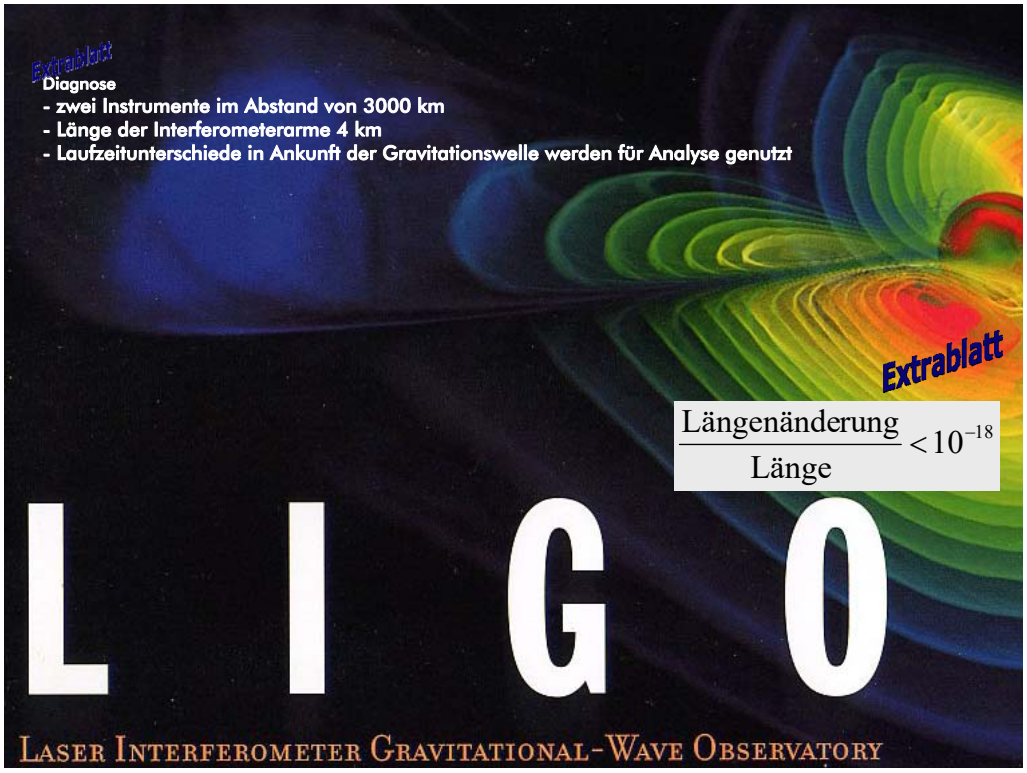
$$\frac{d\tau}{dt} = -2.40 \cdot 10^{-12} \tag{8.35}$$

In einer Langzeitmessung (2003-2016) am gar nicht soweit entfernten Doppelpulsar PSR J0737-3039A/B (Entfernung 2000 Lj) konnte die Methode verfeinert und bislang nicht auflösbare relativistische Phänomene nachgewiesen werden [**?**]. Ein weiterer Hinweis auf die Existenz von Gravitationswellen stellen so genannte Kataklysmische Veränderliche dar (Abb. 8.50). Diese sind ebenfalls Doppelsternsysteme, die aus einem Weißen Zwerg und einem normalen Stern bestehen. Mit der Zeit unterschreitet das System einen kritischen Abstand, die so genannte Roche-Grenze und es beginnt ein Massentransfer vom Stern zum Weißen Zwerg. Dabei bildet sich eine Aggregationsscheibe aus. Beim Kontakt

[27] The Nobel Prize in Physics 1993 was awarded jointly to Russell A. Hulse and Joseph H. Taylor Jr. *for the discovery of a new type of pulsar, a discovery that has opened up new possibilities for the study of gravitation*

[28] Der Hulse-Taylor Pulsar ist $21 \cdot 10^3$ Lj entfernt. Seine Rotationsperiode beträgt 59.03 ms (17 Hz). Zusammen mit einem unsichtbaren Neutronenstern bildet er ein Doppelsternsystem. Beide Sterne haben etwa 1.4 Sonnenmassen und umlaufen den gemeinsamen Schwerpunkt in etwa 8 h.

der Materie mit der Scheibe erhitzt sich die Materie und die Helligkeit des Systems am Himmel erhöht sich. Die Massenverluste verkürzen im Laufe der Zeit die Umlaufdauer. Man hat festgestellt, dass es kaum kataklysmische Doppelsternsysteme mit Umlaufdauern zwischen 2.15 und 3.18 h gibt. Dieses Phänomen bezeichnet man mit dem Begriff Periodenlücke. Unterschreitet das System die obere Periodendauer, reißt der Materiefluss ab und die kataklysmische Aktivität klingt ab. Innerhalb der Periodenlücke kommt es innerhalb von 10^6 a zu einem Verlust an Drehmoment durch die Abstrahlung von Gravitationswellen. Bei einer Umlaufdauer von 2.15 h startet der Materietransfer wieder und die kataklysmische Aktivität setzt wieder ein.



Kölsches Grundgesetz: Jede Jeck is anders.

Gravitationswelle GW150914

Kosmische Naturkatastrophen unterscheiden sich und führen zu Gravitationswellen, die charakteristisch sind für das gerade ablaufende Ereignis. Die Eigenschaften der ausgesendeten Gravitationswellen spiegeln sich in den aufgefangenen Daten wieder und liefern einen Fingerabdruck der Dynamik. Das kann die Stärke des Signals, die Frequenz und Periodizität sein.. Ein erster Versuch Gravitationswellen direkt nachzuweisen, sind die so genannten Weber-bars [? ?], siehe Abb. 8.51. Dabei durchläuft eine Gravitationswelle einen massiven Metallzylinder (Aluminium Länge 2 m, Durchmesser 1 m). Die zeitabhängige gezeitenartige Kraft bewirkt Dehnung und Stauchung in eine bestimmte Richtung. Der Zylinder vollführt nach Anregung durch die Gravitationswelle einen harmonische Schwingung aus. Nicht die Gravitationswelle, sondern die mechanischen Nachschwinger werden daher im Experiment analysiert. Unvorteilhaft ist, dass die Zylinder nur nahe der mechanischen Resonanzfrequenz (hier 1660 Hz) empfindlich sind. Daher sind Weber-Bars nur für ganz bestimmte astronomische Ereignisse empfindlich. Mit den im Moment arbeitenden fünf Weber-Bars konnte bislang noch keine Gravitationswelle direkt nachgewiesen werden.



Abb. 8.51: Joseph Weber und einer seiner Detektoren für Gravitationswellen [**?**].

Vielversprechender sind Messinstrumente auf der Basis des Michelson Interferometers (Kapitel *Äther*). Allerdings bedarf es eines stark vergrößerten Aufbaus, damit sich die geringen Änderungen durch die Gravitationswelle merklich aufschaukeln. Die deutsche Version eines solchen Experiments GEO 600 steht auf einem Feld bei Hannover, siehe Abb. 8.52. Die Armlänge beträgt 600 m. Die notwendige Stabilität und Fertigungsgenauigkeit im Aufbau stellt enorme Anforderungen an die Ingenieurskunst. Zusätzlich besteht die Aufgabe darin, die Messtechnik an die Grenzen des physikalisch möglichen zu treiben (siehe Abb. 8.53).

A triumph of sensitivity: The mirrors located at each end of the interferometer's arms have a mass of 40 kg and are made of ultrahigh-purity silica glass. They are coated with multiple layers of doped tantala and silica to provide almost perfect reflectivity at LIGO's operational wavelength of 1064 nm. The mirrors scatter less than 10 ppm of the incident light, necessitating sub-atomic-level surface roughness. As part of a multistaged sophisticated vibration isolation scheme designed to protect the interferometer from seismic disturbances, the mirrors are suspended using a series of thin (400 μm diameter) silica fibres and linked to a 360 kg quadruple pendulum mass system. Ultimately, the mirrors are so well protected from vibration that the random motion of the atoms within the mirrors and their housings can be detected. The entire beam path of the interferometer is maintained under ultrahigh-vacuum conditions (10^{-9} torr) to prevent



Abb. 8.52: Photo des deutschen Gravitationswellendetektor GEO 600 [**?**].

air currents, dust and small temperature changes from disrupting the propagation of the laser beams. It takes 40 days of constant pumping to remove all the air from the system [**?**].

Die hohe Empfindlichkeit von GEO 600 reichte bislang nicht aus, um Signale zu detektieren. Dies gelang erst kürzlich dem noch größeren Instrument LIGO[29] (Abb. 8.54). Die Länge der Interferometerarme beträgt 4 km. Tatsächlich besteht das Experiment aus zwei Michelson Interferometern, die an Orten in 3000 km Abstand aufgebaut wurden, siehe Abb. 8.55. Die sich ergebenden Laufzeitunterschiede in Ankunft der Gravitationswelle können für eine Richtungsanalyse genutzt werden.

Tatsächlich gelang es LIGO am 14. September 2015 das erste direkte Signal einer Gravitationswelle nachzuweisen, siehe Abb. 8.56 [**?**]. Damit wurde ein neues astronomisches Nachweisverfahren eingeführt.[30] Das Ereignis wurde von beiden LIGO-Instrumenten nachgewiesen. Das Signal war kürzer als eine halbe Sekunde und nahm über diesen Zeitraum in Frequenz und Amplitude zu, siehe Abb. 8.57. Die maximale Amplitude der relativen Längenänderung lag bei rund 10^{-21}. Abb. 8.56 zeigt dazu eine Überlagerung der beiden Signale, die sich nur in ihrer Ankunftszeit unterscheiden. Die Differenz in der Ankunftszeit der Gravitationswelle in Livingston and Hanford erlaubte die Richtung aus der die Welle eintraf auszuwerten. Die Analyse ergab, dass die Gravitationswelle

[29] Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

[30] The Nobel Prize in Physics 2017 was divided, one half awarded to Rainer Weiss, the other half jointly to Barry C. Barish and Kip S. Thorne *for decisive contributions to the LIGO detector and the observation of gravitational waves*

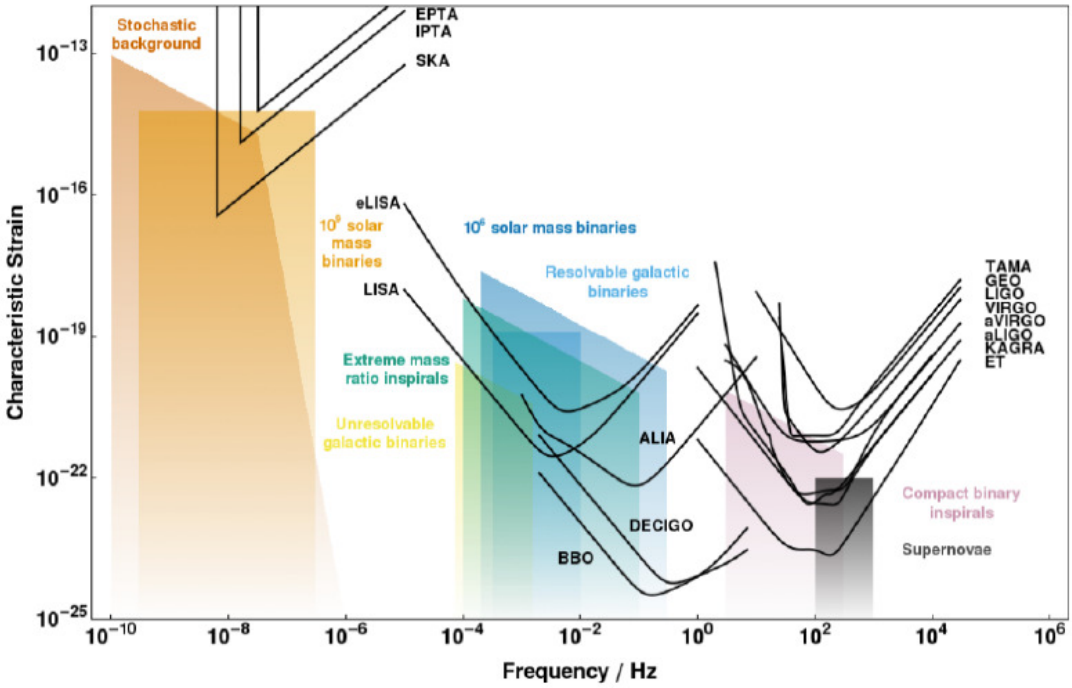


Abb. 8.53: Empfindlichkeitskurven für verschiedene Arten von Gravitationswellendetektoren bei unterschiedlichen astronomischen Quellen [**?**].

aus einem System in einer Entfernung von $1.3 \cdot 10^6$ Lichtjahre stammt, und zwar aus Richtung der Magellanschen Wolken, siehe Abb. 8.58.

The arrows in Fig. 8.59 show the optical counterpart to the gravitational-wave source. (The bright spot in the centre is the host galaxy NGC 4993.) The left image is from August 17, 2017, 11 hours after the detection of the gravitational-wave source. The right image is from four days later, when the source has faded significantly and its color became much redder.

Mit Hilfe von Simulationen konnte die Natur des Ereignisses GW150914 geklärt werden, siehe Abb. 8.60. Eine genaue Analyse des Signals auf der Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie ergab, dass das Signal von zwei Schwarzen Löchern mit 29 bzw. 36 Sonnenmassen stammt. Das resultierende Schwarze Loch hatte die Masse von 62 Sonnen. Demnach wurden bei dem Prozess Gravitationswellen in der Größenordnung der Energie von 3 Sonnenmassen abgestrahlt. Dies erfolgte innerhalb von 0.2 Sekunden vor dem Kollaps. Die dabei generierte Leistung war zehnmal höher als die gesamte Leuchtkraft ALLER Sterne im Universum. Abb. 8.61 liefert in einer Übersicht die ersten drei durch LIGO nachgewiesen Ereignisse und Abb. 8.64 zeigt die Frequenzsignale, die von LIGO aufgezeichnet wurden. In 2017 konnte die Verschmelzung zweier Neutronensterne sowohl das Lichtsignal mit astronomischen Instrumenten als auch mit dem Gravitationswellen-

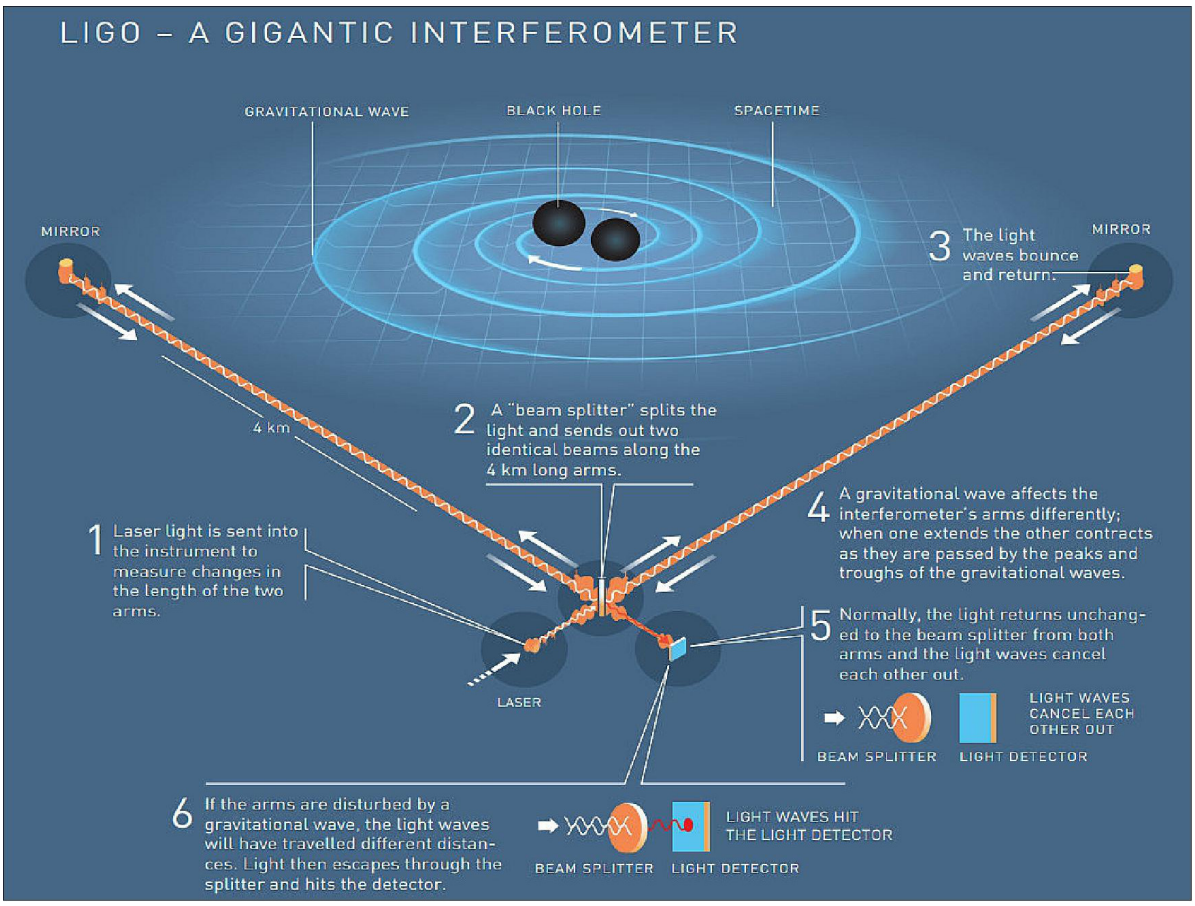


Abb. 8.54: LIGO gravitational wave interferometer [**?**].

signal beobachtet werden [**?**]. Abb. 8.62 und 8.63 zeigen die Historie des Ereignisses. Wie sich herausstellt kann man aus der Amplitude der Gravitationswelle die Entfernung und aus der Rotverschiebung des ausgesendeten Lichts die Fluchtgeschwindigkeit bestimmen. Damit ergibt sich eine neuer Ansatz um die Hubble-Konstante abzuschätzen. Abb. 8.65 liefert eine Zusammenstellung aller Gravitationswellenereignisse, die zwischen 2015 und 2020 beobachtet wurden.

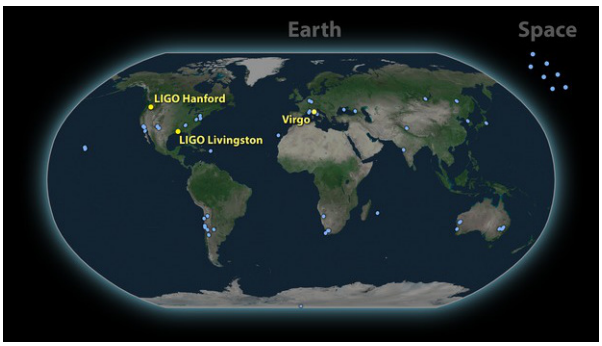


Abb. 8.55: Standorte der Gravitationswellendetektoren LIGO und VIRGO[**?**].

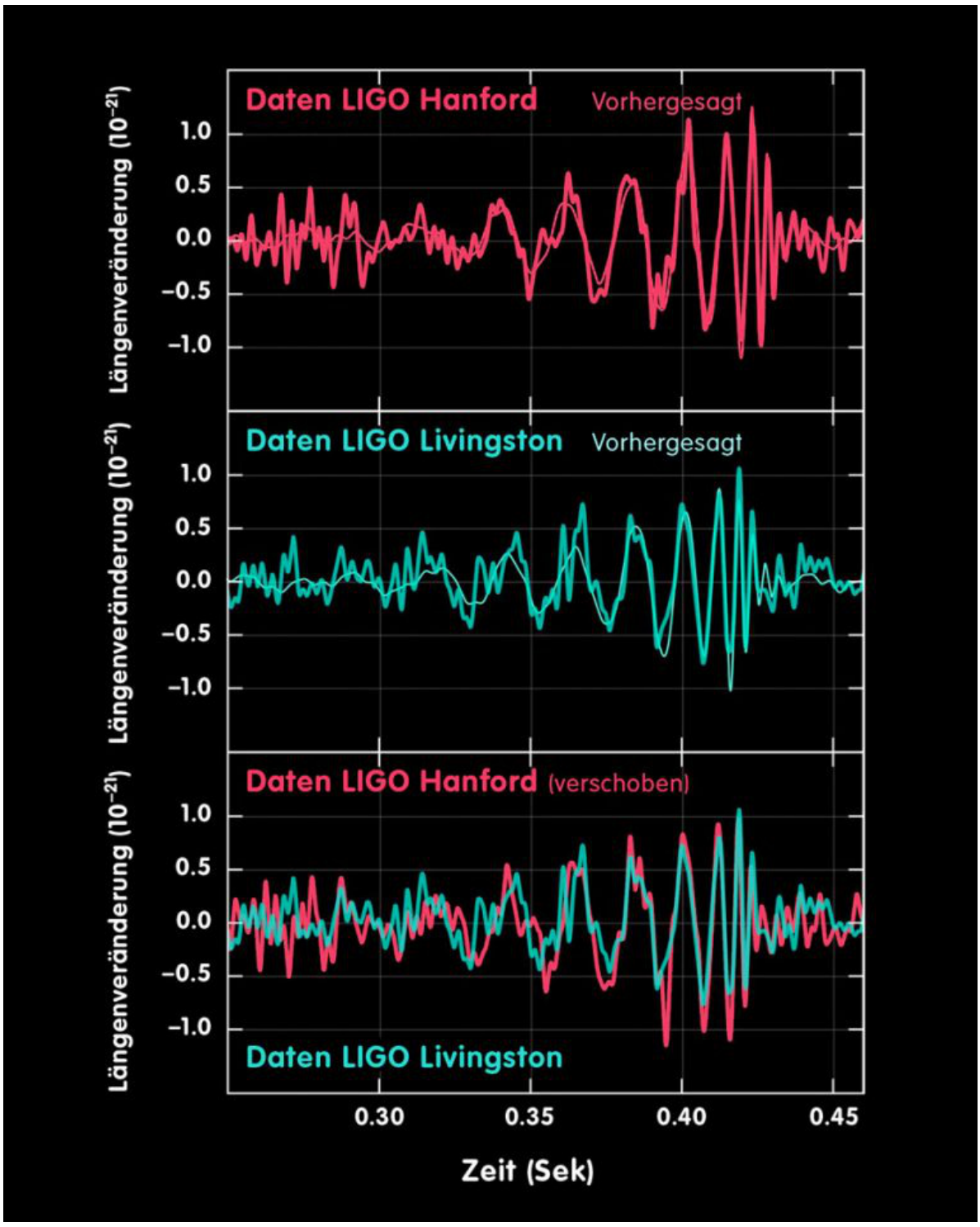
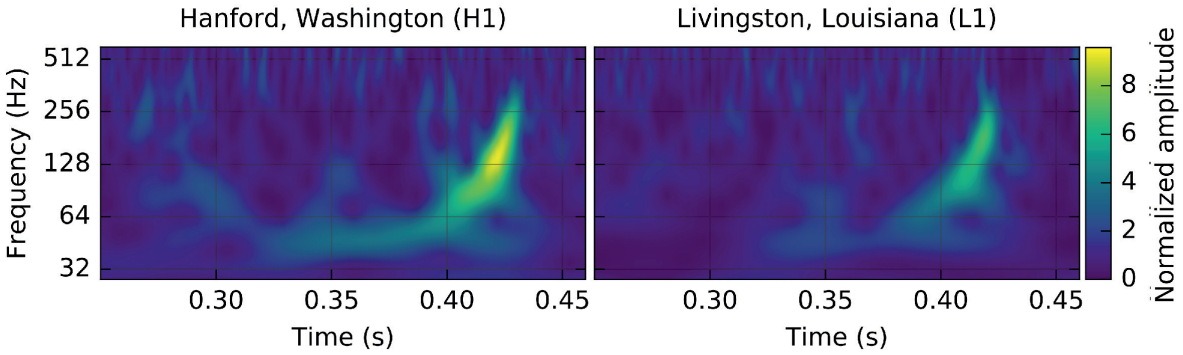


Abb. 8.56: Zeitlicher Verlauf des Gravitationswellensignals von GW150914 wie es in Hanford und Livingston 14. September 2015 aufgenommen wurde. Oben: Relative Längenänderung in Hanford. Mitte: Relative Längenänderung in Livingston. Unten: Überlagerung der beiden Signale. GW150914 erreichte erst Hanford und 7 ms später den Detektor in Livingston [**?**].



c

Abb. 8.57: Spektrogramm der Gravitationswelle aufgenommen mit beiden LIGO-Detektoren. Das Signal steigt im Verlauf von etwa 0.2 Sekunden von 30 Hz auf mehr als 300 Hz an und wird gleichzeitig lauter [**?**].

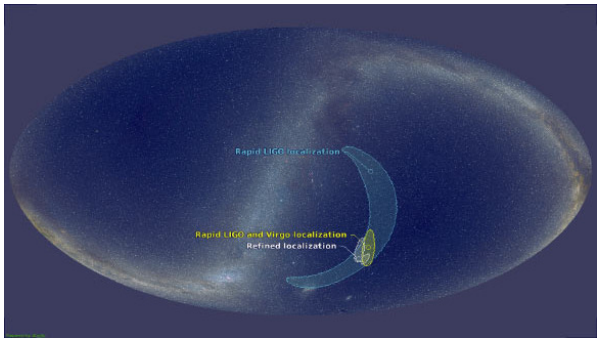


Abb. 8.58: Der wahrscheinlichste Ort des Gravitationswellenereignisses GW170814 liegt in den Malleganschen Wolken [**?**].

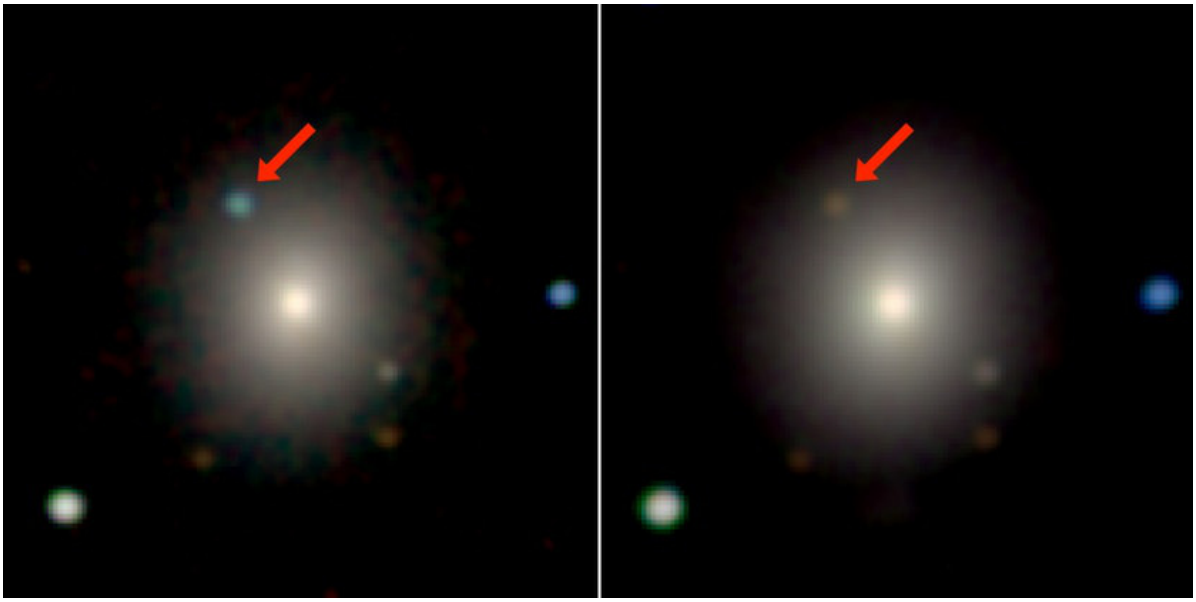


Abb. 8.59: Das erste Photo einer Gravitationswellenquelle ist SSS17a (Pfeil) und es zeigt Licht, das bei der Verschmelzung zweier Neutronensterne emittiert wird [**?**].

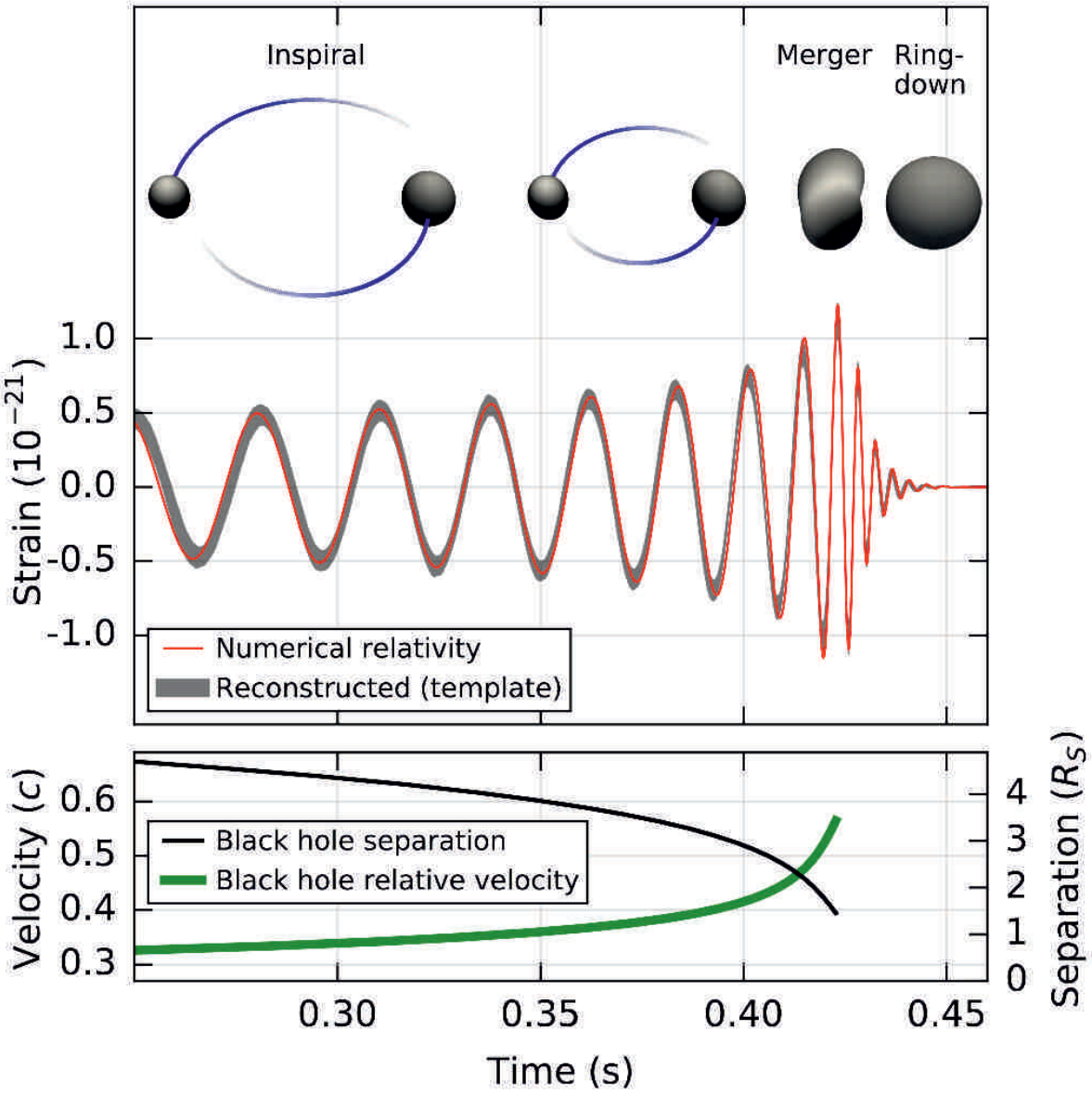


Abb. 8.60: Wie entwickelt sich eine Gravitationswelle zeitlich (Mitte)? Vergleich der rekonstruierten Gravitationswelle mit den Vorhersagen der am besten passenden Wellenform, die aus der Allgemeinen Relativitätstheorie berechnet wurde. Ebenfalls gezeigt ist, wie sich die Schwarzen Löchern annähern (oben) und wie sich ihre Geschwindigkeiten entwickeln (unten) [**?**].

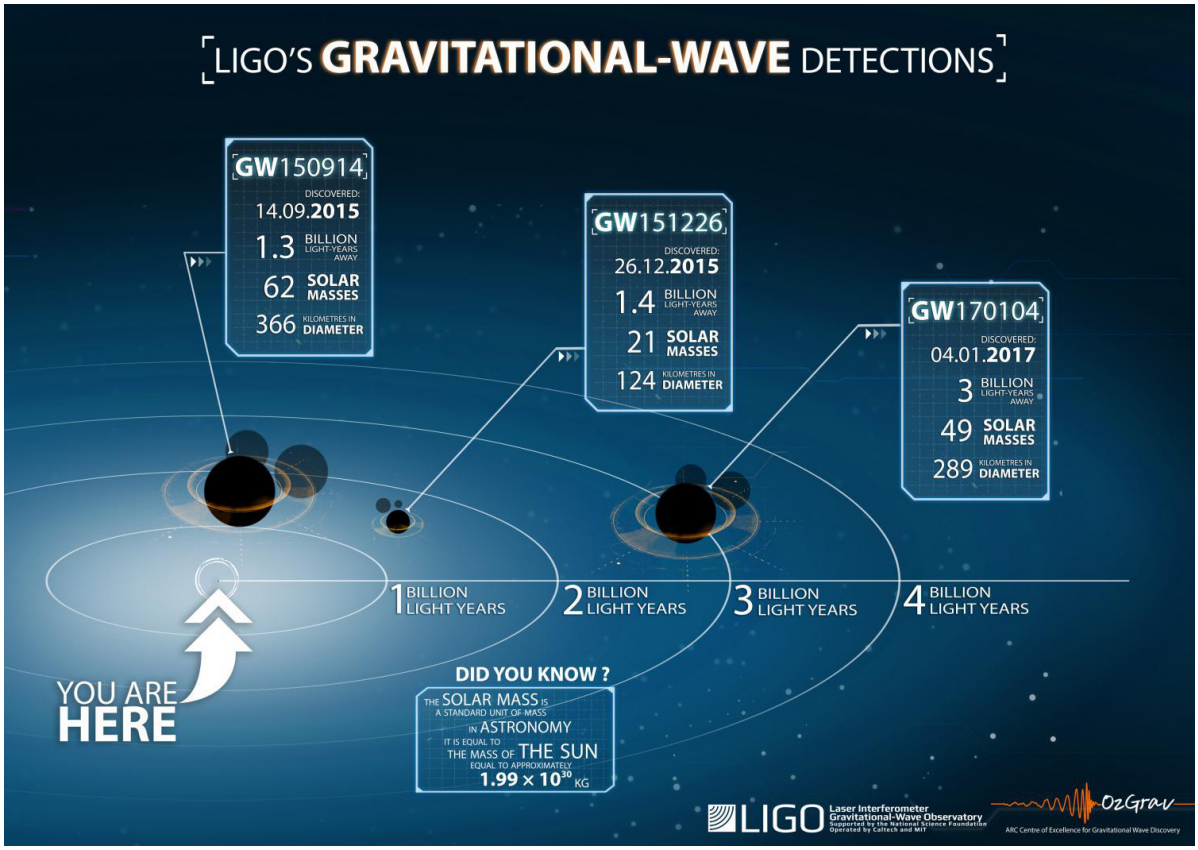


Abb. 8.61: Übersicht der ersten drei von LIGO detektierten Gravitationswellenereignisse [**?**].

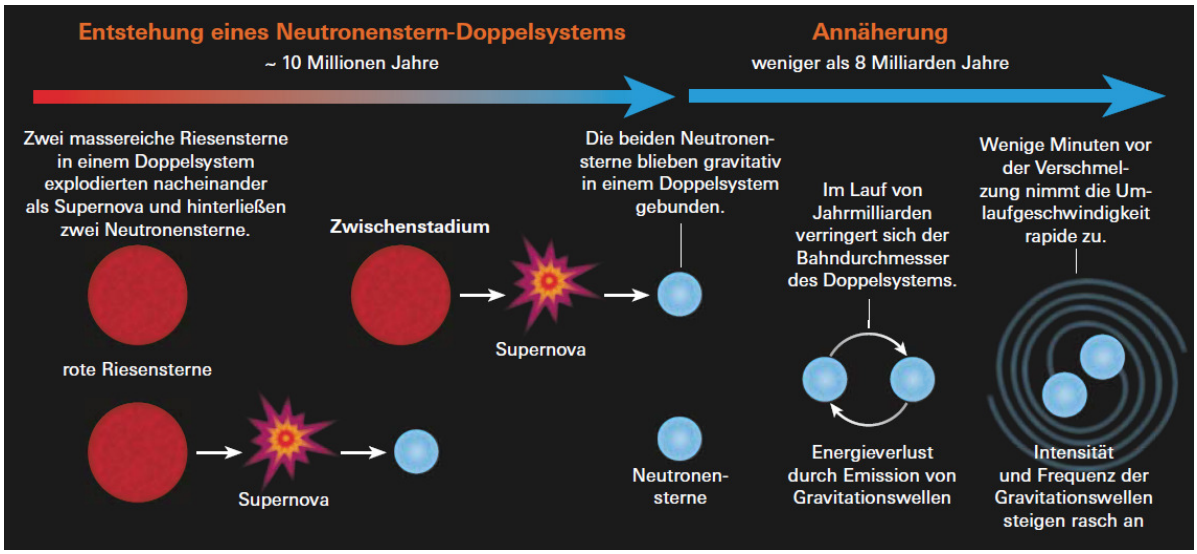


Abb. 8.62: Sternentod Phase 1 [**?**]

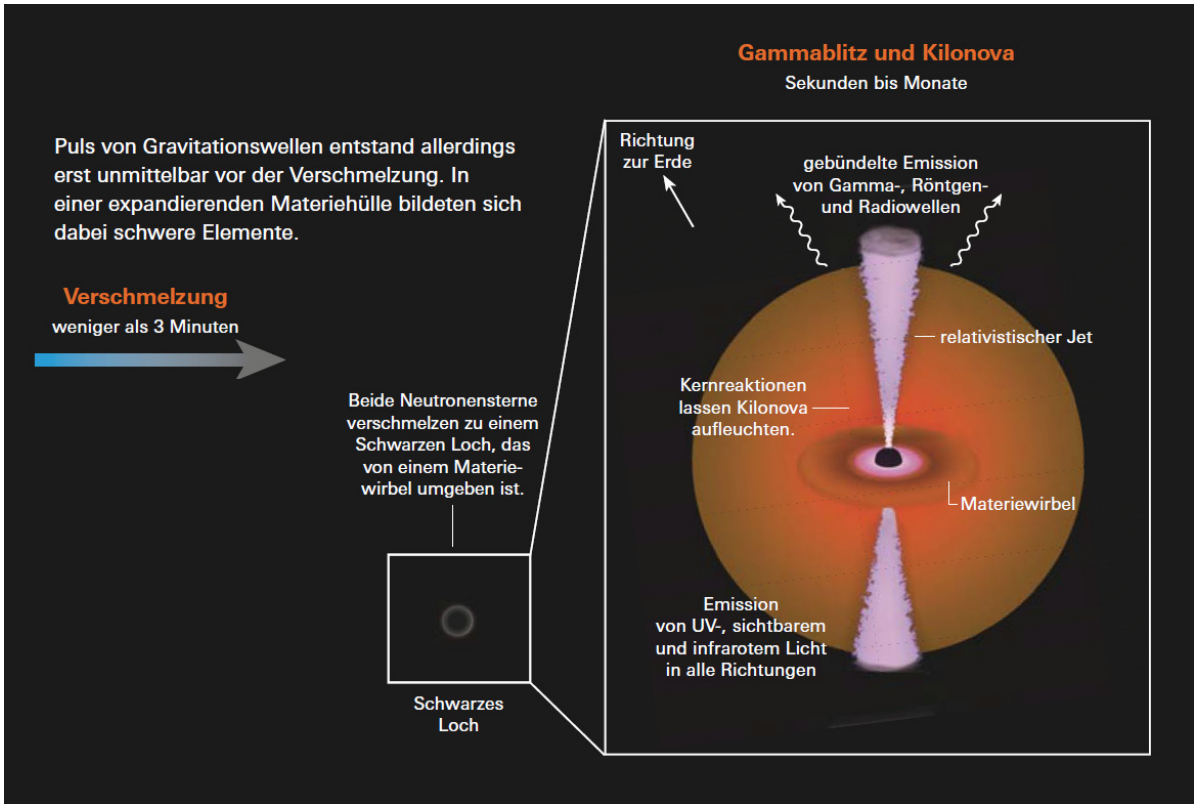


Abb. 8.63: Sternentod Phase 2 [**?**]

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass es Pläne gab, im All am so genannten Lagrange-Punkt[31] ein noch größeres Interferometer, genannt LISA[32] mit einer Kantenlänge von $2.5 \cdot 10^6$ km zu installieren sollte. Ein Blick in die Empfindlichkeitskurven (Abb. 8.53) zeigt auf, dass LISA im Vergleich zu LIGO in anderen Frequenzbereichen sensitiv ist. Damit ist dieses Instrument empfindlich auf andere Großereignisse im Universum und ergänzt damit die Spektroskopie. Im Jahr 2011 hat die NASA allerdings die Entwicklung zunächst eingestellt. 2025 soll die Entscheidung fallen, ob ein solches Instrument aufgebaut werden soll.

Welche Ereignisse kann man mit Gravitationswellen-Astronomie beobachten?

Abb. 8.66 gibt einen Überblick über die Wellenlängenbereiche, die bei den verschiedenen kosmischen Großereignissen ausgesendet werden. Zusätzlich findet man die geeigneten Instrumente, um diese Wellen nachweisen zu können. Zum Abschluss der Thematik noch eine Liste kosmischer Emitter die als Quellen für starke Gravitationswellen in Frage kommen:

[31] *Lexikon:* Ein **Lagrange-Punkt** ist im System zweier Himmelskörper ein Ort, an denen eine Raumsonde antriebslos stehen kann, ohne dass sich seine Position relativ zu den Himmelkörpern ändert.
[32] Laser Interferometer Space Antenna

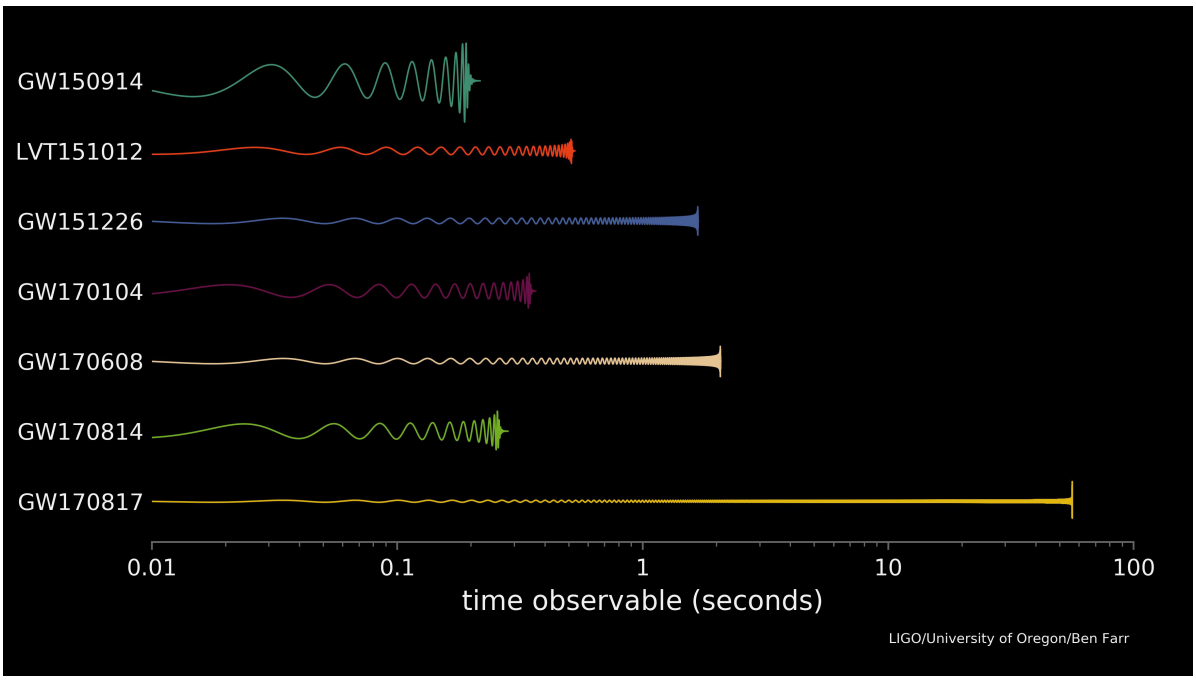


Abb. 8.64: Signale von Gravitationswellenausbrüchen unterschiedlicher Quellen. Man beachte, dass das Signal der Neutronensternverschmelzung von GW170817 deutlich länger ist, als alle anderen nachgewiesenen Ereignisse [**?**].

- Supernova-Explosionen vom Typ II
- kompakte Objekte wie Neutronensterne oder Schwarze Löcher in einem Mehrfachsystem
- kompakte Objekte, die in einem im Gravitationskollaps entstehen
- supermassereiche Schwarze Löcher, die Masse durch Akkretion aufnehmen
- Verschmelzung schwarze Löcher
- Bewegung weißer Zwerge umeinander
- Sturz einer Sonne in ein schwarzes Loch
- Entstehung des Universums im Urknall

In Bezug auf den letzten Punkt hoffen die Astrophysiker, mit Hilfe von Gravitationswellen die Anfangsphase des Universums, etwa 400 000 Jahre nach Urknall, zu erkunden. Diese kann mit elektromagnetischer Strahlung nicht erfasst werden, weil das Universum zu diesem Zeitpunkt für Licht noch nicht transparent war. Die Erwartung der Kosmologen ist, dass man wie bei der kosmischen Hintergrundstrahlung, einen Gravitationswellenhintergrund detektiert. Fundamentalen Fragestellungen sollen nun mit Hilfe von Gravitationswellendetektoren angegangen werden [**?**]:

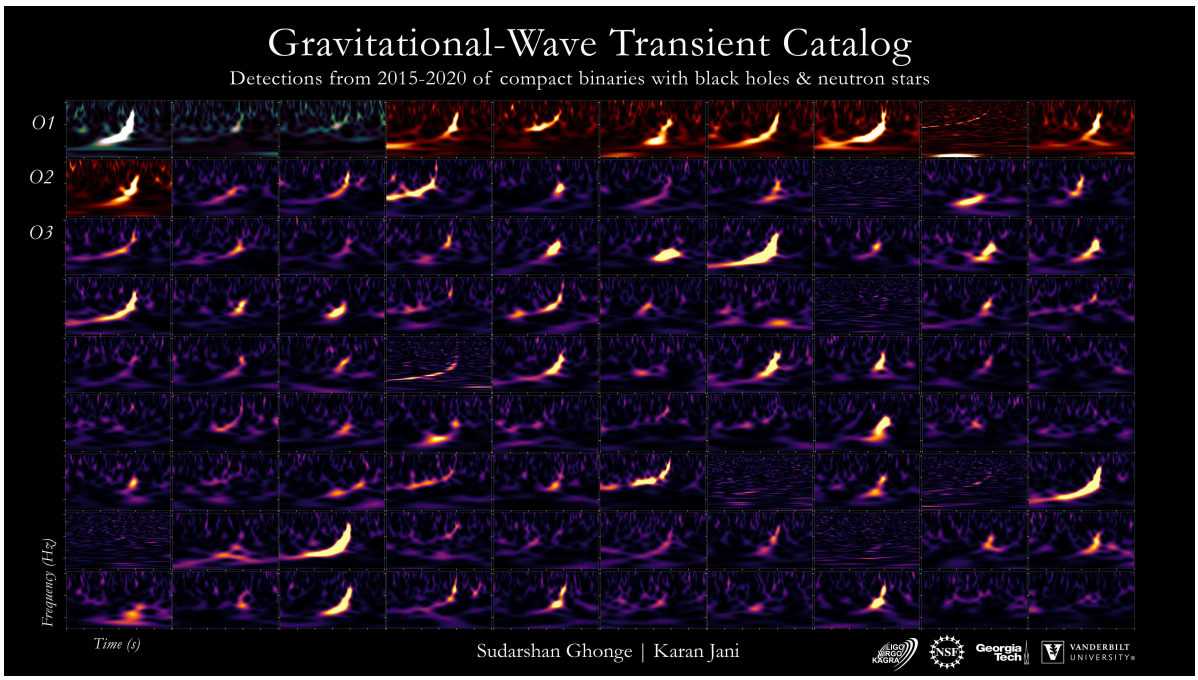


Abb. 8.65: Jedes Mal, wenn zwei massive Schwarze Löcher kollidieren, wird ein lautes Zwitschern in Form von Gravitationswellen ausgesendet. Je mehr Energie bei einer Kollision auf die Erde gelangt, desto heller erscheint sie in der Grafik-citeLIGO [**?**].

- What is the physics of stellar core collapse? How often do core-collapse supernovae occur?
- What is the equation of state, and what are the radii of neutron stars?
- What are the multi-messenger emission mechanisms of high- energy transients (gamma- ray bursts and kilonovae)?
- How do binary black holes of tens of solar masses form and evolve?
- How did super-massive black holes at the cores of galactic nuclei form and evolve, and what were their seeds and demographics?
- Are black hole spacetimes as predicted by general relativity?
- Are there any signatures of horizon structure or other manifestations of quantum gravity accessible to gravitational-wave observations?
- Is dark matter composed, in part, of primordial black holes, or must it be composed solely from exotic matter such as axions or dark fermions?
- What is the expansion rate of the Universe?

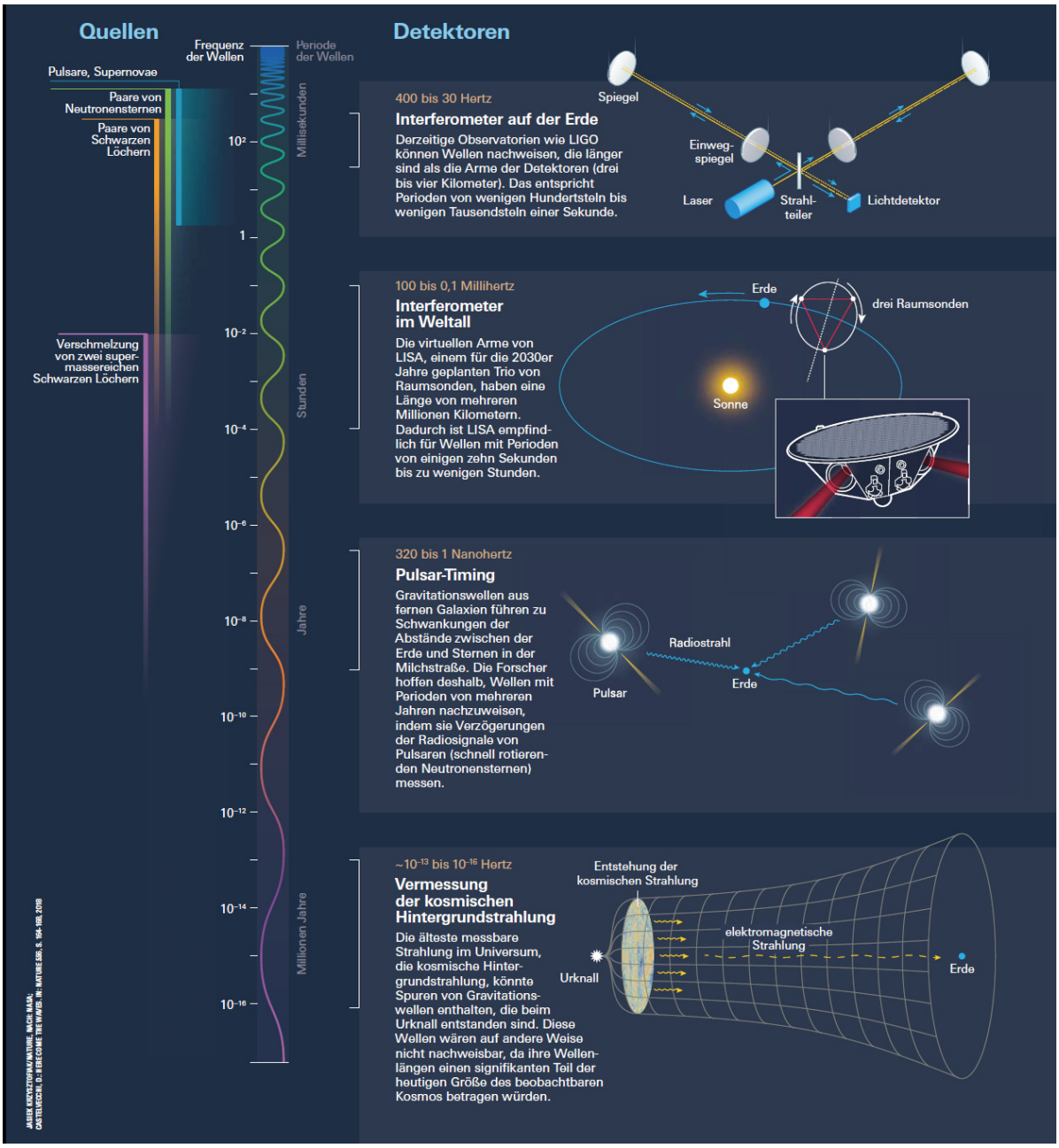


Abb. 8.66: Astronomische Objekte senden Gravitationswellen über einen weiten Frequenzbereich aus. Interferometer wie LIGO und VIRGO haben nur für einen kleinen Teil dieses Spektrums eine ausreichende Empfindlichkeit, wodurch sie kosmische Phänomene, wie die Kollision massereicher Schwarzer Löcher, nicht nachweisen können. Interferometer im All und andere Verfahren sind geeignet, den entsprechenden Frequenzbereich abzudecken [**?**].

- What is the nature of dark energy?
- Is there a measurable gravitational-wave stochastic background due to phase transitions in the early Universe? If so, what were its properties?
- How does gravity behave in the strong/highly dynamical regime?
- Do we live in a Universe with large extra dimensions?
- Are black holes, neutron stars and white dwarfs the only compact objects in our Universe, or are there even more exotic objects?

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Beweise gibt es für die Gültigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie?

2. Verdampfen Objekte nicht im Laufe der Zeit stetig, indem sie Gravitationswellen aussenden?

3. *Breaking News 20 May 2022:* **Imminent merger of giant black holes predicted. Never-before-seen event could spark cosmic fireworks - if it is not a mirage [?]:** Tick . . . tick . . . boom? In the center of a galaxy 1.2 billion light-years from Earth, astronomers [**?**] say they have seen signs that two giant black holes, with a combined mass of hundreds of millions of Suns, are gearing up for a cataclysmic merger as soon as 100 days from now. The event, if it happens, would be momentous for astronomy, offering a glimpse of a long-predicted, but never witnessed mechanism for black hole growth. It might also unleash an explosion of light across the electromagnetic spectrum, as well as a surge of gravitational waves and ghostly particles called neutrinos that could reveal intimate details of the collision. Top oder Flop?

4. Schauen Sie sich nochmal Abb. 1.9 in Kapitel 1 *Beobachter* an!

5. Zum Abschluss eine kleine Geschichte: Stellen Sie sich Ameisen vor, die auf einem Karussell leben. In dieser zweidimensionalen Welt ist soweit alles in Ordnung. Durch Messungen mit einem Lineal an Kreisen geringen Durchmessers ermitteln die Ameisen unter Kenntnis der Durchmessers die Zahl π. Bewegen sich die Ameisen auf größeren Kreisen erreicht man relativistische Geschwindigkeiten. Das Problem: Die Lineale sind aufgrund der Längenkontraktion tangential gestaucht. Bei der Bestimmung des Durchmessers ist das nicht der Fall und das Verhältnis ergibt nicht mehr π. Wenn Sie eine dieser Ameisen wären, würden Sie behaupten, dass Ihre Scheibe still steht und der Rest des Universums sich im Kreis dreht. Wie erklären Sie sich die Diskrepanz in der Bestimmung von π?

6. Werfen Sie abschließend einen Blick auf Abb. 1.10 im Kapitel *Beobachter*!

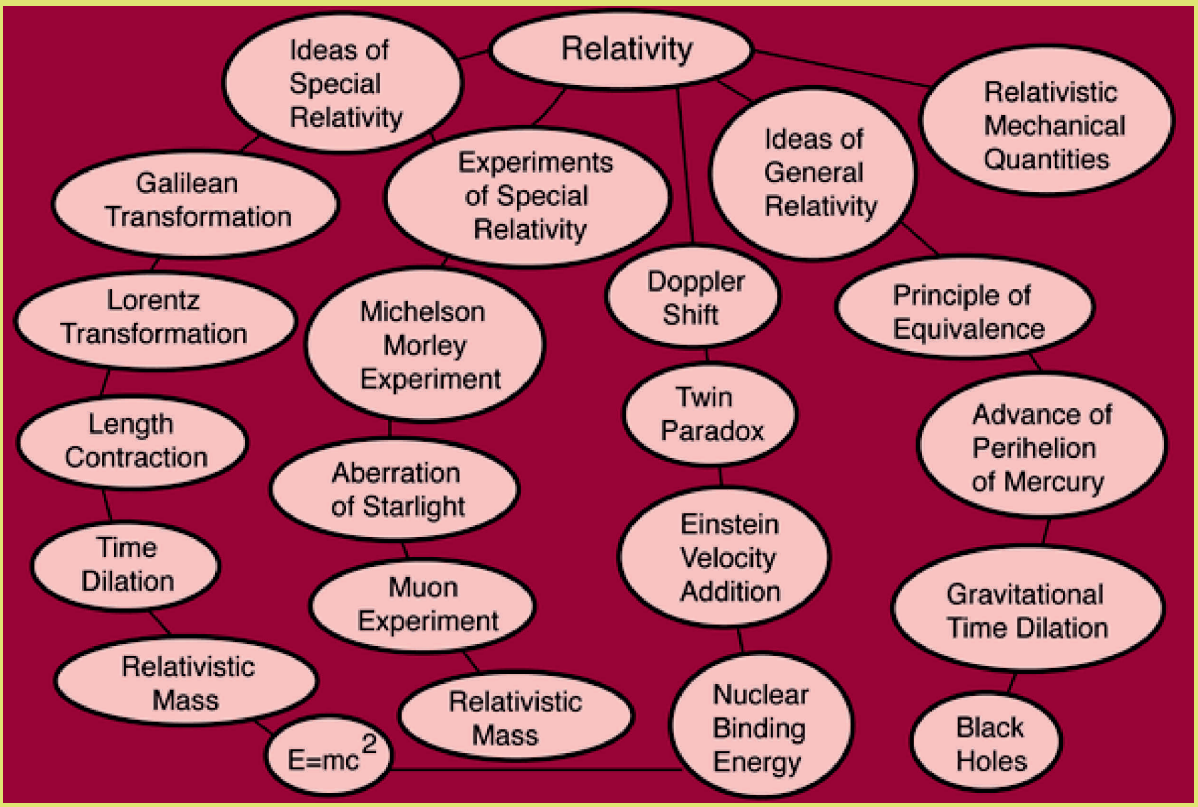


Abb. 8.67: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

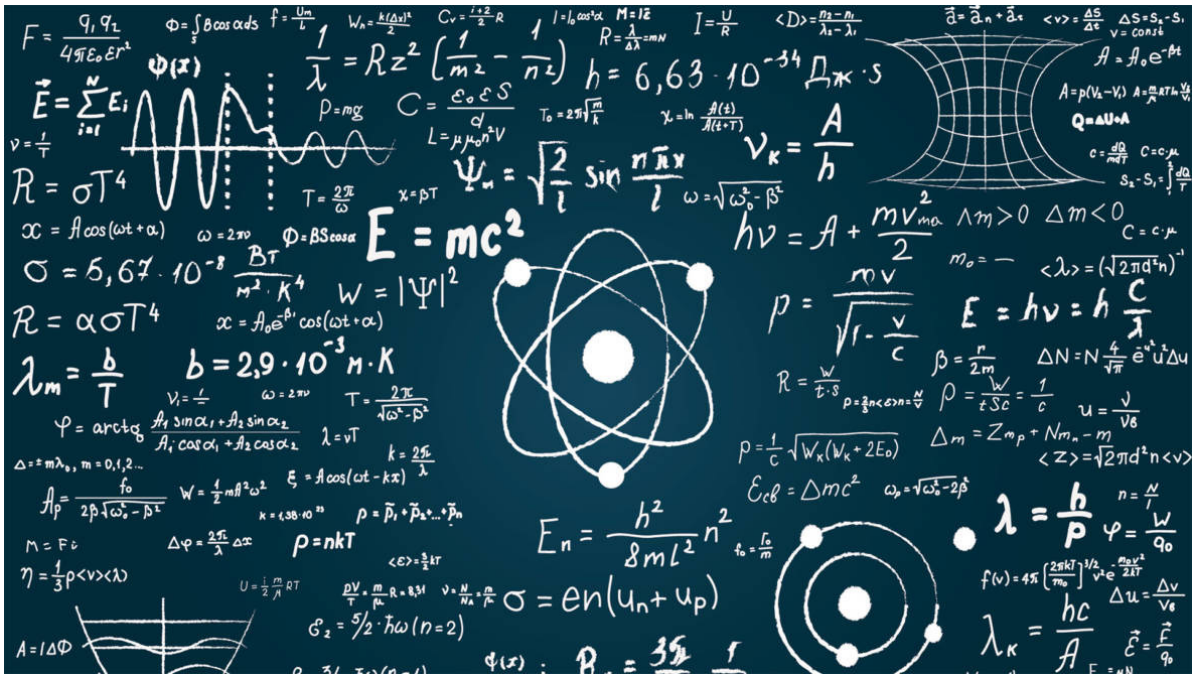
Was ist relevant für die Klausur?

- Äquivalenzprinzip
- Lichtablenkung im Gravitationsfeld, Gravitationslinsen, Einsteinkreuz
- Gravitations-Rotverschiebung (Gl. 8.19)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{G_N \cdot M}{c^2 \cdot R}$$

- Gravitationswellen und ihre Verursacher

B Quantenwelt



You need to move past Fourier transforms and start thinking quantum mechanics

Maggie Madsen in Transformers (2007)

Von Newton stammt der Ausdruck: Die Natur macht keine Sprünge. Wäre das so, dann wäre der Größenmaßstab relevant und die Beschreibung der Natur durch die Klassische Mechanik eingeschränkt. Es stellt sich heraus: Newton hatte in diesem Punkt unrecht.

Quantum physics is stranger than science fiction [**?**]

Der Beginn des 20. Jahrhunderts war gekennzeichnet durch Entdeckungen, die man nicht im Rahmen der klassischen Physik erklären konnte. Einige aufsehenerregende Resultate, wie das Michelson-Morley Experiment oder der kürzliche Nachweis von Gravitationswellen [**?**], sind Erfolge, die auf Erkenntnissen der Relativitätstheorie beruhen. Wissenschaftliche Forschung und technologische Entwicklungen haben zu neuen Verfahren und Instrumenten wie dem GPS[1] geführt. Mit dem Einstieg in die Quantenwelt erschließt sich der Physik die Welt des Ultrakleinen und des Ultrakurzen, siehe Abb. 8.1. Dieser Schritt

[1] GPS: *Global Positioning System*

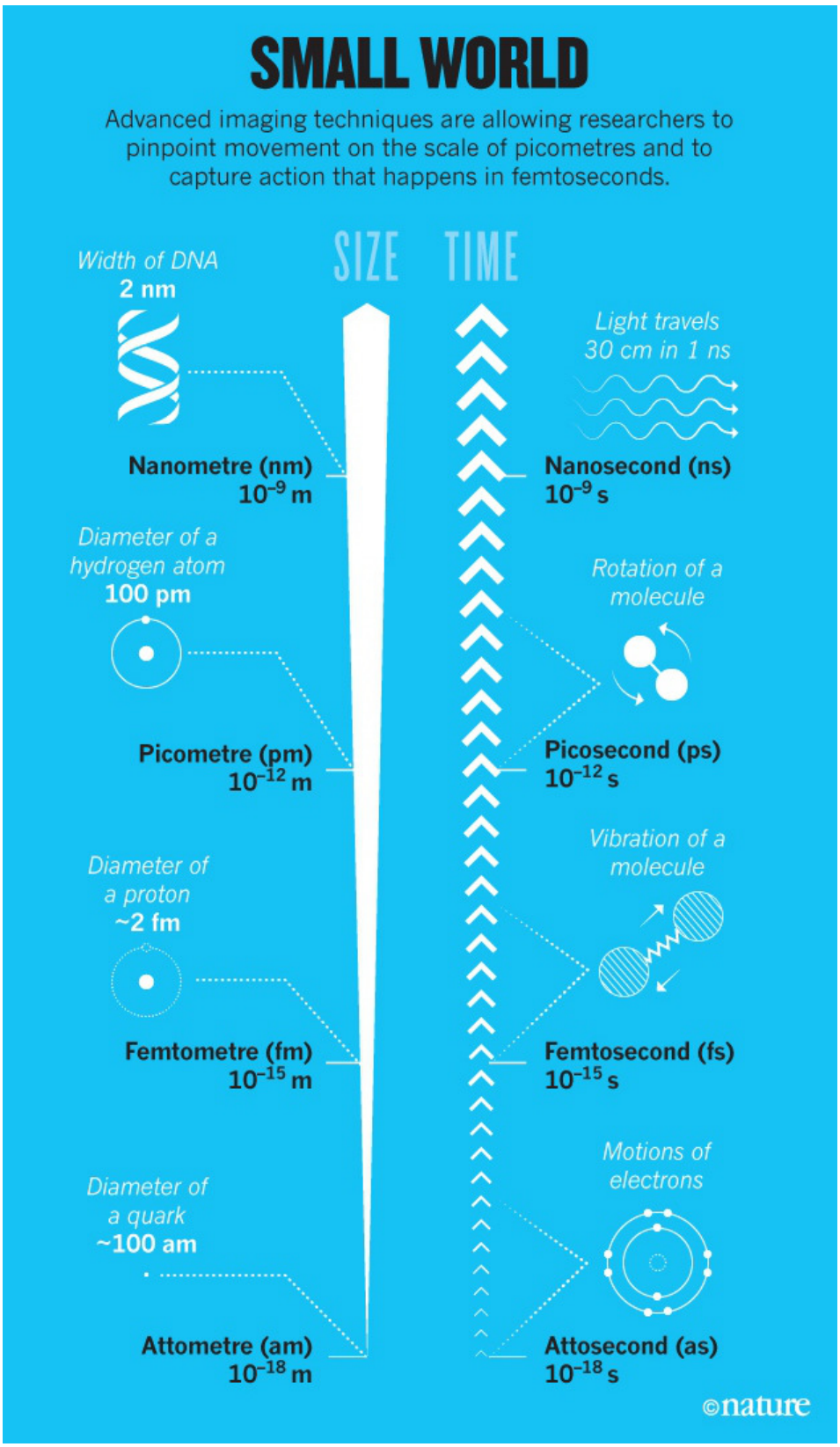


Abb. 8.1: Charakteristische Längen- und Zeitskalen der Quantenphysik [**?**].

hat zu der Erkenntnis geführt, dass ein radikales Umdenken erforderlich ist und physikalische Vorgänge auf mikroskopischer Ebene und kürzester Zeitskala neu überdacht werden müssen (Abb. 8.2). Die bislang behandelte Klassische Physik beruht auf drei scheinbar offensichtlichen Annahmen:

- Teilchen bewegen sich entlang einer Trajektorie, wobei Ort und Impuls zu jedem Zeitpunkt genau bekannt sind.
- Der Bewegungszustand eines Teilchens kann so geändert werden, dass beliebige Energien erreicht werden können.
- Wellen und Teilchen sind unterschiedliche Konzepte der Physik.

I presume that all of us would agree that the quantum theory is quite distasteful. In working with the theory we have no definite mechanical picture to guide us nor have we any definite clear cut principle as a basis of operations - Physicists everywhere have been making strenuous efforts to find a method of escape from the theory. If such a method could be found I presume that we should all breathe a sigh of relief and sleep better thereafter.

Robert Millikan

Quantum sensing for gravity cartography [?]: The sensing of gravity has emerged as a tool in geophysics applications such as engineering and climate research, including the monitoring of temporal variations in aquifers and geodesy. However, it is impractical to use gravity cartography to resolve metre-scale underground features because of the long measurement times needed for the removal of vibrational noise. Here we overcome this limitation by realizing a practical quantum gravity gradient sensor. Our design suppresses the effects of micro-seismic and laser noise, thermal and magnetic field variations, and instrument tilt. The instrument achieves a statistical uncertainty of 20 E ($1\,\mathrm{E}{=}10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}$) and is used to perform a 0.5-metre-spatial-resolution survey across an 8.5-metre-long line, detecting a 2-metre tunnel with a signal-to-noise ratio of 8. Using a Bayesian inference method, we determine the centre to ± 0.19 metres horizontally and the centre depth as $(1.89 - 0.59/ + 2.3)$ metres. The removal of vibrational noise enables improvements in instrument performance to directly translate into reduced measurement time in mapping. The sensor parameters are compatible with applications in mapping aquifers and evaluating impacts on the water table, archaeology, determination of soil properties and water content, and reducing the risk of unforeseen ground conditions in the construction of critical energy, transport and utilities infrastructure, providing a new window into the underground.

Grundlage sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Mechanik und die Theorie von Maxwell zur Beschreibung elektromagnetischer Phänomene. Im Weiteren wird es wichtig sein, dass man in der Quantenphysik die Phänomenen oft nicht über Kräfte, sondern über das Wirken von Feldern beschreibt. Das Konzept des Feldes beinhaltet, dass jedem Ort im Raum ein bestimmter, zeitabhängiger Wert zugeordnet ird. Es war



Abb. 8.2: Ein Cartoon von Sidney Harris [**?**]

eine große Leistung von Maxwell, dass er aufgrund der Erkenntnis, dass sich ändernde elektrische Felder zirkulare magnetische Felder und sich ändernde magnetische Felder zirkulare elektrische Feldr erzeugen, den Schluss zog, dass diese Phänomene Ausdruck der elektromagnetischen Wechselwirkung ist. Licht ist danach nichts anderes als Wellen, die die Dynamik elektromagnetische Felder wiedergeben. Die Bewegung von Teilchen wird in der klassischen Mechanik durch das zwreite Newtonsche Gesetz beschrieben. Und wie beschreibt man das Phänomen Licht? Eine elektromagnetische Welle ist charakterisiert durch die momentanen Werte des elektrischen und magnetischen Feldes. Damit ergeben sich Aussagen über Eigenschaften wie die Energiedichte. Das elektromagnetische Feld ist damit zu einem bestimmten Zeitpunkt für alle Orte bekannt und kann für jeden beliebigen anderen Zeitpunkt bestimmt werden. Im Rahmen der Quantenphysik wird diese Vorstellung über den Haufen geworfen. Definierte Aussagen über physikalische Größen, wie die Position eines Teilchens oder seinen Impulses, sind nicht mehr möglich und werden ersetzt durch Wahrscheinlichkeiten.

Die Quanten sind doch eine hoffnungslose Schweinerei!

Max Born an Albert Einstein

Alle physikalischen Systeme können charakterisiert werden durch ihre Abmessungen und über ihre typischen Reaktionszeiten. Atome haben Durchmesser im Bereich von Angstroem ($1\,\text{Å}=10^{-10}\,\text{m}$) und führen optische Übergänge innerhalb von $1\,\text{ns}=10^{-9}\,\text{s}$ aus. Der Abstand von Atomen im Festkörper ist ebenfalls 1 Å was der Wellenlänge von Röntgenstrahlung entspricht. Kerne haben Größen von $1\,\text{fm}=10^{-15}\,\text{m}$. Die Zeitskala für Kerne kann man aus der Zeitspanne abschätzen, die ein Proton oder Neutron braucht den Kern zu durchqueren. Bei typisch 50 MeV Kinetischer Energie ergibt sich $10^{-23}\,\text{s}$.

Eine der zentralen Fragestellungen der Quantenphysik ist deshalb die Natur der Atome und Kerne:

- Warum sind alle Atome eines Elements gleich?[2]
- Warum sind Atome und Kerne stabil?
- Warum verhalten sich Atome nicht wie Planetensysteme?
- Warum kreisen Elektronen in den Atomen eines Elements auf exakt den gleichen Bahnen?
- Warum emittieren Atome Linienstrahlung?
- Warum sind manche Kerne radioaktiv?

Never in the history of science has there been a theory which had had such a profound impact on human thinking as quantum mechanics; nor has there been a theory which scored such spectacular successes in the prediction of such an ennormous variety of phenomena [**?**].

Max Jammer, 1974

Weiter stellt sich die Frage: Wieso ist Licht bestimmter Wellenlängen relevant für die Photosynthese? Diese Ungereimtheiten heißt es zu klären, um zu einem tieferen Verständnis der Physik auf mikroskopischer Ebenen zu gelangen. Dieser vielleicht etwas steinige Weg lohnt sich, da die Erkenntnisse der Quantenphysik weitreichende Auswirkungen auf die aktuelle Forschung und einen merklichen Einfluss auf unseren Alltag haben.

Die Energieeinheit der Modernen Physik fußt auf der Potenzialdifferenz der Elektrostatik, dem Volt 1 V=1 J/C. Die zugehörige Energieeinheit ist das Elektronenvolt (eV:

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{J} &= (1\,\mathrm{V}) \cdot (1\,\mathrm{C}) \cdot \frac{e}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \\ 1\,\mathrm{J} &= \frac{e \cdot (1\,\mathrm{V})}{1.602 \cdot 10^{-19}} \\ 1\,\mathrm{J} &= \frac{1\,\mathrm{eV}}{1.602 \cdot 10^{-19}} \\ 1\,\mathrm{eV} &= 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{8.1}$$

[2]Im Jahr 1815 behauptete der Arzt William Prout, dass sich die Masse der Atome aus Vielfachen der Masse des Wasserstoffatoms ergibt. Als sich für die schwereren Elemente ergab, dass die Massen nicht ganzzahlig waren, wurde die Proutsche Hypothese verworfen. Zu Unrecht!

Für Berechnungen ist es sinnvoll, auch folgende Ausdrücke parat zu haben:

$$h \cdot c = 1240\,\mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm} \tag{8.2}$$
$$\hbar \cdot c = 197\,\mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm} \tag{8.3}$$
$$k_B \cdot e^2 = 1.44\,\mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm} \tag{8.4}$$
$$k_B \cdot T_K = 26\,\mathrm{meV} \tag{8.5}$$
$$N_A \cdot 1\,\mathrm{amu} = 1\,\mathrm{g} \tag{8.6}$$
$$k_C \cdot e^2 = \frac{e^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} = 1.44\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm} \tag{8.7}$$

Zeittafel

If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generations of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the atomic hypothesis (or atomic fact, or whatever you wish to call it) that all things are made of atoms - little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another. In that one sentence, you will see, there is an enormous amount of information about the world, if just a little imagination and thiking are applied [**?**].

Richard Feynman

1661 R. Boyle definiert in seinem Buch *The Sceptical Chemist* den Begriff Chemisches Element.

1860 G. R. Kirchhoff und R. Bunsen legen die Grundlagen für die Spektralanalyse der Chemischen Elemente.

1869 L. Meyer und D. I. Mendelejew stellen das Periodensystem der Elemente auf.

1885 J. J. Balmer findet die nach ihm benannte Balmerformel für die Spektrallinien des Wasserstoffs.

1886 E. Goldstein entdeckt die Kanalstrahlen.

1886 H. Hertz entdeckt den photoelektrischen Effekt.

1897 J. J. Thomson bestimmt das Verhältnis e/m.

1888 P. Lenard untersucht die Absorption von Kanalstrahlen.

1900 M. Planck entwickelt eine Theorie zur Erklärung des Spektrums eines Schwarzen Strahlers.

1905 Albert Einstein erklärt den Photoelektrischen Effekt und liefert Beiträge zum Verständnis der Brownschen Molekularbewegung.

1908 J.-B. Perrin bestimmt die Größe von Atomen.

1909 R. Millikan ermittelt den Wert der Elementarladung mit Hilfe seines Öltröpfchenexperiments.

1911 E. Rutherford, H. Geiger und E. Marsden entdecken den Atomkern.

1911 O. W. Richardson untersucht den Prozess der thermionischen Emission.

1912 R. Millikan entdeckt die Quantisierung der Ladung

1914 J. Franck und G. Hertz beobachten die Energiequantisierung in Quecksilberatomen.

1916 R. Millikan bestimmt den Wert der Planckschen Konstanten h.

1923 A. H. Compton erklärt die inelastische Streuung von Röntgenstrahlung an Elektronen.

1924 Louis deBroglie entwickelt das Konzept der Materiewellen.

1927 C. Davidsson, L. Germer, sowie G.P. Thomson und A. Reid beobachten den Effekt der Elektronenbeugung.

1927 A. H. Compton untersucht den Effekt der Röntgenstreuung.

1932 E. Ruska entwickelt das Elektronenmikroskop.

1965 A. Penzias und R. W. Wilson entdecken die Kosmische Hintergrundstrahlung.

1981 G. Binning und H.Rohrer entwickeln das Rastertunnelmikroskop.

1990 Der COBE Satellit misst das Spektrum der Kosmischen Hintergrundstrahlung.

Die Wissenschaft hat etwas Faszinierendes an sich. Man erhält solch große Erträge von Vermutungen aus einer so unbedeutenden Investition von Fakten.

Mark Twain, Leben auf dem Mississippi (1883)

Welchen Einfluss hat die Quantenphysik auf Technik, Natur- und Lebenswissenschaften?

- Chemie und Pharmazie
  - Design maßgeschneiderter Medikamente
  - Entwicklung organische Farbstoffe
  - Verbesserung katalytischer Eigenschaften
- Biologie
  - radioaktive Marker (z.B. Bewegung von Schaben in Kloaken)
  - Analyse biologischer Reaktionspfade

- Energietechnik
  - Energiegewinnung aus der Fusion von Kernen
  - Energiegewinnung aus Kernspaltung
- Materialforschung
  - supraleitende Materialien
  - Charakterisierung von Oberflächen
  - Analyse der Kristallstruktur
  - maßgeschneiderte Materialeigenschaften (z.B. Härte von Legierungen)
- Raumfahrt
  - optische Gyroskope
  - Atomuhren
- Elektronik
  - Metalle, Halbleiter, Isolatoren
  - Dotierung von Halbleitern
  - Ohmsche Kontakte
  - Rastertunnelmikroskopie
  - Tunneldioden
  - *quantum-well*-Bauteile
  - Laser, LEDs, Flachbildschirme
  - Elektronische Bauteile auf der Basis von Elektronenwellen
- Maschinenbau
  - Radioaktive Stoffe für die Diagnostik (z.B. Verschleiß- und Korrosionskontrolle)
  - Entwicklung hochpräziser Maschinenanlagen
- Medizin
  - Radionuklide für die Diagnostik (z.B. ^{18}F)
  - Strahlentherapie (z.B. γ-knife)
  - Tomographische Aufnahmen (z.B. Kernspinresonanz)
- Antropologie
  - C-14 Datierung archäologischer Objekte
- Savoir-vivre



Abb. 8.3: Ein Quantum Wein. This is our Quantum formula. Savour the taste in each particle.

- Beispiel in Abb. 8.3

Sowohl für die Materie wie für die Strahlung, insbesondere für das Licht, es geboten ist, den Korpuskel- und den Wellenbegriff gleichzeitig einzuführen.

Louis deBroglie in seiner Doktorarbeit (1924)

Revolutionäre technologische Entwicklungen wie der Laser oder modernste diagnostische Verfahren wie der Kernspintomograph wären ohne Quantenphysik nicht denkbar. Abb. 8.4 zeigt eine Anwendung aus dem Gebiet der Mikroskopie. Es zeigt den Zekavirus mit einer Auflösung von $3.1 \cdot 10^{-10}$ m [**?**]. Wissen sie, welche Auflösung ein Lichtmikroskop hat?[3] Für die Biologie und Medizin sind hochauflösende Mikroskope interessant, um biologische Prozesse, Proteinfaltung oder den Einbau von zusätzlichen Nukleotiden oder DNA-Sequenzen in die DNA zu verfolgen. Möglich wurde diese Abbildung durch die Entwicklung von Elektronenmikroskopen, die das Phänomen des Welle-Teilchen Dualismus nutzen, siehe Abb. 8.5. Die Erkenntnis über den Wellencharakters der Materie hat die Leistungsfähigkeit von Mikroskopen erheblich gesteigert. Mittlerweile können solche Instrumente atomare Systeme auflösen [**? ?**]. Die Untersuchungsmethoden zur Klärung von Struktur und Dynamik der Materie basiert auf der Wechselwirkung mit Licht. Es ist deshalb unerlässlich, die Eigenschaften von Licht kennenzulernen. Man wird feststellen, dass Materie und Licht viele Gemeinsamkeiten aufweisen.

Link to video **The Revolution of Giraffes**

Ohne die Kenntnis der Eigenschaften von Elektronen ist es unmöglich, komplexe Systeme wie beispielsweise biologisches Gewebe auf atomarer Ebene zu verstehen. Erwin Schrödinger, einer der Pioniere der Quantenphysik (Kapitel *Wellenfunktion*), hat sich schon früh mit den Verknüpfungen und Konsequenzen der Modernen Physik für die *life*

[3] Antwort: etwa 1 μm oder 10^{-6} m

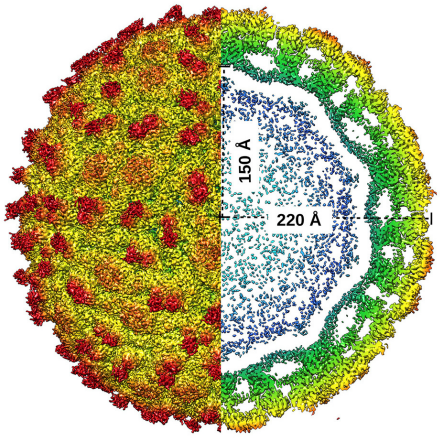


Abb. 8.4: Die atomare Struktur des Zika-Virus bei einer Auflösung[a] von 3.1 Å und sein Vergleich mit anderen durch Mücken übertragenen Flaviviren-Strukturen enthüllen wichtige strukturelle Komponenten des Infektionsmechanismus. Durch die elektronenmikroskopischen Aufnahmen konnten medikamentenbindende Taschen lokalisiert werden, die strukturelle Hinweise für das Impfstoffdesign liefern könnten [**?**].

[a] Atomare Längeneinheit Ångstroem: 1 Å=10^{-10} m

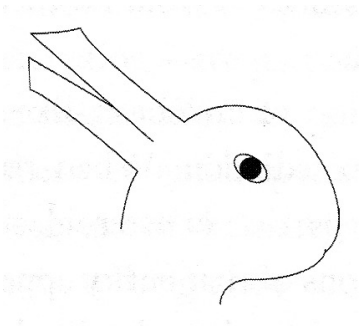


Abb. 8.5: Ente-Hase Dualismus.

sciences beschäftigt [**?**].

I drop a log of wood into the sea from a height, let us say, of 100 feet. A wave radiates away from where it falls. Here is the corpuscular radiation producing a wave. The wave spreads, its energy is more and more widely distributed, the ripples get less and less in height. At a short distance, a few hundred yards perhaps, the effect will apparently have disappeared. If the water were perfectly free from viscosity and there were no other causes to fritter away the energy of the waves, they would travel, let us say, 1,000 miles. By which time the height of the ripples would be, as we can readily imagine, extremely small. Then, at some one point on its circumference, the ripple encounters a wooden ship. It may have encountered thousands of ships before that and nothing has happened, but in this one particular case the unexpected happens. One of the ship's timbers suddenly flies up in the air to exactly 100 feet, that is to say, if it got clear away from the ship

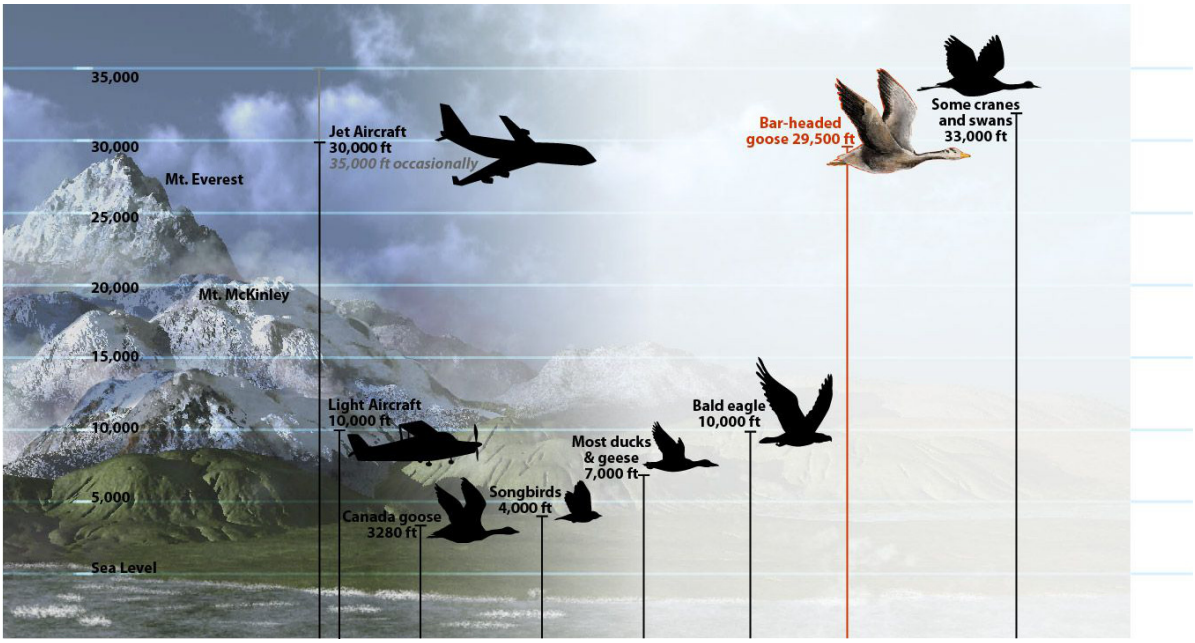


Abb. 8.6: Vergleich der Flughöhe von Stangenkopfgänsen mit Flugzeugen und anderen Vögeln [**?**].

without having to crash through parts of the rigging or something else of the structure. The problem is, where did the energy come from that shot this plank into the air, and why was its velocity so exactly related to that of the plank which was dropped into the water 1,000 miles away?

Sir William Bragg, 1921

Beispiele aus der Biologie:

Die Stangenkopfgans ist berühmt für ihren Migrationsflug in extremer Höhe. Sie fliegt auf ihrer Route zwischen Süd- und Zentralasien über das Himalaya-Gebirge und erreicht Höhen von 9 000 m (Abb. 8.6). Evolutionäre Veränderungen im Atmungssystem von Stabgänsen haben zu einer Verbesserung der Sauerstoffversorgung im Blut geführt und zu der außergewöhnlichen Fähigkeit der Gänse beitragen, so hoch zu fliegen. Die physiologische Herausforderung besteht darin, der hypoxischen Luft Sauerstoff zu entziehen und ihn zu den Muskelfasern zu transportieren, um den Flug in solch großen Höhen aufrechtzuerhalten. In großen Höhen ist der Flug metabolisch kostspielig, da die Vögel in der dünnen Luft einen Auftrieb erzeugen müssen. Studien haben herausgefunden, dass Stabgänse unter den sauerstoffarmen Bedingungen in großer Höhe effizient atmen, indem sie ihre Sauerstoffaufnahme erhöhen.

Zum Verständnis der außergewöhnlichen Fähigkeiten der Stangenkopfgans ist es notwendig auf Hämoglobin einzugehen. Dieses Molekül ist für den Transport von Sauerstoff

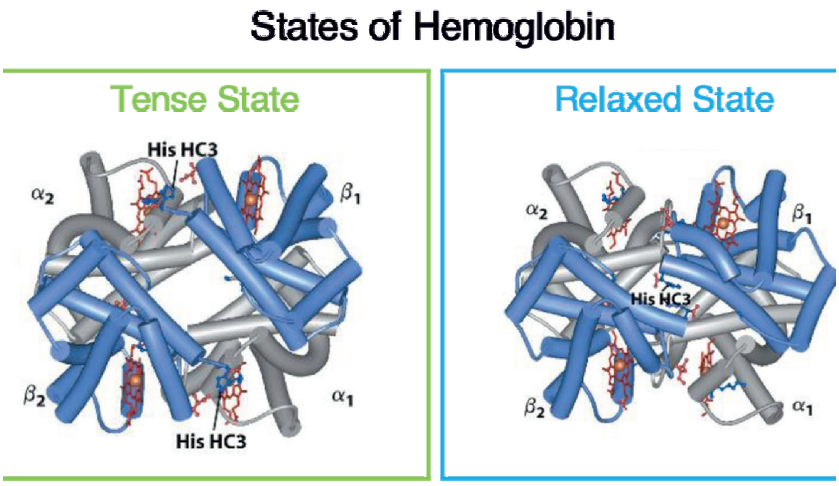


Abb. 8.7: Wenn Sauerstoff an Hämoglobin gebunden wird, führt dies zu Strukturänderungen und Hämoglobin liegt entweder angespannt (*tense*) oder entspannt (*relaxed*) vor. Diese geringen strukturellen Veränderungen sind in der Lage, die Bindungsaffinität von Hämoglobin für Sauerstoff entscheidend zu verändern.

(O_2) und Kohlenstoffdioxid (CO_2) im Blut verantwortlich. Hämoglobin bindet bis zu vier Sauerstoffatome. Statistisch gesehen, müsste die Wahrscheinlichkeit für die Bindung weiterer O_2 Moleküle abnehmen. Tatsächlich nimmt die Sauerstoffaffinität[4] zu. Die Ursache ist ein quantenphysikalischer Effekt: Hämoglobin kommt nur in genau zwei unterschiedlichen Strukturen vor: *R*-Form (relaxed), *T*-Form (tensed), siehe Abb. 8.7. Dieses Verhalten ist ein Ausdruck der Quantisierung.[5] Moleküle können sich nicht beliebig verformen. Ohne die Anlagerung von Sauerstoff dominiert die *T*-Form. Bei der Aufnahme von O_2 verschiebt sich das Gleichgewicht zugunsten der *R*-Form. Wie sich herausstellt, ist Hämogobin in der *R*-Form etwa 70-fach sauerstoffaffiner als in der *T*-Form. Dieser Verhalten ist wichtig für Funktion von Hämoglobin als Transportmedium für Sauerstoff. Hinzu kommt, dass die Sauerstoff bindende *R*-Form durch einen niedrigen CO_2-Gehalt und einen hohen pH-Wert stabilisiert wird.[6] Die Sauerstoff abgebende *T*-Form wird vom Molekül bei einem hohen CO_2-Gehalt und niedrigen pH-Wert eingenommen. Es erfolgt eine gezielte Aufnahme bei einem hohem O_2-Gehalt in der Lunge und einen Abgabe von Sauerstoff bei einem hohem CO_2-Gehalt und niedrigem pH-Wert in stoffwechselaktivem Gewebe. Ohne die quantenphysikalischen bedingten Bindungseigenschaften wäre es der Stangenkopfgans nicht möglich, ihren Lebensraum in dieser extremen Weise zu wechseln.

[4] Affinität ist das Bestreben von Ionen, Atomen oder Atomgruppen in einer chemischen Reaktion eine Bindung einzugehen.

[5] Im Supermarkt machen wir auch die Erfahrung der Quantisierung: Eier kann man nur in quantisierten Einheiten kaufen, bei Käse ist das anders.

[6] Der Bohr-Effekt bezeichnet das Sinken der Affinität von Hämoglobin in Bezug auf Sauerstoff, wenn der pH-Wert sinkt oder die CO_2-Konzentration ansteigt. Gemeint ist der Physiologe Christian Bohr und nicht der Physiker Niels Bohr.

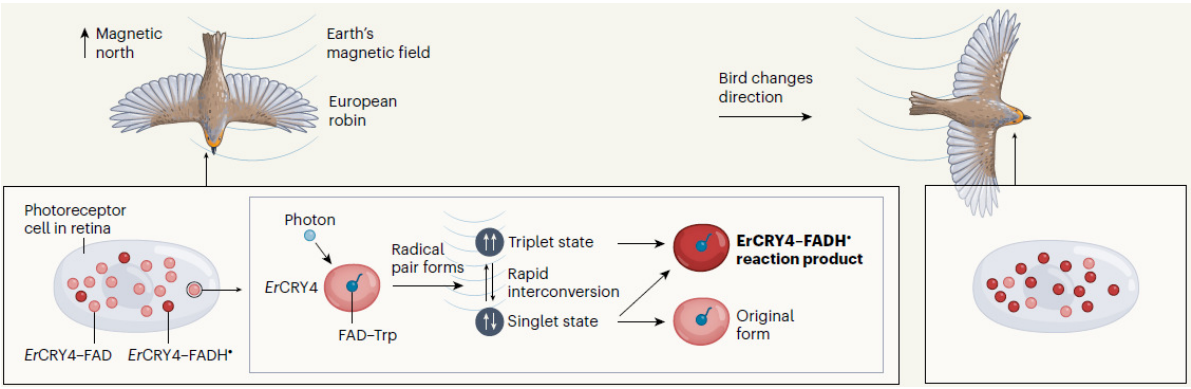


Abb. 8.8: Modell der Magnetorezeption von Vögeln. Magnetorezeption ist die Fähigkeit von Tieren Magnetfelder und deren Richtung wahrzunehmen und damit in die Lage versetzt zu werden, sich auch in größerem Maßstab zu orientieren [**?**].

Question: What's new?[7]
Answer: E/h

Magnetic sensitivity of cryptochrome 4 from a migratory songbird [?]: Night-migratory songbirds are remarkably proficient navigators. Flying alone and often over great distances, they use various directional cues including, crucially, a light-dependent magnetic compass. The mechanism of this compass has been suggested to rely on the quantum spin dynamics of photoinduced radical pairs in cryptochrome flavoproteins located in the retinas of the birds, see Fig. 8.8. Here we show that the photochemistry of cryptochrome 4 (CRY4) from the night-migratory European robin (Erithacus rubecula) is magnetically sensitive in vitro, and more so than CRY4 from two non-migratory bird species, chicken (Gallus gallus) and pigeon (Columba livia). Site-specific mutations of ErCRY4 reveal the roles of four successive flavin-tryptophan radical pairs in generating magnetic field effects and in stabilizing potential signalling states in a way that could enable sensing and signalling functions to be independently optimized in night-migratory birds.

Wissenschaft hat etwas Faszinierendes an sich. So eine geringfügige Investition an Fakten liefert so einen reichen Ertrag an Voraussagen.

Mark Twain - Leben auf dem Mississippi (1883)

Ratgeber

Welche Lehrbücher befassen sich mit speziell Quantenphysik? Hier eine Auswahl [**? ? ?

Was müssen Sie an physikalischem Wissen für das Kapitel Quantenwelt mitbringen?

- Masse und Kraft
- Dichte und Druck
- Energie, Impuls, und Drehimpuls
- Leistung, Intensität
- Massen-, Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung
- elastischer Stoß
- Kinetische und Potentielle Energie
- elektrische Ladung und elektrisches Potenzial
- Coulomb- und Lorentzkraft
- elektromagnetisches Spektrum (von Radiowellen bis Gammastrahlung)
- Frequenz, Wellenlänge und stehende Welle
- Wellenmodell des Lichts
- Beugung und Interferenz

Was heute modern ist, wird morgen schon klassisch betrachtet [**?**].

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie hoch ist ihre Massendichte? Wenn man diese Frage nicht als trivial abtut und genauer nachdenkt, ergeben sich Aspekte wie die chemische Zusammensetzung ihres Körpers und die Evolution!

2. Welche Anwendungen kommen Ihnen in den Sinn, wenn Sie den Begriff Quanten hören?

Gut zu wissen!

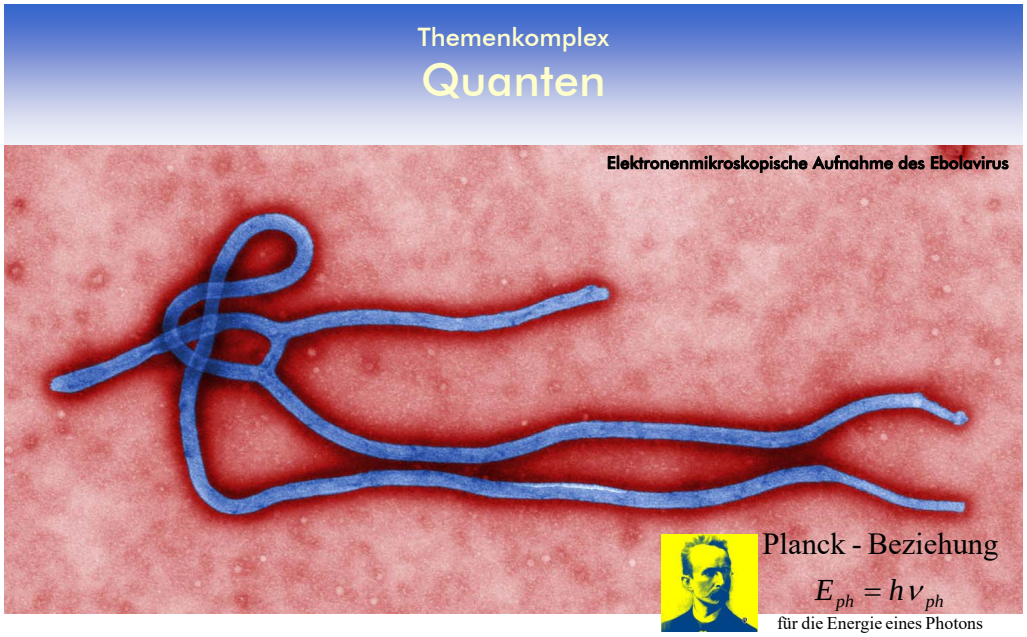
Nach der Durcharbeitung des Abschnitts Quantenwelt sollten Sie in der Lage sein, folgende zentrale Begriffe zu erklären:

1. Absorptionsspektrum
2. Austrittsarbeit
3. Aufenthaltwahrscheinlichkeit
4. Balmer-Formel
5. Balmer-Serie
6. Brownsche Molekularbewegung
7. Compton-Effekt
8. Compton-Verschiebung
9. Compton-Wellenlänge
10. Davidson-Germer Experiment
11. DeBroglie Hypothese
12. DeBroglie Wellenlänge
13. Dirac-Konstante
14. Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon
15. Elektrolyse
16. Elektronenmikroskop
17. Elektronenmikroskopie
18. Elektronenvolt
19. Emissionsspektrum
20. Flammenprobe
21. Franck-Hertz Versuch
22. Fraunhofer-Linien
23. Gegenfeldmethode
24. Grenzfrequenz bei der Photoemission

25. Hallwachs-Experiment
26. Heisenbergsche Unschärferelation
27. Inelastische Streuung
28. Ionisationsenergie
29. Korrespondenzprinzip
30. Kosmische Hintergrundstrahlung
31. Linienspektrum
32. Millikan-Versuch
33. Nullpunktsenergie
34. Observable
35. Operatoren
36. Photostrom
37. Photoelektrischer Effekt
38. Photon
39. Photonenenergie
40. Plancksche Hypothese über Energiequanten
41. Plancksche Konstante
42. Potenzialbarriere
43. Quadratisches Abstandsgesetz
44. Rastertunnelmikroskop
45. Rayleigh-Kriterium
46. Rutherford Experiment
47. Rutherford-Modell des Atoms
48. Rydberg-Formel
49. Rydberg-Konstante
50. Schwarzer Körper

51. Schwarzkörperstrahlung
52. Spezifische Ladung
53. Teilchen im Potenzial
54. Tunneleffekt
55. Ultraviolettkatastrophe
56. Virtuelle Teilchen
57. Wahrscheinlichkeitsdichte
58. Wellenfunktion
59. Wellenpaket
60. Wellenzahl
61. Welle-Teilchen Dualismus
62. Youngsches Doppelspaltexperiment
63. Zeitabhängige Schrödingergleichung
64. Zeitunahängige Schrödingergleichung

9 Materiewellen



In a few minutes I shall be all melted... I have been wicked in my day, but I never thought a little girl like you would ever be able to melt me and end my wicked deeds. Look out -here I go![1]

The Wicked Witch of the West[2]

[3]In unserem Alltag kommt man mit den Begriffen Teilchen und Welle nicht durcheinander. Einen Stein, den man ins Wasser wirft und die Wellen die sich daraufhin im Wasser ausbreiten zeugen davon, dass es möglich ist, Energie und Impuls von einem

[1] As the Wicked Witch learned the hard way, losing molecular cohesion can be unpleasant. That's why we should be very grateful that the concepts of quantum physics apply to matter as well as light. If matter obeyed the laws of classical physics, molecules wouldn't exist [**?**].

[2] Fiktive Figur aus dem Kinderroman *Der Zauberer von Oz* (1900).

[3] Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

Smallest measurable change	$0.5 \cdot 10^{-34}$ Js
Exposure of photographic film	$1.1 \cdot 10^{-34}$ Js to 10^{-9} Js
Wing beat of a fruit fly	*c.* 1 pJs
Flower opening in the morning	*c.* 1 nJs
Getting a red face	*c.* 10 mJs
Held versus dropped glass	0.8 Js
Tree bent by the wind from one side to the other	500 Js
Making a white rabbit vanish by 'real' magic	100 PJs
Hiding a white rabbit	*c.* 0.1 Js
Maximum brain change in a minute	*c.* 5 Js
Levitating yourself within a minute by 1 m	*c.* 40 kJs
Car crash	*c.* 2 kJs
Birth	*c.* 2 kJs
Change due to a human life	*c.* 1 EJs
Driving car stops within the blink of an eye	20 kJs
Large earthquake	*c.* 1 PJs
Driving car disappears within the blink of an eye	1 ZJs
Sunrise	*c.* 0.1 ZJs
Gamma ray burster before and after explosion	*c.* 10^{46} Js
Universe after one second has elapsed	undefined and undefinable

Abb. 9.1: Ausgewählte Werte der physikalischen Größe Wirkung [**?**].

einem Ort zum anderen bewegt werden. Teilchen und Wellen sind in unserem physikalischen Weltbild unterschiedliche Konzepte und werden auch in der klassischen Physik als unabhängige Disziplinen behandelt. Der Beginn der Forschung der Modernen Physik kann gut datiert werden, denn er geht zurück auf Arbeiten von Max Planck zur Theorie schwarzer Körper, die zum Konzept der Lichtpakete -genannt Lichtquanten oder Photonen- führten.[4] Der Name Photon geht auf Gilbert Lewis zurück, den den Begriff im Jahr 1926 prägte [**?**].[5] Elektromagnetische Wellen sind quantisierte Ausbrüche von Energie. Der Energiegehalt eines Photons ist nach Planck verknüpft mit der Frequenz des Lichts:

$$E_{ph} = \cdot \nu_{ph} \tag{9.1}$$

[4]Historische Fußnote: Heinrich Hertz behauptete, dass die Wellennatur des Lichts absolute Gewissheit sei.

[5]I therefore take the liberty of proposing for this hypothetical new atom, which is not light but plays an essential part in every process of radiation, the name photon [**?**].

Plancksche Konstante: $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$

Diracsche Konstante: $\hbar = h/2\,\pi = 1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$

Link to video **Planck's Constant**

Die Plancksche Konstante h hat die Einheit einer Wirkung[6] [J·s][7]. Drehimpuls. Das ist ungewohnt. Bislang kannten wir im Zusammenhang von Energie und Zeit nur die Einheit Watt (J/s). Vielleicht hier ein Hinweis auf das Handwerkszeug der theoretischen Physik: Die Bewegungsgleichungen physikalischer Systeme ergeben sich aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamiltonsches Prinzip). Die Wirkung als Funktional von Bahnen oder Feldern ist auch grundlegend für die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik, die relativistische Mechanik und das Standardmodell der elementaren Wechselwirkungen. Die Tabelle in Abb. 9.1 gibt Beispiele für typische Werte. Die Quantenphysik beschreibt mikroskopische Vorgänge. Aber wann sind Quanten notwendig, um die Physik zu erfassen? In der Auflistung in Abb. 9.2 zeigt, dass die auf atomarer, molekularer chemischer und biologischer Ebene stattfindenden Elementarprozesse, sowie die Licht-Materie Wechselwirkung von der Größenordnung des Planckschen Wirkungsquantums sind. Man sieht, dass in der Natur keine Wirkung geringer als $\hbar$ auftritt. Bei allen diesen Phänomene kommt daher die Quantenphysik ins Spiel.

Das Photon-Modell basiert auf drei Postulaten:

- Licht besteht aus einzelnen, masselosen Teilchen, die man Photonen oder Lichtquanten nennt. Ein Photon bewegt sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit.
- Jedes Photon hat die Energie $E_{ph} = h \cdot \nu_{ph}$, wobei ν_{ph} die Frequenz des Lichts und h die Plancksche Konstante ist.
- Die Superposition einer großen Menge an Photonen zeigt alle Charakteristika einer klassischen Lichtwelle.

Die grundlegenden Eigenschaften von Photonen lassen sich so zusammenfassen: Photonen

- bewegen sich, da sie auch eine elektromagnetische Welle repräsentieren, mit Lichtgeschwindigkeit.
- haben keine Masse und keine Ruheenergie.
- tragen Energie und Impuls.

[6] *Lexikon:* Die **Wirkung** ist eine physikalische Größe mit der Dimension Energie mal Zeit oder Impuls mal Länge.

[7] Im Zusammenhang mit den Eigenschaften von Photonen wird es wichtig sein, dass man h in Einheiten des Drehimpulses angegeben kann. Prüfen Sie nach!

Light	
Smallest amount of light absorbed by a coloured surface	$1\,\hbar$
Smallest hit when light reflects from mirror	$2\,\hbar$
Smallest visible amount of light	$c.\,5\,\hbar$
Smallest amount of light absorbed in flower petal	$c.\,1\,\hbar$
Blackening of photographic film	$c.\,3\,\hbar$
Photographic flash	$c.\,10^{17}\,\hbar$
Electricity	
Electron ejected from atom	$c.\,1-2\,\hbar$
Electron added to molecule	$c.\,1-2\,\hbar$
Electron extracted from metal	$c.\,1-2\,\hbar$
Electron motion inside microprocessor	$c.\,2-6\,\hbar$
Signal transport in nerves, from one molecule to the next	$c.\,5\,\hbar$
Current flow in lighting bolt	$c.\,10^{38}\,\hbar$
Materials science	
Tearing apart two neighbouring iron atoms	$c.\,1-2\,\hbar$
Breaking a steel bar	$c.\,10^{35}\,\hbar$
Basic process in superconductivity	$1\,\hbar$
Basic process in transistors	$1\,\hbar$
Basic process in magnetic effects	$1\,\hbar$
Chemistry	
Atom collisions in liquids at room temperature	$c.\,1\,\hbar$
Shape oscillation of water molecule	$c.\,1-5\,\hbar$
Shape change of molecule, e.g. in chemical reaction	$c.\,1-5\,\hbar$
Single chemical reaction curling a hair	$c.\,2-6\,\hbar$
Tearing apart two mozzarella molecules	$c.\,300\,\hbar$
Smelling one molecule	$c.\,10\,\hbar$
Burning fuel in a cylinder in an average car engine explosion	$c.\,10^{37}\,\hbar$
Life	
Air molecule hitting ear drum	$c.\,2\,\hbar$
Smallest sound signal detectable by the ear	Challenge
Single DNA duplication step during cell division	$c.\,100\,\hbar$
Ovule fecundation	$c.\,10^{14}\,\hbar$
Smallest step in molecular motor	$c.\,5\,\hbar$
Sperm motion by one cell length	$c.\,10^{15}\,\hbar$
Cell division	$c.\,10^{19}\,\hbar$
Fruit fly's wing beat	$c.\,10^{24}\,\hbar$
Person walking one body length	$c.\,2\cdot 10^{36}$
Nuclei and stars	
Nuclear fusion reaction in star	$c.\,1-5\,\hbar$
Particle collision in accelerator	$c.\,1\,\hbar$
Explosion of gamma ray burster	$c.\,10^{80}\,\hbar$

Abb. 9.2: Dynamik mikroskopischer Systeme und zugehörige Werte der Wirkung [**?**].

- können generiert oder vernichtet werden, wenn Strahlung emittiert oder absorbiert wird.

- in der Wechselwirkung mit Teilchen teilchenähnliches Verhalten.

Im Nachhinein ist es verständlich, warum die körnige Eigenschaft von Licht erst so spät erkannt wurde. Die enorme Menge an Photonen, mit der man es im Alltag zu tun hat, führt dazu, dass man einen Lichtstrahl als kontinuierlich ansieht. Erst durch die Erforschung der mikroskopischen Eigenschaften der Materie, hat man auch den Teilchencharakter des Lichts erkannt. Damit verbunden ist ein tieferes Verständnis der Eigenschaften mikroskopischer Materie wie Atome, Moleküle, Kerne und Elementarteilchen.[8] Abb. 9.3 liefert einen Überblick über die Schlüsselkonzepte der Quantenphysik. Der Cartoon in Abb. 9.4 arbeitet die Problematik der Trennung von Mikro- und Makrophysik mit etwas Ironie auf.

[8]Das Titelbild zeigt den Ebolavirus in etwa 10 000-facher Vergrößerung.

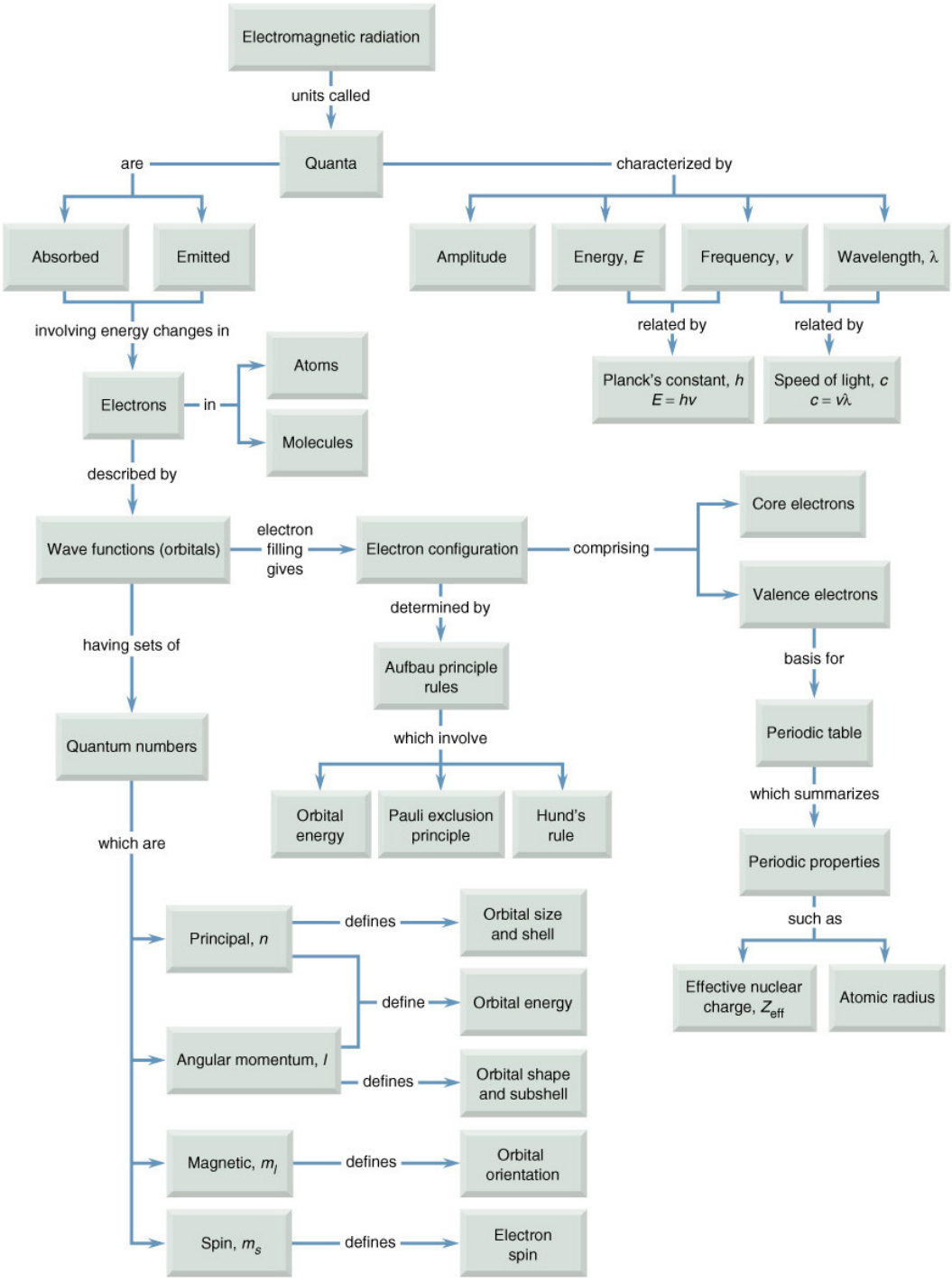


Abb. 9.3: Konzepte und wichtige Größen der Quantenphysik [**?**].

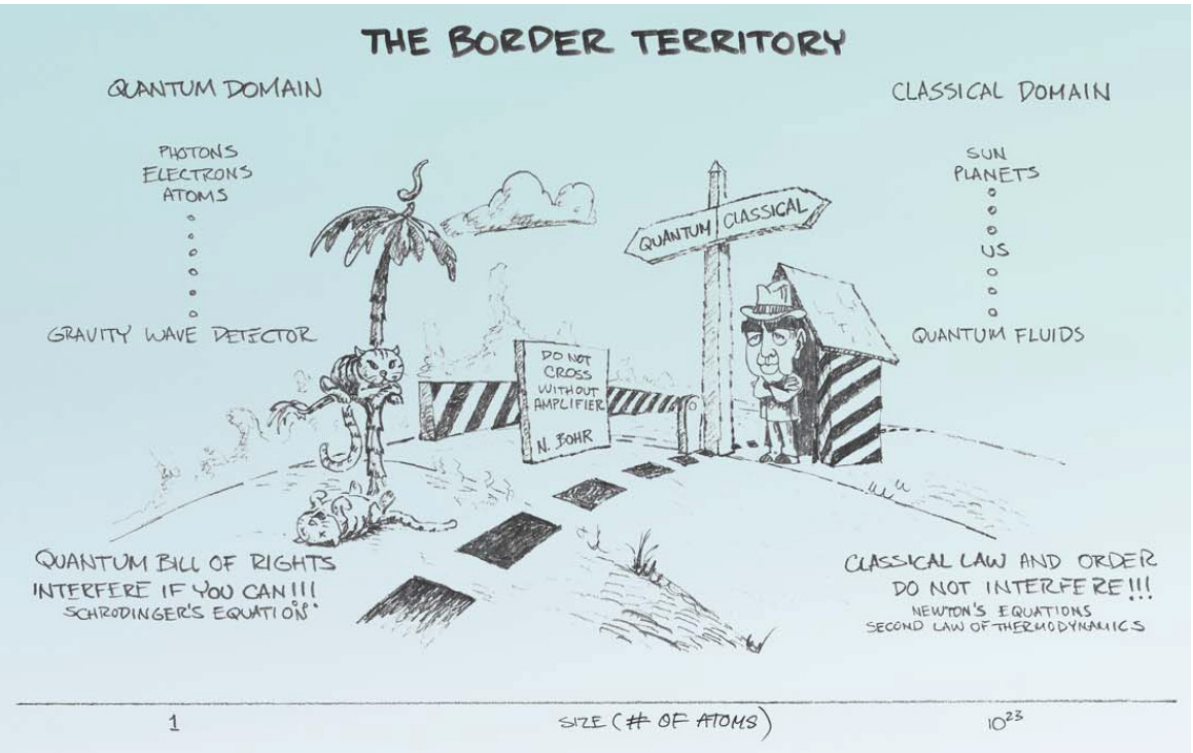
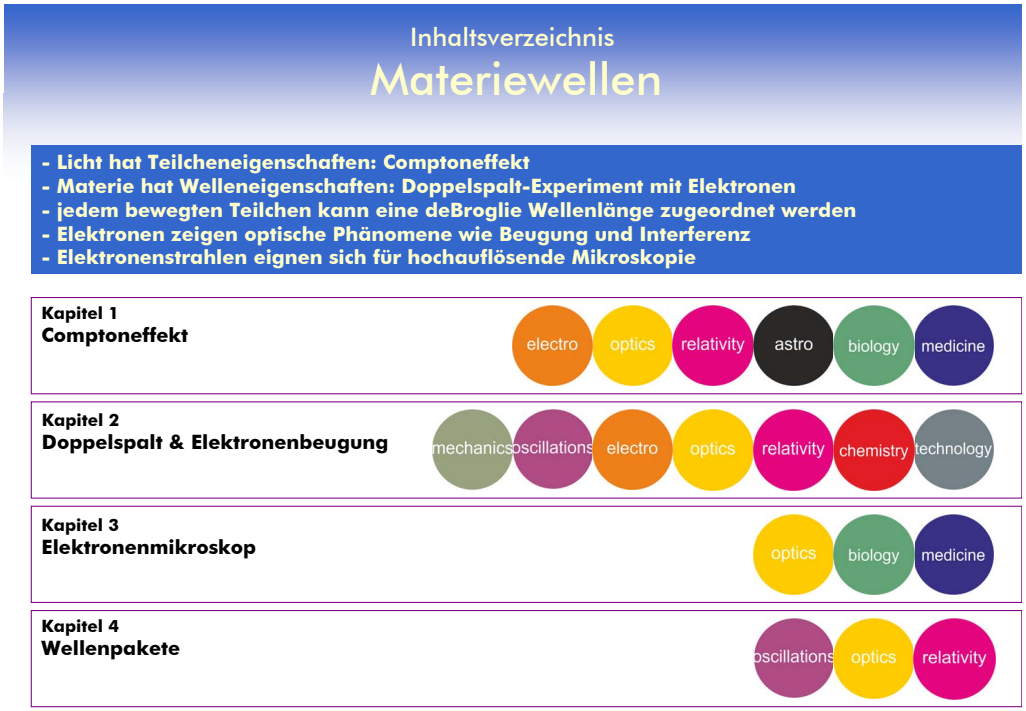
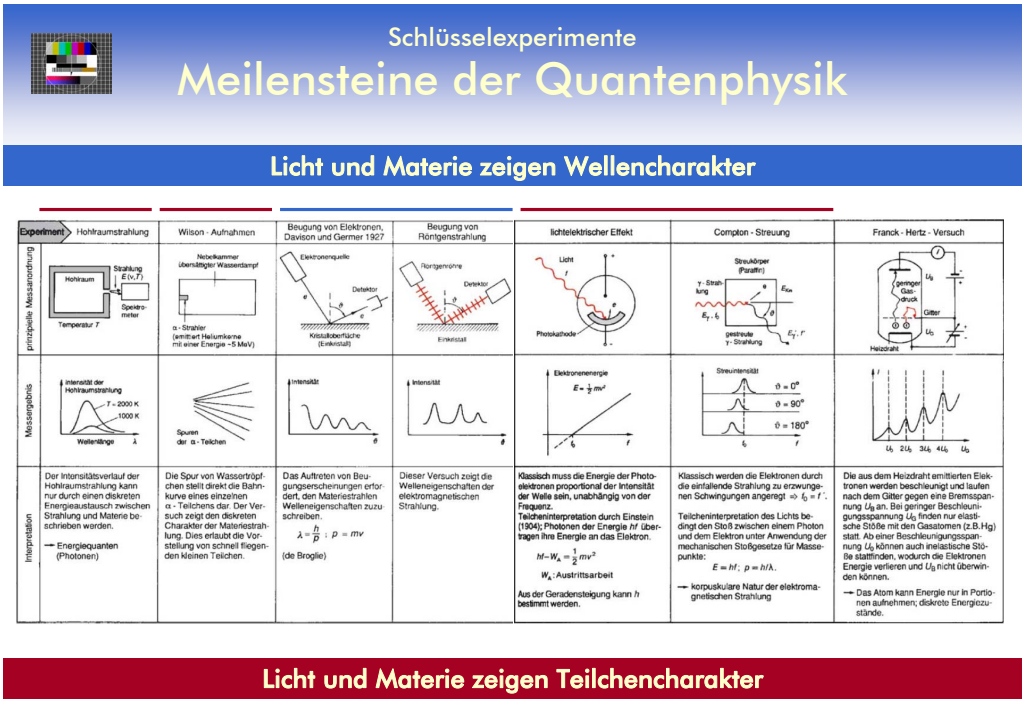


Abb. 9.4: An der Grenze zwischen Makro- und Mikrophysik. Der erfahrene Naturwissenschaftler erkennt Niels Bohr und Schrödingers Katze [**?**].


Inhaltsverzeichnis
Materiewellen
- Licht hat Teilcheneigenschaften: Comptoneffekt
- Materie hat Welleneigenschaften: Doppelspalt-Experiment mit Elektronen
- jedem bewegten Teilchen kann eine deBroglie Wellenlänge zugeordnet werden
- Elektronen zeigen optische Phänomene wie Beugung und Interferenz
- Elektronenstrahlen eignen sich für hochauflösende Mikroskopie
Kapitel 1
Comptoneffekt
electro
optics
relativity
astro
biology
medicine
Kapitel 2
Doppelspalt & Elektronenbeugung
mechanics
oscillations
electro
optics
relativity
chemistry
technology
Kapitel 3
Elektronenmikroskop
optics
biology
medicine
Kapitel 4
Wellenpakete
oscillations
optics
relativity



Certain phenomena can be understood by considering radiation or matter to consist of particles, whereas other phenomena demand that we think of radiation or matter as consisting of waves [**?**]

John C. Morrison

Die physikalische Interpretation des Welle-Teilchen Dualismus kann folgendermaßen formuliert werden:

Die Intensität einer Teilchenwelle an einem beliebigen Ort ist proportional der Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen an diesem Ort aufhält.

Wie geht man vor? Um die Wellennatur von Teilchenstrahlen in einer Messung nachzuweisen, muss man nach Interferenz und Beugungserscheinungen suchen.

Nach einer längeren Autofahrt halten sie an einem Motel und freuen sich auf eine warme Dusche. Wie gewohnt gibt es zwei Wasserhähne. Zu ihrer Überraschung stellen sie fest, dass sie an bestimmten Stellen unter der Dusche trocken bleiben. An anderen Stellen werden sie nass. Merkwürdig auch, wenn sie nur einen Wasserhahn verwenden, kommt nicht die Hälfte, sondern nur ein Viertel der Wassermenge an. Natürlich wird so etwas nicht auftreten, aber das wäre das Ergebnis, wenn der Duschkopf Wasser-Wellen statt

Wasser-Tropfen liefern würde.

Welche Experimente belegen das Phänomen des Welle-Teilchen Dualismus von Licht und Materie?

- Spektrum eines schwarzen Strahlers[9]
- Nachweis ionisierender Strahlung durch eine Nebelkammer[10]
- Röntgenbeugung an Kristallen[11]
- Photoelektrischer Effekt[12]
- Comptonstreuung[13]
- Beugung von Elektronen an einem Kristallgitter[14]
- Franck-Hertz Versuch[15]

Alle diese Messungen sind Meilensteine auf dem Weg der Quantenphysik und werden im Rahmen der Vorlesung besprochen.

There was a time when the newspapers said that only twelve men understood the theory of relativity. I do not believe there ever was such a time. There might have been a time when only one man did, because he was the only guy who caught on, before he wrote his paper. But after people read the paper, a lot of people understood the theory of relativity in some way or other, certainly more than twelve. On the other hand, I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.

Richard Feynman, 1965

Wellen- und Teilcheneigenschaften von Licht zeigen sich beispielsweise in Experimenten mit Röntgenstrahlung. Bei der Durchstrahlung von Folien beobachtet man das Wellenphänomen der Beugung. Beim Nachweis der Strahlung mit einem Detektor offenbart sich der Teilchencharakter. Es hängt also scheinbar von der Art des Experiments ab,

[9] The Nobel Prize in Physics 1918 was awarded to Max Karl Ernst Ludwig Planck *in recognition of the services he rendered to the advancement of Physics by his discovery of energy quanta.*

[10] The Nobel Prize in Physics 1927 was divided equally between Arthur Holly Compton *for his discovery of the effect named after him* and Charles Thomson Rees Wilson *for his method of making the paths of electrically charged particles visible by condensation of vapour.*

[11] The Nobel Prize in Physics 1914 was awarded to Max von Laue for his discovery of the diffraction of X-rays by crystals.

[12] The Nobel Prize in Physics 1921 was awarded to Albert Einstein *for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect.*

[13] siehe Fußnote 9

[14] The Nobel Prize in Physics 1937 was awarded jointly to Clinton Joseph Davisson and George Paget Thomson *for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals.*

[15] The Nobel Prize in Physics 1925 was awarded jointly to James Franck and Gustav Ludwig Hertz *for their discovery of the laws governing the impact of an electron upon an atom.*

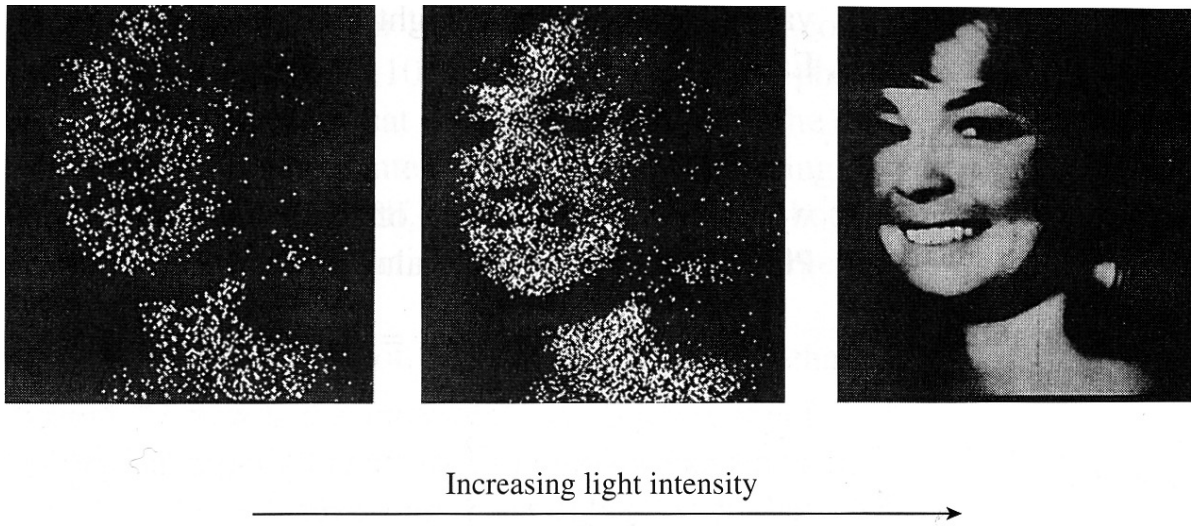


Abb. 9.5: Ein Photo, aufgenommen bei unzureichenden Lichtbedingungen, zeigt eine gewisse Körnigkeit, so als ob einzelne Teilchen auf dem Detektor auftreffen würden [**?**].

ob Teilchen- oder Welleneigenschaften dominieren. Der Vergleich der charakteristischen Längenskalen von Objekt und Licht gestattet eine grobe Einordnung.

Radiowellen

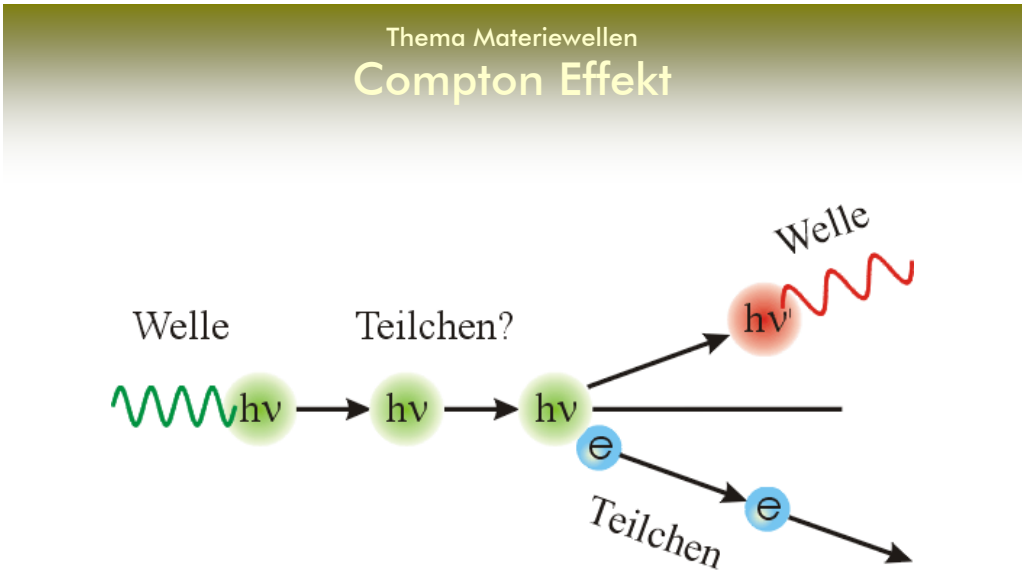
- Radiowellen haben Wellenlängen von einigen hundert Metern (10^2 m).
- Die Energie der Radiowellen wird verteilt auf einen großen Raumbereich.
- Die verfügbare Energie einer Radiowelle an einem bestimmten Ort ist dagegen gering.
- Die Wechselwirkung von Radiowellen mit Materie wird durch den Wellencharakter des Lichts bestimmt

Röntgenlicht

- Röntgenlicht hat Wellenlängen im Bereich Pikometer (10^{-12} m)
- Die Energie der Röntgenstrahlung wird in einem kleinen Volumen bereit gestellt.
- Die Wechselwirkung von Materie mit Röntgenstrahlung wird durch den Teilchencharakter des Lichts bestimmt.

Der sichtbare Bereich des Lichts markiert den Übergangsbereich zwischen Wellen- und Teilchencharakter. Abb. 9.5 zeigt den Effekt am Beispiel einer Photoaufnahme bei unterschiedlichen Lichtverhältnissen. Bei schlechter Beleuchtung (links) tritt die Körnigkeit des Lichts zu Tage.

9.1 Compton-Effekt



The story is told of Lord Kelvin, a famous Scotch physicist of the last century, that after he had given a lecture on atoms and molecules, one of his students came to him with the question, *Professor, what is your idea of the structure of the atom. What,* said Kelvin, *The structure of the atom? Why, don't you know, the very word 'atom' means the thing that can't be cut. How then can it have a structure? That,* remarked the facetious young man, *shows the disadvantage of knowing Greek.*

Arthur Compton, 1931

Der Compton-Effekt [? ? ?] behandelt die Wechselwirkung hochenergetischen Lichts mit Elektronen. Im Wellenbild der Optik ist der beobachtete Prozess der Compton-Streuung kaum zu verstehen, denn das Elektron wird beschleunigt und das Licht ändert seine Frequenz. Im Teilchenbild ergibt sich dagegen ein konsistentes Bild. Eine merkliche Verschiebung der Wellenlänge bei der Streuung von Radiowellen an Hindernissen wäre im übrigen fatal für Radiosender. Wie sich herausstellen wird, ist die Wellenlängenänderung äußerst gering.

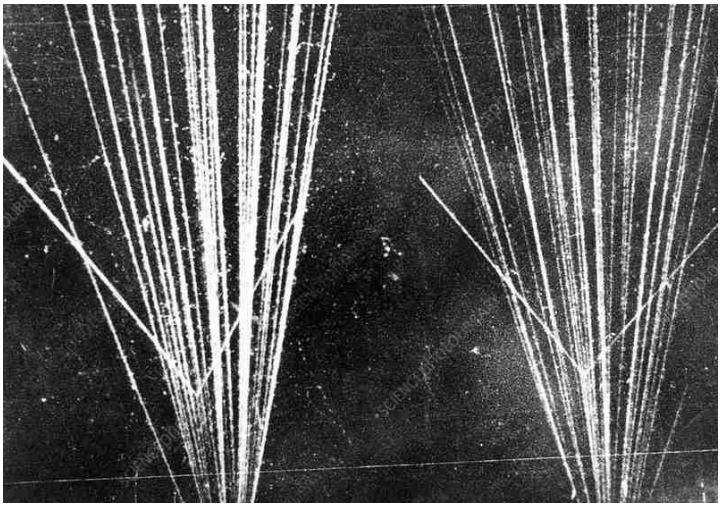


Abb. 9.6: Trajektorien von α-Teilchen in einer Blasenkammer, aufgenommen von Nobelpreisträger Patrick Blackett. Man beobachtet die Streuung der α-Teilchen an Heliumatomen. Die beiden Teilchen bewegen sich nach dem Stoß unter einem 90^o Winkel voneinander weg. Das lässt vermuten, dass beide Körper eine gleiche Masse haben. Tatsächlich sind α-Teilchen Heliumkerne [**?**].

Strahlungsdruck^{4LP}

Im Folgenden wird der Teilchenaspekt von Licht und Materie genauer betrachtet. Hinweise auf den Teilchencharakter hochenergetischer Strahlung ergeben sich aus der Beobachtung von Kondensstreifen in einer Nebel- oder Wilsonkammer,[16] siehe Abb. 9.6.[17]

[16] siehe Fußnote 9

[17] The Nobel Prize in Physics 1948 was awarded to Patrick Maynard Stuart Blackett *for his development of the Wilson cloud chamber method, and his discoveries therewith in the fields of nuclear physics and cosmic radiation.*

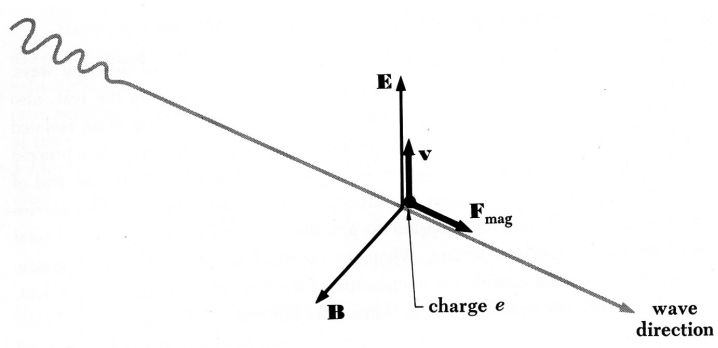


Abb. 9.7: Das Magnetfeld einer elektromagnetischen Welle übt eine Kraft auf eine Ladung aus. Durch die Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld der Welle führt die Ladung eine transversale Wackelbewegung aus [**?**].

Jede der Spuren resultiert aus der Bahn eines α-Teilchens,[18] dass, in Folge seines hohen Impulses, Ionisationsprozesse auslöst. Die resultierenden Nukleationskeime lösen eine Kondensation des übersättigten Wasserdampfs entlang der Bahn aus. Man erkennt, dass einige der α-Teilchens mit den in der Blasenkammer[19] vorhandenen Heliumatome zusammen stoßen.

Das Photon kann ebenfalls als Teilchen mit bestimmten Eigenschaften betrachtet werden. Für das Verständnis des Compton-Effekts ist wichtig, dass man dem Photon (siehe Vorlesung *Einsteingleichung*) ebenfalls einen Impuls zuordnen kann:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h \cdot c}{\lambda \cdot c} = \frac{h}{\lambda} \tag{9.2}$$

Da stellt sich sofort die Frage: Trägt das Photon auch Masse und Ladung? Die momentane Antwort lautet: NEIN! Wer es genauer wissen will, hier die aktuelle Abschätzung:

Masse des Photons: $m_{ph} < 10^{-.50}\,\mathrm{kg}$ [**?**]

Ladung des Photons: $q_{ph} < 10^{-17}\,e$ [**?**]

Wie kommt es zur Energie-/ Impulsübertragung? Wie man aus Abb. 9.7 erkennt, übt das elektrische Feld E_e einer Lichtwelle eine aufwärts gerichtete Kraft $F_e = e \cdot E_e$ auf ein Elektron aus und beschleunigt es auf die Geschwindigkeit v. Die Rate, mit der Energie E_{rad} aus dem Lichtfeld übertragen wird, ist:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \vec{F}_e \times \vec{v} \\ \frac{dE}{dt} &= e \cdot E_e \cdot v \end{aligned} \tag{9.3}$$

Neben dem elektrischen Feld trägt in Ausbreitungsrichtung auch das magnetische Feld

[18] *Lexikon:* α-Teilchen sind doppelt positiv geladene Heliumkerne (He^{2+}). Bei der Wechselwirkung mit Materie kommt es zur Ionisation von Atomen. Durch die Stöße verliert das α-Teilchen schnell an Energie. In Luft beträgt die mittlere Reichweite nur etwas 5 cm, im Körpergewebe weniger als einen Millimeter. Durch radioaktive Zerfälle im Körper erzeugte α-Teilchen stellen somit eine lokale radioaktive Belastung dar, wie sie zum Beispiel bei der Einatmung von Radon ausgelöst wird.

[19] *Lexikon:* Eine **Blasenkammer** ist eine mit flüssigem Wasserstoff gefüllte Kammer, den energetische Teilchen durchqueren. Kurz vor dem Einschuss wird der Druck in der Kammer verringert, so dass die Temperatur des Wasserstoffs oberhalb des Siedepunktes liegt. Die energiereichen Teilchen ionisieren Wasserstoffatome, als Keime für Gasblasen dienen. Die Auswertung von Photos ergibt ein dreidimensionales Bild der Teilchenspuren. Durch Ablenkung der geladenen Teilchenstrahlung durch ein homogenes Magnetfeld lässt anhand der Bahnkrümmung das Masse-zu-Ladung Verhältnis und aus Länge der Trajektorie die Lebensdauer bestimmen.

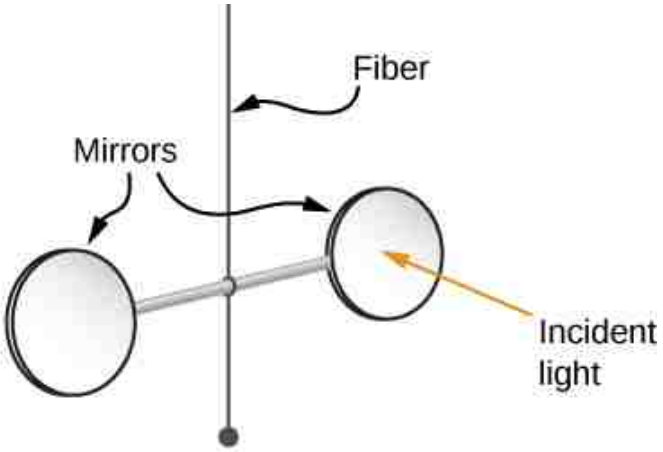


Abb. 9.8: Der Strahlungsdruck ist der mechanische Druck auf eine Oberfläche aufgrund des Impulsaustauschs zwischen dem Körper und dem elektromagnetischen Feld.

bei, wobei wir ausnutzen, dass $E = c \cdot B$ ist:

$$\begin{aligned} F_M &= e \cdot \vec{v} \times \vec{B} \\ F_M &= e \cdot v \cdot B \\ F_M &= \frac{e \cdot v \cdot E_e}{c} \\ F_M &= \frac{1}{c}\frac{dE_{rad}}{dt} \end{aligned} \tag{9.4}$$

Da das elektromagnetische Feld oszilliert, ändert sich v und B ständig. F_M allerdings wirkt stets in Richtung $+z$. Der im Mittel dadurch übertragene Impuls ergibt sich mit:

$$\begin{aligned} p_{avg} &= \int F_M \, dt \\ p_{avg} &= \frac{1}{c}\int dE_{rad} \\ p_{avg} &= \frac{E_{rad}}{c} \end{aligned} \tag{9.5}$$

Den oben beschriebene Mechanismus nennt man den Strahlungsdruck. Man kann den Effekt des Strahlungsdrucks mit einer Torsionswaage nachweisen [**?**]. Abb. 9.8 zeigt den schematischen Aufbau des Experiments. Aus der Impulserhaltung folgt analog, wie aus der Mechanik (elastischer und inelastischer Stoß) bekannt, dass sich die Kraft verdoppelt, wenn das Objekt die Strahlung nicht absorbiert, sondern reflektiert.

$$p_{avg} = \begin{cases} \dfrac{I}{2} & \text{vollständige Absorption} \\ \dfrac{2\,I}{2} = I & \text{vollständige Reflexion} \end{cases} \tag{9.6}$$

Link to video The Pressure of Light



Abb. 9.9: Photo des Kometen Hale-Bopp. Am 1.4.1997 passierte der Komet Hale-Bopp den sonnennächsten Punkt seiner Bahn. Selbst in Großstädten war der Komet mit bloßem Auge zu erkennen. Die nächste Möglichkeit ihn mit bloßem Auge zu beobachten, ergibt sich leider erst in 2 400 Jahren.

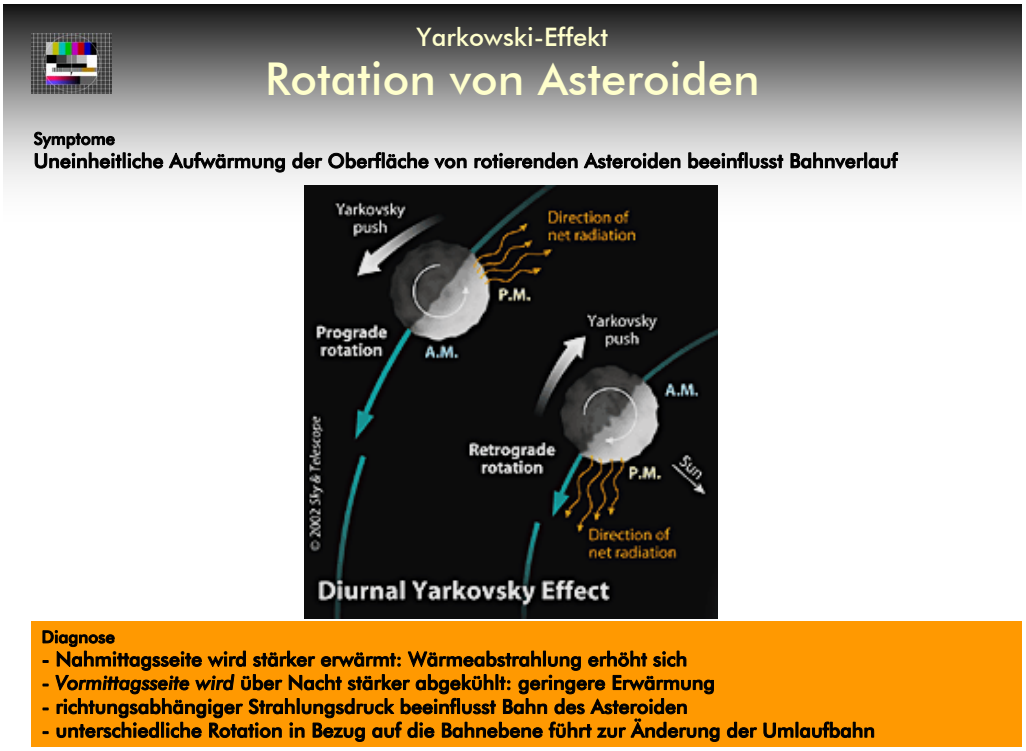
Beispiele aus der Astrophysik

Maria Mitchell, the first female professional astronomer in the United States, became instantly famous in October 1847, when she was the first to discover and chart the orbit of a new comet, which became known as *Miss Mitchell's Comet*.

Der Einfluss des Lichtimpulses auf Materie zeigt sich deutlich im Verhalten von Kometen, die sich auf ihrer Bahn der Sonne nähern.[20] Bei Annäherung an die Sonne erwärmt sich der Komet und Materie verdampft von der Oberfläche. Durch die intensive Strahlung der Sonne fängt das verdampfte Material an zu leuchten. Die Materie wird beschleunigt und die Teilchen verlassen die Umgebung des Kometen in einer ganz bestimmten Richtung. Überraschenderweise spielt die Bewegungsrichtung des Kometen dabei keine Rolle. Gasmoleküle und Staubteilchen bewegen sich in Richtung von der Sonne weg. Ursache ist der Strahlung der Sonne. Der dadurch erzeugte Strahlungsdruck ergibt einen Impulsübertrag auf die Teilchen, was zu einer Ausrichtung des Kometenschweifs führt. Abb. 9.9 zeigt eine Aufnahme des Kometen Hale-Bopp. Man erkennt, dass der Komet

[20] Schon 1619 postulierte Johannes Kepler auf der Grundlage der Newtonschen Korpuskeltheorie, dass es der Strahlungsdruck der Sonne ist, der dafür sorgt, dass der Kometenschweif von der Sonne weg zeigt. Der experimentelle Nachweis erfolgte erst Anfang des Zwanzigsten Jahrhunderts durch Nichols und Hull [**?**], sowie Lebedev [**?**].

zwei Schweife hat. Der Ionenschweif besteht aus ionisiertem Gas (blau). Die Ionen wechselwirken aufgrund ihrer Ladung mit dem Sonnenwind, der aus einen kontinuierlichen Strom geladener Teilchen besteht. Der Impulsübertrag aus dem Sonnenwind ist so stark, dass die Richtung des Ionenschweif von der Sonne weg zeigt. Der andere Schweif (gelb) besteht aus elektrisch neutralen Staubpartikeln, der nicht mit dem Sonnenwind wechselwirken. Dieser Schweif wird durch den deutlich schwächeren Strahlungsdruck der Sonne hervorgerufen. Die krumme Bahn resultiert aus dem Einfluss der Gravitation auf die Staubteilchen.



Yarkovsky-Effekt Einige Asteroiden, die man im Bereich zwischen Mars und Jupiter finden, verlassen ihre Bahn und nähern sich der Sonne. Hierbei beobachtet man, dass der Strahlungsdruck der Sonne aufgrund des Yarkovsky-Effekts Einfluss hat auf die Orbitalgeschwindigkeit. Ursache ist, dass die von einer bestimmten Fläche absorbierte Strahlung verzögert wieder abgegeben wird. In dieser Zeitspanne hat sind der Asteroid aber weiter gedreht, so dass Absorption und Emission der Strahlung räumlich versetzt stattfinden. Stimmen Eigen- und Bahndrehimpuls nahezu überein, ist der Effekt besonders groß und hat Auswirkungen auf die Bahn des Asteroiden. Sind Eigen- und Bahndrehimpuls parallel zueinander reduziert sich der Bahnradius, stehen sie antiparallel, vergrößert sich der Radius der Bahn.

Link to video **A Brief History Of Quantum Mechanics**

The Yarkovsky effect as a heat engine [?]**:** We show how the Yarkovsky effect can be understood as a heat engine. The output of the engine, manifested in the rate of change in semimajor axis of the body, has a maximum at an intermediate heat capacity, depending on the rotation rate of the body. This maximum arises because the work output depends on the product of the solar heat absorbed by the body and transported from its morning to evening side (this am-pm heat flux increases with heat capacity)

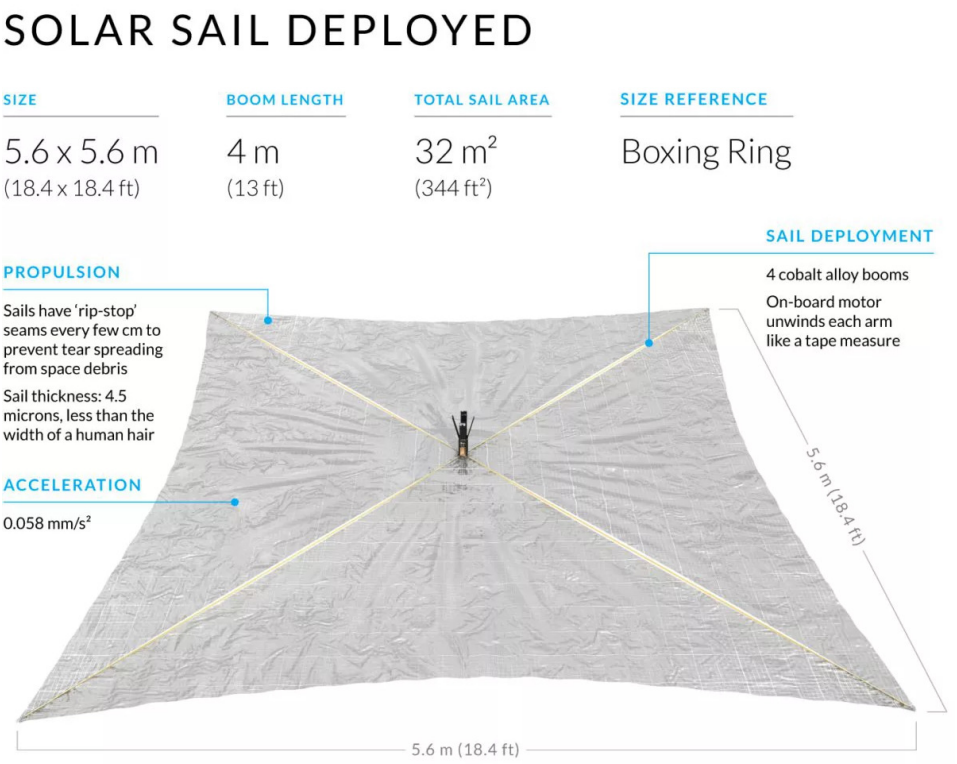
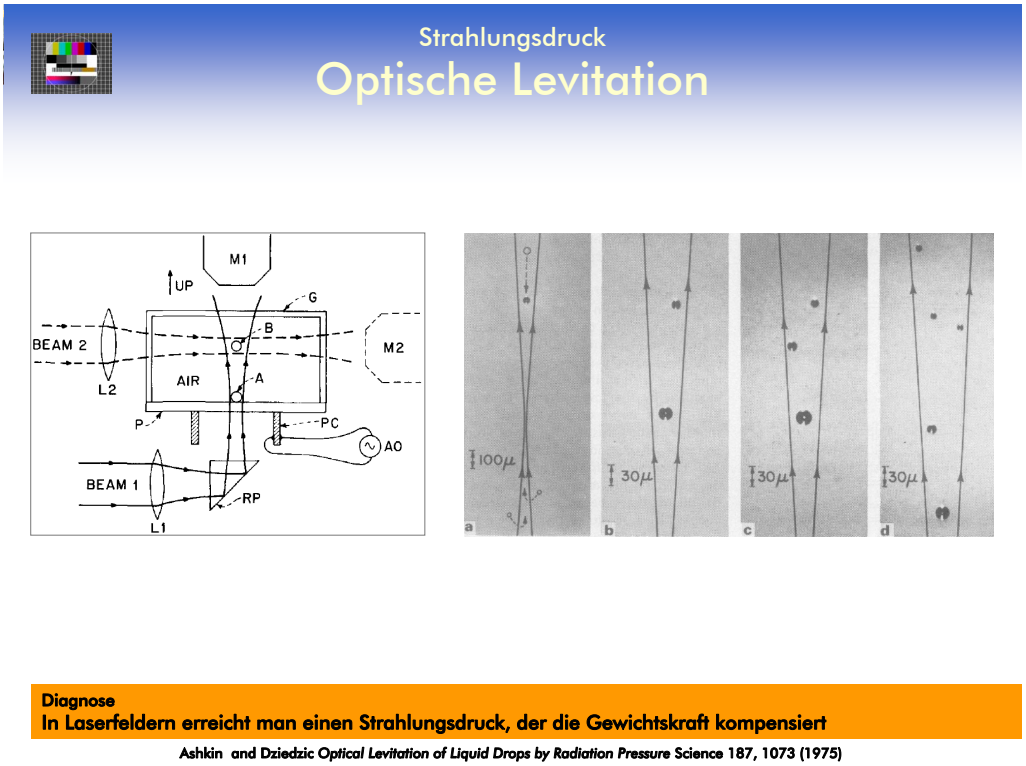


Abb. 9.10: LightSail is a crowdfunded project from *The Planetary Society* to demonstrate that solar sailing is a viable means of propulsion for CubeSats - small, standardized spacecraft that are part of a global effort to lower the cost of space exploration. Our LightSail 2 spacecraft, launched on June 25, 2019, uses sunlight alone to change its orbit, and is currently operating under an extended mission to further advance solar sailing technology [**?**].

and the Carnot efficiency (which declines with heat capacity).

Ein Beispiel aus der Raumfahrt

Es gibt schon seit langem Konzepte, den Strahlungsdruck als alternativen Raketenantrieb zu nutzen [**?**]. Die Grundlagen wurden durch Oberth und Ziolkowski Mitte der 1920er Jahre gelegt. Erste Versuche mit Prototypen waren erfolgreich. Abb. 9.10 zeigt die technische Realisation des Sonnensegels zum Antrieb von Satelliten.



When I described catching living things with light people said, Don't exaggerate Ashkin.

Arthur Ashkin

Levitation[4LP]

Lamb's Illustrated Magic Dictionay (1979) defines levitation as *rising into the air (the opposite of gravitation); an effective feat with both objects and living persons...* It should not be confused with aerial suspension, where some visible contact with the ground is maintained. J. N. Maskelyne first introduced levitation in 1873, his wife floating up from the stage horizontally...Since then many magicians have levitated their assistants in many different ways, two of the most popular being Aga and Asrah. In America Kellar made a great feature in 1904 of the *Levitation of Princess Karnac*, which was really Maskelyne's old illusion. Inanimate objects, from handkerchiefs and floating balls to an electric organ (Calvert), have been freely encouraged to ignore the law of gravitation. One of the most effective is Norm Nielsen's floating violin, which plays as it floats. Threads, wires and other gimmicks have all been used in levitations. [**?**]

Ein Beispiel aus der Biologie

Der Impulsübertrag kann weiter genutzt werden, um eine Optische Pinzette zu realisieren [**?**]. Damit können mikroskopische Objekte ohne Berührung verschoben werden. Das Video zeigt, wie man Mikrokügelchen mit Hilfe einer optischen Pinzette effektiv verschieben kann. Lauschen Sie dem Nobelpreisträger für Physik von 2018, Arthur Ashkin:[21]

Link to video **Optical Tweezers in Action**

Link to video **Don't exaggerate Ashkin**

Levitodynamics: Levitation and control of microscopic objects in vacuum [?]: The ability to control and cool the motion of levitated systems -in some cases down to their motional ground state- and to couple these systems to external forces provides opportunities for fundamental science and technology. The review gives an overview of the status, challenges, and prospects of levitodynamics, the multidisciplinary research area that focuses on the understanding and control of optical trapping of microparticles and nanoparticles in vacuum, with the goal of eventually using such levitated particles as ultrasensitive probes for sensing applications. The control of levitated nano- and micro-objects in vacuum - which capitalizes on scientific achievements in the fields of atomic physics, control theory, and optomechanics is of considerable interest. The ability to couple the motion of levitated systems to internal degrees of freedom, as well as to external forces and systems, provides opportunities for science and technology. Attractive research directions, ranging from fundamental quantum physics to commercial sensors, have been unlocked by the many recent experimental achievements, including motional ground-state cooling of an optically levitated nanoparticle. Here we review the status, challenges, and prospects of levitodynamics, the multidisciplinary research area devoted to understanding, controlling, and using levitated nano- and micro-objects in vacuum.

Ein Beispiel aus der Laserphysik

Zum Abschluss ein Experiment, dass den Welle-Teilchen Dualismus illustriert. Ein eng gebündelter Strahl metastabiler Heliumnatomen durchquert eine stehende Lichtwelle, die durch zwei gegenläufige Laserstrahlen erzeugt wird. In den Knoten der stehenden Welle das Licht ist die Amplitude des Lichtfeldes NULL und die Atome können, ohne dass abgelenkt werden, den Lichtstrahl durchqueren. Im Bereich der Maxima ist die Amplitude hoch und die Atome können Licht passender Wellenlänge absorbieren. Bei der Absorption des Lichts wir ein Impuls auf die Atome übertragen, der sie aus der ursprünglichen Bahn ablenkt. Auf dem Detektorschirm hinter den Anordnung beobachtet

[21] The Nobel Prize in Physics 2018 was awarded *for groundbreaking inventions in the field of laser physics* with one half to Arthur Ashkin *for the optical tweezers and their application to biological systems*, the other half jointly to Gérard Mourou and Donna Strickland *for their method of generating high-intensity, ultra-short optical pulses.*

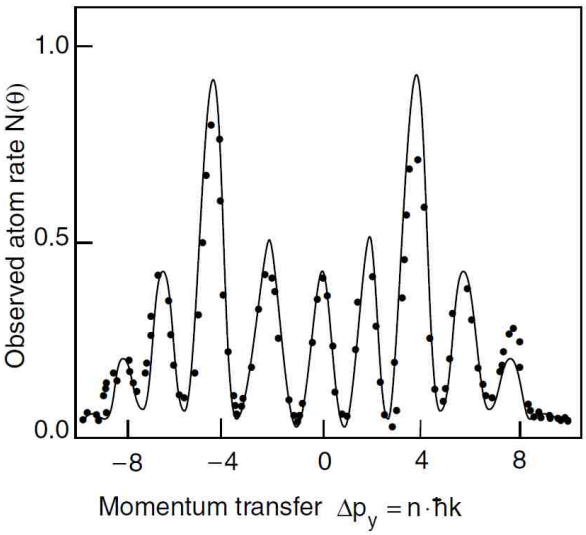


Abb. 9.11: Beugungs- und Interferenzphänomene beobachtet wenn ein Strahl metastabiler Heliumatome eine stehende Lichtwelle durchquert [**?**].

man ein Interferenzbild (Abb. 9.11), also ein Phänomen der Wellenoptik. Das experimentelle Ergebnis lässt sich aber auch durch das Teilchenbild von Licht und Materie, was Gegenstand des nächsten Kapitels ist [**?**].

Hertzscher Dipol

Bevor das Experiment von Compton vorgestellt wird, eine kurze Erinnerung an die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ausgelöst durch einen Hertzschen Dipol.

Link to video **Der Strahlungsvorgang beim Hertzschen Dipol**

Zwei Aussagen sind dabei wichtig:

1. Ein durch die elektromagnetische Welle angeregter Dipol sendet eine Welle mit GLEICHER Frequenz aus.

2. Die Emission erfolgt in Form von Dipolstrahlung, wobei die Energie stets SENKRECHT zur Achse des schwingenden Dipols abgestrahlt wird.

Link to video **Hertzscher Dipol**

Röntgenstreuung am Elektron

Röntgenlicht, dass heißt Licht einer Wellenlänge im pm-Bereich (10^{-12} m), wechselwirkt mit dem Elektron eines Atoms: $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$. Man beobachtet, dass das oszillierende elektrische Feld des Lichts eine Zitterbewegung des Elektrons auslöst. Die Bewegung der Ladung führt zur Emission von Dipolstrahlung. Im Experiment von Compton, siehe Abb. 9.12 wird dieses nach der klassischen Elektrodynamik erwartete Abstrahlverhalten tatsächlich beobachtet, siehe Abb. 9.13, oben. Röntgenlicht bei derselben Frequenz

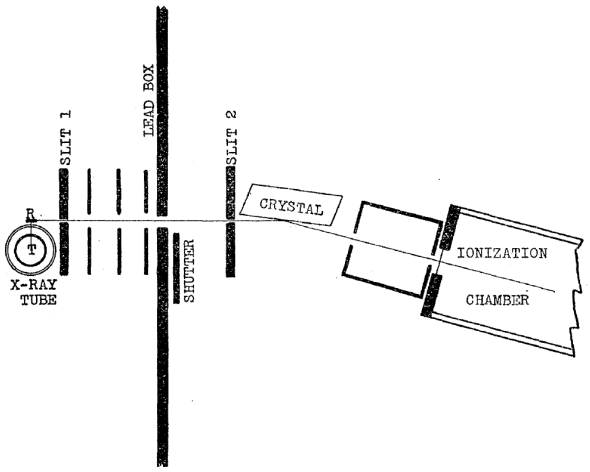


Abb. 9.12: Experiment von Compton zur Streuung von Röntgenlicht an Elektronen [**?**].

wie die Anregungswellenlänge (λ_{in}=71 pm=$71 \cdot 10^{-12}$ m) wird emittiert. Das eigentlich Spannende aber ist, das man zusätzlich Licht beobachtet, deren Wellenlänge sich vergrößert hat ($\lambda_{out} > \lambda_{in}$), wobei die Position des Maximums von der Beobachtungsrichtung abhängt, siehe die verbleibenden Resultate in der Abbildung. Je größer der Beobachtungswinkel gewählt wird, desto größer ist die Wellenlängenverschiebung. Weiter stellt man fest, dass der Effekt unabhängig davon ist, an welchem Element man das Experiment durchführt [**?**]. Für beide Effekte gibt es keine Erklärung im Rahmen der klassischen Elektrodynamik. Es lässt sich nachweisen, dass die Strahlung in der Wechselwirkung des Röntgenlichts mit dem Elektron erzeugt wird.

Zunächst prüfen wir die Energieverhältnisse. Nach der Planckschen Hypothese gilt:[22]

$$E_i = \frac{hc}{\lambda_i} \quad > \quad \frac{hc}{\lambda_f} = E_f \tag{9.7}$$

	Energie		Impuls	
	Photon	Elektron	Photon	Elektron
vorher	$E_i = h \cdot \nu_i$	$m_e \cdot c^2$	$p_i = h \cdot \nu_i / c$	$p_f = 0$
nachher	$E_f = h \cdot \nu_f$	E_e^f	$p_f = h \cdot \nu_f / c$	$p_f \neq 0$

Tab. 9.1: Energie- und Impuls beim Compton-Effekt.

Der Energieerhaltungssatz ist also im Compton-Streuprozess[23] nicht verletzt.

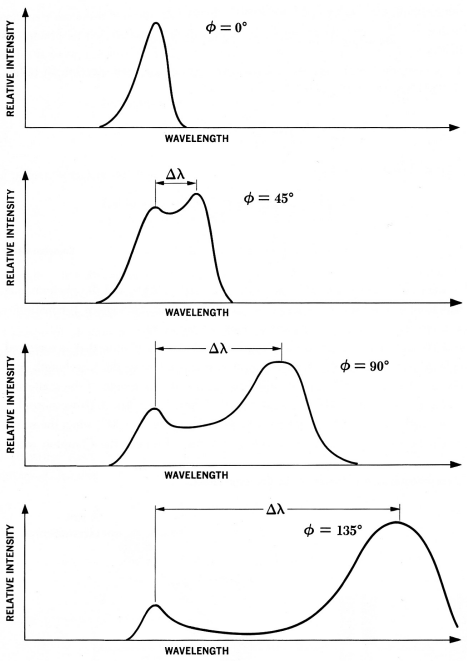


Abb. 9.13: Abhängigkeit der Compton-Streuung vom Beobachtungswinkel [**?**].

Herleitung[24]

Abb. 9.14 zeigt die Streugeometrie. Tab. 9.1 fasst Anfangs- und Endbedingungen bei diesem Streuprozess zusammen. Ausgangspunkt sind Energie-

$$\begin{aligned} p^i_{ph} \cdot c + m_e \cdot c^2 &= p^f_{ph} \cdot c + E^2_e \\ (p^i_{ph} - p^f_{ph} + m_e \cdot c)^2 &= \left(\frac{E^f_e}{c}\right)^2 \end{aligned} \tag{9.8}$$

und Impulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} p^i_{ph} &= p^f_{ph} + p^f_e \\ p^i_{ph} - p^f_{ph} &= p^f_e \\ (p^i_{ph} - p^f_{ph})^2 &= (p^f_e)^2 \\ (p^i_{ph})^2 - 2\,p^i_{ph} \cdot p^f_{ph} + (p^f_{ph})^2 &= (p^f_e)^2 \end{aligned} \tag{9.9}$$

Wir ziehen die beiden Gleichungen von einander ab und nutzen in der zweiten Zeile aus,

[22] i: initial; f: final

[23] *Lexikon:* Unter einem **Streuprozess** versteht man die Beeinflussung eines Objekts (**Streuzentrum**) durch eine lokale Wechselwirkung. Dies kann beispielsweise die Ablenkung eines Teilchens oder einer Welle sein. Zur Charakterisierung des Streuprozesses gibt man den Streuquerschnitt an. Beim Compton-Effekt betrachtet man die Streuung von Röntgenlicht an Elektronen.

[24] Siehe Fig. 9.15

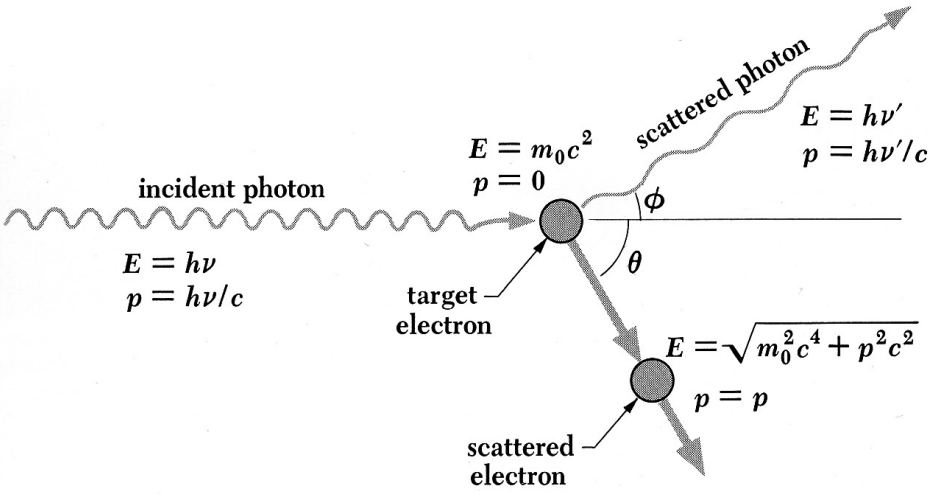


Abb. 9.14: Streugeometrie beim Compton-Effekt und zugehörige physikalische Größen [**?**].

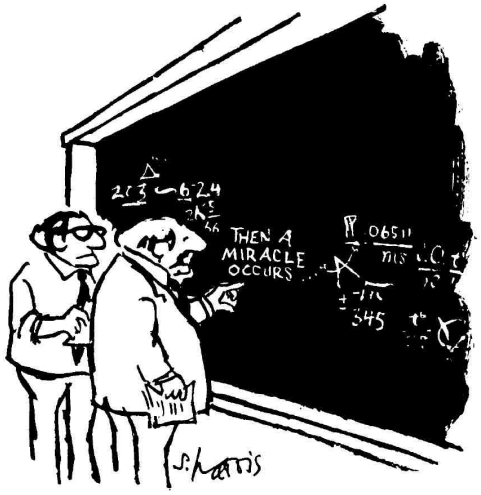


Abb. 9.15: I think you should be more explicit here in step two [**?**].

dass $(E_e^f)^2 = m_e^2 \cdot c^4 + (p_e^f \cdot c)^2$ ist.

$$
\begin{aligned}
m_e^2 \cdot c^2 - 2\,p_{ph}^i \cdot p_{ph}^f + 2\,p_{ph}^i \cdot m_e \cdot c - 2\,p_{ph}^f \cdot m_e \cdot c - 2\,p_{ph}^i \cdot p_{ph}^f \cdot \cos\Theta_{ph} &= \left(\frac{E_e^f}{c}\right)^2 - (p_e^f)^2 \\
m_e^2 \cdot c^2 - 2\,p_{ph}^i \cdot p_{ph}^f + 2\,p_{ph}^i \cdot m_e \cdot c - 2\,p_{ph}^f \cdot m_e \cdot c - 2\,p_{ph}^i \cdot p_{ph}^f \cdot \cos\Theta_{ph} &= m_e^2 \cdot c^2 \\
-2\,p_{ph}^i \cdot p_{ph}^f + 2\,p_{ph}^i \cdot m_e \cdot c - 2\,p_{ph}^f \cdot m_e \cdot c - 2\,p_{ph}^i \cdot p_{ph}^f \cdot \cos\Theta_{ph} &= 0 \\
-p_{ph}^f \cdot (p_{ph}^i + m_e \cdot c - p_{ph}^i \cdot \cos\Theta_{ph}) + p_{ph}^i \cdot m_e \cdot c &= 0 \\
p_{ph}^f \cdot (p_{ph}^i + m_e \cdot c - p_{ph}^i \cdot \cos\Theta_{ph}) &= p_{ph}^i \cdot m_e \cdot c
\end{aligned}
\tag{9.10}
$$

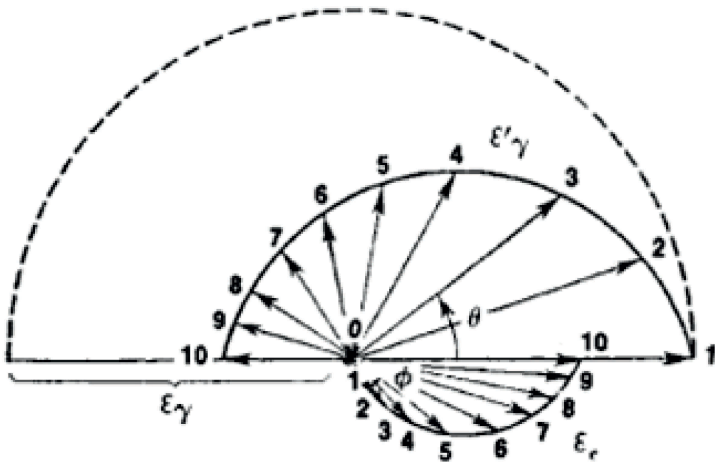


Abb. 9.16: Abhängigkeit der Energie des gestreuten Photons vom Streuwinkel und die Abhängigkeit der Energie des Rückstoßelektrons vom Streuwinkel. Größen, die sich auf dasselbe Stoßereignis beziehen, sind mit gleichen Zahlen gekennzeichnet [**?**].

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p^f_{ph}} &= \frac{m_e \cdot c + p^i_{ph} - p^i_{ph} \cdot \cos\Theta_{ph}}{p^i_{ph} \cdot m_e \cdot c} \\
\frac{p^i_{ph}}{p^f_{ph}} &= \frac{m_e \cdot c + p^i_{ph} - p^i_{ph} \cdot \cos\Theta_{ph}}{m_e \cdot c} \\
\frac{p^i_{ph}}{p^f_{ph}} &= \frac{m_e \cdot c + p^i_{ph} \cdot (1 - \cos\Theta_{ph})}{m_e \cdot c} \\
\frac{p^i_{ph}}{p^f_{ph}} &= \frac{m_e \cdot c \left(1 + \dfrac{p^i_{ph}}{m_e \cdot c} \cdot (1 - \cos\Theta_{ph})\right)}{m_e \cdot c} \\
\frac{p^i_{ph}}{p^f_{ph}} &= 1 + \frac{p^i_{ph}}{m_e \cdot c} \cdot (1 - \cos\Theta_{ph}) \\
p^f_{ph} &= \frac{p^i_{ph}}{1 + \dfrac{p^i_{ph}}{m_e \cdot c} \cdot (1 - \cos\Theta_{ph})}
\end{aligned}
\tag{9.11}
$$

Die Analyse zeigt, dass es durch den Impulsübertrag auf das Elektron zu einer Änderung im Impuls des gestreuten Photons kommt. Weiter zeigt die Herleitung, dass die Änderung vom Beobachtungswinkel abhängt. Der Winkel Θ_{ph} beschreibt den Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung des einfallenden und gestreuten Photons.

Wie wirkt sich die Impulsänderung im Photon auf den Elektronenimpuls aus?

Abb. 9.16 illustriert den Aspekt der Impulserhaltung in diesem Experiment. Es ist sinnvoll, die Impulsgleichung umzuschreiben auf die im Experiment zugängliche Messgröße Wellenlänge, d.h. λ^i und λ^f. Dazu ersetzt man den Impuls p_{ph} durch E_{ph}/c, $E_{ph} = h \cdot \nu_{ph}$ und $\nu_{ph} = c/\lambda_{ph}$:

$$\lambda^f - \lambda^i = \frac{h}{m_e \cdot c}(1 - \cos \Theta_{ph}) \tag{9.12}$$

Die Analyse der Compton-Streuung von Röntgenstrahlung an Elektronen im Rahmen eines Teilchenbildes kann das experimentelle Resultat beschreiben. Bevor Sie weiterblättern, folgende Fragen zu Gl. 9.12:

1. Bei welchem Winkel erwartet man die größte Wellenlängenänderung?
2. Welche Einheit hat der Ausdruck $\frac{h}{m_e \cdot c}$?
3. Welche Größenordnung hat der Wert dieser physikalischen Größe (*order-of-magnitude estimate*)?

Compton-Wellenlänge

Den Ausdruck

$$\lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e \cdot c} \tag{9.13}$$

bezeichnet man als Comptonwellenlänge des Elektrons. Da $h/m_e c \approx 10^{-12}\,\mathrm{m}$ ist der Compton-Effekt aufgrund der äußerst geringen Wellenlängenverschiebung nur im Röntgenbereich zu beobachten. Experimente mit sichtbarem Licht ($\lambda_{VIS} \approx 10^{-6}\,\mathrm{m}$) scheitern an der geringen Frequenzverschiebung, die man mit herkömmlichen Mitteln nicht auflösen kann. Die Beobachtung von Strahlung mit $\lambda_f = \lambda_i$ deutet darauf hin, dass es in diesen Streuprozessen nicht zu Energie- oder Impulsänderungen kommt. Offensichtlich gibt es auch Prozesse, in der man die Bindung des Elektrons an das Atom nicht vernachlässigen kann. Erfolgt die Streuung an stark gebundenen Elektronen ist der Stoßpartner (Elektron+Kern). Die Masse ist dadurch gegenüber m_e erheblich erhöht. Erinnern Sie sich? Im Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt* wurde ähnliches im Rahmen des Mössbauer-Effekts genutzt, um die Linienbreite der ^{57}Fe Emission stark herabzusetzen.

Über die Auswertung der Energie- und Impulsbilanz kann auch ermittelt werden, in welche Richtung (Θ_e) sich das Elektron nach der Wechselwirkung bewegt.

$$\cot\,\Theta_e = (1 + \varepsilon_C) \cdot \tan\Theta_{ph}/2 \tag{9.14}$$

wobei Θ_{ph} der Winkel ist, in den das Photon gestreut wird und

$$\varepsilon_C = \frac{h \cdot \nu}{m_e \cdot c^2} \tag{9.15}$$

Alternativ kann man die Gleichung auch so ausdrücken:

$$\frac{h \cdot \nu_f}{c} \sin\Theta_{ph} = \frac{m_e \cdot v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot \sin\Theta_e \tag{9.16}$$

wobei Θ_e der Winkel ist, in den das Elektron gestreut wird. Für die Energie des gestreuten Photons $E_f{=}h \cdot \nu_f$ und des gestreuten Elektrons E_{kin} gilt folgende Beziehung:

$$E_f = \frac{h \cdot \nu_i}{1 + \varepsilon_C \cdot (1 - \cos\Theta_{ph})} \tag{9.17}$$

$$E_{kin} = h \cdot \nu_i \cdot \frac{\varepsilon_C \cdot (1 - \cos\Theta_{ph})}{1 + \varepsilon_C \cdot (1 - \cos\Theta_{ph})} \tag{9.18}$$

Für den Fall, dass das Photon in die Winkel $\Theta_{ph}{=}90^o$ und 180^o gestreut wird, ergibt sich:

$$h \cdot \nu_f(\Theta_{ph} = 90^o) = \frac{h \cdot \nu_i}{1 + \varepsilon_C} \tag{9.19}$$

$$h \cdot \nu_f(\Theta_{ph} = 180^o) = \frac{h \cdot \nu_i}{1 + 2\,\varepsilon_C} \tag{9.20}$$

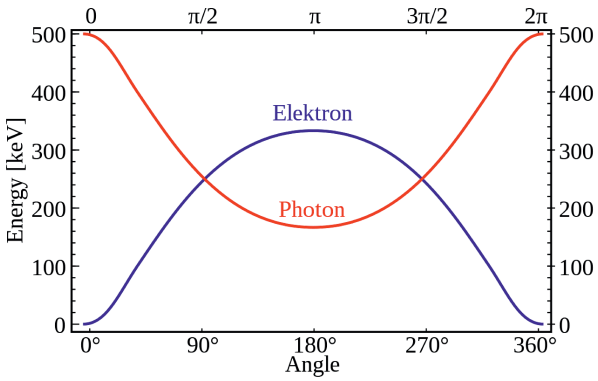


Abb. 9.17: Energie des Photons und des Elektrons nach Compton-Streuung eines 500 keV Photons [**?**].

Weiter können Aussagen getroffen werden über die Verteilung der Energie als Funktion des Streuwinkels. Abb. 9.18 zeigt den experimentellen Aufbau mit dem Impuls- und Energieerhaltung im Compton-Streuprozess nachgewiesen wurde [**?**]. Abb. 9.17 zeigt, wie sich die Energieverluste von Photon und Elektron als Funktion des Streuwinkels aufteilen. Man kann die Ergebnisse des Compton-Experiments wie folgt zusammenfassen:

- Bei der Compton-Streuung handelt es sich um einen inkohärenten Streuprozess. Das bedeutet, dass die eingehende und die auslaufende Welle keine feste Phasenbeziehung zueinander haben. Damit ergeben sich auch keine Interferenzeffekte.

- Die Streuung des Röntgenphotons erfolgt an nahezu freien Elektronen. D.h., dass die Energie des Photons deutlich größer ist als die Energie, mit der das Elektron an das Atom gebunden ist. Bei der Streuung an Atomen mit hoher Kernladungszahl kann man die Bindungsenergie des Elektrons nicht mehr vernachlässigen. Der Nachweis, dass die Frequenzverschiebung tatsächlich aufgrund der Streuung am Elektron erfolgt wurde durch Bothe und Geiger erbracht [**?**].

- Der Streuwinkel des Elektrons kann Werte zwischen 0 und π annehmen.

- Für einen Streuwinkel des Photons von $\Theta_{ph}{=}\pi$ ergibt sich ein Elektronen-Streuwinkel von $\Theta_e = 0^o$. Man nennt dies eine Photon-Rückstreuung.

- Für $\Theta_{ph}{=}0^o$ ergibt sich ein Streuwinkel für das Elektronen von $\pi/2$. Man nennt diesen Spezialfall Photon-Vorwärtsstreuung.

- Aus der Gleichung (Gl. 9.12) erkennt man, dass, je höher die Photonenenergie, umso geringer fällt der Streuwinkel des Elektrons aus.

Pitfall: Man sollte die Änderung der Energie des gestreuten Photons nicht als Verlangsamung der Ausbreitungsgeschwindigkeit deuten. Wie aus den Einsteinschen Postulaten schon bekannt, breitet sich Licht mit einer Geschwindigkeit von $3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ aus.

Der Wellenlängenpeak der gestreuten Röntgenstrahlung beim Compton-Effekt hat eine gewisse Breite, was darauf zurückzuführen ist, dass das Elektron an ein Atom des Kristall gebunden ist. Als Maß kann man die Bindungsenergie der Elektronen (ΔE) verwenden.

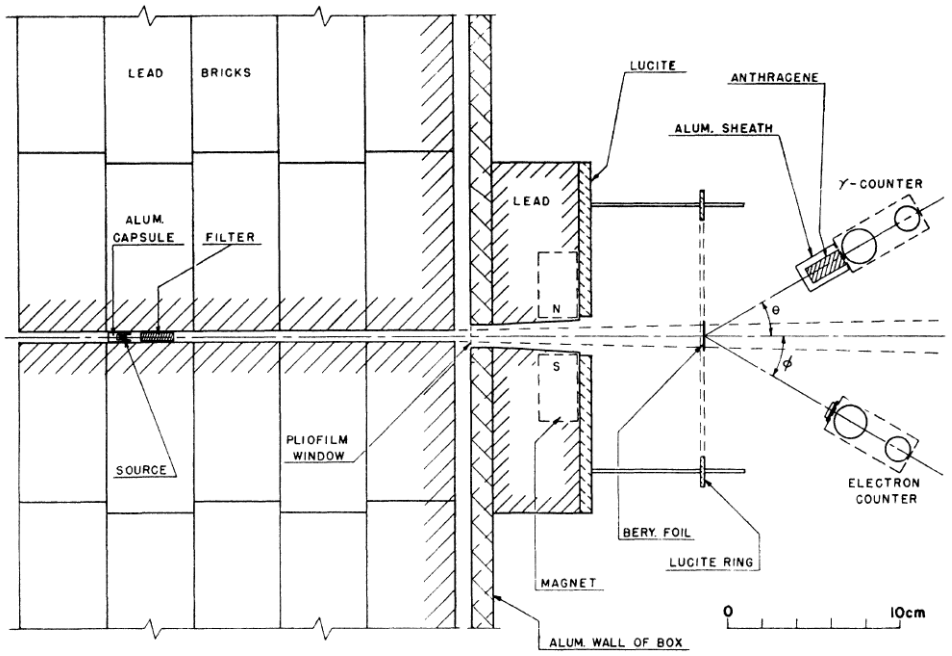


Abb. 9.18: Experimenteller Aufbau zum Nachweis des gestreuten Elektrons beim Compton-Effekts [**?**].

Diese beträgt einige bis 10 eV, während die einfallende Strahlung im Bereich keV ist. Zur Berechnung verwendet man Impuls- und Energieerhaltung.

$$(\vec{p}_f - (\vec{p}_i) = \frac{h^2}{c^2}(\nu_0^2 - \nu^2 - 2\,\nu_0 \cdot \nu \cos(\theta)) \tag{9.21}$$

$$h \cdot \nu_0 + m_e \cdot c^2 - \Delta E = h \cdot \nu + (p_f^2 \cdot c^2 + m_e^2 \cdot c^4)^{1/2} \tag{9.22}$$

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e \cdot c}(1 - \cos(\theta)) + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda}{\left(p_f \cdot p_i - \frac{1}{2}p_i^2 + \Delta E_\lambda\right)} \tag{9.23}$$

Abschließend sei noch angemerkt, dass die Compton-Streuung auch in umgekehrter Reihenfolge ablaufen kann. Beim **Inversen Compton-Effekt** streut ein relativistisches Elektronen an einem niederenergetischen Photon und erhöht dadurch die Energie des Photons. Der Energiegewinn kann so hoch sein, dass aus der Wechselwirkung ein γ-Photon resultiert.

Anwendungen[4LP]

Ein Beispiel aus der Kernphysik

Irene Curie und Frederic Joliot-Curie[25] entdeckten, dass radioaktive Strahlung Protonen aus einem Parafinblock (wasserstoffreiche Probe) herausschleudert. Die Kinetische

[25] The Nobel Prize in Chemistry 1935 was awarded jointly to Frédéric Joliot and Irène Joliot-Curie *in recognition of their synthesis of new radioactive elements*

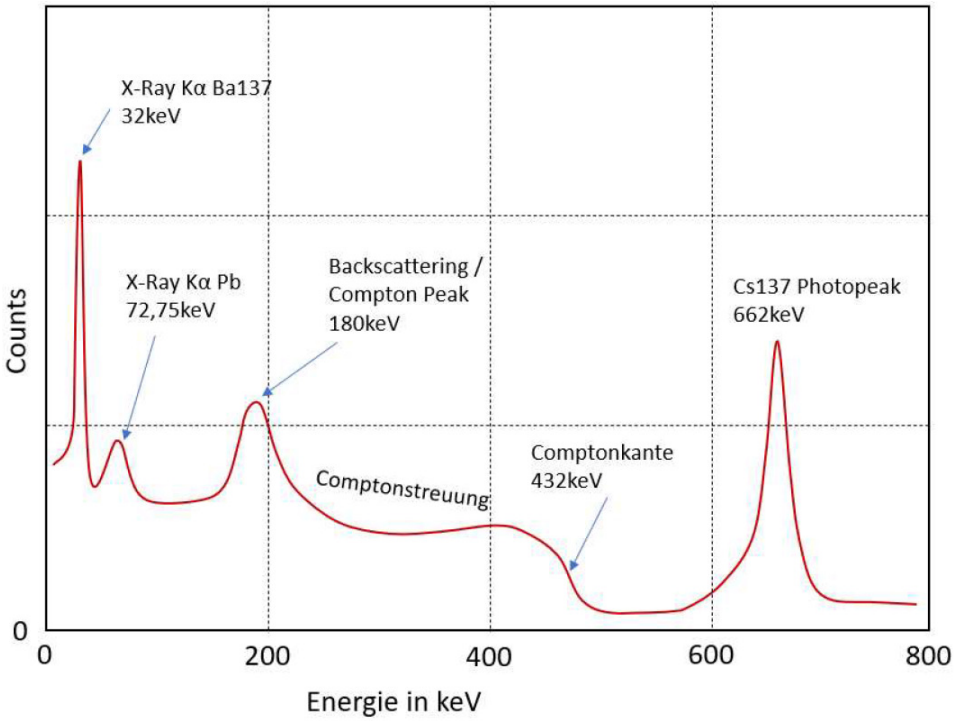


Abb. 9.19: γ-Spektrum von Cs-137 mit Compton-Plateau und Compton-Kante [**?**].

Energie der Protonen war allerdings mit 5.3 MeV erstaunlich hoch. Das scheint auf den ersten Blick nicht überraschend, wenn man daran denkt, dass Röntgenstrahlen über den Compton-Effekt Elektronen wegkicken können. Warum sollte ein solcher Prozess nicht auch bei Protonen ablaufen? Die dazu die notwendige Photonenenergie $E_i{=}h \cdot \nu_i$ lässt sich aus der Compton-Analyse berechnen. Das Proton wird dazu einem 180^o-Stoß beschleunigt. Die notwendige Energie stammt aus der Energiedifferenz ($\Delta E_{ij}{=}h \cdot \nu_i{-}h \cdot \nu_f$) von einfallenden und gestreutem Photon:

$$\begin{aligned} 2\,m_p \cdot c^2 \cdot (h \cdot \nu_i - h \cdot \nu_f) &= 2\,(h \cdot \nu_i) \cdot (h \cdot \nu_f) \cdot (1 - \cos\theta) \\ 2\,m_p \cdot c^2 \cdot (h \cdot \nu_i - h \cdot \nu_f) &= 4\,(h \cdot \nu_i) \cdot (h \cdot \nu_f) \\ 2\,m_p \cdot c^2 \cdot \Delta E_{ij} &= 2\,E_i \cdot (E_i - \Delta E_{ij}) \\ E_i &= \frac{1}{2}(\Delta E_{ij} + \sqrt{(\Delta E_{ij})^2 - 2\,m_p \cdot c^2 \cdot \Delta E_{ij}}) \end{aligned} \tag{9.24}$$

Setzt man ein ($m_p \cdot c^2{=}938\,\text{MeV}$, $\Delta E_{ph}{=}5.3\,\text{MeV}$), stellt man fest, dass man eine Photonenenergie von mehr als 53 MeV benötigt. Ein Mysterium, denn es war keine Reaktion bekannt, die mehr als einen Bruchteil der Energie an Strahlung lieferte. Wie sich herausstellte, lagen die Forscher mit der Vermutung einer Compton-Streuung falsch. Ursache war ein belang nicht entdecktes Teilchen: Das Neutron.

Ein Beispiel aus Detektortechnologie

Messgeräte bestimmen die Energie hochenergetischer Strahlung aus der durch das Photon deponierten Energie ($E_{ph} = h\nu_{ph}$). Verliert das Photon vor dem Nachweis im Detektor über den Compton-Effekt Energie, wird der Wert für die Photonenenergie E_i verfälscht. Die Energie des gestreuten Photons E_f ergibt sich mit

$$E_f = \frac{E_i}{1 + \frac{E_i}{m_e c^2}(1 - \cos\Theta_{ph})} \tag{9.25}$$

Die Winkelabhängigkeit des Prozesses führt im Spektrum der zugehörigen Elektronen zum Compton-Plateau. Die auf das Elektronen übertragene Energie ist abhängig vom Streuwinkel Θ des Photons. Allerdings zeigt sich eine klar definierte Grenzenergie E_{CK}. Für den maximalen Streuwinkel des Photons von $\Theta = 180^o$ ergibt sich für das gestreute Elektron die Compton-Kante (CK):

$$\begin{aligned} E_{CK} &= E_i - E_f \\ E_{CK} &= E_i \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2E_i}{m_e c^2}} \right) \\ E_{CK} &= \frac{2\,E_i^2}{m_e \cdot c^2 + 2\,E_i} \end{aligned} \tag{9.26}$$

Die Compton-Kante (Abb. 9.19) findet man im Energiespektrum der Elektron bei einer Energie, die um die Energie ΔE_{CK} gegenüber dem Photopeak verschoben ist:

$$\Delta E_{CK} = \frac{E_i}{1 + \frac{2 \cdot E_i}{m_e \cdot c^2}} \tag{9.27}$$

Bei der Compton-Streuung des Photon am Elektron nimmt man an, des es sich ein äußeres, schwach am Atom gebundenes Elektron handelt. Allerdings kann es auch zu einem Streuprozess kommen, bei der das Licht mit einem der inneren Elektronen wechselwirkt. Die Bindungsenergie kann so hoch sein, dass es nicht zur Ablösung des Elektrons kommt. in dem Fall nimmt das Atom als Ganzes den Impuls auf. Die Compton-Gleichung ändert sich dadurch nicht, ist ist aber notwendig, die Masse des Elektrons durch die Masse des Atoms zu ersetzen. Für eine Streuung an einem Kohlenstoffatom ist die Änderung um einen Faktor $2 \cdot 10^4$ geringer und daher praktisch NULL.

Ein Beispiel aus der Medizin

In der Medizin kommt der Compton-Effekt bei der Diagnostik von Osteoporose[26] zum Einsatz [**?**]. Der Wechselwirkungsquerschnitt für Compton-Streuung hängt von der

[26] *Lexikon:* Osteoporose bezeichnet eine verminderte Knochendichte, die das Risiko eines Knochenbruchs steigert.

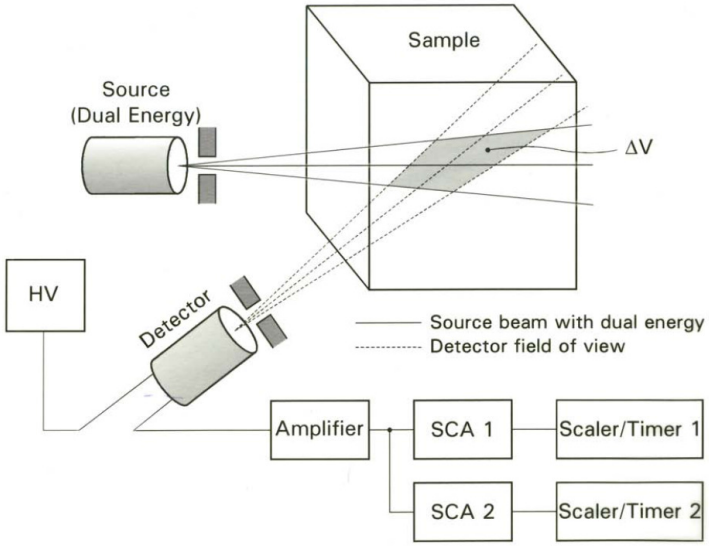


Abb. 9.20: Blockdiagramm für die Anwendung der Compton-Streuungstomographie in der Landwirtschaft. Für die Untersuchungen werden zwei radioaktive Quellen verwendet (60 keV, 662 keV) [**?**].

Dichte der Materie ab. Beim Weg der Röntgenstrahlung durch den Körper tastet die Strahlung das Gewebe ab [**?**]. Bei einer erkrankten Knochenstruktur werden weniger Compton-Ereignisse beobachtet. Dazu wird in einem Winkel zur einfallenden Strahlung die gestreute Strahlung detektiert. Allerdings benötigt man für die Analyse Vergleichswerte. Dazu wird der Röntgenstrahl auf unterschiedlichen Wegen durch das betrachtete Volumen geleitet, um beispielsweise die Absorption der Strahlung durch das Gewebe zu erfassen. Die zur Bestimmung der Knochendichte notwendigen Messungen sind oben dargestellt.

Ein Beispiel aus der Agrarökologie

Comptonstreuung kann verwendet werden, um tomographische Aufnahmen von Bodenproben zu erhalten. Dazu werden Röntgenquellen eingesetzt, die bei unterschiedlichen Wellenlängen arbeiten, siehe Abb. 9.20. Damit können, wie Abb. 9.21 demonstriert Parameter wie Dichte und Wassergehalt unabhängig voneinander bestimmt werden können. Die obere der beiden Abbildungen zeigt die Compton-Analyse einer Bodenprobe mit unterschiedlichen Schüttungsdichten. Das unten gezeigte Ergebnis liefert Erkenntnisse über Bodenproben mit unterschiedlichem Wassergehalt. Solche Untersuchungen erlauben eine ortsaufgelöste Messung (Tomographie)[27] der Bodenbeschaffenheit.

[27] *Lexikon:* Der Begriff **Tomographie** fasst bildgebende Verfahren zusammen, welche die innere räumliche Struktur eines Objektes ermitteln und beispielsweise in Form von Schnittbildern darstellen.

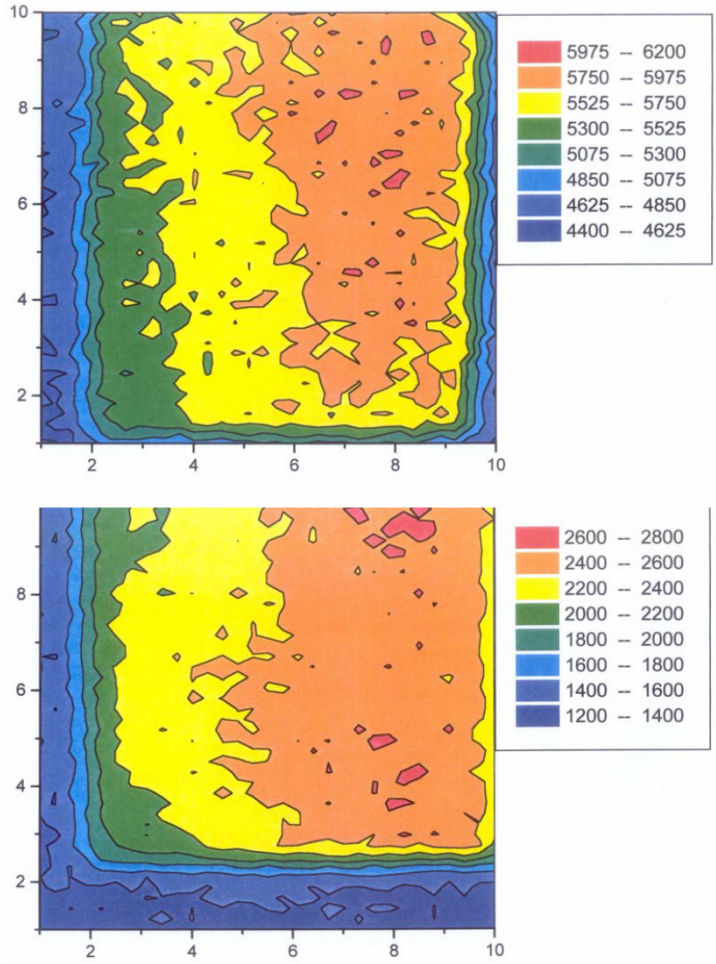


Abb. 9.21: (a) 662 keV Compton-Bild einer Bodenprobe mit unterschiedlichen Schüttdichten. (b) 60 keV Compton-Bild einer Bodenprobe mit unterschiedlichem Wassergehalt. Bodendichte und -feuchtigkeit können anhand der Farbskala abgelesen werden [**?**].

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
☐ geraten; ☐ unsicher; ☐ unentschieden; ☐ sicherlich richtig; ☐ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Zwei Lichtstrahlen treffen auf eine Oberfläche. Der erste Lichtstrahl enthält dreimal so viele Photonen wie der Zweite. Wie groß ist das Verhältnis der beiden zugehörigen elektrischen Felder?[28]

Aufgabe 1.2: X-rays are commenly scattered by atoms. Relative to their initial wavelengths, the wavelengths of the scattered X-rays is [29]

(a) longer

(b) shorter

(c) the same

(d) elastic, with loss of energy by the photon

(e) elastic, with gain of energy by the photon

(f) elastic, with no change of energy of the photon

(g) inelastic, with loss of energy by the photon

Aufgabe 1.3: Die durchschnittliche Strahlungsabgabe der Sonne (Masse $2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$) beträgt $3.8 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$. An seinem sonnennächsten Punkt beträgt der Abstand des Kometen Halley in etwa $9.0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$ von der Sonne.

(i) Berechnen Sie den Strahlungsdruck auf den Kometen unter der Annahme, dass die gesamte einfallende Strahlung reflektiert wird!

(ii) Vergleichen Sie die aus dem Strahlungsdruck resultierende Kraft auf ein 10 kg schweres Bruchstrück des Kometen (Fläche $A_0{=}4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$) mit der Gravitationskraft der Sonne!

(i) Die Strahlungsintensität I_{sun} und der Strahlungsdruck p_{sun} der Sonne auf Höhe der

[28] Antwort: Das Verhältnis der Feldstärken ergibt sich aus der Wurzel der Intensitätsverhältnisse, also $E_1/E_2 = \sqrt{3}$
[29] Antwort: A, D

Bahn des Kometen beträgt

$$\begin{aligned} I_{sun} &= \frac{P_{sun}}{A_0^{Halley}} \\ I_{sun} &= \frac{3.8 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{4\,\pi \cdot (9.0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m})^2} \\ I_{sun} &= 3.7 \cdot 10^{3}\,\mathrm{W/m^2} \\ p_{sun} &= \frac{2 \cdot I_{sun}}{c} \\ p_{sun} &= \frac{2 \cdot (3.7 \cdot 10^{3}\,\mathrm{W/m^2})}{3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}} \\ p_{sun} &= 2.49 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N/m^2} \end{aligned}$$

(ii) Daraus berechnet sich die Kraft F_{rad} auf das Bruchstück des Halley-Kometen mit

$$\begin{aligned} F_{rad} &= p_{sun} \cdot A_0 \\ F_{rad} &= (2.49 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N/m^2}) \cdot (4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m^2}) \\ F_{rad} &= 9.96 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich mit der Schwerkraft auf das Gesteinsstück ergibt sich, dass die Gravitationswirkung erheblich größer ist als der Strahlungsdruck:

$$\begin{aligned} F_G &= G_N \frac{M_{sun} \cdot m_{Stein}}{R^2} \\ F_G &= \left(6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\right) \frac{(2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}) \cdot (10\,\mathrm{kg})}{(9 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m})^2} \\ F_G &= 0.165\,\mathrm{N} \\ \frac{F_G}{F_{rad}} &= 1.65 \cdot 10^{5} \end{aligned}$$

Der durch den Strahlungsdruck verursachte Verringerung der effektiven Gravitationskraft führt zur Ablenkung des Kometentrümmers aus seiner Bahn.

Aufgabe 1.4: Die Intensität des Sonne in einer Entfernung von 1 AE[30] von der Sonne beträgt 1370 $\mathrm{W/m^2}$. Der LightSail Satellit (Masse m=5 kg) hat eine Segelfläche von A_0=32 $\mathrm{m^2}$. Berechnen Sie die Beschleunigung a_{sail} im Abstand von 1 AE!

[30] AE: Eine Astronomische Einheit sind 1 AE=149 597 870 700 m. Dies entspricht dem mittleren Abstand zwischen Erde und Sonne.

Aus dem Strahlungsdruck der Sonnen ergibt sich eine Beschleunigung a in Höhe von

$$\begin{aligned} F_{sun} &= p_{sun} \cdot A_0 \\ F_{sun} &= \frac{2\, I_{sun} \cdot A_0}{c} \\ F_{sun} &= \frac{2 \cdot (1370\,\mathrm{W/m^2}) \cdot (32\,\mathrm{m^2})}{2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} \\ F_{sun} &= 2.92 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N} \\ a_{sail} &= \frac{F_{sun}}{m} \\ a_{sail} &= \frac{2.92 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{kg}} \\ a_{sail} &= 5.85 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Nach einem Jahr Flug erreicht der Satellit eine Geschwindigkeit von 1843 m/s. Bewegt sich LightSail von der Sonne weg, reduzieren sich die Beschleunigungswerte.

Aufgabe 1.5: Welche beiden Teilchen wechselwirken beim Compton-Effekt?[31]

(a) Photon und Proton

(b) Photon und Elektron

(c) Proton und Elektron

(d) Neutron und Elektron

(e) Proton und Neutron

Aufgabe 1.6: Welches Erhaltungsatz steckt hinter der Technologie der Sonnensegel?[32]

(a) Ladungserhaltung

(b) Massenerhaltung

(c) Impulserhaltung

(d) Drehimpulserhaltung

Aufgabe 1.7: Warum war es für Compton vorteilhaft, mit Röntgenstrahlen an Elektronen zu streuen und nicht mit Mikrowellen?[33]

(a) Weil Röntgenstrahlen tiefer in Materie eindringen als Mikrowellen.

(b) Weil Röntgenstrahlen eine geringere Frequenz haben als Mikrowellen.

[31] Antwort: (b)
[32] Antwort: (c)
[33] Antwort: (c, d)

(c) Weil Röntgenstrahlen eine höhere Frequenz haben als Mikrowellen.

(d) Weil Röntgenstrahlen eine geringere Wellenlänge haben als Mikrowellen.

(e) Weil Röntgenstrahlen eine größere Wellenlänge haben als Mikrowellen.

Aufgabe 1.8: Welcher Spektralbereich liefert Photonen geringster Energie? [34]

(a) Infrarotlicht

(b) Ultraviolettes Licht

(c) Sichtbares Licht

(d) Radiowellen

(e) Röntgenlicht

Aufgabe 1.9: Das Compton-Streuexperiment zeigt folgende Merkmale:[35]

(a) Die gestreute Strahlung beinhaltet zwei Wellenlängen: Die ursprüngliche Wellenlänge λ_i und eine andere Wellenlänge λ_f!

(b) λ_f ist stets größer als λ_i!

(c) λ_f hängt vom Beobachtungswinkel ab!

(d) λ_f hängt nicht vom verwendeten Material ab!

(e) λ_f folgt der Winkelabhängigkeit, gegeben durch Gleichung 9.12!

Aufgabe 1.10: Find the momentum of each photon in a beam of violet light, λ=4000 Å.[36]

[34] Antwort: (d)
[35] Antwort: Alle Antworten sind richtig!
[36] Answer: $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg·m/s

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Arten elektromagnetischer Wellen kennen Sie?
2. Hat ein UV-Photon oder ein IR-Photon einen größeren Impuls?
3. Beeinflusst die Änderung der Intensität eines monochromatischen Lichtstrahls den Impuls der einzelnen Photonen im Strahl?
4. Untermauert der Impuls des Photons das Wellenmodell des Lichts?
5. Warum merken wir nichts vom Impuls des Sonnenlichts, wenn wir am Strand sind?
6. Zeigen Sie, dass $\hbar \cdot c = 197\,\mathrm{eV \cdot nm}$ ist!
7. Warum ist der Compton-Effekt so wichtig für das Verständnis elektromagnetischer Strahlung?
8. Welche Modellvorstellung von Licht verwendet man, um den Compton-Effekt zu beschreiben?
9. Welche Art von Strahlung wird in den Experimenten zum Compton-Effekt verwendet?
10. Ist die Frequenzverschiebung des Photons in der Compton-Streuung unabhängig von der Frequenz des einfallenden Photons?
11. Welchen Wert hat die Compton-Wellenlänge?
12. Welche Compton-Wellenlänge ergibt sich für das Myon im Vergleich zur Compton-Wellenlänge des Elektrons?
13. Welche Erhaltungssätze spielen bei der Compton-Streuung eine Rolle?
14. Tritt der Compton-Effekt auch bei sichtbarem Licht auf? Wenn ja, wird es nachweisbar sein?
15. Kann der Compton-Effekt in einem Experiment mit Radiowellen beobachtet werden?
16. Die Compton-Streuformel besagt, dass Objekte, aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet, Streulicht mit unterschiedlichen Wellenlängen zeigen. Warum beobachten wir im Alltag keine Änderung der Farbe von Objekten, wenn man den Betrachtungswinkel ändern?
17. Kann man im Compton-Experiment gestreute Röntgenstrahlen beobachten, die eine kürzere Wellenlänge haben als das einfallende Röntgenlicht?
18. Bei welchem Streuwinkel ist die Wellenlängenverschiebung beim Compton-Effekt gleich der Compton-Wellenlänge?

19. Bei der Beschreibung der Compton-Streuung wurden die Elektronen als freie Teilchen behandelt. Tatsächlich sind die Elektronen an Atome gebunden. Muss man das kritisch sehen?

20. Wie erklären Sie sich, dass im Compton-Experiment eine unverschobene Wellenlänge beobachtet wird?

21. Macht es etwas aus, dass sich die Elektronen bei der Compton-Streuung bewegen?

22. Beeinflusst die Intensität von monochromatischen Licht den Impuls der einzelnen Photonen im Strahl? Ändert sich der Gesamtimpuls?

23. Strahlung transportiert Energie und damit Impuls. Kennen Sie Beispiele!

24. Ist Licht eine Welle oder handelt es sich tatsächlich um Teilchen genannt Photonen?

25. Je kürzer die Wellenlänge des Photons, desto mehr verhält es sich wie ein Teilchen! Warum?

26. Welche Auswirkungen auf ihr Fernsehvergnügen hätte es, wenn der Compton-Effekt auch bei Radiowellen signifikant beitragen würde?

27. Röntgenstrahlung wechselwirkt mit Materie durch Streuung an Elektronen und Kernen. Basierend auf der Erhaltung von Impuls und Energie, erklären Sie, warum Elektronen dazu neigen, mehr Energie aufzunehmen als Kerne.

28. In welcher Weise illustriert die Relativitätstheorie die Wellennatur des Lichts?

9.2 Doppelspalt



Yes! That is the way electrons go . . . It is all quite mysterious.

Richared Feyman

If a light wave can behave as a particle, is it possible for a particle to behave as a wave?[37]

Das vorherige Kapitel behandelte den Teilchencharakter von Licht am Beispiel des Compton-Effekts. Wie sich zeigte, hat Licht sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften. Diese Eigenschaft zeigt sich auch bei der Beugung am Spalt. Man kann diesen Versuch mit einzelnen Photonen durchführen und erhält, wenn man über die Signale

[37] Diese Vermutung hat Louis DeBroglie in seiner Doktorarbeit formuliert. In seiner Rede zur Verleihung des Nobelpreises sagt er: On the one hand the quantum theory of light cannot be considered satisfactory since it defines the energy of a light corpuscle by the equation $E = h \cdot f$ containing the frequency f. Now a purely corpuscular theory contains nothing that enables us to define a frequency; for this reason alone, therefore, we are compelled, in the case of light, to introduce the idea of a corpuscle and that of periodicity simultaneously. On the other hand, determination of the stable motion of electrons in the atom introduces integers, and up to this point the only phenomena involving integers in physics were those of interference and of normal modes of vibration. This fact suggested to me the idea that electrons too could not be considered simply as corpuscles, but that periodicity must be assigned to them also.

vieler Lichtquanten integriert das aus der Optik erwartete Interferenzmuster.[38] Allerdings stellt man fest, dass sich die Auftreffposition nicht vorhersagen lässt. Die einzige Aussage, die man treffen kann, ist, dass es Bereiche gibt, wo man die Wahrscheinlichkeit P erhöht ist, dass Photonen auftreffen. Die Wahrscheinlichkeit P, dass bei N_{tot} Photonen eines der Lichtquanten im Bereich $x \pm \Delta x$ landet, ist:

$$P(x \pm \Delta x) = \lim_{N_{tot} \to \infty} \frac{N(x \pm \Delta x)}{N_{tot}} \tag{9.28}$$

- Interferenzminima beim Einfachspalt (Breite b) ergeben sich bei Winkeln Θ unter der Bedingung: $b \cdot \sin\Theta = m \cdot \lambda$, wobei m=± 1, $\pm 2, \ldots$.

- Interferenzminima beim Doppelspalt (Abstand der Spalte d) ergeben sich bei Winkeln Θ unter der Bedingung: $d \cdot \sin\Theta = n \cdot \lambda$, wobei n=0, ± 1, $\pm 2, \ldots$.

Wie sieht es aber mit Materie aus?

- Gilt für Materie, wie beispielsweise das Elektron oder einen Virus, auch der Welle-Teilchen Dualismus?

- Dass jeder Körper Teilcheneigenschaften aufweist, ist unzweifelhaft. Wie aber steht es um den Wellencharakter von Materie?

Dazu wird das Doppelspalt-Experiment von Thomas Young betrachtet, mit dem 1802 der Wellencharakter von Licht zweifelsfrei nachgewiesen wurde. Damit ist dieses Experiment ein idealer Kandidat, um die Welleneigenschaften von Materie zu überprüfen. Als historische Notiz sei noch vermerkt, dass die Erkenntnis über den dualen Charakter von Materie eng verknüpft ist mit der Familie Thomson. Sowohl J.J. Thomson[39] als auch sein Sohn G.P. Thomson[40] wurden für ihre Forschung mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet.

The quantum relation, energy = $h \cdot$ frequency, leads one to associate a periodical phenomenon with any isolated portion of matter or energy. An observer bound to the portion of matter will associate with it a frequency determined by its internal energy, namely, by its *mass at rest*. An observer for whom a portion of matter is in steady motion with velocity c, will see this frequency lower in consequence of the Lorentz-Einstein time transformation. I have been able to show (Comptes rendus, September 10 and 24, of the Paris Academy of Sciences) that the fixed observer will constantly see the internal periodical phenomenon in phase with a wave the frequency of which $\nu = (m_0 \cdot c^2)/(h \cdot \sqrt{1-\beta^2})$ is

[38] *Lexikon:* Wellen interferieren miteinander! **Interferenz** ist also ein untrüglicher Hinweis auf den Wellencharakter. Da Licht Interferenzphänomene zeigt, muss Licht eine Welle sein. Man unterscheidet zwischen zwei wichtigen Interferenzmustern. Diese ergeben sich aus der Beugung am Einfach- und am Doppelspalt.

[39] The Nobel Prize in Physics 1906 was awarded to Joseph John Thomson *in recognition of the great merits of his theoretical and experimental investigations on the conduction of electricity by gases.*

[40] siehe Fußnote 14

determined by the quantum relation using the whole energy of the moving body – provided it is assumed that the wave spreads with the velocity c/β. This wave, the velocity of which is greater than c, cannot carry energy [**?**].

Louis DeBroglie (1923)[41]

[41] Die Erkenntnis keimt auf in deBroglie



Das Experiment kann mit Leichtigkeit wiederholt werden, wo immer die Sonne scheint

Thomas Young zu Mitgliedern der Royal Society in London, 1803

Die New York Times hat eine Hitliste der schönsten Physikexperimente erstellt. Auswahlkriterien waren, ob die Versuche bahnbrechend waren und ob der Aufbau einfach gestaltet war. Darunter sind viele Versuche, die man schon aus der klassischen Mechanik kennt, wie die Aufspaltung von Sonnenlicht mit einem Prisma durch Newton. Dieses Experiment markiert den Beginn der Optischen Spektroskopie. Das Foucaultsche Pendel ist ein Beispiel für das Konzept Bezugssystem (Kapitel *Beobachter*) und Galileis Fallexperimente haben wir im Kapitel *Allgemeine Relativitätstheorie* kritisch hinterfragt. Der Youngsche Doppelspaltversuch ist auch dabei (Platz 5). Was geschieht, wenn man die Intensität der Lichtquelle auf ein Minimum reduziert? Abb. 9.22 zeigt das Ergebnis eines Experiments, indem die Intensität eines Laserpointer so weit herabgesetzt wurde, dass man den Einschlag einzelner Photonen auf einer hochempfindlichen Kamera beobachten kann. Ein klarer Hinweis auf den Welle-Teilchen Charakter von Licht! Aber das Doppelspaltexperiment an Elektronen steht, nicht ohne Grund, auf Platz 1 der Liste [**?**].[42] Auf den Millikan Versuch und das Rutherford Experiment werden wir zu einem späteren

[42] Before this class about *The ten most beautiful experiments* physics to me was a clear-cut, mathematical science. This class, above anything else, taught me that physics is a thought process, an ever-changing evolution of ideas, opinions, and facts. I've learned that I'm the type of person who is afraid of being wrong. I don't do things that I won't succeed at, and I hate not being the best. This class has

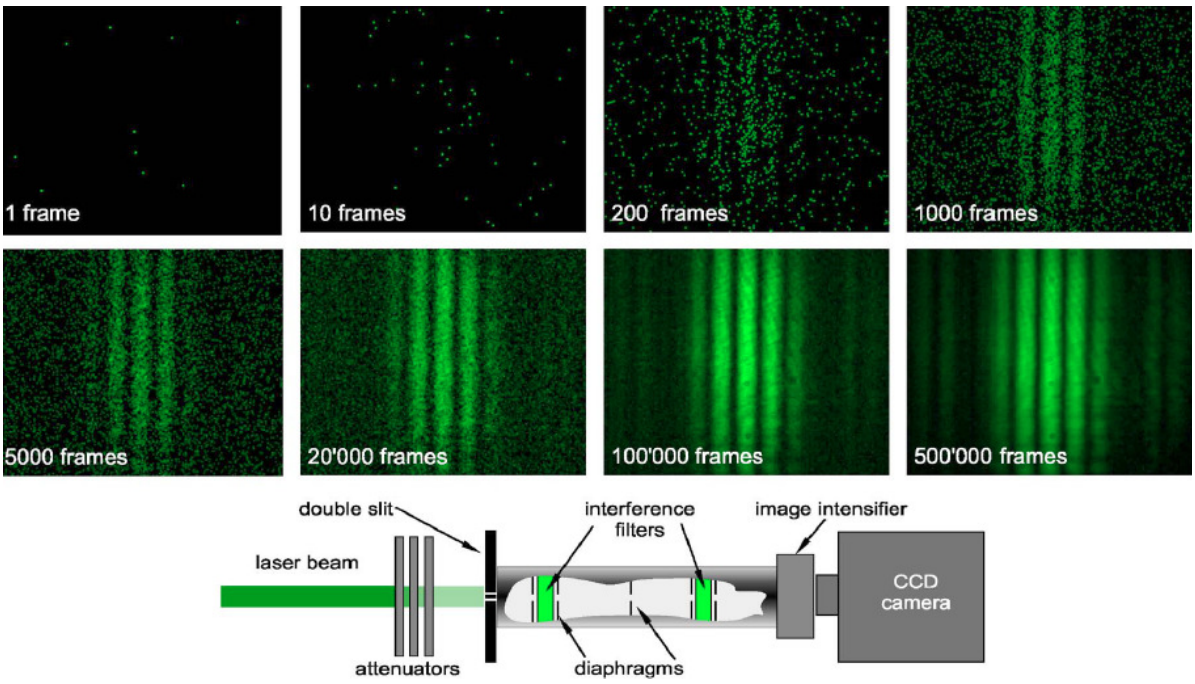


Abb. 9.22: Von Teilchen zu Wellen: Detektion von Licht, das von einem Doppelspalt auf einer Photon-für-Photon-Basis gebeugt wird, mit einer Single-Photon-Imaging-CCD-Kamera. Obwohl Einzelbilder eine scheinbar zufällige Verteilung von Auftreffpunkten der Photonen zeigen, offenbart ihre Integration das klassische Streifenmuster [**?**].

Zeitpunkt eingehen (Kapitel *Der Weg zum Atom*).

New York Times Sept. 24, 2002
Here They Are, Science's 10 Most Beautiful Experiments by George Johnson

Whether they are blasting apart subatomic particles in accelerators, sequencing the genome or analyzing the wobble of a distant star, the experiments that grab the world's attention often cost millions of dollars to execute and produce torrents of data to be processed over months by supercomputers. Some research groups have grown to the size of small companies.. . .
What they have in common is that they epitomize the elusive quality scientists call beauty. This is beauty in the classical sense: the logical simplicity of the apparatus, like the logical simplicity of the analysis, seems as inevitable and pure as the lines of a Greek monument. Confusion and ambiguity are momentarily swept aside, and something new

modified my thinking because it has taught me it's OK to be wrong (I mean really, really wrong, like Aristotle and falling objects wrong!). I've learned that the one who actually got the answer right was really just as important as the one(s) who got it wrong. In other words, science (and I believe the society as a whole) needs the wrong ideas before the people with the good ideas speak up [**?**].

about nature becomes clear.. . .
Newton wasn't always right. Through various arguments, he had moved the scientific mainstream toward the conviction that light consists exclusively of particles rather than waves. In 1803, Thomas Young, an English physician and physicist, put the idea to a test. He cut a hole in a window shutter, covered it with a thick piece of paper punctured with a tiny pinhole and used a mirror to divert the thin beam that came shining through. Then he took "a slip of a card, about one-thirtieth of an inch in breadth" and held it edgewise in the path of the beam, dividing it in two. The result was a shadow of alternating light and dark bands - a phenomenon that could be explained if the two beams were interacting like waves.. . .
Neither Newton nor Young was quite right about the nature of light. Though it is not simply made of particles, neither can it be described purely as a wave. In the first five years of the 20th century, Max Planck and then Albert Einstein showed, respectively, that light is emitted and absorbed in packets – called photons. But other experiments continued to verify that light is also wavelike.
It took quantum theory, developed over the next few decades, to reconcile how both ideas could be true: photons and other subatomic particles –electrons, protons, and so forth - exhibit two complementary qualities; they are, as one physicist put it, wavicles. To explain the idea, to others and themselves, physicists often used a thought experiment, in which Young's double-slit demonstration is repeated with a beam of electrons instead of light. Obeying the laws of quantum mechanics, the stream of particles would split in two, and the smaller streams would interfere with each other, leaving the same kind of light- and dark-striped pattern as was cast by light. Particles would act like waves.. . .
According to an accompanying article in Physics Today, by the magazine's editor, Peter Rodgers, it wasn't until 1961 that someone (Claus Jönsson of Tübingen) carried out the experiment in the real world. By that time no one was really surprised by the outcome, and the report, like most, was absorbed anonymously into science.

Teilchen und Wellen haben bestimmte Eigenschaften bezüglich Ausbreitung und Energietransport, die zunächst nicht vereinbar scheinen. Teilchen stoßen miteinander und man kann die Dynamik anhand der Impulserhaltung auswerten. Wellen breiten sich aus und durchdringen einander. Wie kann man testen, ob Teilchen einen Wellencharakter aufweisen? Man führt ein Experiment der Wellenoptik mit Teilchen durch, um die Welleneigenschaften eindeutig zu belegen.

Link to video `Interference of Photons 1959`

Youngsches Doppelspaltexperiment

The debate over whether light is a wave or a particle goes back many centuries. In the 17th century, Isaac Newton believed light was composed of a stream of corpuscles. At that time, a few scientists, most notably Dutch physicist and astronomer Christiaan Huygens, thought light was a wave vibrating in some sort of ether. There was evidence for both pictures. For instance, sound, known then to be a wave, can travel through crooked

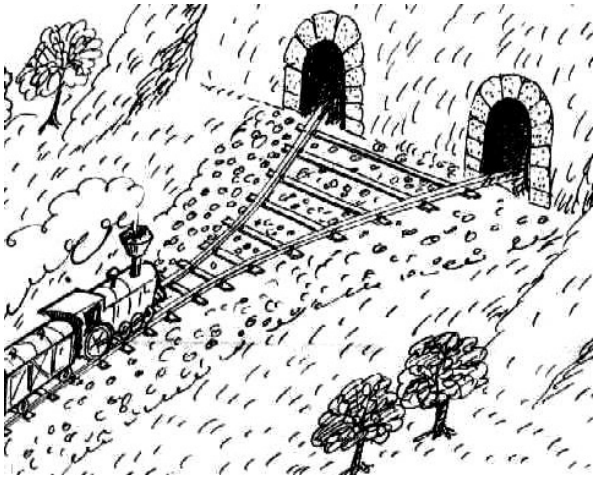


Abb. 9.23: Ein Cartoon zum Youngschen Doppelspaltexperiment.

pipes and around corners, while light cannot, and this fact was taken as evidence for the corpuscular theory of light. But phenomena such as refraction were difficult to explain with the corpuscular theory. Newton had to invoke an inexplicable force that changed the velocity of light in water. Newton was also intrigued and puzzled by colored fringes in soap films, but stuck to the corpuscular theory despite its difficulties. Newton was so greatly revered as a scientist that it was nearly impossible for anyone to dispute his theory. In May of 1801, while pondering some of Newton's experiments, Young came up with the basic idea for the now-famous double-slit experiment to demonstrate the interference of light waves. The demonstration would provide solid evidence that light was a wave, not a particle.

APS[43] News 2008

Ein charakteristisches Merkmal von Wellen sind Interferenzphänomene, die aus dem Superpositionsprinzip resultieren. Im Youngschen Doppelspalt-Experiment zeigt sich klar der Wellencharakter von Licht. Abb. 9.23 illustriert das Experiment anhand eines Cartoons. Das Phänomen Interferenz wird allerdings erst deutlich sichtbar, wenn die Eigenschaften der Lichtquelle und die Geometrie des Doppelspalts bestimmte Bedingungen erfüllen. Für Wellenlänge, sowie Breite und Abstand der Spalte, müssen vergleichbare Werte gewählt werden. Sichtbares Licht gibt aufgrund seiner Wellenlänge von etwa $1\,\mu$m die Abmessungen des Doppelspalts vor. Das Muster, das man nach dem Durchgang beobachtet, lässt sich nicht mit der Annahme von Lichtteilchen vereinbaren. Die Newtonsche Idee von Lichtkorpuskeln wurde mit diesem Experiment klar widerlegt!

Double-slit time diffraction at optical frequencies [?]: Double-slit experiments - where a wave is transmitted through a thin double aperture in space - have confirmed the wave - particle duality of quantum objects, such as single photons, electrons, neutrons, atoms and large molecules. Yet, the temporal counterpart of Young's double-slit experiment - a wave interacting with a double temporal modulation of an interface - remains

[43] APS: *American Physical Society*

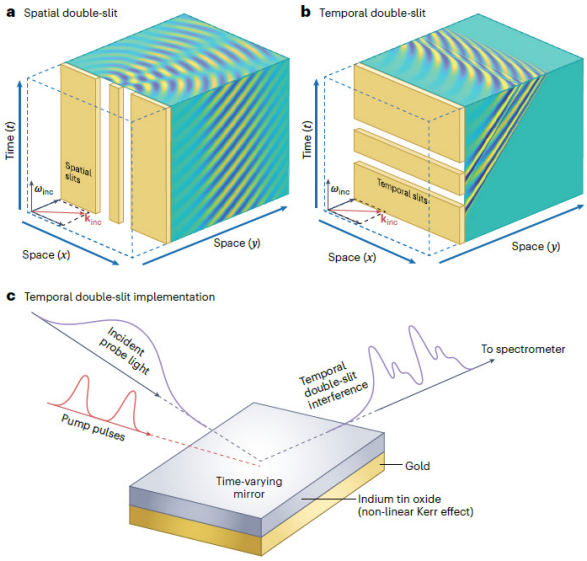


Abb. 9.24: Räumliche und zeitliche Beugung am Doppelspalt. Schematische Darstellung der Spaltgeometrie und der Raum-Zeit-Entwicklung einer Lichtwelle an einem Doppelspalt mit räumlichen (a) und zeitlichen Spalten (b). (c) Experimentelle Realisierung des temporalen Doppelspalts mit einem zeitlich sich verändernden Spiegel. Das Reflexionsvermögen des Spiegels wird mithilfe von Laserpulsen für kurze Zeiten moduliert [**?**].

elusive. Here we report such a time-domain version of the classic Young's double-slit experiment: a beam of light twice gated in time produces an interference in the frequency spectrum, see Fig. 9.24. The time slits, narrow enough to produce diffraction at optical frequencies, are generated from the optical excitation of a thin film of indium tin oxide near its epsilon–near-zero point. The separation between time slits determines the period of oscillations in the frequency spectrum, whereas the decay of fringe visibility in frequency reveals the shape of the time slits. Surprisingly, many more oscillations are visible than expected from existing theory, implying a rise time that approaches an optical cycle. This result enables the further exploration of time-varying physics, towards the spectral synthesis of waves and applications such as signal processing and neuromorphic computation.

So, Nat'ralists observe, a Flea
Hath smaller Fleas that on him prey,
And these have smaller yet to bite 'em,
And so proceed ad infinitum:
Thus ev'ry Poet, in his Kind
Is bit by him that comes behind

Jonathan Swift, *On Poetry: A Rapsody*, 1733

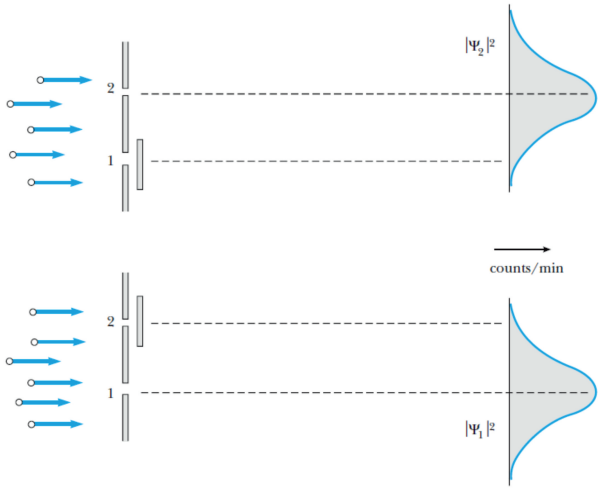


Abb. 9.25: Die Wahrscheinlichkeit, bei geschlossenem unteren oder oberen Spalt Elektronen auf dem Schirm zu finden [**?**].

Für den geplanten Versuch benötigt man reale Körper. Man wählt Elektronen mit der Masse $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg. Die Experimente von Thomson belegen, dass Elektronen Teichen sind. Sie können durch elektrische und magnetische Felder beschleunigt werden und man kann aus den Resultaten der Experimente eine Masse -genauer folgendes Verhältnis bestimmen.

Ladung-zu-Masse Verhältnis Elektron: $e/\,m_e = -1.76 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C/\,kg}$

Man führt nun mit Elektronen das Youngsche Experiment durch. Was erwarten Sie? Den Elektronen, die durch den Doppelspalt fliegen, bieten sich zwei mögliche Wege. Das Teilchen nimmt entweder den oberen oder den unteren Spalt und wird hinter dem Doppelspalt von einem Teilchendetektor nachgewiesen. Dieser bestimmt auch den Auftreffort. Jeder Einschlag eines Teilchens auf dem Detektorschirm erzeugt einen kleinen Lichtpunkt.

In einem Vorexperiment wird jeweils einer der beiden Spalte abgedeckt und die Zählrate (Teilchen pro Sekunde) auf dem Detektor bestimmt, siehe Abb. 9.25. Man beobachtet, dass eine bestimmte Anzahl an Elektronen ankommt. Die Bedingungen werden so eingestellt, dass die Zählraten in etwa gleich sind. Das Experiment liefert ein erstes Resultat. Teilchen durchqueren die Anordnung und Teilchen werden am Detektor nachgewiesen.

Frage: Was würde man klassisch erwarten, wenn man beide Spalte öffnet?

Antwort: Ein Ergebnis wie bei Torwandschießen im ZDF Sportstudio.

Link to video **ZDF-Torwand: Günter Netzer trifft fünfmal**

Die Elektronen fliegen durch einen der beiden Spalte und direkt hinter den Spalten beobachtet man die meisten Einschläge. Auf dem Detektorschirm erkennt man schließlich

zwei helle Streifen.

Doch wie reagieren mikroskopische Teilchen?

DeBroglie Beziehung

After long reflection in solitude and meditation, I suddenly had the idea that the discovery made by Einstein in 1905 should be generalized by extending it to all material particles and notably to electrons.

Louis deBroglie (1923)

Wie kann man die Welleneigenschaften von Materie motivieren? Dazu greift man zurück auf die Überlegungen im Kapitel *Einsteingleichung*. Hier wurde dem masselosen Lichtteilchen ein Impuls $E = p \cdot c$ zugeordnet. Weiter berücksichtigt man die Plancksche Hypothese $E = h \cdot \nu = h \cdot c/\lambda$. DeBroglie hat dazu eine einfache Überlegung angestellt

$$E_{particle} = p \cdot c = \frac{h \cdot c}{\lambda} = E_{wave} \tag{9.29}$$

und dadurch einen Ausdruck gefunden, der *jedem* Teilchen ein bestimmte Wellenlänge λ_{dB}, die deBroglie Wellenlänge, zuordnet.[44] [45]

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} \tag{9.30}$$

Beim Photon hat die Amplitude eine physikalische Bedeutung: Das elektrische und magnetische Feld am betrachteten Ort. Für deBroglie Wellen ist nur die Intensität, d.h. das Quadrat der Amplitude eine physikalisch relevante Größe. Für den Fall relativistischer Geschwindigkeiten ersetzt man m durch die relativistische Masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{9.31}$$

Alternativ kann man sich folgendes überlegen: Wir gehen aus von der Energie-Impulsbeziehung eines freien nicht-relativistischen Teilchens ($v \ll c$) aus:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{9.32}$$

$$p = \sqrt{2\, m \cdot E_{kin}} \tag{9.33}$$

[44] The Nobel Prize in Physics 1929 was awarded to Prince Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie *for his discovery of the wave nature of electrons.*

[45] The first UNESCO Kalinga Prize for the Popularization of Science was awarded to Louis deBroglie in 1952

wobei $E{=}\hbar \cdot \omega$ und $p{=}\hbar \cdot k$, und k die Wellenvektor ist. Man verwendet die Dispersionsrelation[46] für die Ausbreitung von Wellen

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2, \tag{9.34}$$

um die Phasen und Gruppengeschwindigkeit der deBroglie Materiewelle zu berechnen (s.a. Abschnitt *Wellenpaket*).

$$v_{phase} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar \cdot \omega}{2\,m} = \frac{p}{2\,m} = \frac{v}{2} \tag{9.35}$$

$$v_{group} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar \cdot k}{m} = \frac{p}{m} = v \tag{9.36}$$

Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass die Gruppengeschwindigkeit mit der Teilchengeschwindigkeit übereinstimmt. Die Gruppengeschwindigkeit ist tatsächlich die für die Ausbreitung von Materiewellen relevante Geschwindigkeit! Aus diesen Überlegungen ergibt sich für die deBroglie Wellenlänge λ_{dB} mit

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\,m \cdot E_{kin}}} = \frac{hc}{\sqrt{2\,m \cdot c^2 \cdot E_{kin}}} \tag{9.37}$$

Man erkennt an Gl. 9.30, dass ein geringer Impuls eine große deBroglie Wellenlänge hervorruft. Dies ist notwendig, um im Doppelspalt-Experiment eine ausreichende räumliche Auflösung zu gewährleisten. Das Partikel muss leicht sein und sich mit geringer Geschwindigkeit bewegen. Ideale Kandidaten für solche Experimente sind deshalb Elektronen. Die Erkenntnis, dass mikroskopische Teilchen den Charakter von Materiewellen haben, hat Auswirkungen auf die physikalische Beschreibung von Materie. Eine wichtige Konsequenz aus den Welleneigenschaften der Materie ist, dass die Werte von wichtigen physikalischen Größen wie Energie und Drehimpuls quantisiert sein müssen. Auch die mögliche Genauigkeit bei der exakten Bestimmung der Position eines Teilchens wird durch dieses Konzept in Frage gestellt: Welche Konsequenzen ergeben sich zusätzlich aus diesem revolutionären Konzept?

- Materiewellen sind keine dreidimensionalen Wellen im Sinne einer akustischen Welle, sondern so genannte Wahrscheinlichkeitswellen.
- Die Quantenphysik macht Aussagen über Wahrscheinlichkeiten, Teilchen an unterschiedlichen Orten mit unterschiedlichen Eigenschaften zu finden.
- Der Wellencharakter der Materie erlaubt allgemein in Bezug auf physikalische Messwerte nur Vorhersagen über Wahrscheinlichkeiten.
- Die Bahnkurve des Elektrons im Bohrschen Wasserstoffmodell verliert ihren Sinn, da Teilchen nicht mehr exakt lokalisierbar sind.

[46] *Lexikon:* Die **Dispersionsrelation** beschreibt den Zusammenhang zwischen physikalischen Größen, wie **Wellenzahl**, **Brechungsindex**, **Ausbreitungsgeschwindigkeit**, Impuls und der Dynamik eines Prozesses, beschrieben über Frequenz oder Energie.

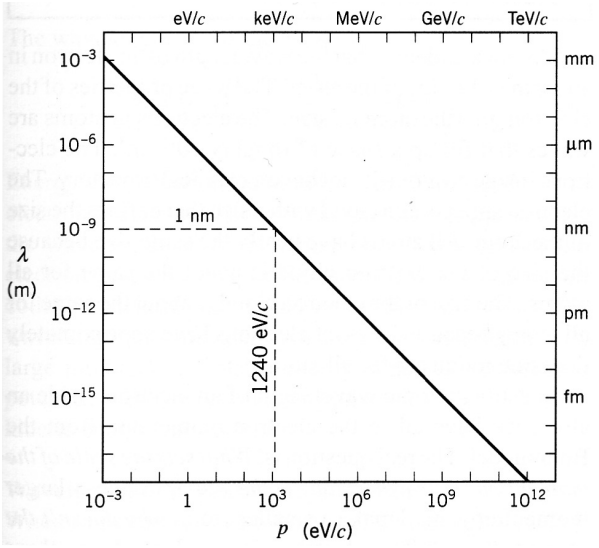


Abb. 9.26: DeBroglie-Wellenlänge eines Teilchens als Funktion des Impulses [**?**].

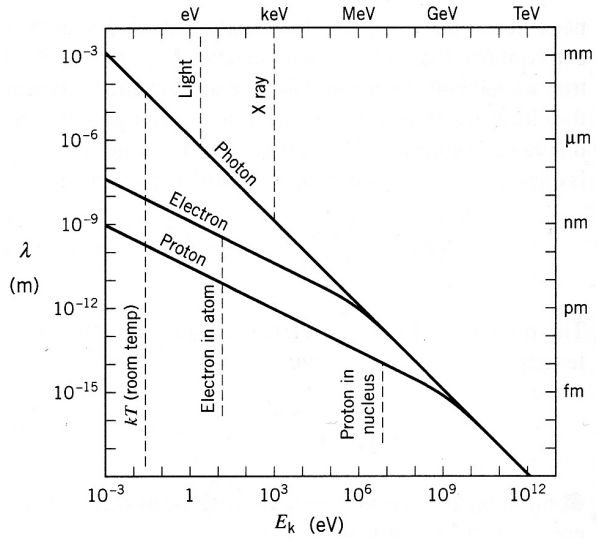


Abb. 9.27: DeBroglie-Wellenlänge von Teilchen als Funktion der Energie [**?**].

- Eine Analyse des Bohrschen Wasserstoffatoms auf der Grundlage des deBroglie Konzepts ergibt, dass physikalische Größen wie Energie, und Drehimpuls quantisiert sind.

Abb. 9.26 stellt den Impuls, Abb. 9.27 die Kinetische Energie der deBroglie-Wellenlänge gegenüber. Für einen Impuls von 1240 eV/c ergibt sich eine deBroglie-Wellenlänge von 1 nm. Tabelle 9.2 zeigt, dass man die deBroglie Wellenlänge von Elektron und Proton durch die kinetische Energie der Teilchen in einem weiten Bereich einstellen kann. Aufgrund der größeren Masse der Protonen ergibt sich bei gleicher E_{kin} eine größere deBroglie Wellenlänge (H: Wasserstoff; C: Kohlenstoff).

$$\lambda^e_{dB} > \lambda^p_{dB} > \lambda^H_{dB} > \lambda^C_{dB} > \dots$$

Das eröffnet vielfältige wissenschaftlich-technologische Möglichkeiten.

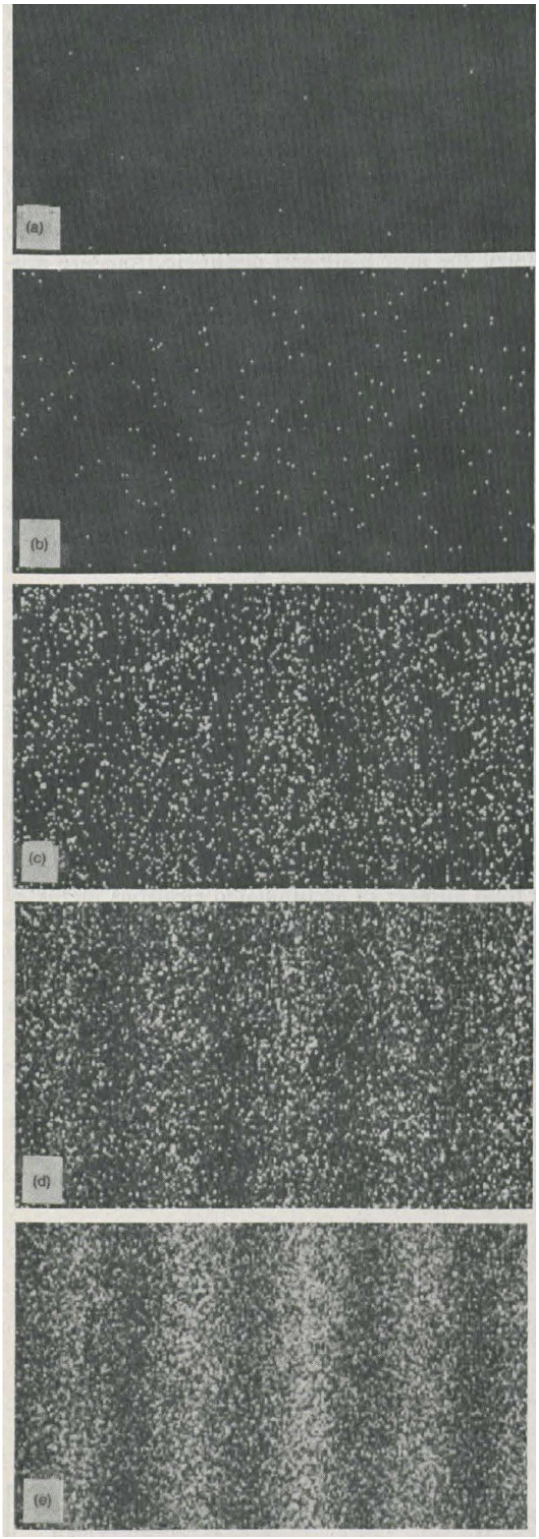


Abb. 9.28: Ausbildung eines Elektronen-Interferenzmusters. Die Anzahl der detektierten Elektronen ist (a) 10 (b) 100 (c) 1000 (d) 20 000 und (e) 70 000 [**?**].

E_{kin} [eV]	v_e/c	$\lambda_d B$ [nm]	v_p/c	$\lambda_d B$ [nm]
10^{-1}	$6.3 \cdot 10^{-4}$	3.9	$1.4 \cdot 10^{-5}$	9.1
10^{0}	$2.0 \cdot 10^{-3}$	1.2	$4.6 \cdot 10^{-5}$	2.9
10^{1}	$6.3 \cdot 10^{-3}$	0.39	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.91
10^{2}	$2.0 \cdot 10^{-2}$	0.12	$4.6 \cdot 10^{-4}$	0.29
10^{3}	$6.3 \cdot 10^{-2}$	0.04	$1.4 \cdot 10^{-3}$	0.09
10^{4}	0.19	0.012	$4.6 \cdot 10^{-3}$	0.029
10^{5}	0.55	0.004	$1.4 \cdot 10^{-2}$	0.009

Tab. 9.2: Berechnete deBroglie Wellenlängen von Elektronen und Protonen bei unterschiedlichen kinetischen Energien der Teilchen (v_e, v_p).

Doppelspaltexperiment mit Elektronen

Welche experimentellen Voraussetzungen sind notwendig, um die Wellennatur der Elektronen zweifelfrei nachzuweisen? Dazu überlegen wir, wie man ein Youngsches Doppelspaltexperiment mit Elektronen realisiert könnte. Anhand der Gleichungen aus der Optik (Kapitel *Wellennatur des Lichts*) kann man für eine gewählte Wellenlänge die typischen Merkmale für das Interferenzmuster ermitteln. Konstruktive Interferenz ergibt sich für einen Winkel Θ_n, wenn gilt:

$$\sin \Theta_n = n \cdot \frac{\lambda}{d} \tag{9.38}$$

wobei n eine ganze Zahl und d der Abstand der beiden Spalte ist. Im hier besprochenen Experiment ist $d = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Es ist schwierig langsame Elektronen mit einer deBroglie-Wellenlänge von $1\,\mu\mathrm{m}$ ($1.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV}$), also in der Größenordnung der Abmessungen der Doppelspalts, zu handhaben. Man verwendet deshalb energiereiche Elektronen. Allerdings reduziert sich dadurch λ_{dB} auf $\lambda = 1.12 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$ und die Effekte sind nur mit einem hochauflösenden Mikroskop zu erkennen. Für das erste Interferenzmaximum ergibt sich ein Winkel von $\Theta_1 = (3.2 \cdot 10^{-4})^o$. Das erste dieser Experiment wurde von Jönsson [**?**] mit 50 keV Elektronen (Doppelspaltabstand $2\,\mu\mathrm{m}$, -breite $0.5\,\mu\mathrm{m}$) durchgeführt. Die Abb. 9.28 zeigt das Ergebnis des Experiments eines späteren Studie, die mit einer verbesserten Elektronik erfolgte [**?**]. Von oben nach unten wird die Belichtungszeit erhöht, siehe auch [**?**]. Welche Phänomene beobachtet man?

1. Der Detektor weist den Einschlag einzelner Teilchen auf. Massive Teilchen haben den Doppelspalt durchquert.

2. Nach einer gewissen Zeit baut sich aus den Einzelereignissen eine bestimmte Struktur auf.

3. Es ergibt sich, wie im Doppelspaltexperiment mit Licht, ein Interferenzmuster auf dem Detektorschirm, wobei das Intensitätsmaximum in der Mitte zwischen den beiden Spalten erscheint. Tatsächlich kann man das Experiment so durchführen, dass die Elektronen in großen zeitlichen Abständen ankommen. Am Ergebnis des Experiments ändert sich nichts. Ähnliche Erfahrungen hat man übrigens auch

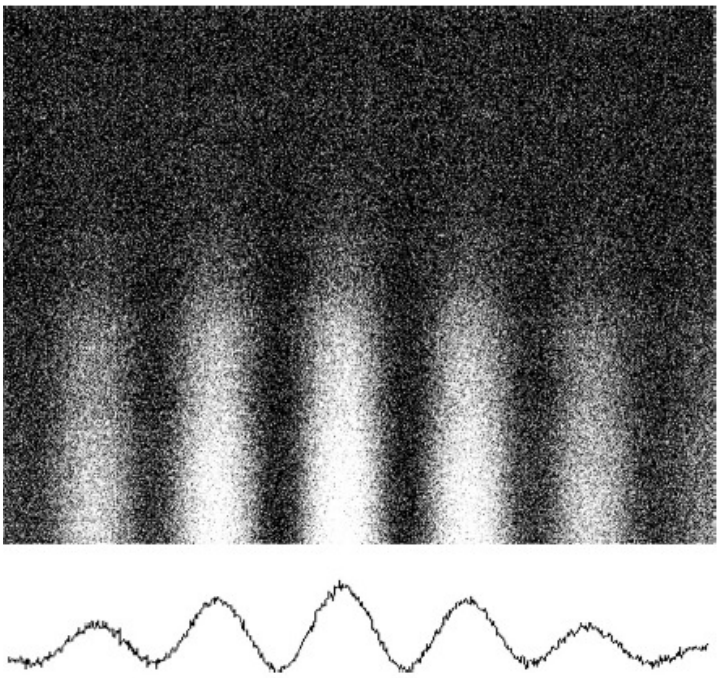


Abb. 9.29: Doppelspaltinterferenz mit einer Niederdruck-Natriumlampe unter Einzelphotonenbedingungen. Die Dynamik umfasst 0-500 Ereignisse [**?**].

beim Doppelspaltexperiment mit äußerst schwachem Licht gemacht, wie Abb. 9.29 zeigt [**?**].

4. Das Ergebnis, siehe Abb. 9.31, widerspricht der Erwartung, dass massive Teilchen den Doppelspalt passiert haben. In diesem Fall würde man man zwei helle Streifen erwarten. Aber wie kann das sein? Nach der klassischen Physik kann das Teilchen doch nicht beide Spalte gleichzeitig durchquert haben. Wo sollte in dem Fall die Ladung des Elektrons lokalisiert sein? Man hat bislang noch nie ein halbes Elektron beobachtet, denn für Elektronen gilt das Prinzip der Unteilbarkeit!

Offensichtlich wurde der Versuch mit massiven Teilchen durchgeführt, denn der Detektor weist einzelne Einschläge nach. Trotzdem ergibt sich ein Resultat, dass man nur unter der Annahme erklären kann, dass Wellen den Doppelspalt durchquert haben. Dieses Experiment offenbart den dualen Charakter von Materie: Welle und Teilchen. Abb. 9.30 stellt den Sachverhalt am Doppelspalt nochmal dar: Wellenfronten, ausgehend von den beiden Schlitzen erreichen den Detektor[47] und die Superposition der einzelnen Amplituden ($I \propto A^2$) erzeugen ein Muster aufgrund konstruktiver Interferenz. Genau diese aus der Optik erwartete Struktur beobachtet man im Experiment mit Elektronen. Ergänzend sei bemerkt, dass inzwischen auch Messungen mit einzelnen Elektronen durchgeführt wurden, die den Welle-Teilchen Charakter der Materie noch weiter untermauern [**? ? ?**].

[47] *Anmerkung:* Ein Lichtdetektor registriert das Quadrat der Amplitude A einer Lichtwelle, also die Intensität I

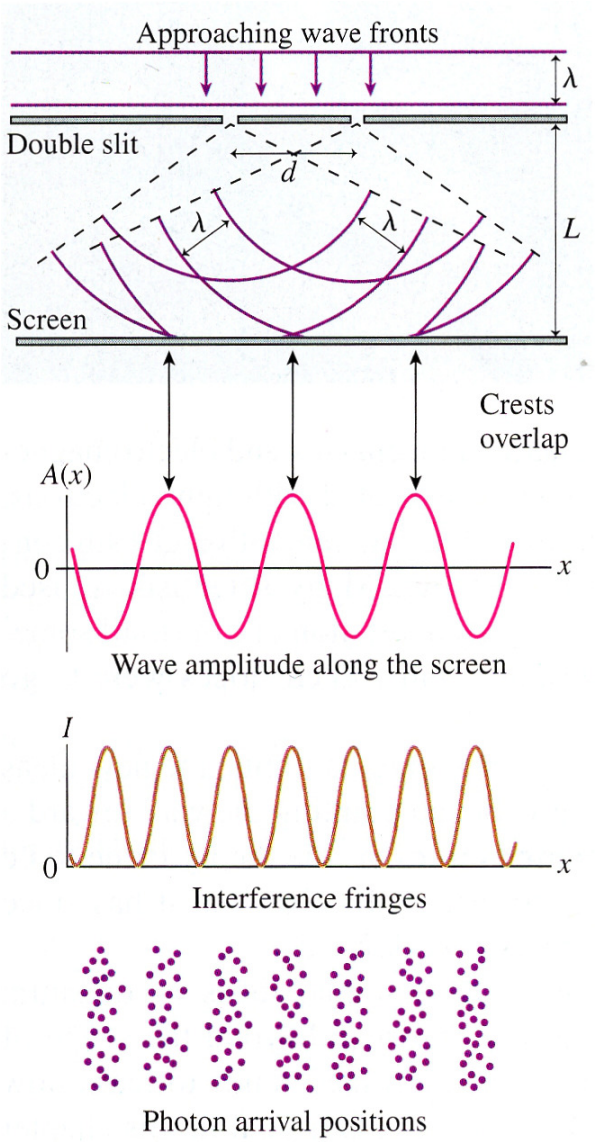


Abb. 9.30: Welle-Teilchen Dualismus am Beispiel des Doppelspalt-Experiments mit Licht [**?**].

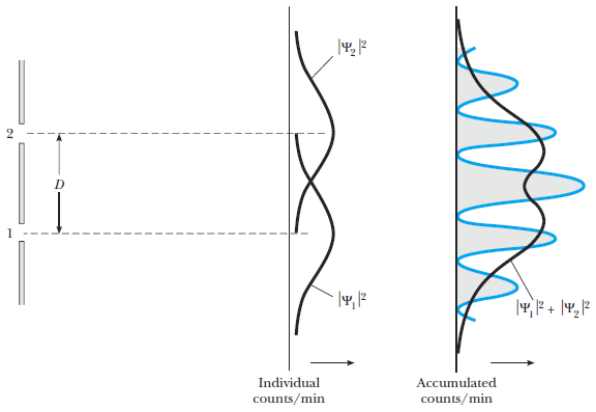


Abb. 9.31: Doppelspaltexperiment mit Elektronen (rote Linie). Zum Vergleich das Resultat (schwarze Linie), bei dem jeder Spalt die Hälfte der Zeit geschlossen ist [**?**].

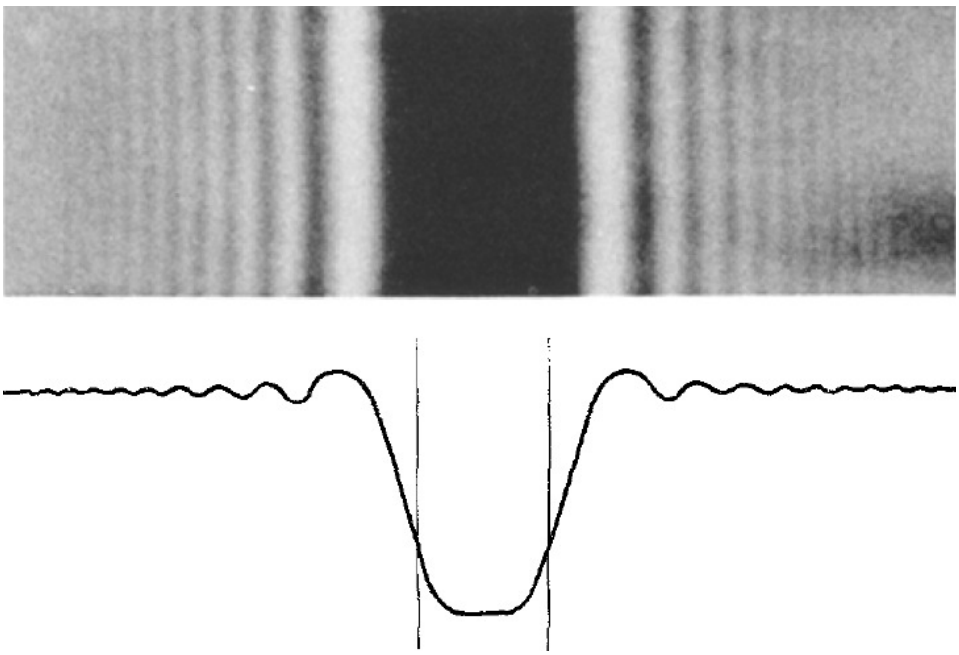


Abb. 9.32: Schattenwurf eines 2 μm Fadens bestrahlt mit Elektronenwellen [**?**].

Anwendungen[4LP]

Ein Beispiel aus der Elektronenoptik

Der Wellencharakter zeigt sich nicht nur für das Elektron, sondern ist ein Merkmal jeglicher Materie. Auch andere Phänomene der Wellenoptik, wie die Beugung an Objekten, werden in Experimenten mit Teilchen beobachtet. Beispielsweise die Beugung von Elektronenwellen an einem dünnen Metallfaden, siehe Abb. 9.32. Das Experiment von Möllenstedt und Dücker [**?**] nutzt die Fokussierung von Elektronenstrahlen durch einen elektrisch aufgeladenen Faden, um in beeindruckender Weise den Übergang von Beugung zu Interferenz zu demonstrieren. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 9.33 skizziert. In ihrem Versuchsaufbau verwendeten die Forscher ein Metallfaden, an dem sie eine Spannung von 10 V anlegten. Durch den besonderen Aufbau aus elektrooptischen Komponenten, wirkte der Faden als Doppelspalt für den feinen, 50 nm durchmessenden 19 keV Elektronenstrahl. Das Ergebnis:

Elektronen interferieren so, als wären sie Photonen.

Ein Beispiel aus der Kernphysik

Abb. 9.34 zeigt das Ergebnis eines Streuung von 800 MeV Protonen an Bleikernen ^{208}Pb [**?**]. Die deBroglie-Wellenlänge berechnet man, da sich das Proton ziemlich schnell bewegt, aus der relativistischen Energie-Impulsbeziehung (Kapitel *Einsteingleichung*). Man findet $p{\cdot}c$=1463 MeV und bestimmt daraus eine deBroglie-Wellenlänge von λ_{dB}=0.85·

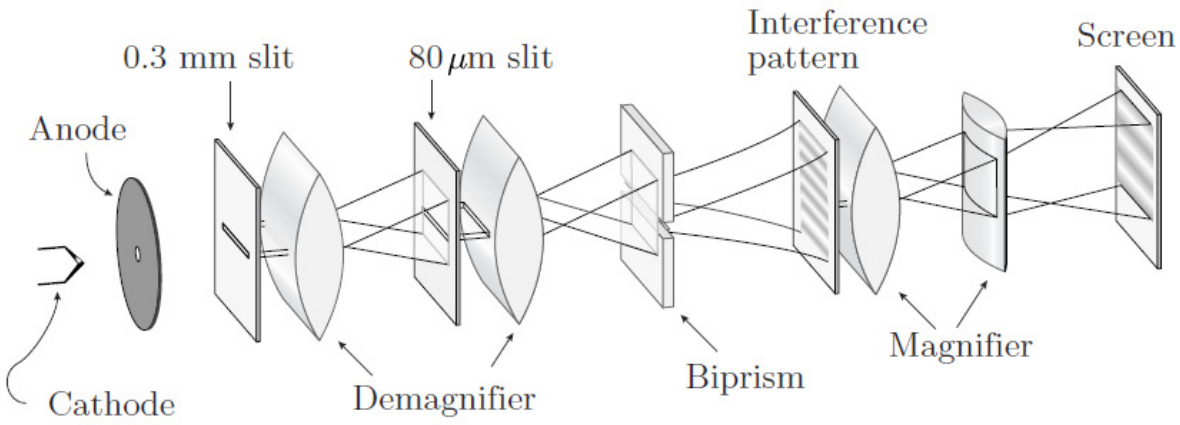


Abb. 9.33: Versuchsaufbau zum Nachweis von Interferenz bei der Beugung eines Elektronenstrahls an einem Metallfaden [**?**]

10^{-15} m. Das Experiment ist im Optischen analog zu Fraunhofer-Beugung (Kap. *Optik*). Die zugehörigen Minima tauchen bei

$$\Delta\Theta = \lambda/a \tag{9.39}$$

auf, wobei a der Durchmesser der Kreisscheibe ist. In diesem Fall entspricht das dem Kerndurchmesser. Die Minima haben einen mittleren Abstand von 3.5^o oder $6.1{\cdot}10^{-2}$ rad. Eingesetzt ergibt das:

$$R = \frac{\lambda}{2 \cdot (\Delta\lambda_{dB})} = 6.9\,\text{fm} \tag{9.40}$$

Den Radius R eines Kerns berechnet man mit

$$R = R_0 \cdot N^{1/3} \tag{9.41}$$

wobei R_0 eine Konstante ist und N die Anzahl der Nukleonen.
Zusammen ergibt sich

$$R_0 = \frac{R}{N^{1/3}} = \frac{6.9\,\text{fm}}{(208)^{1/3}} = 1.2\,\text{fm} \tag{9.42}$$

in guter Übereinstimmung mit anderen Verfahren. Babinets Prinzip sagt aus, dass man Streuung an einer Scheibe und Streuung an einem Loch ununterscheidbar sind. Allerdings kommt ein Faktor 1.22 hinzu (Rayleigh Kriterium). Das erste Minimum sollte danach bei einem Winkel von

$$\Delta\Theta = 1.22\,\frac{\lambda}{a} \tag{9.43}$$

auftauchen. Multipliziert man $\Delta\Theta$ mit 1.22 ergibt sich 4.5^o in guter Übereinstimmung mit dem Winkel des ersten Minimums.

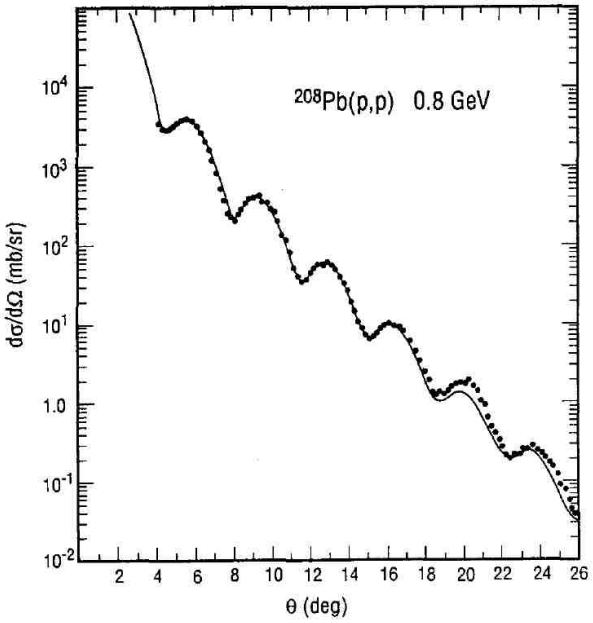


Abb. 9.34: Winkelverteilung bei der elastischen Streuung von 800 MeV Protonen an ^{208}Pb [**?**].

Ein Beispiel aus der Molekülphysik

Die folgende Messung [**?**] kann man als mikroskopisches Doppelspaltexperiment ansehen: Man betrachtet die photoinduzierte Dissoziation von Kalzium-Molekülen (Ca_2). Angeregt durch ein Photon zerfällt das Molekül in ein nicht angeregtes (Ca) und ein angeregtes Atom (Ca^*). Die Überschussenergie wird nach einer für das Molekül charakteristischen Zeitspanne durch die Abstrahlung eines Photons abgegeben. Es kann aber nicht aufgelöst werden, aus welchem der beiden Atome die Emission erfolgt. Da sich die Moleküle allerdings voneinander entfernen und sich, im Bezug auf den Photodetektor, in unterschiedliche Richtungen bewegen, unterliegt Emission und Nachweis dem Dopplereffekt (Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*). Die detektierten Wellenlänge sind also leicht unterschiedlich und es ergibt sich ein Schwebungsmuster in der Aufzeichnung der exponentiellen Zerfallskurve für die Emission, siehe Abb. 9.35 Der Vergleich des Experiments (oben) mit der quantenphysikalischen Rechnung (unten) bringt zutage, dass beide Atome am Prozess der Lichtabstrahlung teilnehmen, obwohl definitiv nur eines der beiden Atome angeregt war. Man kann die Methodik noch erweitern und versuchen mit einzelnen Photonen Holographie zu betreiben. Es klappt [**?**]!

Direct observation of Young's double-slit interferences in vibrationally resolved photoionization of diatomic molecules [**?**]**:** Vibrationally resolved valence-shell photoionization spectra of H_2, N_2 and CO have been measured in the photon energy range 20-300 eV using third-generation synchrotron radiation. Young's double-slit interferences lead to oscillations in the corresponding vibrational ratios, showing that the molecules behave as two-center electron-wave emitters and that the associated interferences leave their trace in the angle-integrated photoionization cross section, see Fig. 9.37.

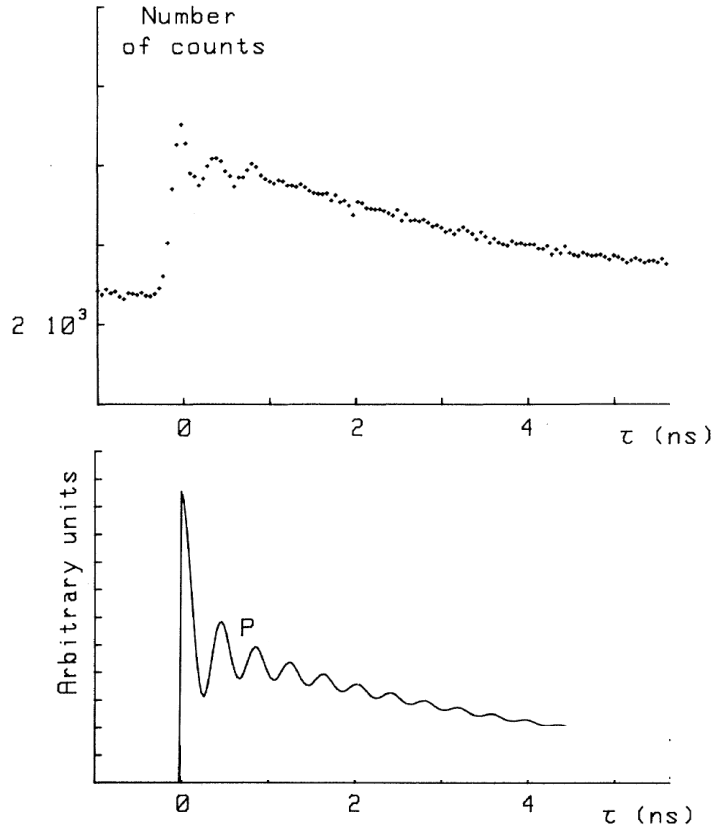


Abb. 9.35: Theoretische Wahrscheinlichkeiten P des Nachweises eines Fluoreszenz-Photons mit einer Verzögerung τ, nach Mittlung über alle Molekülorientierungen. Die atomare Lebensdauer beträgt 4.7 ns und die Rückstoßgeschwindigkeit wird mit v=500 m/s angenommen. Der Interferenzeffekt tritt auf als Modulation von $P_{||}(r)$, und eine Erhöhung von $P_{\perp}(r)$ bei τ=0, wobei $P_{||}(r)$ und $P_{\perp}(r)$ mit Hilfe eines Polarisators analysiert werden [**?**].

Ein Beispiel aus der Atomphysik

Das Michelson Interferometer haben wir schon in Kapitel *Äther* als hochauflösendes Instrumente kennengelernt. Eine weitere interessante Anwendung im Zusammenhang mit dem Konzepts des Welle-Teilchen Dualismus einer Materiewelle ist das Atomstrahl-Interferometer, siehe Abb. 9.36. Ein Laserstrahl der Wellenlänge λ erzeugt an voneinander getrennten Orten eine stehende Welle. Die Knoten der Welle haben den Abstand $\lambda/2$. Das Licht überträgt geringe Kräfte auf die Atome, die diese Bereiche durchqueren. Entlang des Lichtweges ändert sich zwischen den Knoten und Antiknoten periodisch die Intensität des Lichts. Ein Atom-Teilchen spürt deshalb eine periodische Kraft, während eine Atom-Welle ein Beugung erfährt. Letzteres bedeutet, das ein Atom, das in (A) ge-

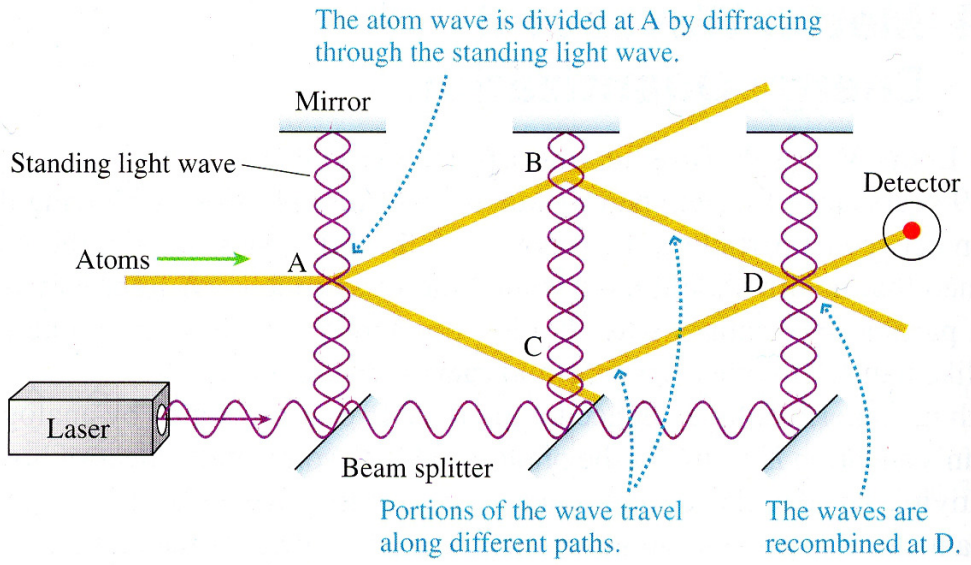


Abb. 9.36: Aufbau eines Atomstrahl-Interferometers [**?**].

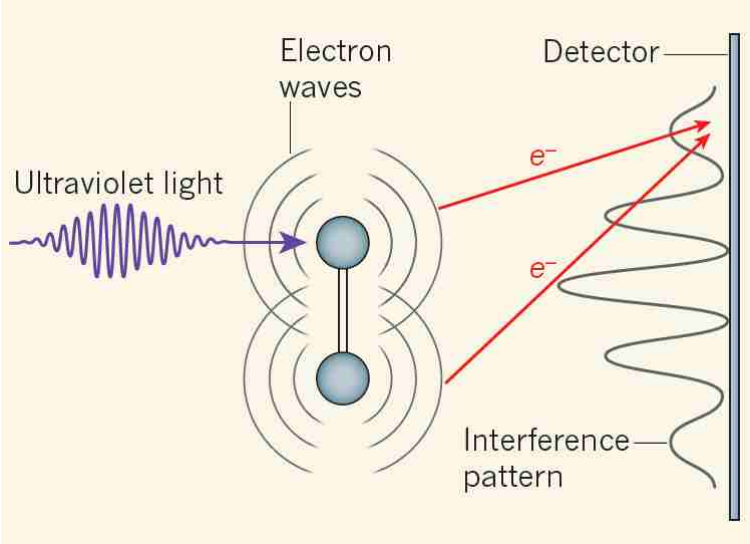


Abb. 9.37: Bestrahlt mit ultraviolettem Licht geben zweiatomige Moleküle Elektronen ab und erzeugen Elektronwellen.Dieser Prozess wird Photoemission genannt. Die Wellen werden von beiden Atomen emittiert und können dabei phasengleich oder genau phasenverschoben zueinander sein. Als Result entsteht am Detektor ein Interferenzmuster [**?**].

beugt wird sowohl Punkt (B) als auch Punkt (C) durchquert. In Punkt (D) überlagern die Wellen wieder und werden durch Beugung wieder vereinigt. Je nach Phasenlage kann sich damit unter bestimmten Bedingungen eine vollständig konstruktive oder vollständig destruktive Interferenz ergeben. Beeinflusst man mit Hilfe von Feldern einen der Wege kann man die Interferenzmuster aktiv beeinflussen. Atom-Interferometer stellen unsere Vorstellung von Licht und Materie auf den Kopf. Optiker untersuchen die Beugung von Licht an einer periodischen Struktur aus Materie, nämlich einem Beugungsgitter. Mit dem Atomstrahl-Interferometer untersucht man die Beugung von Materie an einer periodischen Struktur aus Licht.

Atom Wave Interferometry with Diffraction Gratings of Light [?]**:** We have developed a novel interferometer for atom de Broglie waves, where amplitude division and recombination is achieved by diffraction at standing light waves operating as phase gratings. Our new atom interferometer is the exact mirror image of interferometers for light, with the roles of atoms and photons interchanged, and it directly demonstrates coherence of the diffraction of atomic waves at standing light waves. Easy manipulation of the phase, intensity, and polarization of the standing light wave permits novel studies of atomic coherence properties.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: A few thousands photons are fired one at a time from a monochromatic light source at a pair of closed spaced slits. The target area has three photo detectors (A, B, C). Detektors A and C are in line of sight of the source and slits, with B midways between. Which of the following can be stated with certainty or near-certainty?[48]

(a) All photons will reach A and C

(b) Lots of photons will reach A and C

(c) None will reach A and C

(d) All photons will reach B

(e) Lots of photons will reach B

(f) None will reach B

(g) None of the above

Aufgabe 2.2: Das Ergebnis eines Experiments mit einzelnen Photonen ist in Abb. 9.38 dargestellt. Die Punkte zeigen, wo die einzelnen Lichtquanten eingeschlagen sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, ein Photon in den Bereichen A bis D zu detektieren? Ordnen sie die Bereiche nach der Wahrscheinlichkeit, dass hier Ereignisse auftreten.[49]

(a) A>B>C>D

(b) A>B=D>C

(c) A=B>C=D

Aufgabe 2.3: Die Abb. 9.39 zeigt drei deBroglie Wellen, die zu Teilchen gleicher Masse gehören. Ordnen Sie nach Geschwindigkeiten![50]

(a) $v_a > v_b > v_c$

(b) $v_b > v_c > v_a$

(c) $v_a = v_b > v_c$

(d) $v_b > v_a > v_c$

(e) $v_c > v_a > v_b$

[48] Antwort (e)
[49] Antwort: (b)
[50] Antwort: (c)

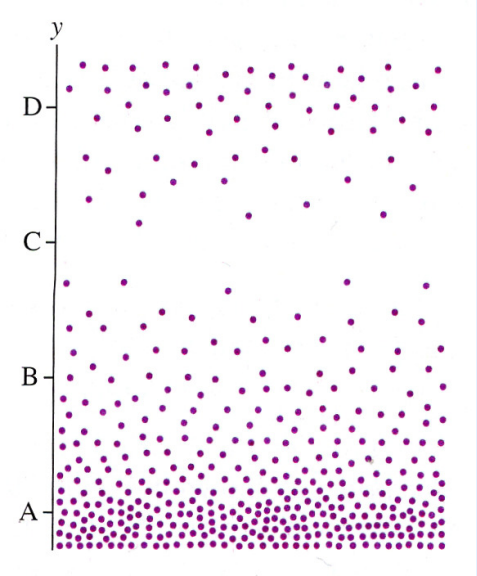


Abb. 9.38:

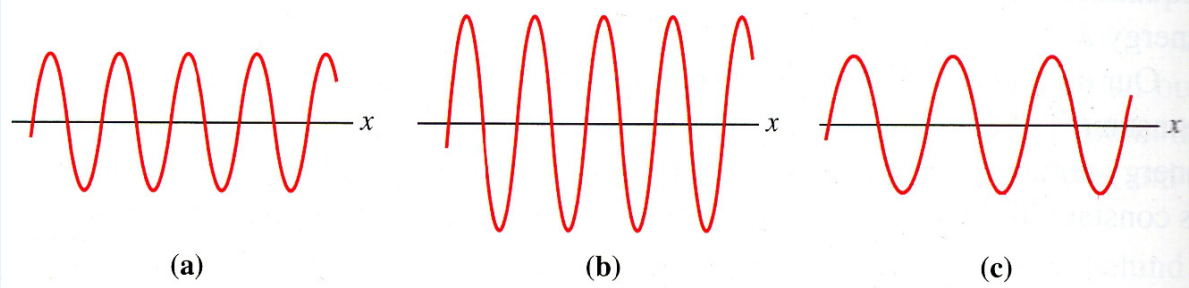


Abb. 9.39:

Aufgabe 2.4: Welche Geschwindigkeit muss ein Elektron haben, damit die Wellenlänge der zugehörigen Materiewelle die von sichtbarem Licht hat?

Sichtbares Licht hat Wellenlänge zwischen 400 und 700 nm. Wir wählen 550 nm (grünes Licht) als mittleren Wert.

$$v = \frac{h}{m_e\,\lambda_e} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot s}{9.1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 550 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 1318\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Man müsste also die Elektronen auf 4 745 km/ h abbremsen. Typische Geschwindigkeiten, wie sie zum Beispiel in Fernsehröhren verwendet werden, sind 10 000 km/ h.

Aufgabe 2.5: Bestimmen Sie die deBroglie Wellenlänge von Elektronen mit kinetischen Energien von E_{kin}=10 eV und 10 keV!

Da die kinetischen Energien deutlich geringer sind als die Ruheenergie des Elektrons von 511 keV kann man nicht-relativistisch rechnen. Für die Berechnung lohnt es sich, diesen Wert $h \cdot c$=1240 eV·nm (1240 keV·pm, 1240 MeV·fm) zu kennen. Warum? Ein fm

ist beispielsweise ist in etwa die Größe des Atomkerns und MeV sind typische Bindungsenergien im Kern.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{p^2}{2\,m_e} \\ p &= \sqrt{2\,m_2 \cdot E_{kin}} \\ \lambda &= \frac{h}{p} \\ \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2\,m_e \cdot E_{kin}}} \\ \lambda &= \frac{h \cdot c}{\sqrt{2\,m_e \cdot c^2 \cdot E_{kin}}} \\ \lambda &= \frac{h \cdot c}{\sqrt{2\,m_e \cdot c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_{kin}}} \end{aligned}$$

Für 10 eV und 10k eV Elektronen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{\sqrt{2\,(0.511 \cdot 10^{6}\,\mathrm{eV})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10\,\mathrm{eV}}} \\ \lambda &= 0.388 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \\ \lambda &= \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{\sqrt{2\,(0.511 \cdot 10^{6}\,\mathrm{eV})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 10^{4}\,\mathrm{eV}}} \\ \lambda &= 0.012 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.6: Die Geschwindigkeit eines Protons beträgt v_p. Kann die deBroglie-Wellenlänge eines Elektrons mit der eines Protons übereinstimmen?[51]

(a) Ja, ein langsameres Elektron ($v_e < v_p$) kann den gleichen Impuls und damit die gleiche Wellenlänge haben, wie ein Proton.

(b) Nein, ein schnelleres Elektron ($v_e > v_p$) kann nicht den gleichen Impuls und damit die gleiche Wellenlänge haben, wie ein Proton.

(c) Nein, ein langsameres Elektron ($v_e < v_p$) kann nicht den gleichen Impuls und damit auch nicht die gleiche Wellenlänge haben, wie ein Proton.

(d) Ja, ein schnelleres Elektron (($v_e < v_p$)) kann den gleichen Impuls und damit die gleiche Wellenlänge haben, wie ein Proton.

Aufgabe 2.7: Große Körper können sich mit hoher Geschwindigkeit bewegen. Warum ist es schwierig, ihre wellenartige Natur zu sehen? [52]

(a) Ihre Wellenlänge entspricht der Größe des Körpers.

[51] Antwort: (c), (d)
[52] Antwort: (b)

(b) Ihre Wellenlänge ist extrem klein im Vergleich zur Größe des Körpers.

(c) Ihre Wellenlänge ist extrem groß im Vergleich zur Größe des Körpers.

(d) Ihre Frequenz ist extrem klein im Vergleich zur Größe des Körpers.

Aufgabe 2.8: Ein Teilchen zeigt am ehesten Welleneigenschaften, wenn[53]

(a) seine Masse hoch und seine Geschwindigkeit gering ist.

(b) seine Masse gering und seine Geschwindigkeit hoch ist.

(c) seine Masse gering und seine Geschwindigkeit gering ist.

(d) seine Masse hoch und seine Geschwindigkeit hoch ist.

Aufgabe 2.9: Welche Begriffe wie Frequenz, Amplitude und Periode verbindet man mit dem Konzept Welle-Teilchen-Dualismus?[54]

(a) Weder das Teilchen- noch das Wellenmodell des Lichts.

(b) Sowohl das Teilchen- als auch das Wellenmodell des Lichts.

(c) Das Teilchenmodell des Lichts.

(d) Das Wellenmodell des Lichts.

Aufgabe 2.10: Wie schnell muss sich eine Person mit einer Masse von 80 kg durch eine 0.5 m breite Tür bewegen, um das Phänomen der Beugung festzustellen?

Beugung in der Optik tritt auf, wenn die Wellenlänge des Lichts vergleichbar ist zur Breite des Spalts. Analog berechnen wir die deBroglie-Wellenlänge der Person und bestimmen die notwendige Geschwindigkeit.

$$\begin{aligned} p &= m \cdot v = \frac{h}{\lambda} \\ v &= \frac{h}{\lambda \cdot m} \\ v &= \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{(0,5\,\mathrm{m}) \cdot (80\,\mathrm{kg})} \\ v &= 1.7 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.11: Welche deBroglie Wellenlänge λ_{dB} hat ein 10 MeV Elektron?

[53] Antwort: (c)
[54] Antwort: (b)

Bei einer solch hohen Energie ($E_{kin} \gg m_e \cdot c^2$) bewegt sich das Elektron mit relativistischer Geschwindigkeit.

$$\begin{aligned} p \cdot c &= \sqrt{(E_{kin} + m_e \cdot c^2)^2 - (m_e \cdot c^2)} \\ p \cdot c &= \sqrt{((10\,\text{MeV}) + (0.511\,\text{MeV}))^2 - (0.511\,\text{Mev})^2} \\ p \cdot c &= 1.422\,\text{MeV} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die deBroglie Wellenlänge unter Ausnutzung von $h \cdot \nu = (h \cdot c)/\lambda$ mit:

$$\begin{aligned} \lambda_{dB} &= \frac{h \cdot c}{p \cdot c} \\ \lambda_{dB} &= \frac{1240\,\text{MeV} \cdot \text{nm}}{1.422\,\text{MeV}} \\ \lambda_{dB} &= 8.72 \cdot 10^{-4}\,\text{nm} = 0.872 \cdot 10^{-12}\,\text{m} = 0.872\,\text{pm} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.12: Die deBroglie Gleichung gilt[55]

(a) nur für Elektronen.

(b) nur für Protonen.

(c) nur für Neutronen.

(d) nur für Wasserstoff.

(e) für alle Teilchen, die sich bewegen.

Aufgabe 2.13: What would be the DeBrogile wavelenght of a 2000 kg car moving along the highway at 30 m/s? [56]

Aufgabe 2.14: Calculate the wavelength associated with a proton moving with 1/20 the speed of light.[57]

Aufgabe 2.15: The equivalent wavelength of a moving electron is $0.25 \cdot 10^{-10}$ m. What voltage applied between two grids will bring it to rest?[58]

Aufgabe 2.16: The electron beam in a television receiver tube is accelerated by 10 kV. What is the DeBrogile wavelength of the electrons?[59]

Aufgabe 2.17: If the electron beam in a TV picture tube is accelerated by 10,000 V, what is the DeBroglie wavelength?[60]

[55] Antwort: (e)
[56] Answer: $1.1 \cdot 10^{-38}$ m
[57] Answer: $2.64 \cdot 10^{-14}$ m
[58] Answer: 2.4 kV
[59] Answer: 0.112 Å
[60] Answer: $1.23 \cdot 10^{-11}$ m

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wenn Sie das Licht verlangsamen würden, würde es eher Wellen- oder eher Teilcheneigenschaften aufweisen?
2. Erklären Sie die Bedeutung des Young-Doppelspaltexperiments.
3. Was sind die Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten zwischen einem Elektron und einem Photon?
4. Welche Beziehung gibt es zwischen dem Impuls und der Wellenlänge eines Teilchens?
5. Wie ändert sich die deBroglie Wellenlänge, wenn man die kinetische Energie eines Teilchens erhöht?
6. Ein 2 keV Elektron hat eine Wellenlänge von 0.0274 nm. Welche deBroglie-Wellenlänge ergibt sich, wenn Sie die Energie vervierfachen?
7. Ein Elektron und ein Proton bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit fort. Welches Teilchen hat die kürzere deBroglie-Wellenlänge?
8. Wie wirkt sich die Beschleunigung eines Teilchens auf seine deBroglie-Wellenlänge aus?
9. Welche deBroglie-Wellenlänge hat ein ruhendes Neutron?
10. Wird die deBroglie Wellenlänge eines Elektrons kleiner oder größer, wenn es sich relativistisch bewegt?
11. Wie ist das Verhältnis der deBroglie Wellenlängen von Proton und α-Teilchen, wenn sie sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen?
12. Wie ändert sich die deBroglie-Wellenlänge eines Teilchens, wenn man die Geschwindigkeit verdoppelt?
13. Elektron und Proton haben dieselbe Geschwindigkeit. Wie ist das Verhältnis der deBroglie-Wellenlängen?
14. Woher weiß man, dass Elektronen Teilchen sind?
15. Welches Muster ergibt sich auf dem dahinter liegenden Detektor, wenn ein Elektronenstrahl auf einen Doppelspalt trifft?
16. Welche Energie müsste ein Elektron haben, um Details des Atomkerns zu enthüllen?
17. Welche Energie müsste ein Photon haben, um Details des Atomkerns zu enthüllen?
18. Warum verwendet man statt schweren Teilchen Elektronen, um die Struktur des Atomkerns zu entschlüsseln?

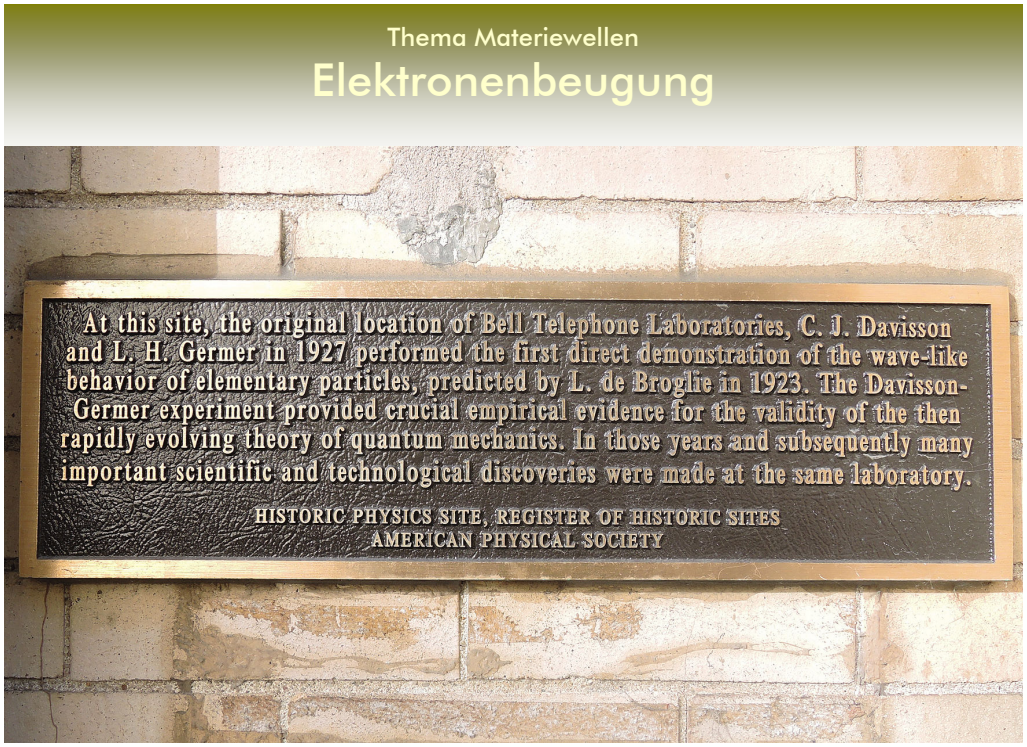
19. Welche deBroglie Wellenlänge hat das Hauptgebäude des Instituts für Physik?

20. Warum liefert die deBroglie Wellenlänge eine Begründung dafür, dass der absolute Nullpunkt nicht erreicht werden kann?

21. Ein einziges Elektron durchquert einen Doppelspalt und wird auf einem Detektor nachgewiesen. Wie kann man hier von Interferenz sprechen?

22. Das Konzept des Welle-Teilchen-Dualismus gilt auch für makroskopische Körper!

9.3 Elektronenbeugung



Light behaves as waves on Mondays, Wednesdays, and Fridays, like aprticles on Tuesdays, Thursdays, and Saturdays and nothing at all on Sunday.

Sir William Henry Bragg

Der erste Nachweis der Welleneigenschaften von Materie erfolgte in einem Experiment, dass nur wenige Jahre nach der Arbeit von deBroglie durchgeführt wurde. Die Entdeckung in den *Bell Telephone Laboratories* war eher zufällig, da die Forscher zunächst gar nicht Messungen zur Elektronenbeugung im Sinn hatten. Entscheidend war letztlich ein Missgeschick im Labor, das den Erfolg sicher stellte. Folgende Frage stellt sich also: Warum wurde der Effekt erst beobachtet, nachdem das Metall erhitzt wurde? Lesen Sie nach!

Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel [?]**:** The investigation reported in this paper was begun as the result of an accident which occurred in this laboratory in April 1925. At that time we were continuing an investigation, first reported in (Davisson et al. Science 64, 522 (1921)). Of the distribution-in-angle of electrons scattered by a target of ordinary (polycrystalline) nickel. During the course of this work a liquid-air bottle exploded at a time when the target was at a high temperature; the experimental

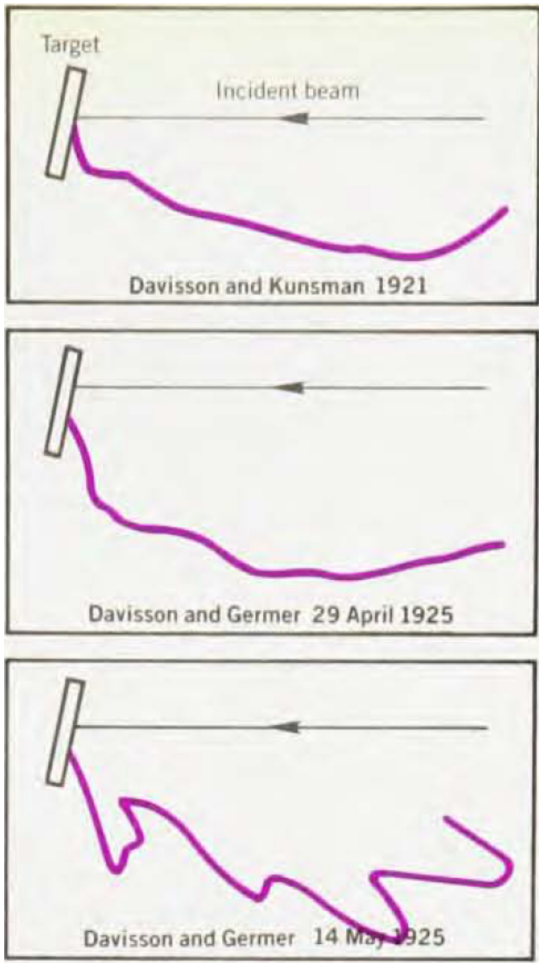


Abb. 9.40: Vor und nach dem Unfall am 5.2.1925. Obwohl die ersten Streukurven nach der Reparatur der gebrochenen Röhre dem Ergebnis von Davisson und Kunsman (oben) von 1921 ähnelten, traten plötzlich markante Spitzen auf (unten) [**?**].

tube was broken, and the target heavily oxidized by the inrushing air. The oxide was eventually reduced and a layer of the target removed by vaporization, but only after prolonged heating at various high temperatures in hydrogen and in vacuum. When the experiments were continued it was found that the distributionin-angle of the scattered electrons had been completely changed.

C. Davisson and L. H. Germer, 1927

Link to video **Wave Nature and the Davisson-Germer Experiment**

Mit ihren Messungen gelang es den Forschern, neben dem Nachweis von Elektronenwellen, die Plancksche Konstante mit einer Genauigkeit von 1% zu bestimmen. Abb. 9.40 zeigt die Ergebnisse vor und nach Panne im Labor. Unabhängig von Davisson und Germer haben G. P. Thomson [**? ? ?**] und P.C. Tartakovskii [**?**] die Beugung von Elektronen an Kristallen nachgewiesen:

Experiments on the Diffraction of Cathode Rays [**?**]**:** M. L. de Broglie has introduced a theory of mechanics according to which a moving particle behaves as a group

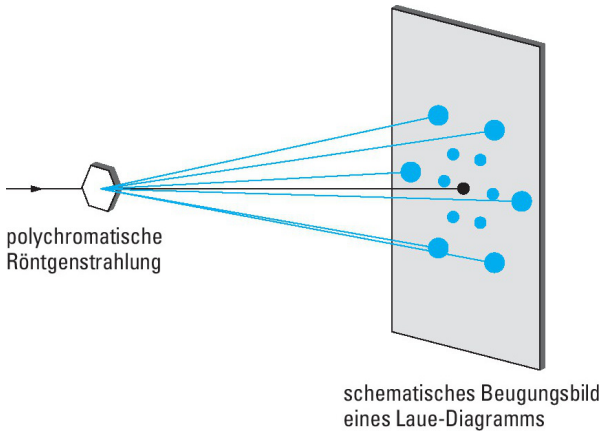


Abb. 9.41: Röntgenbeugung an einem hexagonalen Kristall. Im Laue-Diagramm zeigt sich die hexagonale Symmetrie der Probe [**?**].

of waves whose velocity and wave-length are governed by the speed and mass of the particle. In fact if m_0 is the mass for slow speed and v the speed of a freely moving particle, the wavelength is given by $\lambda = h\sqrt{1 - v^2/c^2}/m_0 v$, and the wave velocity V by $V = c^2/v$, the group velocity being v, the velocity of the particle. Here c is the velocity of light and it will be seen that the wave velocity is greater than c. There is nothing impossible in this because the waves are regarded as purely geometrical -*phase waves*- not as carrying energy. Compare, in ordinary optical theory, the case of substances, such as sodium, for which the refractive index is less than unity. The above is for free space; in the presence of a field of force V varies, and the consequent bending of the waves by refraction corresponds, on the new theory, to the deviation of the path of the particle by the field of force, on the old. The consequences of this theory have been worked out by de Broglie, Schrödinger and others and applied to problems in spectroscopy where they have provided the solution of several outstanding difficulties left by the older theory of orbits. In view, however, of the extremely fundamental nature of the theory it is highly desirable that it should rest on more direct evidence, and, in particular, that it should be shown capable of predicting as well as of merely explaining. Dymond has obtained some remarkable results on the scattering of slow electrons in helium which are of the general nature to be expected in this theory, but our knowledge of the structure of helium, together with the mathematical difficulties of the problem have so far prevented any exact comparision of the theory with experiment. Davisson and Kunsman and Davisson and Germer have obtained results on the reflection of slow electrons from the surfaces of crystals, especially nickel, which show good qualitative agreement with the theory but a discrepancy of 30 per cent. in certain magnitudes. It is hoped that the experiments described in this paper will advance the matter a stage further.

Wie klärt man die Struktur der Materie?

Röntgenbeugung ist die Beugung von hochenergetischer Strahlung an geordneten Strukturen wie beispielsweise Kristallen.[61] Röntgenstrahlung liefert ähnliche Beugungsphäno-

[61] *Lexikon:* Ein **Kristall** ist ein Körper, der aus einer dreidimensional periodisch angeordneten Struktureinheit besteht.

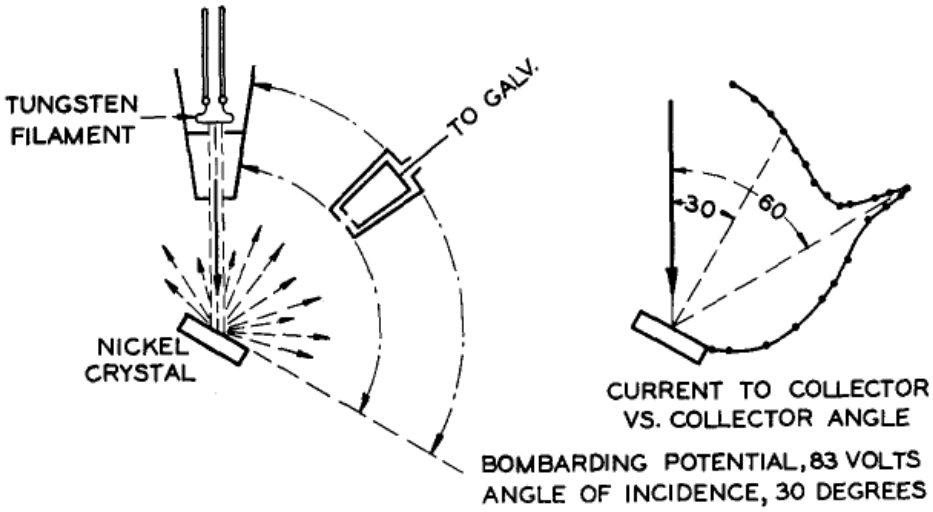


Abb. 9.42: Versuchsanordnung von Davisson und Germer zur Untersuchung der Streuung von Elektronen an einem Kristall. Rechts dargestellt ist ein typisches Elektronen-Streusignal [**?**].

mene wie Licht und ist aufgrund der geringen Wellenlänge eine der Standardverfahren zur Klärung der Struktur der kondensierten Materie (siehe Kapitel *Röntgendiagnostik*). Abb. 9.41 zeigt die Mächtigkeit der Methode am Beispiel des Laue-Verfahrens. Die Methode wird ebenfalls in der Chemie und der Materialphysik verwendet. Die Frage stellt sich: Kann man diese Technik auf Materiewellen übertragen?

Davisson-Germer Experiment

We have been accustomed to think of the atom as rather like the solar system–a massive nuclear sun surrounded by planetary electrons moving in closed orbits. On this view the electron which strikes into a metal surface is like a comet plunging into a region rather densely packed with solar systems. There is a certain small probability, or at least there might seem to be, that the electron will strike into an atom in or near the surface of the metal, be swung about comet-wise, and sent flying out of the metal without loss of energy. The direction taken by such an electron as it leaves the metal should be a matter of private treaty between the electron and the individual atom. One does not see how the neighboring atoms could have any voice in the matter [**?**].

C. J. Davisson, 1928

In Versuch von Davisson und Germer wird ein Strahl langsamer Elektronen auf einen Nickel-Kristall gelenkt. Der Strahl dringt aufgrund der geringen kinetischen Energie kaum in den Kristall ein und wird in Folge elastischer Streuung an der Oberfläche gestreut. Das Signal der gestreuten Elektronen wird mit einem Faraday-Becher,[62] der den

[62] *Lexikon:* Ein **Faraday-Becher** dient zur Messung eines Stroms aus freien Elektronen oder Ionen. Ein

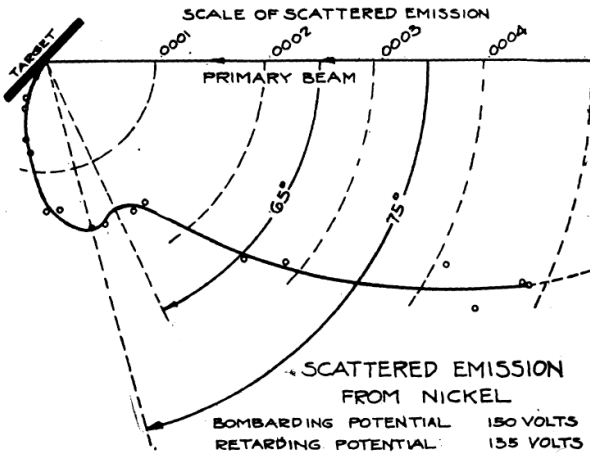


Abb. 9.43: Beugung an einem Nickelkristall bei einer Energie der Elektronen von 150 eV. Mit dem Davisson-Germer Experiment wurde erstmals nachgewiesen, dass Elektronen Welleneigenschaften aufweisen und die Streuung mit Hilfe der deBroglie-Beziehung beschrieben werden kann [**?**].

Streuwinkel abtastet, aufgezeichnet. Abb. 9.42 zeigt den experimentellen Aufbau. Nach der klassischen Physik sollten die gestreuten Elektronen in beliebige Raumwinkel streuen. Für massive Teilchen erwartet man auch kaum eine Abhängigkeit der Zählrate vom Beobachtungswinkel. Das Davisson-Germer Experiment liefert ein überraschend anderes Resultat. Abb. 9.43 zeigt das Ergebnis aus der Originalarbeit [**?**]. Die Analyse greift auf Erkenntnisse aus der Optik zurück. Für die Interferenz eines optischen Transmissionsgitters mit einer Gitterkonstante g gilt für den Beobachtungswinkel θ_n bei Verwendung von Licht der Wellenlänge λ in der n-ten Beugungsordnung, (Kapitel *Wellennatur des Lichts*):

$$n \cdot \lambda = g \cdot \theta_n \tag{9.44}$$

Über den Impuls kann den Elektronen eine deBroglie Wellenlänge zugeordnet werden. Aufgrund der Welleneigenschaften erwartet man eine Erhöhung der Intensität bei bestimmten Winkeleinstellungen des Kristalls in Bezug zur Einfallsrichtung des Elektronenstrahl durch Interferenz. In der Röntgenphysik lernt man diese Gleichung genauer kennen. Es handelt sich um die wichtige Bragg-Gleichung, die wir hier für die

Metalltopf wird mit einer Bohrung versehen, dessen Durchmesser vergleichbar ist mit der Ausdehnung des Strahls. Die Ladung, die am Boden des Topfes deponiert wird, wird mit einem Elektrometer ausgelesen. Dabei nutzt man das Prinzip des Faradayschen Bechers, dass sich Ladung, die im Innern eines Metalltopfes auftrifft, auf der Außenwand des Bechers verteilt und das Innere des Bechers stets feldfrei ist.

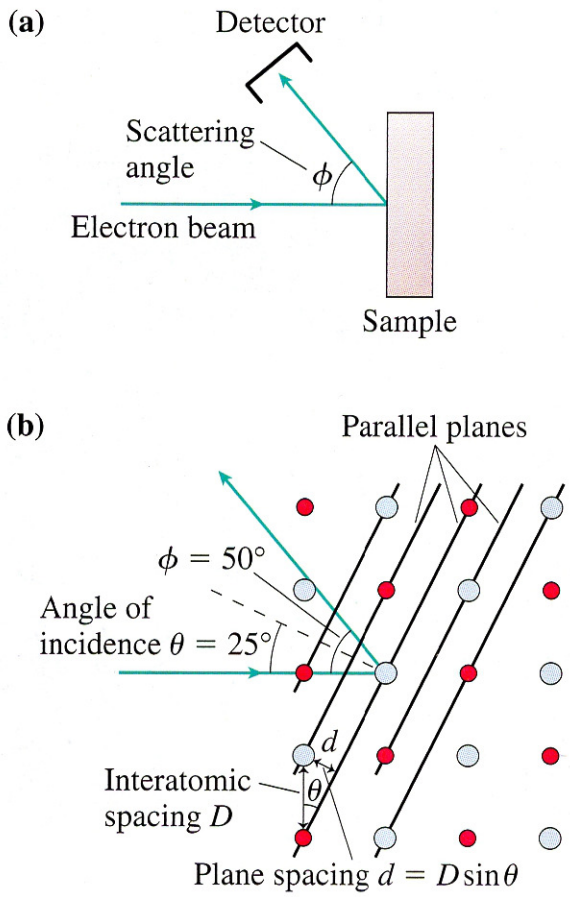


Abb. 9.44: Schema des Davisson-Germer Experiments zur Untersuchung der Streuung von Elektronen an einer Metalloberfläche [**?**].

Teilchenwellen-Streuung an Nickel hinschreiben:[63]

$$n \cdot \lambda_{dB} = d_{\mathrm{Ni}} \cdot \sin\Theta \tag{9.45}$$

Hierbei ist n einen ganze Zahl, d_{Ni} der Netzebenenabstand der Atome im Nickelkristall und Θ der Beobachtungswinkel. Für die kinetische Energie der im Experiment verwendeten Elektronen ($E_{kin} = 8.8 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$) ergibt sich eine deBroglie Wellenlänge von $\lambda_{dB} = 1.65 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Unter welchem Winkel erwartet man in Nickel konstruktive Inter-

[63] Niederenergetische Elektronen streuen wegen der geringen Eindringtiefe hauptsächlich an Oberflächenatomen, während zur Bragg-Streuung viele Netzebenen beitragen. Interessant ist, dass aufgrund dieser Besonderheit die Beugungssignaturen von niederenergetischen im Vergleich zu hochenergetischen Elektronen breit sind. Im letzteren Fall tragen viele Atomebenen bei und sich das Streubild aus der Überlagerung vieler Streuwellen zusammensetzt.

ferenz aufgrund der Welleneigenschaften der Elektronen?

$$\begin{aligned}
\Theta_n &= \arcsin\left(\frac{n \cdot \lambda_{dB}}{d_{Ni}}\right) \\
\Theta_1 &= \arcsin\left(\frac{1.65 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}{2.15 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}\right) \\
\Theta_1 &= \arcsin(0.77) \\
\Theta_1 &= 50^o
\end{aligned} \tag{9.46}$$

Die erwartete Erhöhung des Elektronenstroms für die erste Ordnung der Interferenz wird tatsächlich beobachtet [**?**] und zwar genau an der Stelle, die man mit der Bragg-Gleichung errechnet hat, siehe Abb. 9.43. Schauen wir uns den Versuch nochmal genauer an. Im Davisson-Germer Experiment treffen die Elektronen senkrecht zum Kristall mit einer Geschwindigkeit von $4.35 \cdot 10^6$ m/s auf und werden in einen Winkel ϕ=50^o gestreut. Abb. 9.44 zeigt, dass in Bezug auf die Streuebenen der Einfallswinkel Θ=$\phi/2$=25^obeträgt. Das ist der entscheidende Winkel in der Bragg-Gleichung (Gl. 9.45). Die Zeichnung liefert folgenden Ausdruck für den Abstand D der Atome untereinander.

$$d_{Ni} = D \cdot \sin\Theta \tag{9.47}$$

Mit diesem Ausdruck gehen wir in die Bragg-Gleichung:

$$\begin{aligned}
2\,(D \cdot \sin\Theta_m)\cos\Theta_m &= D(2\,\sin\Theta_m \cdot \cos\Theta_m) \\
2\,(D \cdot \sin\Theta_m)\cos\Theta_m &= D\sin(2\,\Theta_m) \\
2\,(D \cdot \sin\Theta_m)\cos\Theta_m &= m \cdot \lambda
\end{aligned} \tag{9.48}$$

Aus der Röntgenbeugung ist der Abstand D der Netzebenen[64] von Nickel bekannt. Er beträgt D=0.215 nm. Setzt man Θ=25^o und m=1 ein, ergibt sich die deBroglie Wellenlänge des Elektrons mit:

$$\lambda = D \cdot \sin(2\,\Theta) = 0.165\,\mathrm{nm} \tag{9.49}$$

Davisson und Germer fanden innerhalb kurzer Zeit 20 weitere Reflexe, die mit deBroglie Wellenlängen und den entsprechenden Bragg-Bedingungen in Einklang standen.

In weiterführenden Experimenten wurde überprüft, ob die deBroglie Beziehung auch für

[64] *Lexikon:* **Netzebenen** bezeichnen in der Kristallographie Ebenen, die durch Punkte des Kristallgitters aufgespannt werden.

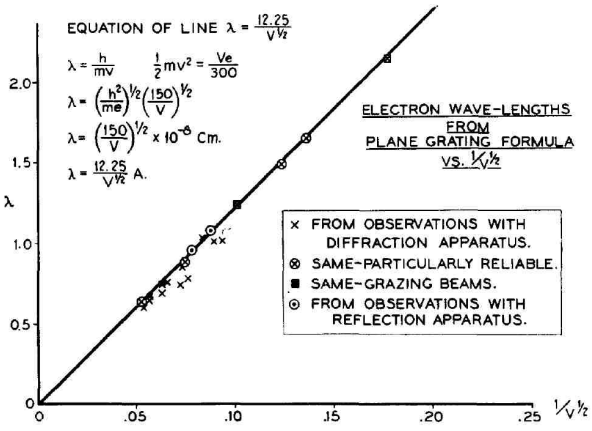


Abb. 9.45: Zusammenhang zwischen der Elektronenenergie und der bestimmten deBroglie Wellenlänge [**?**].

unterschiedlichste Elektronengeschwindigkeiten erfüllt ist.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= e \cdot U_e \\ E_{kin} &= \frac{p^2}{2\,m_e} \\ E_{kin} &= \frac{h^2}{2\,m_e \cdot \lambda_{dB}^2} \\ U_e &= \frac{h}{2\,m_e \cdot e} \cdot \frac{1}{\lambda_{dB}^2} \\ \lambda_{dB} &= \sqrt{\frac{h^2}{2\,m_e \cdot e} \cdot \frac{1}{U_e}} \\ \lambda_{dB} &\approx \frac{1}{\sqrt{U_e}} \end{aligned} \tag{9.50}$$

Es stimmt, wie Abb. 9.45 demonstriert! Die λ_{dB}-Messwerte zeigen die erwartete Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung U_e. Die Erkenntnis, dass man einem Teilchen eine charakteristische deBroglie Wellenlänge zugeordnet werden kann, motiviert zu untersuchen, ob Experimente mit Licht und Elektronen bei gleicher Wellenlänge vergleichbare Resultate liefern. Abb. 9.46 zeigt, dass dies tatsächlich der Fall ist. Für die Experimentalphysik ergaben sich damit neue, weitreichende Möglichkeiten. Mit unterschiedlichen Sonden (Licht, Elektronen, Neutronen) kann bei vergleichbarer Wellenlänge mit vergleichbarer räumlicher Auflösung (Rayleigh-Kriterium, siehe Vorlesung *Optik*) die Struktur der Materie untersucht werden.

Thomson-Reid Experiment

Nahezu zeitgleich zum Davisson-Germer Experiment wurden Studien zur Elektronenbeugung von G. P. Thomson und A. Reid durchgeführt [**?**]. Die Forscher schickten einen feingebündelten Elektronenstrahl auf dünne Proben und beobachteten die Streuung der Elektronen an den Atomen der Probe mit Hilfe einer photographischen Plat-

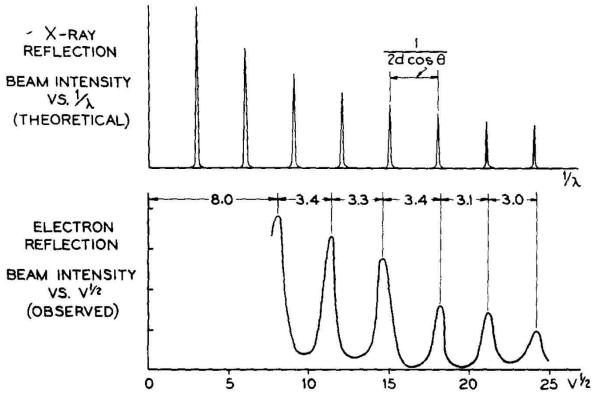


Abb. 9.46: Reflexion von Röntgenlicht und Elektronen führen bei Anpassung von Röntgen- und deBroglie-Wellenlänge zu vergleichbarer Streuung [**?**].

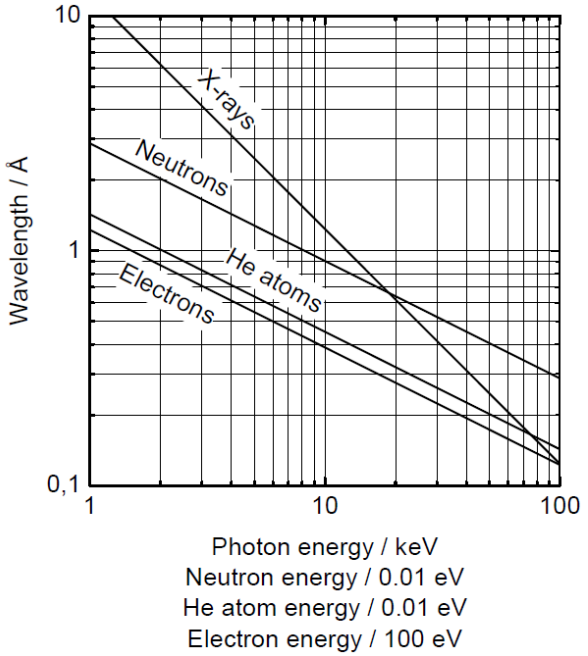


Abb. 9.47: Abhängigkeit der Wellenlänge von Materieteilchen und Röntgenstrahlung von der kinetischen bzw. der Photonenenergie.

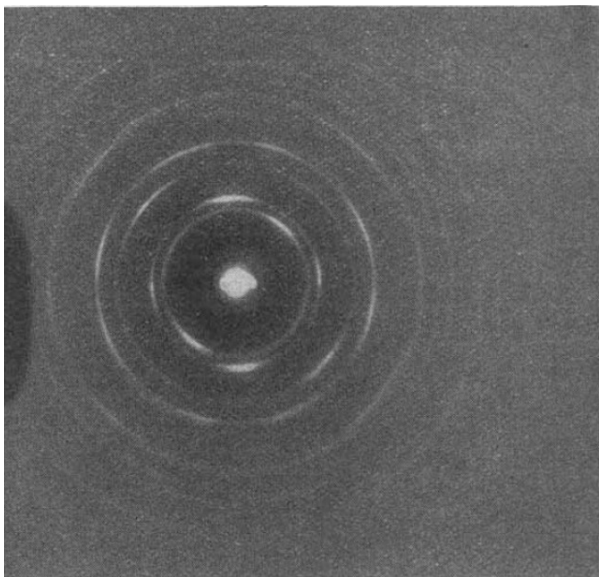


Abb. 9.48: Beugung von 85 keV Elektronen an einer Goldfolie [**?**]

Beschleunigungsspannung U_e keV	Durchmesser D cm	$D \cdot U^{1/2}$ (cm$\cdot$ V$^{1/2}$)
24.6	2.50	12.4
31.8	2.15	12.4
39.4	2.00	12.6
45.6	1.86	12.6
54.3	1.63	12.0
61.2	1.61	12.6

Tab. 9.3: Durchmesser der Beugungsringe D in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung U_e [**?**].

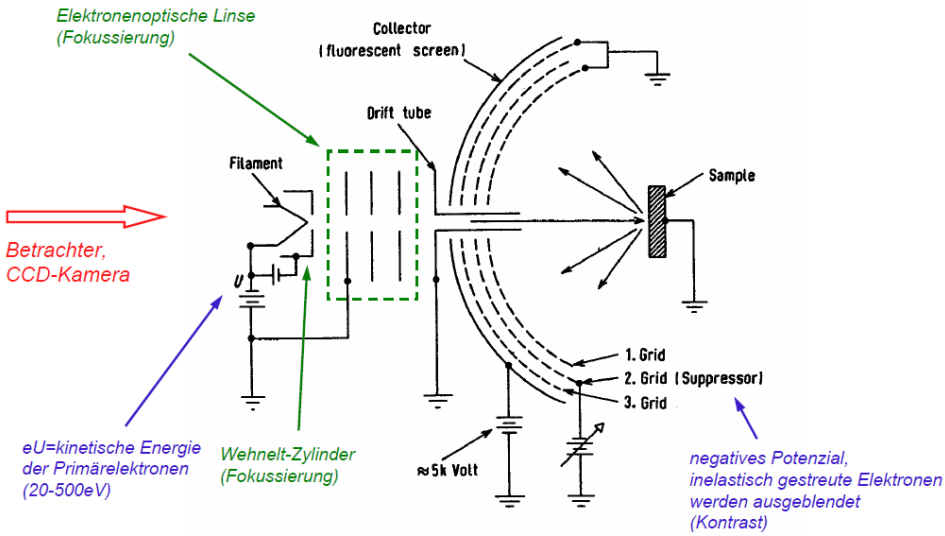


Abb. 9.49: Experimenteller Aufbau zur Untersuchung von Oberflächen mit LEED [**?**].

te. Aufgrund der Kristallstruktur der Probe ergibt sich auf dem Schirm ein Interferenzbild, dass die Wellennatur der Elektronen bestätigt. Konstruktive Interferenz ergibt sich bei bestimmten Winkeln Θ aufgrund der Bragg-Bedingung Gl. 9.45 (Kapitel *Röntgenbeugung*).. Aufgrund der Vielzahl an Einzelkristallen in der Probe beobachtet man auf dem Detektorschirm ein Ringmuster, wobei die Radien von der Orientierung der Kristalle abhängen, siehe Abb. 9.48. Unter Verwendung nicht-relativistischer Elektronen konnten Thomson und Reid die Radien bestimmten deBroglie-Wellenlängen zuordnen und ihre Abhängigkeit von der Elektronenenergie, wie im Davisson-Germer Experiment vorgeführt, nachweisen. Tab. 9.3 zeigt die Ergebnisse der Messungen.

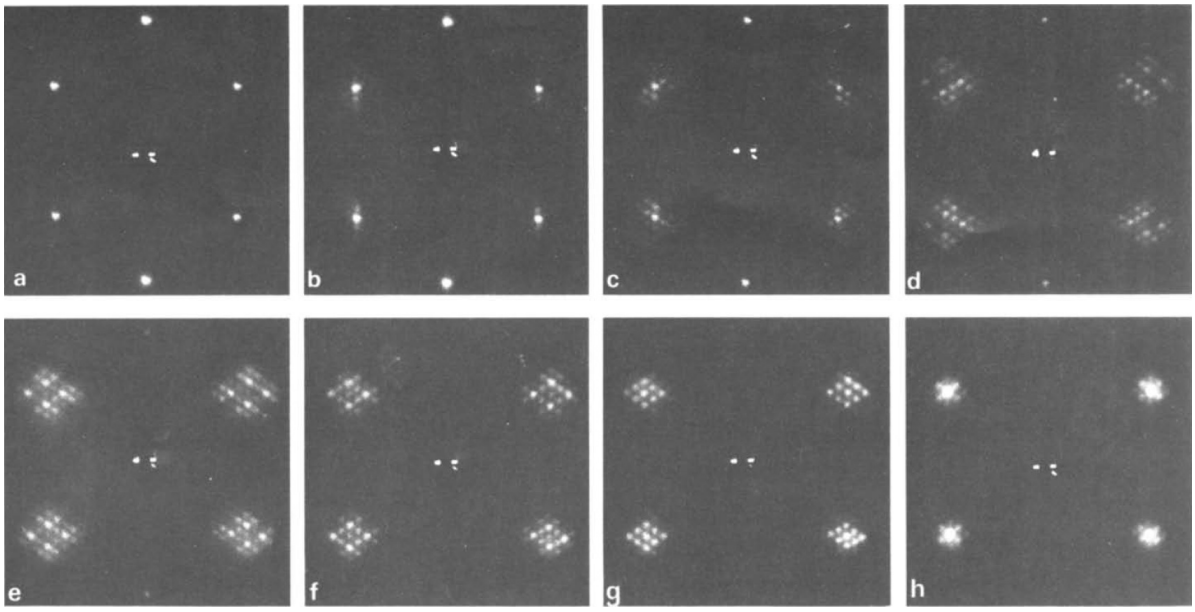


Abb. 9.50: LEED-Reflexe on Fe(110) auf W(110) für steigende Bedeckung der Wolframoberfläche mit Eisenatomen, aufgenommen mit Elektronen der Energie 115 eV. Die Bedeckungen in der Einheit ML (Äquivalente Monolage an Atomen) steigen von (a) bis (h) von 1.43 bis 6.93 ML [**?**].

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Festkörperphysik

Die deBroglie-Beziehung ermöglicht es, Materie mit unterschiedlichen Probeteilchen zu untersuchen, wobei man die Wellenlänge der analysieren Wellen nahezu frei wählen kann, siehe Abb. 9.47. Eine in der Festkörperphysik oft eingesetzte Methode zur Charakterisierung von Oberflächen ist LEED.[65] Abb. 9.49 zeigt den experimentellen Aufbau. Die Methode ist in der Lage auch *in sito* strukturelle Veränderungen auf der Oberfläche einer Probe zu verfolgen. Als Beispiel zeigt Abb. 9.50, was passiert, wenn man auf einer definierten Kristalloberfläche, hier W(110) bei einer Temperatur von 500 K Eisenatomen ablagert. Dabei kommt es zu Verspannungen, weil die Gitterkonstanten von Wolfram und Eisen Fe(110) unterschiedlich sind.

Solche Elektronen-Diffraktionsexperimente sind heutzutage weit verbreitet und vergleichbar zur Pulverdiffraktometrie mit Röntgenstrahlung. Elektronen werden auf Energien von 500 keV gebracht und auf eine Probe fokussiert. Das Streubild wird dann von einem dahinterliegenden Film erfasst. Man beobachtet scharfe Beugungsringe, da hunderte von atomaren Beugungsebenen beitragen. Eine aktuelle Entwicklung ist die Kombination von Röntgen- und Elektronenstrahlen für Untersuchungen an wasserstoffreichen Proben einzusetzen, siehe Abb. 9.53. Es ist nahezu hoffnungslos, mit Röntgenlicht Streusignale

[65] LEED: *low energy electron diffraction*

von Wasserstoff zu erhalten. Ein Ausweg ist, wie weiter unten dargestellt, die Messung mit Neutronen an deuterierten Proben durchzuführen. Diese Messungen sind allerdings aufwendig. Problematisch bei Messungen mit Elektronen ist, dass im Gegensatz zu Röntgenstrahlung die Teilchen in der Probe häufig stoßen. Das erschwert die Interpretation der Signale. Durch die Anwendung ausgeklügelter Algorithmen ist es aber kürzlich gelungen, die Qualität der Strukturbestimmung solcher Proben merklich voranzubringen [**?**].

Ein Beispiel aus der Atomphysik

Die Wellennatur von Heliumatomen wurde von Estermann,[66] Frisch und Stern[67] nachgewiesen [**?**]. Dazu wurde das Atomstrahl aus Helium bei 400 K erzeugt. Aus der Temperatur des Gases kann auf die mittlere kinetische Energie der Teilchen geschlossen werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_{He} \cdot v_{He}^2 &= \frac{3}{2} k_B \cdot T_K \\ \frac{1}{2} m_{He} \cdot v_{He}^2 &= 8.3 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{J} = 0.052\,\mathrm{eV} \\ v_{He} &= 1.6 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{9.51}$$

Damit ergibt sich eine deBroglie Wellenlänge von

$$\begin{aligned} \lambda_{dB}^{He} &= \frac{h}{m_{He} \cdot v_{He}} \\ \lambda_{dB}^{He} &= \frac{6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{(6.7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}) \cdot (1.6 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s})} \\ \lambda_{dB}^{He} &= 6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{9.52}$$

Das im Experiment an einem Kristall beobachtete Beugungsmuster stimmte gut mit den Vorhersagen zur deBroglie Wellenlänge überein. Vergleichbare Experimente an Wasserstoff wurden von Johnson durchgeführt [**?**].

Ein Beispiel aus der Optik

In Abb. 9.51 wird die Beugung von Licht (oben) und von 38 keV Elektronen (unten) an einer Kante eines MgO-Kristalls demonstriert [**?**]. Bei gleichem Produkt von Wellenlänge und Abstand zwischen Kante und Beobachtungsebene werden vergleichbare Beugungsstrukturen beobachtet. Abb. 9.52 zeigt den Vergleich von Röntgen- und Elektronenstrahlen bei der Streuung an einer Aluminiumfolie.

[66] Estermann war Mitarbeiter von Otto Stern in Rostock.

[67] The Nobel Prize in Physics 1943 was awarded to Otto Stern *for his contribution to the development of the molecular ray method and his discovery of the magnetic moment of the proton.*

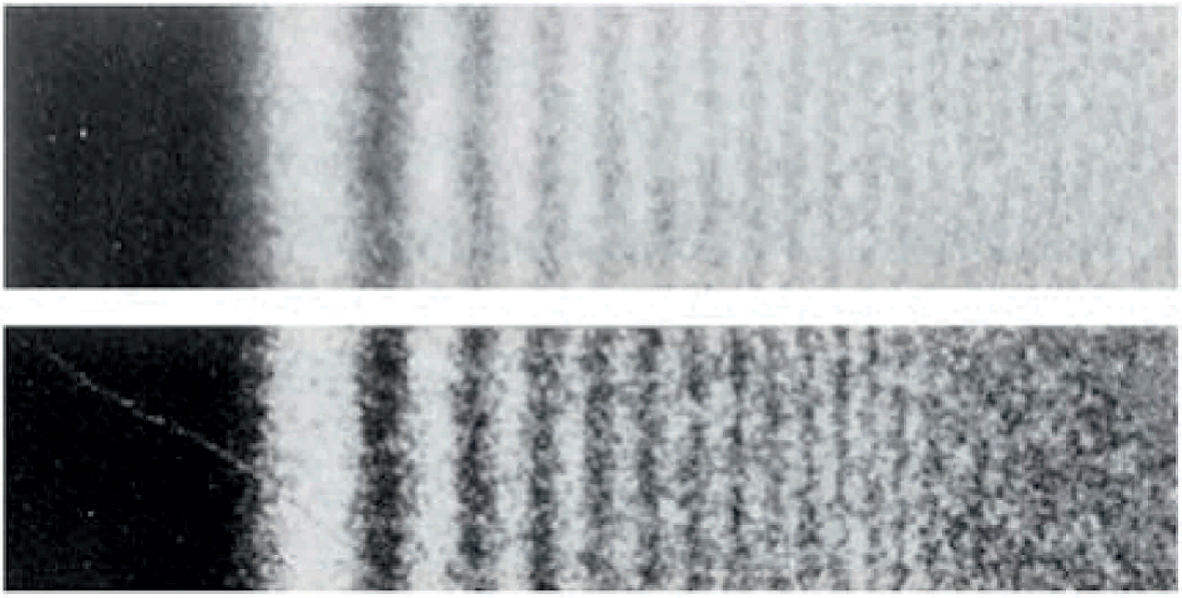


Abb. 9.51: Vergleich der Lichtbeugung (oben) und derE lektronenbeugung (unten) (E_{kin}=38 keV) an der Kante eines Magneesiumoxidkristalls [**?**].

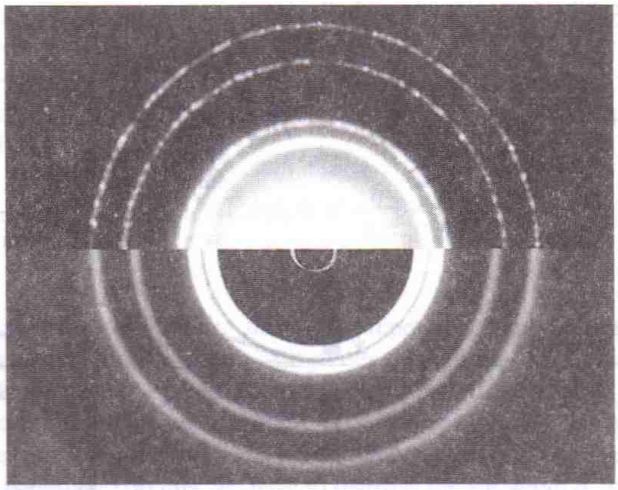
Ein Beispiel aus der Kernphysik

Untersuchungen mit Materiewellen am Kern (Kapitel *Kerne*) erfordern höhere kinetische Energien. Zum Einen sind die Abstände der Energiezustände im MeV Bereich und damit viel größer als im Atom (eV). Darüber hinaus sind die Kernabmessungen mit Femtometern (10^{-15} m) ebenfalls deutlich geringer. Aus diesem Grund werden solche Experimente mit Elektronenenergien von typisch 100 MeV durchgeführt. Damit können feinere Details des Kerns mit Hilfe von Materiewellen aufgelöst werden. Abb. 9.54 zeigt das Ergebnis eines solchen Experiments, in dem Details der Kernstruktur aufgelöst werden konnten [**?**]. Ergebnisse, die Interferenzeffekte bei der Streuung schneller Elektronen an Wasserstoff-, Helium-, Kohlenstoff- und Sauerstoffkernen zeigen, findet man in [**?**].

An analysis of electron-scattering experiments gives a nuclear charge distribution which has a central depression of about 7%, falls off at the nuclear edge faster than the customarily used Fermi distributions, has no detectable energy dependence, and appears to have an undulation of rather small magnitude [**?**].

Ein Beispiel aus der Neutronenforschung

An dieser Stelle soll noch darauf eingegangen werden wie man Neutronen-Materiewellen in Forschung und Technik einsetzt. Abb. 9.55 zeigt am Beispiel der Bragg-Streuung, dass man sowohl Röntgenstrahlung, als auch Elektronen und Neutronen zur Strukturuntersuchungen einsetzen kann. Insbesondere thermische Neutronen spielen dabei eine wichtige Rolle [**?**]. Thermische Neutronen haben kinetische Energien von nur 0.05 eV,



41–3 X-ray and electron diffraction. The upper half of the photo shows the diffraction pattern for 71-pm x rays passing through aluminum foil. The lower half, with a different scale, shows the diffraction pattern for 600-eV electrons from aluminum.

Abb. 9.52: Vergleich von Röntgen und Elektronenbeugug an einer Aluminiumfolie [**?**].

wodurch sich eine deBroglie Wellenlänge von 0.13 nm ergibt. Durch Bragg-Reflexion an einem Kristall wird ein monochromatischer Neutronenstrahl erzeugt. Die deBroglie Wellenlänge der thermischen Neutronen stimmt mit typischen Gitterabständen in Kristallen überein und ist deshalb geeignet, Strukturuntersuchungen der kondensierten Materie durchzuführen. Wie sich herausstellt, ist die Wechselwirkung von Neutronen mit Materie im Gegensatz zu Elektronen eine andere, da das Neutron keine elektrische Ladung trägt. Der Wechselwirkungsquerschnitt für Röntgenstrahlung steigt mit dem Quadrat der Ordnungszahl Z an, siehe Kapitel *Röntgendiagnostik*. Die Wechselwirkung von Neutronen mit Materie zeigt dagegen praktisch keine Elementabhängigkeit. Sowohl Röntgenlicht als auch Elektronenwellen streuen kaum an den leichten Elementen. Schwerere Elemente des Periodensystems werden dagegen deutlich besser diagnostiziert. Thermische Neutronen weisen für alle Elemente annähernd ähnliche Wechselwirkungsquerschnitte auf, siehe Abb. 9.56. Dadurch kann durch Neutronenstreuung insbesondere Wasserstoff nachgewiesen werden.[68] Dies erlaubt die Strukturuntersuchung organischer Stoffe.
Man kann jedem Körper eine deBroglie-Wellenlänge zuordnen, wobei man bei Bedarf auch relativistsiche Effekte berücksichtigen muss:

$$\lambda_{dB}^{rel} = \frac{h}{m \cdot v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{9.53}$$

Wie man erkennt, ergeben sich für makroskopische Teilchen λ_{dB}-Werte, deren Überprüfung die momentanen technischen Möglichkeiten übersteigen. Die Frage stellt sich, ob man auch für Objekte wie beispielsweise Moleküle, den Welle-Teilchen-Dualismus in Experimenten nachweisen kann.

[68] The Nobel Prize in Physics 1994 was awarded *for pioneering contributions to the development of neutron scattering techniques for studies of condensed matter* jointly with one half to Bertram N. Brockhouse *for the development of neutron spectroscopy* and with one half to Clifford G. Shull *for the development of the neutron diffraction technique.*

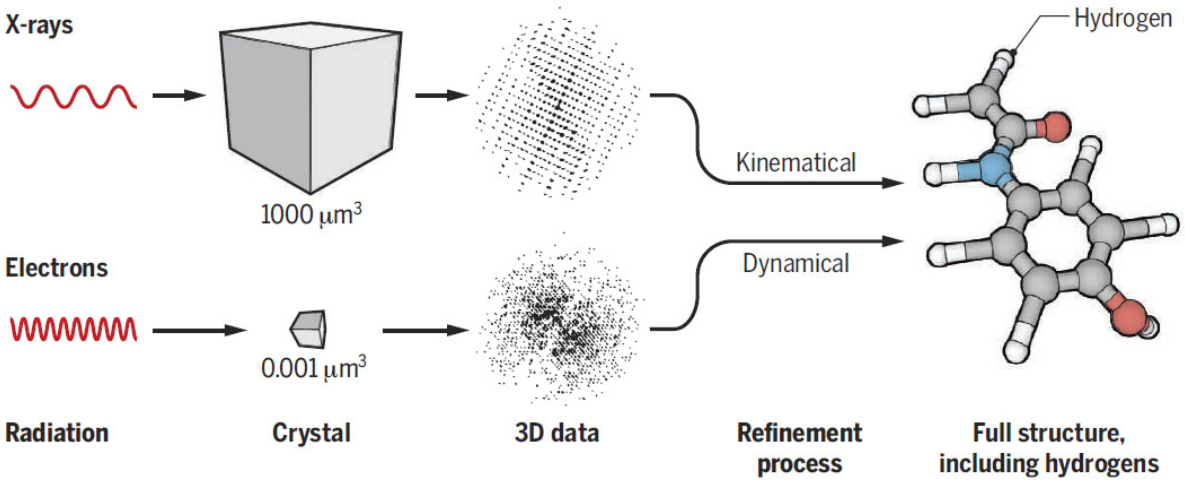


Abb. 9.53: Mit 3D-Elektronenbeugungsdaten und Unterstützung durch die Theorie gelingt es, Details der Kristallstruktur zu erhalten, die vergleichbar mit Röntgenbeugung an einem 10^6-mal größeren Kristall erhält [**?**].

Nachweis 1: deBroglie-Eigenschaften des Protons

Ein Lichtstrahl der Wellenlänge λ, der auf eine schwarze Scheibe (Radius R) auftrifft, erzeugt ein kreisförmiges Beugungsbild, wobei das erste Beugungsmaximum unter dem Winkel Θ_{min} beobachtet wird:

$$\Theta_{\text{min}} = 0.61\frac{\lambda}{R} \tag{9.54}$$

Die Rechnung ergibt sich ein Intensitätsverteilung, wie in Abb. 9.57 dargestellt. Ein ähnliches Bild sollte sich ergeben, wenn man beispielsweise einen energiereichen Protonenstrahl an einem anderen Proton oder einem Atomkern streut. Auch hier kann man den Kern als schwarze Scheibe mit Radius von etwa 10^{-15} m betrachten. Die deBroglie Wellenlänge der Protonen kann man aus der Energie der Protonen berechnen. Damit wird aus Gl. 9.54, wenn man $\lambda = h/p$ nutzt:

$$\Theta_{\text{min}} = \frac{0.61\,h}{p \cdot R} \tag{9.55}$$

Abb. 9.58 zeigt das Ergebnis des Experiments an ^{208}Pb, wobei man die Anzahl der gestreuten 1.04 GeV Protonen als Funktion des Streuwinkels bestimmt [**?**]. Wenn man Gl. 9.55 nach R auflöst, kann der Radius des Bleikerns bestimmt werden. Abweichungen vom berechneten Verlauf (durchgezogene Linie) sind darauf zurückzuführen, dass der Kern eine innere Struktur hat, die durch die Messung aufgelöst wird. Das Experiment verdeutlicht, dass die Streuung mit deBroglie Materiewellen wie eine hochauflösende Mikroskopie funktioniert.

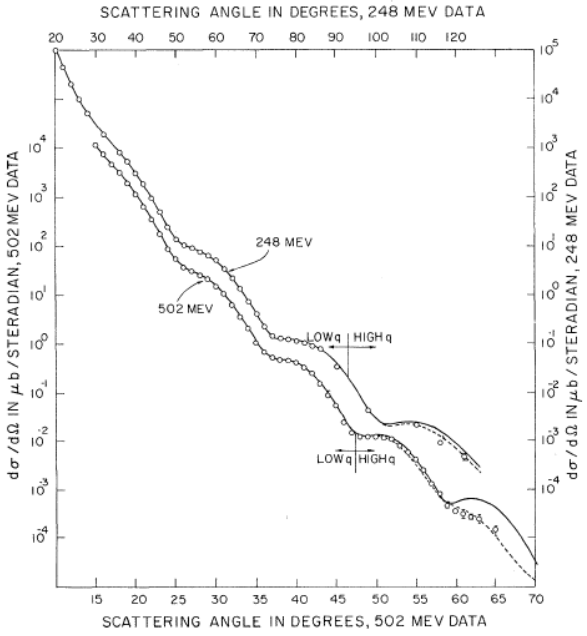


Abb. 9.54: Experimentelle Querschnitte (∘) für die Streuung von 248.2 und 502.0 MeV Elektronen am Pb-208 Kern, sowie theoretisch berechnete Querschnitte (durchgezogene Linien) [**?**].

Nachweis 2: deBroglie-Eigenschaften der Neutronen

Interferenzmuster konnten auch in Experimenten mit Neutronen schon 1936, also vier Jahre nach der Entdeckung durch Chatwick[69] beobachtet werden [**?**] (Abb. 9.59).

Nachweis 3: deBroglie-Eigenschaften von Atomen

Ein erstes Experiment mit Atomen wurde von Estermann und Stern durchgeführt, die beide in Rostock tätig waren. In dieser Messung wurde die Streuung eines Helium Atomstrahls an Einkristall wie NaCl oder LiF untersucht und das für Materiewellen typi-

[69]The Nobel Prize in Physics 1935 was awarded to James Chadwick *for the discovery of the neutron.*

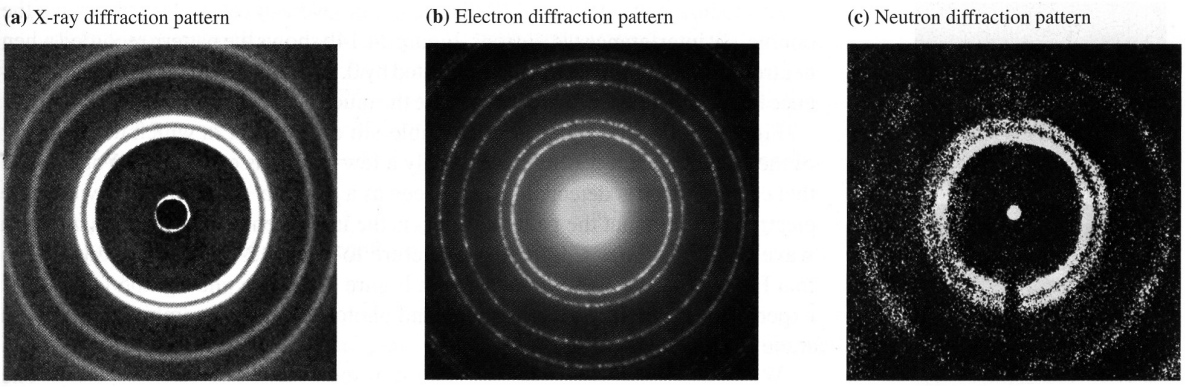


Abb. 9.55: Beugungsmuster, erhalten beim Durchtritt von Röntgenlicht (Links), Elektronen (Mitte) und Neutronen (Rechts) durch eine Aluminumfolie [**?**].

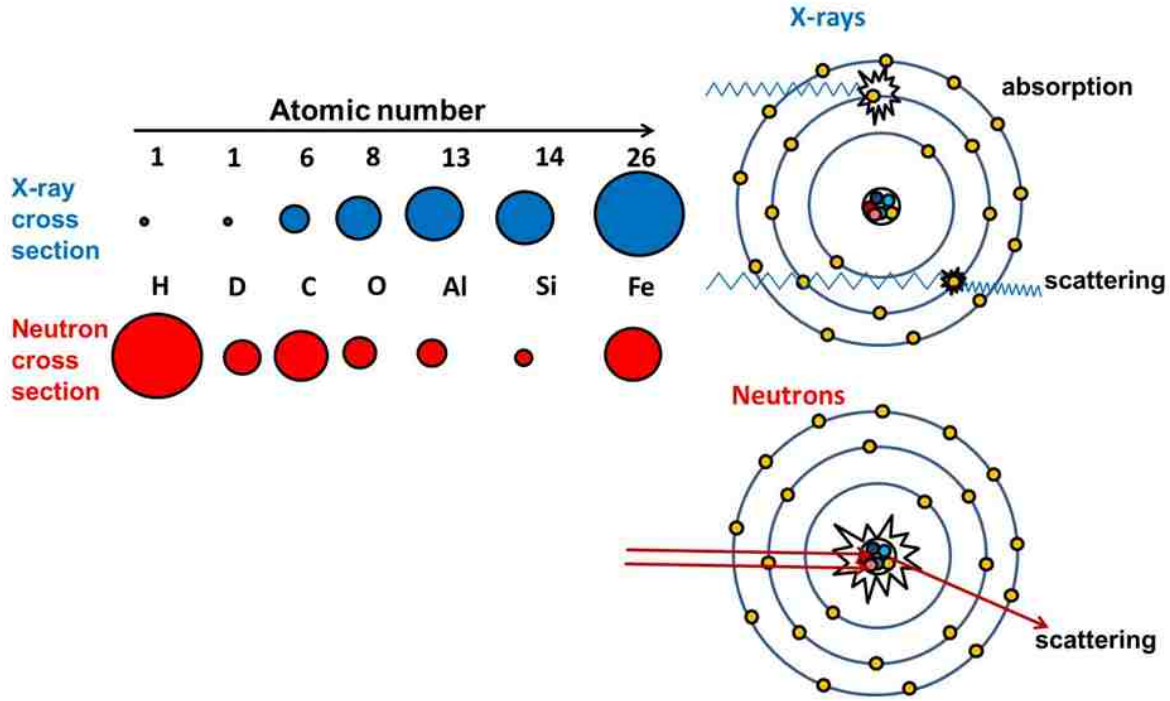


Abb. 9.56: Vergleich der Wechselwirkungsquerschnitte von Röntgenlicht und Neutronen mit Materie für ausgewählte Elemente (links) und die Art der Wechselwirkung mit den Atomen (rechts).

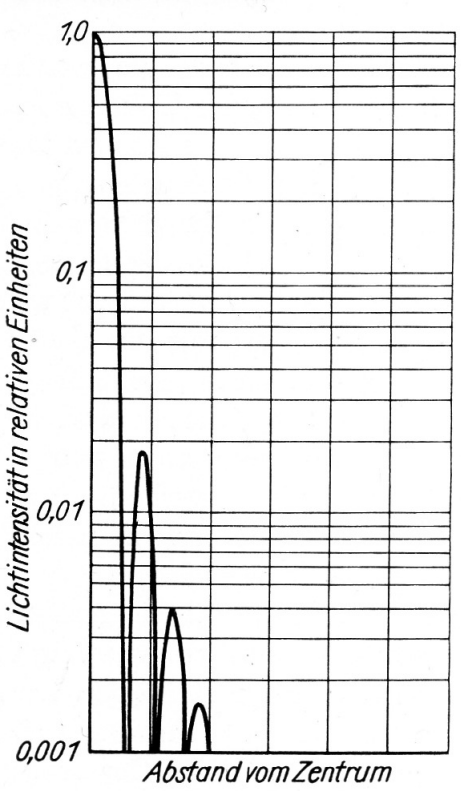


Abb. 9.57: Beugung von Licht an einer Scheibe [**?**].

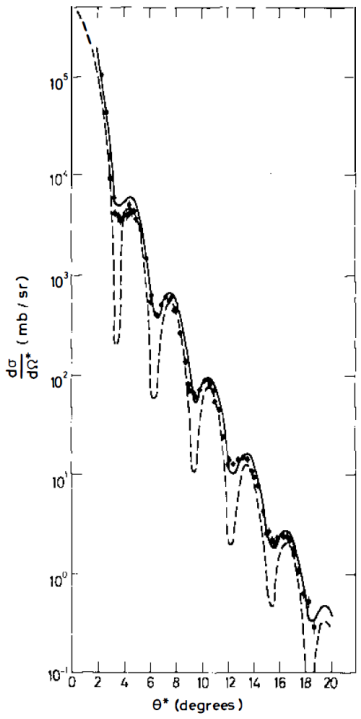


Abb. 9.58: Elastische Proton-^{208}Pb Streuung bei 1.04 GeV, verglichen mit theoretischen Vorhersagen [**?**].

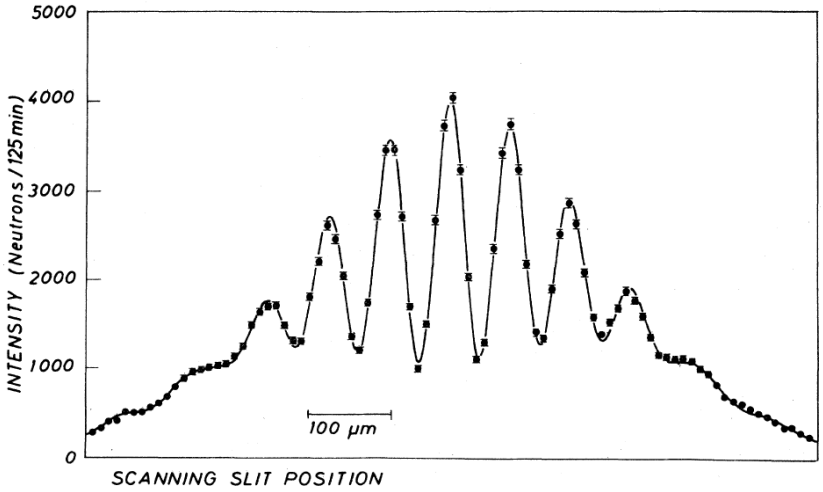


Abb. 9.59: Doppelschlitz-Beugungsmuster aufgenommen mit Neutronen. Die durchgezogene Kurve repräsentiert die theoretische Berechnung [**? ?**].

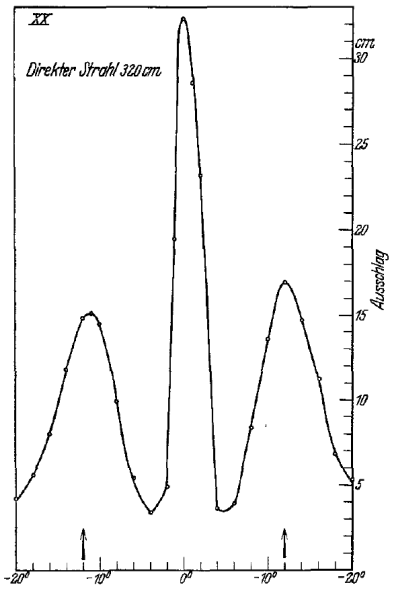


Fig. 17. Beugung von He an LiF, 290° K, Einfallswinkel 18½°.

Abb. 9.60: Beugung yon He an LiF bei einer Temperatur von 2 900 K und einem Einfallswinkel von 18.2^o [**?**].

sche Interferenzmuster beobachtet (Abb. 9.60) [**?**]. Die Forscher konnten, anhand der Änderung der Interferenzmuster, die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Heliumatome und damit der deBroglie Wellenlänge nachweisen. Unter verbesserten experimentellen Bedingungen konnte die Fresnel-Beugung eines Kaliumstrahl an einem Schlitz beobachtet werden [**?**]. Abb. 9.61 zeigt einen Vergleich zwischen deBroglie-Theorie (durchgezogene Linie) mit den Messungen. Die gestrichelte Linie gibt die Geometrie des Schlitzes an.

Nachweis 4: deBroglie-Eigenschaften kleiner Moleküle

Schließlich wurde Interferenz bei der Streuung von Na_2 Molekülen nachgewiesen [**?**]. Die technische Herausforderung war ein Transmissionsgitter mit ausreichend geringen Stegabständen von 100 nm herzustellen. In der Messung konnte der Beitrag des Moleküls klar vom atomaren Anteil im Molekularstrahl getrennt werden, siehe Abb. 9.62. Durch die Verbesserungen der technischen Möglichkeiten konnte ebenfalls die Existenz des äußerst schwach gebundenen (Bindungsenergie: 1 mK)[70] He-Dimers nachgewiesen werden [**?**]. He_2 hat mit 62 Å von allen Molekülen den größten Bindungsabstand. Zum Vergleich beträgt der Abstand in NaCl 2.4 Å bei einer Bindungsenergie von 4.26 eV

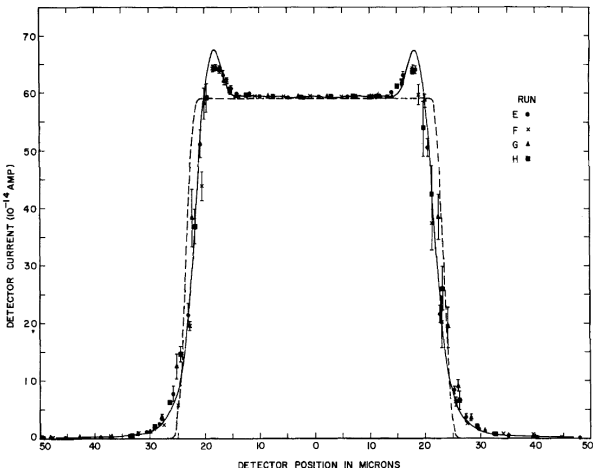


Abb. 9.61: Einzelspalt-Beugungsmuster, beobachtet mit einem Kalium-Atomstrahl im Vergleich zur Theorie. Die durchgezogenen Linie ergibt sich aus der Vorhersage der deBroglie Hypothese und der Fresnelschen Beugungstheorie [**?**].

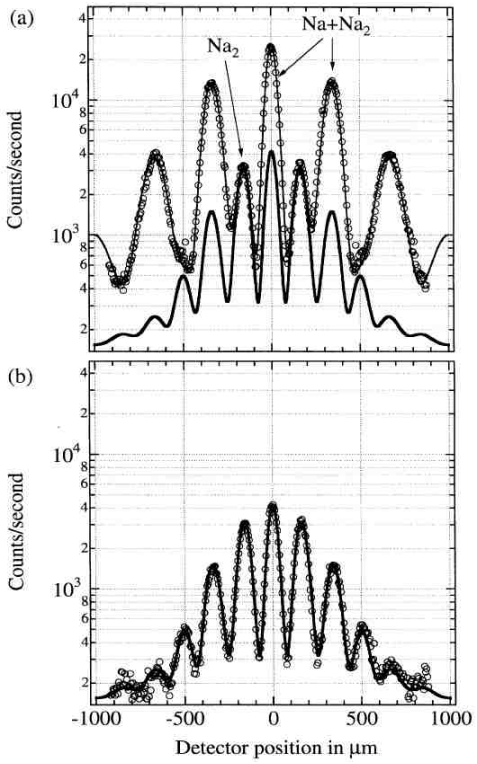


Abb. 9.62: (a) Beugung eines Strahls aus sowohl Atomen als auch Molekülen (Ablenkstrahl aus) und (b) Molekülstrahl (Ablenkstrahl an) durch ein Gitter mit einer Periode von 100 nm. Die dünne durchgezogene Linie in (a) ist eine Anpassung an das Beugungsmuster, was darauf hinweist, dass 16.5% des Signals Moleküle sind. Die durchgezogene Linie in den Graphen ist die Anpassung an das Na_2-Beugungsmuster in (b). Beides Rechnungen sind durchgeführt für Beugungsgitter mit 30% Transission und einer Strahlgeschwindigkeit von 820 m/s [**?**].

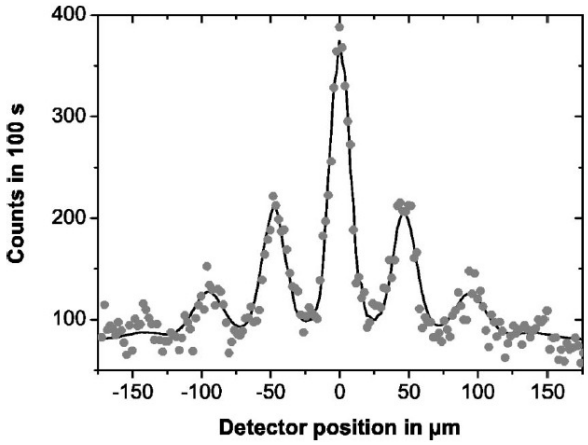


Abb. 9.63: Streuung von C_{60} Molekülen an einem Mehrfachschlitz [?].

Ein Beispiel aus der Chemie

Ähnlich gelagerte Interferenzexperimente an noch größeren Molekülen wie C_{60} [?] oder C_{70} [?] Fullerenen stellen eine experimentelle Herausforderung dar, weil λ_{dB} mit der Teilchengröße immer stärker abnimmt. Abb. 9.63 zeigt Interferenz bei der Beugung von C_{60} Molekülen. Mit hohem technischen Aufwand ist es gelungen, den Welle-Teilchen-Dualismus auch in Biomolekülen nachzuweisen, so zum Beispiel in Gramicidin A1. Gramicidin besteht aus 15 Aminosäuren und hat eine Masse von 1882 amu ($3.13 \cdot 10^{-24}$ kg):

Matter-wave interference of a native polypeptide [?]**:** The de Broglie wave nature of matter is a paradigmatic example of quantum physics and it has been exploited in precision measurements of forces and fundamental constants. However, matter-wave interferometry has remained an outstanding challenge for natural polypeptides, building blocks of life, which are fragile and difficult to handle. Here, we demonstrate the wave nature of gramicidin, a natural antibiotic composed of 15 amino acids. Its center of mass is delocalized over more than 20 times the molecular size in our time-domain Talbot-Lau interferometer. We compare the observed interference fringes with a model that includes both a rigorous treatment of the peptides quantum wave nature as well as a quantum chemical assessment of its optical properties to distinguish our result from classical predictions. The realization of quantum optics with this prototypical biomolecule paves the way for quantum-assisted measurements on a large class of biologically relevant molecules.

Abb. 9.64 zeigt ein Beugungsbild, gemessen an Phthalocyanin ($C_{32}H_{18}N_8$) [?]. Das experimentelle Ergebnis deutlich macht, dass das Konzept der Materiewellen nicht auf Elementarteilchen beschränkt ist, sondern auch für größere Komplexe seine Gültigkeit behält.

[70] $1\,\mathrm{K} = 8.62 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV}$

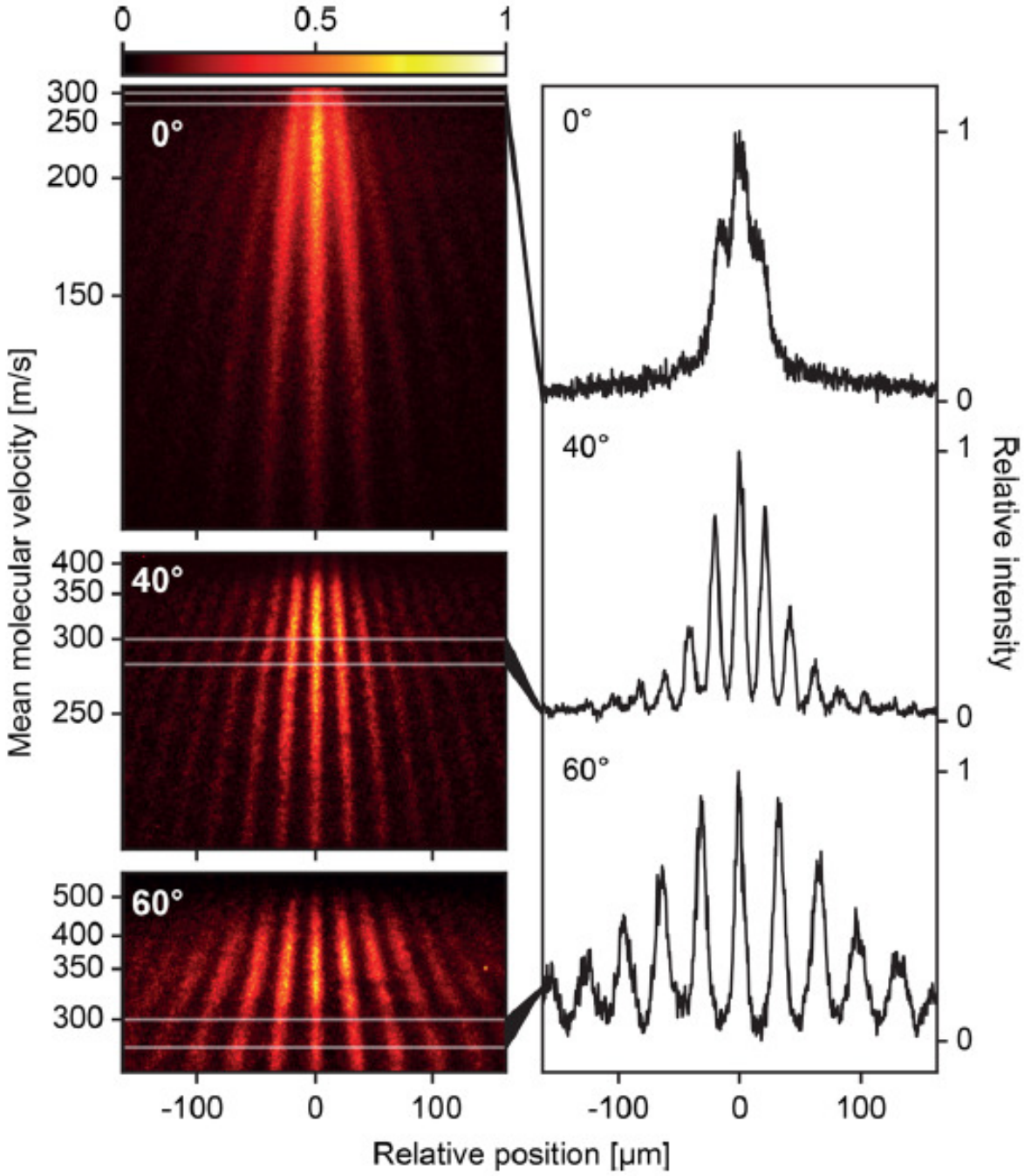


Abb. 9.64: Beugung von Phthalocyanin (PcH2) an einem Transmissionsgitter (gedreht um 0^o (oben), 40^o (Mitte) und 60^o (unten). Das Drehen des Gitters verringert die effektive Spaltbreite, erhöht die Trennung der Spitzen und verbreitert die Einhüllende des Einzelspalts [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Ein Proton, ein Elektron und ein Sauerstoffatom passieren bei gleicher Geschwindigkeit einen engen Schlitz (Breite 1 μm). Bei welchem Teilchen ist der Abstand der Interferenzmaxima am größten?[71]

(a) Beim Proton.

(b) Beim Elektron.

(c) Beim Sauerstoffatom.

(d) Alle drei Muster gleichen sich.

(e) Keines der Teilchen erzeugt ein Beugungsmuster.

Aufgabe 3.2: Welche typische Wellenlänge weisen Elektronen in einem Metall auf?

In einem Metall bewegen sich die Leitungselektronen quasifrei. Ihre mittlere Geschwindigkeit[72] v_{rms} kann man aus der Temperatur des Festkörpers T_K abschätzen mit

$$\begin{aligned} v_{rms} &= \sqrt{\frac{3\,k_B \cdot T_K}{m_e}} \\ v_{rms} &= \sqrt{\frac{3\,(1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}) \cdot (300\,\mathrm{K})}{9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} \\ v_{rms} &= 1.17 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine deBroglie-Wellenlänge von

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{m_e \cdot v_{rms}} = 6.2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}$$

Tatsächlich haben die Elektronen im Metall nicht nur eine Geschwindigkeit. Hier handelt es sich aber um einen typischen Wert. Die maximalen Geschwindigkeit sind sogar noch eine Größenordnung höher. Beispielsweise erreichen Elektronen an der so genannten Fermi-Energie Geschwindigkeiten von $v_{\max} = 1.07 \cdot 10^6$ m/s in Natrium und $1.39 \cdot 10^6$ m/s in Silber.[73]

[71] Antwort: (b)

[72] *rms* : *root-mean-square*

[73] Man beachte, dass aufgrund der vielen Stöße, die Driftgeschwindigkeit der Elektronen mit $v_{drift} = 10^{-4}$ m/s deutlich geringer ausfällt.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie unterscheidet sich die Interferenz von Wasserwellen von der Interferenz von Elektronen?

2. Wie kann man die Welleneigenschaften der Materie experimentell demonstrieren?

3. Bei der Elektronenbeugung an einer Probe beobachtet man ähnliche Beugungsstrukturen wie bei der Bestrahlung mit Röntgenlicht. Warum weiß man, dass die Wellenlängen von Elektron und Röntgenlicht übereinstimmen?

4. Würde man gleiche Beugungsstrukturen erhalten, wenn die Energie des Lichts und der Elektronen identisch wären?

9.4 Elektronenmikroskop



Forderungen, welche unumgänglich an die ersten Organismen gestellt werden müssen.

1. Minimale Größe, unerreichbar für das Mikroskop.
2. ...

Constantin Mereschkowsky, 1910 [?]

Rayleigh-Kriterium

Die Entdeckung, dass Materiewellen aus Elektronen sich genauso verhalten wie sichtbares Licht, nur bei deutlich geringerer Wellenlänge, hat zur Entwicklung hochauflösender Mikroskope geführt [? ?].[74] [75] Ein wichtiger Parameter zur Charakterisierung der Abbildung von optischen Instrumenten ist das Auflösungsvermögen. Die relevanten Parameter,

[74] The Nobel Prize in Physics 1986 was divided, one half awarded to Ernst Ruska *for his fundamental work in electron optics, and for the design of the first electron microscope*, the other half jointly to Gerd Binnig and Heinrich Rohrer *for their design of the scanning tunneling microscope.*

[75] The Nobel Prize in Chemistry 2017 was awarded jointly to Jacques Dubochet, Joachim Frank and Richard Henderson *for developing cryo-electron microscopy for the high-resolution structure determination of biomolecules in solution.*



Abb. 9.65: Die Sternentstehungsregion, bekannt als Säulen der Schöpfung, aufgenommen von Hubble-(links) und mit dem neuen James-Webb Weltraumteleskop (rechts). In der Infrarotaufnahme mit dem neuen Teleskop wird der zuvor undurchsichtige Staub transparent und die entstehenden Sternen im Inneren werden sichtbar. Aufgrund der längeren Wellenlänge, bei der James Webb Daten aufnimmt ist eine größere Spiegelfläche erforderlich. In ähnlicher Weise wird bei der Spektroskopie der Materie das Probeteilchen und die deBroglie Wellenlänge an die Größe der Strukturen angepasst [**?**].

die die Auflöcung limitieren, sind das Rayleigh-Kriterium und die numerische Apertur.[76]

Golden eye: On 11 July, in a live broadcast from the White House, U.S. President Joe Biden unveiled the first image from what he called a miraculous new space telescope. Along with millions of people around the world, he marveled at a crush of thousands of galaxies, some seen as they were 13 billion years ago. *It's hard to even fathom*, Biden said, see Fig. 9.65.

2022 Breakthough of the year [**?**]

In der Optik wird durch einen engen Spalt ein Beugungsmuster erzeugt. Die resultierende Intensitätsverteilung verschmiert die Abbildung. Man definiert das maximale Auflösungsvermögen über den Überlapp der resultierenden Beugungsmuster, siehe Abb. 9.66. Aus dieser Analyse kann abgeleitet werden, dass man mit einem optischen Instrument nur Objekte bestimmter Größe räumlich getrennt beobachten kann. Man betrachtet dazu das Beugungsmuster eine kreisförmigen Apertur mit Durchmesser d. Das

[76] *Lexikon:* Die **numerische Apertur** ist der Sinus des Öffnungswinkels, unter dem Licht in das Objektiv eines Mikroskops eintritt.

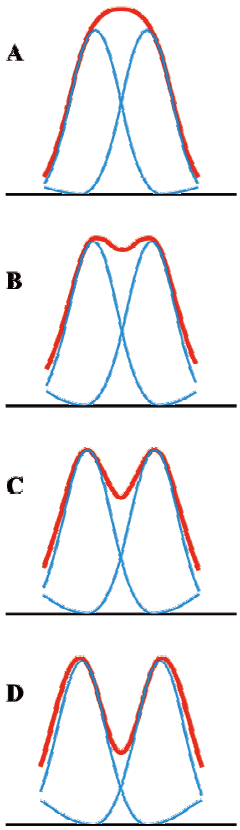


Abb. 9.66: Intensitätsverteilung bei kaum getrennten Lichtquellen. A: Der Abstand der Lichtquellen entspricht in etwa der Halbwertsbreite der Helligkeitsverteilungen. In diesem Fall können die Lichtquellen nicht aufgelöst werden. B: Sparrow Limit: Es gibt einen merklichen Abfall der Intensität zwischen den Maxima. C: Rayleigh-Kriterium: Das Maximum der ersten Beugungsordnung befindet sich im ersten Beugungsminimum des anderen. D: Die Punkte sind deutlich voneinander getrennt [**?**].

erste Minimum im Beugungsmuster erscheint bei einem Winkel Θ von[77]

$$\Theta_{\text{min}} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{d} \tag{9.56}$$

Das ist das Rayleigh-Kriterium. Es besagt, dass die Auflösungsgrenze in etwa der halben Wellenlänge des verwendeten Lichts entspricht. Für sichtbares Licht bedeutet das, dass Strukturen, die kleiner sind als etwa 300 nm, nicht aufgelöst werden können.

Welche Auflösung ist mit Hilfe optischer Spektroskopie erreichbar? Corona-Viren haben eine Größe von 150 nm und können damit mit einem optischen Mikroskop nicht scharf

[77] λ: Wellenlänge des verwendeten Lichts

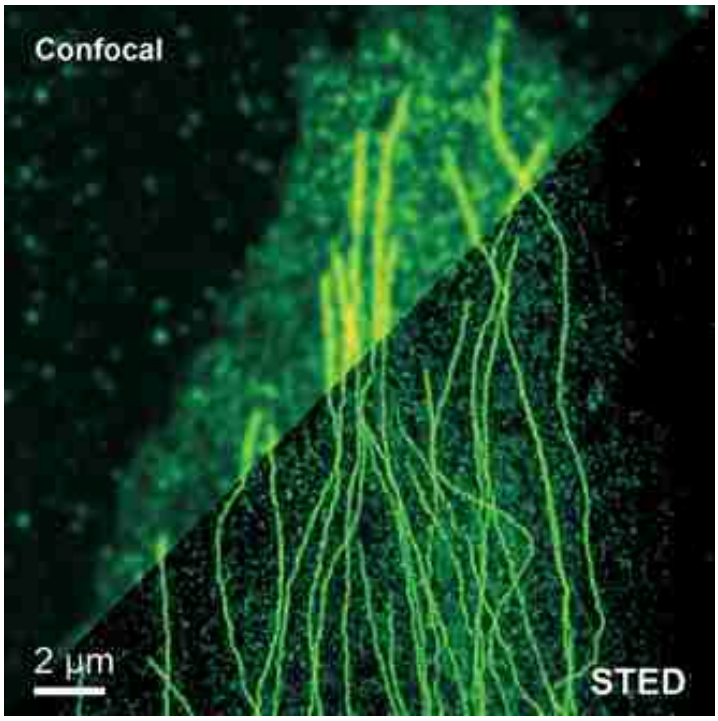


Abb. 9.67: Eine neue Mikroskopietechnik (unten rechts) zeigt Details von Zellstrukturen, die noch nie zuvor mit Licht gesehen wurden. Die Methode, die als superaufgelöste Fluoreszenzmikroskopie bezeichnet wird, basiert auf der Kombination zweier separater Techniken: Stimulierte Emissionsverarmung (STED-Mikroskopie), die einen Laser verwendet, um Moleküle in bestimmten Bereichen der Zelle zu beleuchten und Einzelmolekül-Mikroskopie. Hier sammelt man Bilder von fluoreszierenden Molekülen, um in der späteren Analyse feinere Details zu enthüllen [**?**].

betrachtet werden. Erst kürzlich konnte diese fundamentale Grenze mit einem Trick überlistet werden.[78] Abb. 9.67 zeigt den Unterschied zwischen herkömmlicher konfokaler[79] und STED[80] Mikroskopie am Beispiel von Tubulinstrukturen in einer mit einem Farbstoff markierten Vero-Zelle.

Für 1 keV Elektronen berechnet man eine deBroglie Wellenlänge von $1.81 \cdot 10^{-12}$ m. Muss

[78] The Nobel Prize in Chemistry 2014 was awarded jointly to Eric Betzig, Stefan W. Hell and William E. Moerner *for the development of super-resolved fluorescence microscopy.*

[79] *Lexikon:* Im Gegensatz zu herkömmlichen Mikroskopen, die inkohärente Lichtquelle verwenden, nutzen Konfokal-Mikroskope einen Laser zur Beleuchtung der Probe. Bei der Aufnahme werden Bilder in verschiedenen Tiefen der Probe aufgenommen. Dies ermöglicht die Abbildung lebender Proben.

[80] *Lexikon:* **Stimulated Emission Depletion Microscopy (STED)** ist eine Mikroskopietechnik, die die beugungsbegrenzte Auflösung konfokaler Mikroskope enorm verbessert hat. Die Erhöhung der Auflösung resultiert aus der Unterdrückung der Fluoreszenz von Farbstoffen in den äußeren Bereichen eines Laserstrahls.



Abb. 9.68: Elektronenmikroskopische Aufnahme eines Regenwurms [**?**].

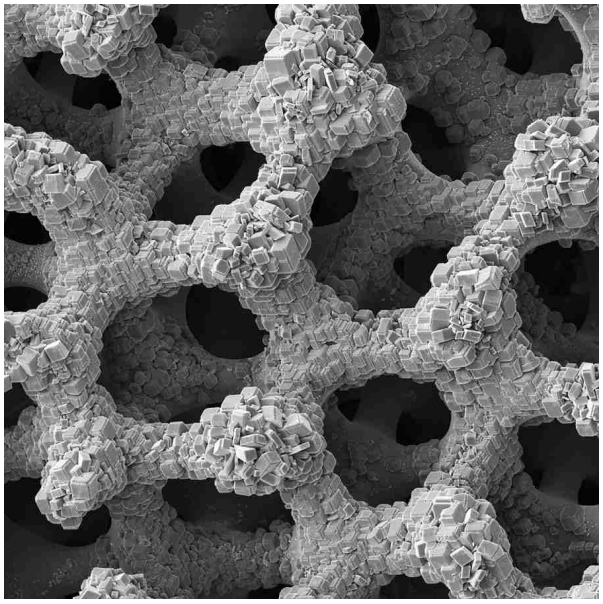


Abb. 9.69: Rasterelektronenaufnahme der Gehörknöchelchen eines Seesternskeletts. Die Gitterstruktur macht die Skelette leicht, aber robust und widerstandsfähig gegenüber Beschädigungen [**?**].

man relativistische Effekte berücksichtigen, ergibt sich:

$$\lambda_{dB} = \frac{1}{\gamma} \frac{h}{m_e \cdot v_e} \tag{9.57}$$

Durch Elektronenstrahlen könnte sich also eine erheblich Steigerung des Auflösungsvermögens ergeben, siehe den Kopf eines Regenwurms (Abb. 9.68) oder die Aufnahme eines Seestern-Skeletts (Abb. 9.69).

Link to video **Have you ever seen an atom?**

Aufbau von Elektronenmikroskopen

Die Komponenten eines Elektronenmikroskops entsprechen im wesentlichen dem eines optischen Mikroskops. Allerdings werden statt Glaslinsen magnetische Felder als Linsen-

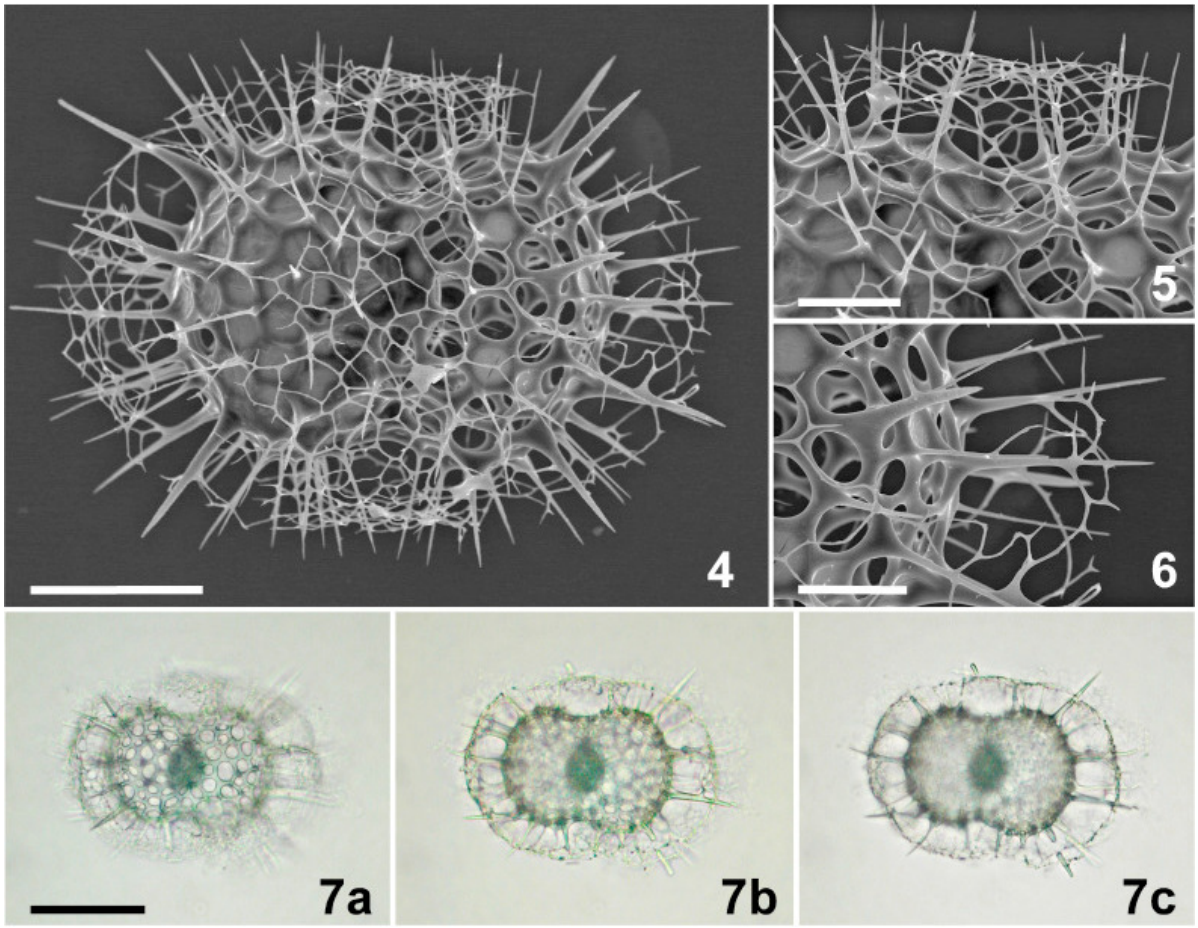


Abb. 9.70: Rasterelektronenmikroskopische Aufnahmen (4-6) und lichtmikroskopische Aufnahmen (7a-c) von Didymocyrtis ceratospyris Haeckel. Maßstab in (4) 50 μm, in (5, 6) 20 μm, in (7a-7c) 100 μm. [**?**].

elemente verwendet. Der Bildkontrast entsteht durch Streuung und nicht durch die Absorption der Elektronen. Schwere Atome streuen stärker und deshalb erscheinen Strukturen, die Atome hoher Ordnungszahl enthalten in der elektronenoptischen Aufnahme dunkler. Die Führung des Strahls ist gegenüber Licht komplexer, da der Transport im Vakuum erfolgt. Weiter ist es erforderlich, den Durchmesser des Elektronenstrahls stark einzuengen. Dadurch reduziert sich das theoretisch mögliche Auflösungsvermögen, weil die numerische Apertur stark verringert wird. Dennoch erreicht ein Elektronenmikroskop Vergrößerungen, die deutlich höher sind als Lichtmikroskope. Abb. 9.70 zeigt einen direkten Vergleich (Elektronenmikroskop: 4-6; Lichtmikroskop: 7) [**?**]. Elektronenmikroskope gibt es in zwei Ausführungen, als Raster-Elektronenmikroskop und als Transmissions-Elektronenmikroskop (Abb. 9.71). Vorteile sind:

- Raster-Elektronenmikroskop (REM)[81]

[81] *Lexikon:* Ein **Raster-Elektronenmikroskop (REM)** scannt einen fokussierten Elektronenstrahl

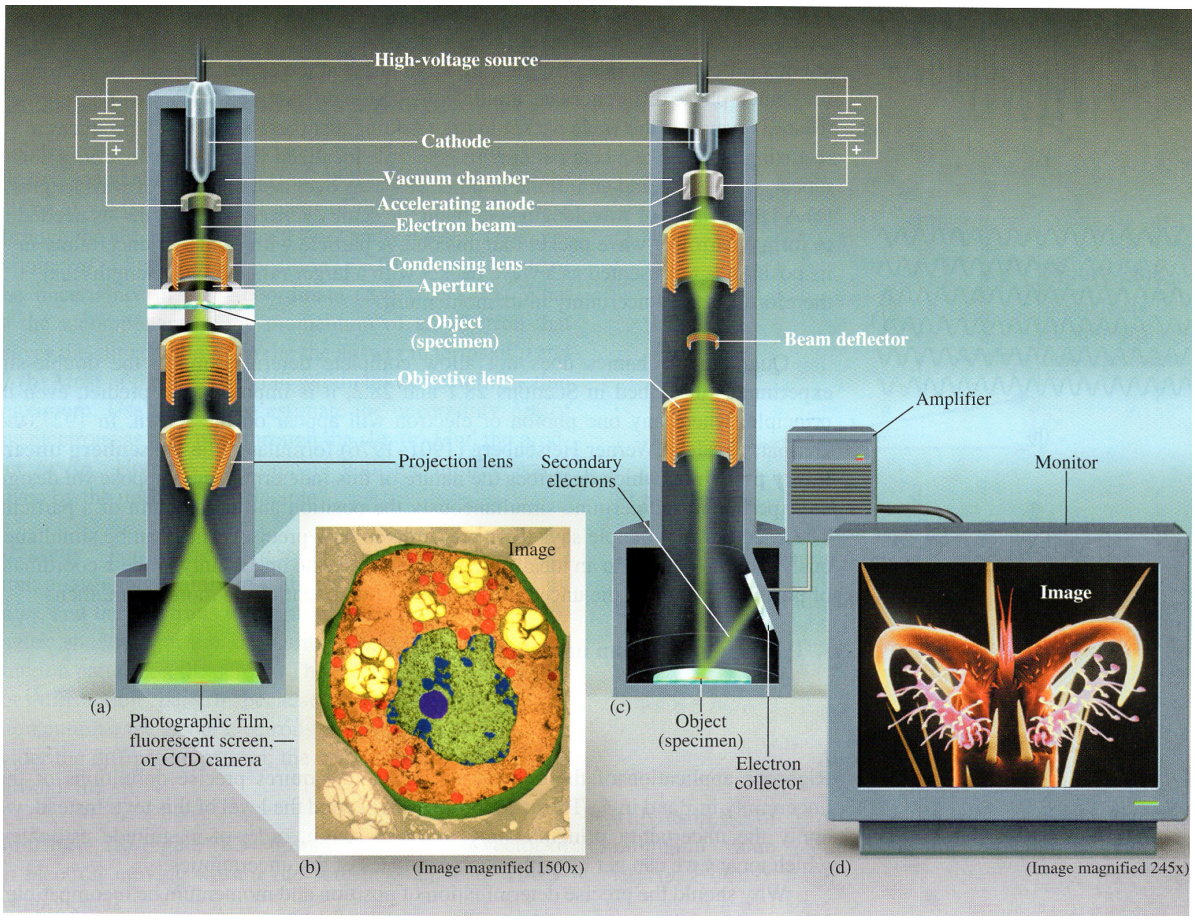


Abb. 9.71: Vergleich des Aufbaus und der Abbildungseigenschaften von Transmissions- (links) und Raster-Elektronenmikroskopen (rechts) [**?**].

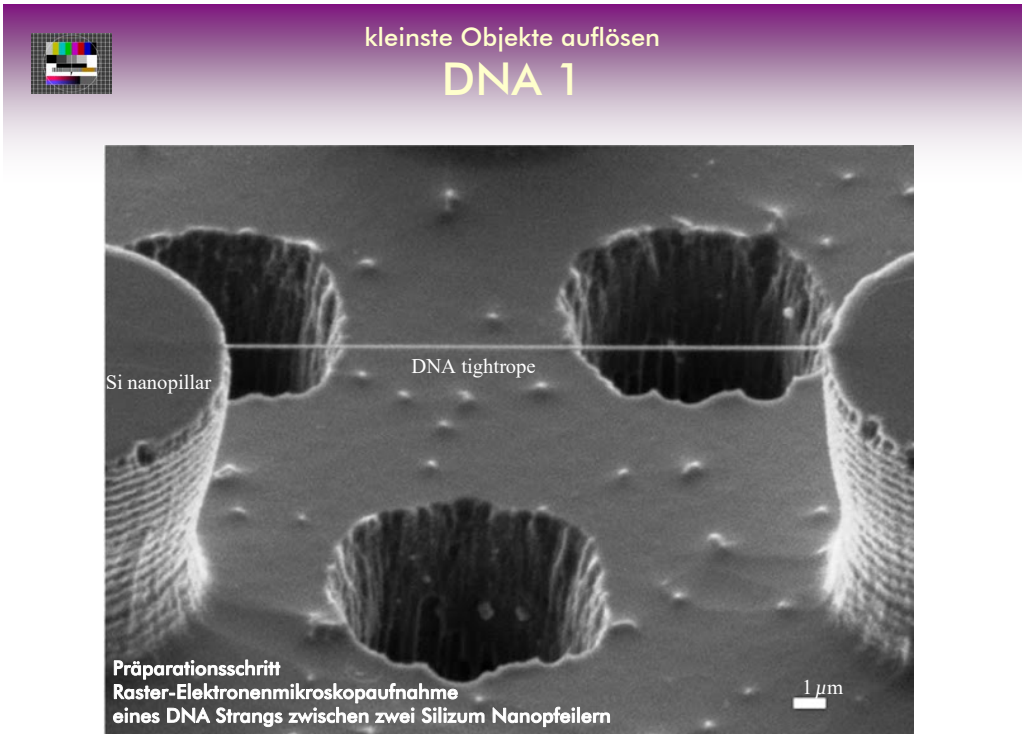
- Die Aufnahme eines Bildes erfordert einen geringeren Zeitaufwand.
- Bei einem REM ist die Probenvorbereitung nicht so aufwendig.
- Mit einem REM können dickere und größere Proben untersucht werden.

- Transmissions-Elektronenmikroskop (TEM)[82]

über eine Oberfläche, um ein Bild zu erzeugen. Informationen über die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Probe werden aufgezeichnet und ergeben ein vergrößertes Bild. Der Vergrößerungsfaktor kann $2 \cdot 10^6$ betragen. Manfred von Ardenne entwickelte 1937 ein Rasterelektronenmikroskop mit hoher Auflösung, wobei ein fein fokussierter Elektronenstrahl die Probe abrastert [**?**].

[82] *Lexikon:* Ein Transmissions-Elektronenmikroskopie, (TEM) verwendet einen breiten Elektronenstrahl, um ein Bild der inneren Struktur einer Probe zu erstellen. Ein Elektronenstrahl wird durch eine Probe geschickt und erzeugt ein Bild, das Auskunft gibt über die Morphologie, Zusammensetzung und Kristallstruktur der Probe. Die Vergrößerung kann bis $50 \cdot 10^6$ betragen. Strukturen auf atomarer Ebene können aufgelöst werden. Diese Elektronenmikroskope werde häufig verwendet, um molekulare und zelluläre Strukturen zu untersuchen.

- TEM-Bilder haben eine höhere Auflösung und liefern kristallografische und atomare Informationen.
- TEM-Aufnahmen sind häufig einfacher zu interpretieren.



Gentile et al. *Direct Imaging of DNA Fibers: The Visage of Double Helix* Nanoletters 12, 6453 (2012)

Anwendungen^{4LP}

Kürzlich ist es an der Universität von Chicago erstmalig gelungen, Atome hoher Ordnungszahl in einer Molekülverbindung mit einem Rasterelektronenmikroskop sichtbar zu machen. A. V.Crewe setzte Uranylacetat mit Pyromellithsäure um und gewann eine Verbindung, in der die beiden Uranatome den festen Abstand von rund 13Åbesitzen. Man erkennt man mehrere Fleckenpaare. Andere Flecken liegen dazu schräg und lassen überdies aus einer gewissen regelmäßigen Häufung von Paaren die Neigung des Salzes zur Polymerisation erkennen.

Die Umschau 17,645 (1971)

Ein Beispiel aus der Medizin

Die Abbildung zeigt die Oberfläche eines Siliziumkristalls (Si). Durch einen Ätzprozess wurde die Oberfläche strukturiert. Der dargestellte Bereich umfasst mehrere 10 μm. Zwischen den Si-Türmen ist ein DNA-Strang gespannt [**?**]. Die Vergrößerung in Abb. 9.72 zeigt einen Ausschnitt der DNA. In der Detailaufnahme deutet sich eine feinere Struktur an. Aus der Analyse des Höhenprofils kann auf die Doppelhelixstruktur der DNA geschlossen werden. Man erkennt, dass die Auflösung der elektronenmikroskopischen

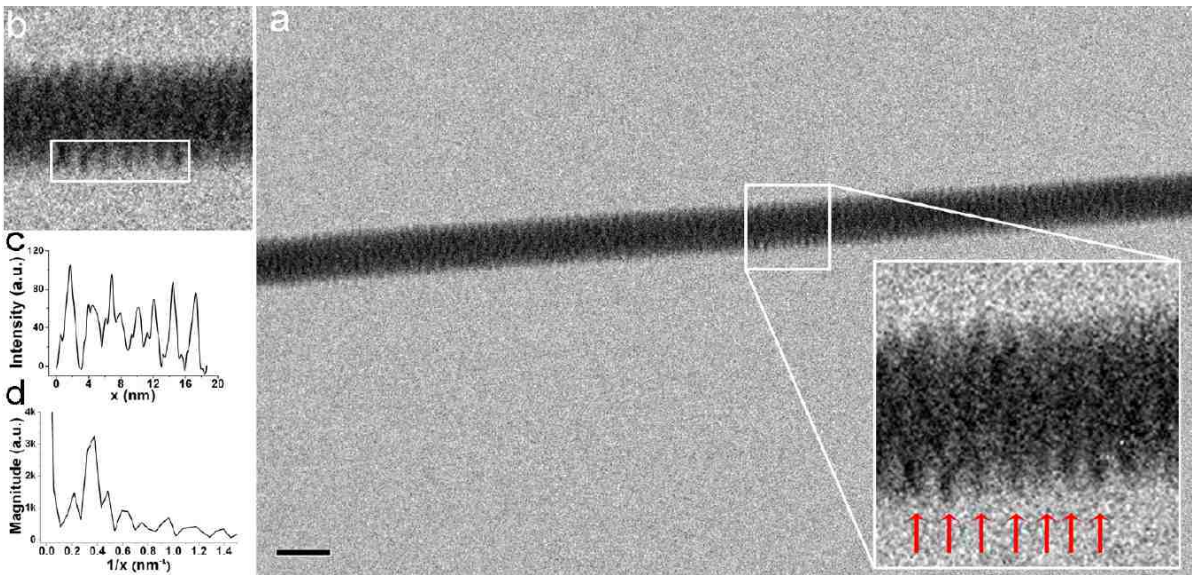


Abb. 9.72: TEM-Bild mit Intensitätsprofil von λ-DNA-Fasern. (a) TEM-Bild einer DNA-Faser. Die Vergrößerung zeigt Details der DNA-Faser; die roten Pfeile weisen auf die Steigung von 2.7 nm der A-Doppelhelix hin. Der Maßstabsbalken entspricht einer Länge von 20 nm. (c) und (d) zeigen Resultate einer genaueren Analyse [**?**].

Aufnahme im nm-Bereich liegt und damit um einen Faktor 10^3 höher ist, als die eines Lichtmikroskops.

Ein Beispiel aus der Proteinforschung

Eine interessante Möglichkeit große Biomoleküle abzubilden ist die Kryo-Elektronenmikroskopie. Proteine eingebettet in eine etwa 200 nm dicken Wasserschicht werden so schnell eingefroren, dass das Wasser nicht kristallisieren kann. Damit behalten die Biomoleküle ihre natürlicher Form und können im Vakuum mit dem Elektronenmikroskop untersucht werden. Ein Problem ist, dass der intensive Elektronenstrahl die Moleküle innerhalb kurzer Zeit zerstört, so dass man nur mit geringen Elektronenströmen arbeiten kann. Das führt zu einem schlechten Signal-zu-Rausch Verhältnis und das Bild muss mit Hilfe aufwendiger Bildverarbeitung rekonstruiert werden. Ein Vorteil ist aber, dass man große Proteinkomplexe untersuchen kann. Weiter erlaubt die Methode, da Einzelmoleküle untersucht werden, unterschiedliche Strukturen aufzulösen.

Ein Beispiel aus der Chemie

Welche Auflösung kann man mit einem Elektronenmikroskop erreichen? Zwei Hauptprobleme, die die Auflösung und Interpretation elektronenmikroskopischer Bilder begren-

zen , sind Aberration und Mehrfachstreuung. Ein Verfahren mit höchster Auflösung ist Elektronen-Ptychografie. Die Methode nutzt die kohärente Streuung, um ein Bild aus den Beugungsmustern im Fernfeld zu rekonstruieren. Die Probe wird mit dem Elektronenstrahl abgerastert und das Beugungsbild der Streuung der Elektronen an den Atomen, unter unterschiedlichsten Winkeln betrachtet, aufgezeichnet. Über Bildverarbeitung wird im Anschluss die Struktur der Probe berechnet. Damit konnte ein $PrScO_3$ Kristall mit 10^8-facher Vergrößerung betrachtet werden [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Welche Auflösungsgrenze hat das Hubble-Weltraumteleskop? Wie weit (D) müssen zwei punktförmige Sterne in Andromeda (Entfernung $R = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{Lj}$) von einander entfernt sein, damit man sie mit Hubble noch separieren kann? Der Durchmesser des zentralen Spiegels beträgt 2.4 m.

Das Weltraumteleskop Hubble nimmt Bilder im optischen Spektralbereich auf. Wir wählen mit 550 nm eine Wellenlänge im Maximum unserer optischen Wahrnehmung.

$$\begin{aligned}\Theta_{\min} &= 1.22\,\frac{\lambda}{d}\\ \Theta_{\min} &= 1.22\,\frac{550\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{2.4\,\mathrm{m}}\\ \Theta_{\min} &= 2.8\cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

Damit lässt sich der Abstand berechnen, den Hubble noch aufzulösen vermag:

$$\begin{aligned}D &= R\cdot\theta\\ D &= (2\cdot 10^6\,\mathrm{Lj})\cdot(2.8\cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad})\\ D &= 10.56\,\mathrm{Lj}\end{aligned}$$

In Galaxien haben die Sterne einen mittleren Abstand von einigen Lichtjahren. Hubble kann also in Andromeda im Prinzip alle Sterne individuell auflösen. Wie ändert sich das, wenn man Radioteleskope verwendet. Das Radioteleskop Effelsberg hat einen Durchmesser von 100 m, allerdings ist das Teleskop gebaut, um Wellenlängen von 3.5 bis 900 mm zu detektieren. Rechnen Sie nach!

Aufgabe 4.2: Ein α-Teilchen hat eine kinetische Energie von 5.5 MeV. Welche räumliche Auflösung kann man erreichen und reicht diese aus, um einen Atomkern zu untersuchen?
Die Ruheenergie des α-Teilchens ist

$$E_\alpha = m_\alpha\cdot c^2 = 3730\,MeV$$

Der relativistische Impuls beträgt

$$\begin{aligned}p_\alpha\cdot c &= \sqrt{(E_{kin}+E_\alpha)^2 - E_\alpha^2}\\ p_\alpha\cdot c &= \sqrt{(E_{kin}^2 + 2\,E_\alpha\cdot E_{kin}}\\ p_\alpha\cdot c &\approx \sqrt{2\,E_\alpha\cdot E_{kin}}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine deBroglie Wellenlänge von

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha &= \frac{h}{p_\alpha} \\
\lambda_\alpha &= = \frac{h \cdot c}{p_\alpha \cdot c} \\
\lambda_\alpha &= \frac{h \cdot c}{\sqrt{2\, c^2 \cdot E_\alpha \cdot E_{kin}}} \\
\lambda_\alpha &= \frac{1240\,\mathrm{Mev} \cdot \mathrm{fm}}{\sqrt{2\,(3730\,\mathrm{MeV}) \cdot (5.5\,\mathrm{MeV})}} \\
\lambda_\alpha &= 6 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{fm}
\end{aligned}$$

Die deBroglie Wellenlänge des α-Teilchen ist klein genug, um Details des Atomkerns aufzulösen.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Erzielt man in einem Mikroskop mit roten Photonen eine bessere Auflösung als mit blauen Photonen?
2. Was ist der Hauptunterschied zwischen einem SEM[83] und einem[84] TEM!
3. Wie klein sind die Strukturen, die man mit einem Elektronenmikroskop beobachten kann?
4. Warum erreicht man mit Elektronenmikroskopen nicht die theoretische Auflösungsgrenze?
5. Sehen Sie Vor- und Nachteile bei der Verwendung eines SEM oder TEM?
6. Warum kann man Elektronenmikroskope nicht bei Aldi kaufen?
7. Laser verwendet man zum Brennen und Lesen von CDs. Warum ist ein Laser, der mit blauem Licht arbeitet, besser geeignet, um eine höhere Informationsdichte zu erreichen, als ein Laser, der im infrarotem Spektralbereich arbeitet?
8. Kann man mit einem Elektronenmikroskop lebende biologische Objekte untersuchen?
9. Im Gegensatz zu den Planeten des Sonnensystems funkeln die Sterne. Warum?

[83] SEM: scanning electron microscope
[84] TEM: transmission electron microscope

Wellenpaket^{4LP}



The dividing line between the wave or particle nature of matter and radiation is the moment NOW. As this moment steadily advances through time it coagulates a wavy future into a particle past.

William Lawrence Bragg

Lichtausbreitung in Medien

Die Phasengeschwindigkeit v_p einer monochromatischen, elektromagnetischen Welle in einem dispersiven Medium ist definiert als die Geschwindigkeit an den Punkten einer Wellenfront, die mit konstanter Phase propagiert:

$$v_{phase} = \nu \cdot \lambda \tag{9.58}$$

$$v_{phase} = \frac{\omega}{2\,\pi}\frac{2\,\pi}{k} = \frac{\omega}{k} \tag{9.59}$$

wobei k die Wellenzahl, ω die Kreisfrequenz der Lichtwelle, $\nu = \omega/2\,\pi$ und $\lambda = 2\pi/k$. In der Regel schreibt man die Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Brechungsindex n:

$$v_{phase} = \frac{c}{n} \tag{9.60}$$

Betrachtet man die Ausbreitung der Strahlung, so ist das Licht in der Regel nicht monochromatisch[85] sondern hat eine gewisse spektrale Breite.Das spektrales Ausbreitungsverhalten wird durch die Gruppengeschwindigkeit v_g beschrieben:

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{9.61}$$

Mit dieser Geschwindigkeit breitet sich der Schwerpunkt der Einhüllenden des Lichtpulses aus Im Vakuum entspricht die Gruppengeschwindigkeit der Phasengeschwindigkeit, da sich alle Frequenzkomponenten mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. Das ist anders in einem dispersiven Medium. Hier unterscheidet sich die Phasengeschwindigkeit von der Gruppengeschwindigkeit. Man definiert deshalb einen effektiven Brechungsindex für die Gruppengeschwindigkeit einer Welle mit einer Zentralfrequenz ω_0:

$$n_g = n(\omega_0) + \omega_0 \left(\frac{\mathrm{d}n(\omega_0)}{\mathrm{d}\omega_0} \right) \tag{9.62}$$

Was haben diese Überlegung zur Optik mit dem Phänomen Materiewelle zu tun?

Eine ganze Menge, denn die Eigenschaften von DeBroglie-Wellen werden in ähnlicher Weise behandelt! Eine monochromatische Materiewelle dehnt sich über das gesamte Universum ($-\infty \leq x \leq +\infty$) aus. Eine solche Welle ist also nicht geeignet, ein Teilchen zu beschreiben, das sich an einem bestimmten Ort befindet. In der Quantenphysik ist die Annahme eines genau bestimmten Ortes nicht haltbar. Wie sich zeigen wird, ist der Aufenthaltsort eines Objektes nur annähernd bekannt. Näheres dazu im nächsten Kapitel *Heisenbergschen Unschärferelation.*

Ausbreitung von Materiewellen

Zur Überprüfung dieser Aussage betrachten wir eine monochromatische Materiewelle. Diese Welle bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit v_{phase}. Das ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Phasenfront bewegt. Wie jetzt gezeigt wird, ist diese Eigenschaft nicht vereinbar mit dem Konzept einer Materiewelle. Da $E = h\,\nu$ und $p = h/\,\lambda$ erhalten wir

$$v_{phase} = \frac{E}{h}\frac{h}{p} = \frac{E}{p} \tag{9.63}$$

Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten ist die Gesamtenergie $E = m_0 \cdot c^2$ und $p = m_0 \cdot v$. Eingesetzt liefert dies

$$v_{phase} = \frac{E}{p} = \frac{m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot v} = \frac{c^2}{v} \tag{9.64}$$

[85] *Lexikon:* Monochromatische Wellen sind periodische Wellen, die man mit Hilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen, mit EINER Kreisfrequenz und EINER Wellenzahl ausdrücken kann.

Da ein Teilchen sich nicht schneller als die Lichtgeschwindigkeit bewegen kann ($v < c$), ist die Phasengeschwindigkeit einer deBroglie Materiewellen stets größer als die Lichtgeschwindigkeit. Weiter können Teilchen- und Phasengeschwindigkeit niemals gleich werden, denn wenn ($v < c$), dann ergibt sich, dass v_{phase} größer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Wie stellt sich das Ganze dar, wenn sich das Teilchen relativistisch bewegt?

Die Gesamtenergie ist

$$E_{ges} = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2} \tag{9.65}$$

wobei m_0 die Ruhemasse. Damit ergibt sich eine Phasengeschwindigkeit von

$$\begin{aligned} v_{phase} &= \frac{E}{p} \\ &= \left(\frac{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}{p^2}\right)^{1/2} \\ &= c\left(\frac{m_0^2 \cdot c^2}{p^2} + 1\right)^{1/2} \\ v_{phase} &= c\left(\frac{m_0^2 \cdot c^2 \lambda^2}{h^2} + 1\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{9.66}$$

Da der Term $m_0^2 \cdot c^2 \cdot \lambda^2 / h^2 > 0$ ergibt sich auch hier eine Phasengeschwindigkeit, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit. Eine überlichtschnelle Phasengeschwindigkeit verletzt nicht die Postulate der Speziellen Relativitätstheorie, da die Ausbreitung der Phasenfront keine Energie überträgt. Die Verbreitung von Informationen erfolgt NICHT über die Phasengeschwindigkeit. Man muss deshalb von einer monochromatischen Welle, als Träger der Information über eine Materiewelle, abgehen. Es ist daher notwendig, entweder die Frequenz oder Amplitude zu modulieren, um Informationen über den Teilchencharakter einer deBroglie-Materiewelle zu übermitteln.

Fazit: Materiewellen sind keine monochromatischen Wellen.

Zur Beschreibung von Materiewellen greift man auf Konzepte der Wellenoptik zurück. Genauer gesagt auf die Superposition von Wellen leicht unterschiedlicher Frequenz. Ein ähnlich gelagertes Beispiel ist die Schwebung in der Akustik. Es sei angemerkt, dass Gitarristen diesen Effekt nutzen, um ihr Instrument zu stimmen.

Simulation: **Fourier: Making Waves**

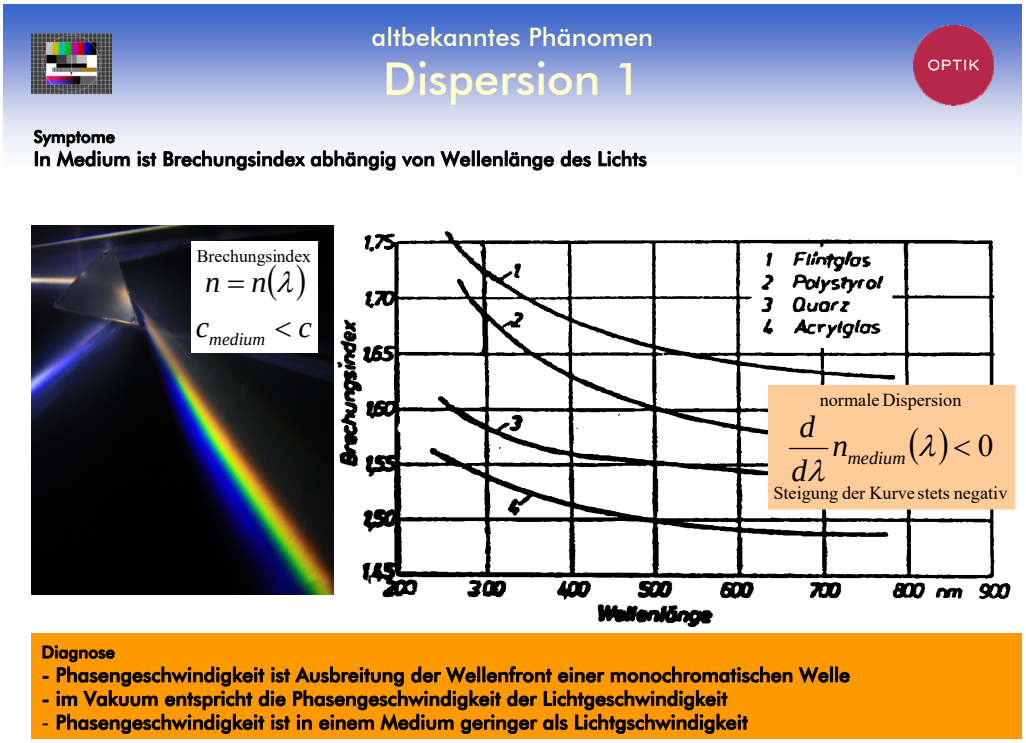
Link to video **Schwebung**

Die resultierende Welle, gebildet aus der Überlagerung von Einzelwellen unterschiedlicher Frequenz, wird charakterisiert die Phasen- (v_{phase}) und die Gruppengeschwindigkeit

(v_{group}). Diese geben Auskunft über Details der Ausbreitung der Welle. Für den Zusammenhang von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ergibt sich nach Rayleigh folgender Ausdruck

$$v_{group} = v_{phase} - \lambda \frac{d}{d\lambda} v_{phase} < v_{phase} \tag{9.67}$$

der darlegt, dass v_{group} stets geringer ist als v_{phase}. Die zugehörigen Effekte in der Ausbreitung resultieren dabei aus der Wechselwirkung mit dem Medium. In der Optik versteht man darunter die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Brechzahl des Mediums. Für Licht ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Wasser $c/1.33$, während man für Funkwellen einen Wert von $c/81$ ermittelt. Diese Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge bezeichnet man allgemein als Dispersion. Für die Vorlesung ist die Gruppengeschwindigkeit relevant, da diese die Geschwindigkeit des Energietransports charakterisiert. Denken Sie in diesem Zusammenhang an die kinetische Energie eines Teilchens. Die Gruppengeschwindigkeit ist die physikalisch wichtige Größe und charakterisiert, wie sich endliche Wellenzüge und Wellenpakete ausbreiten.



Dispersion

Zur Verdeutlichung betrachten wir die Lichtausbreitung in Medien. Die Abbildung zeigt die Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge des Lichts λ für unterschiedliche Gläser. Der Abfall des Brechungsindex n mit der Wellenlänge $(dn/\,d\lambda)$ wird als normale Dispersion bezeichnet. Damit ergeben sich Aussagen für die Phasengeschwindigkeit. Schon geringe Unterschiede in der Wellenlänge $(dn/\,d\lambda \neq 0)$ führen zu Unterschieden in der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Maxima einzelner Wellen, die sich zu einem be-

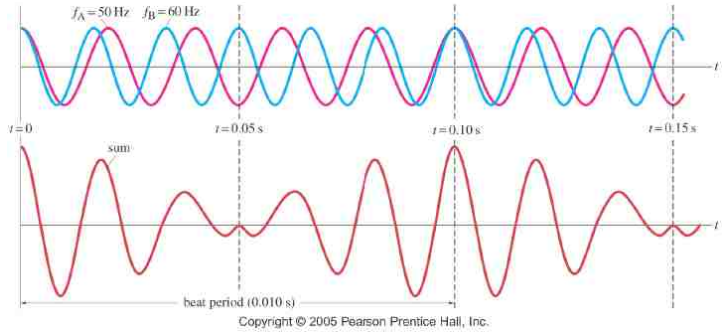


Abb. 9.73: Überlagerung von Wellen und Ausbildung einer Schwebung.

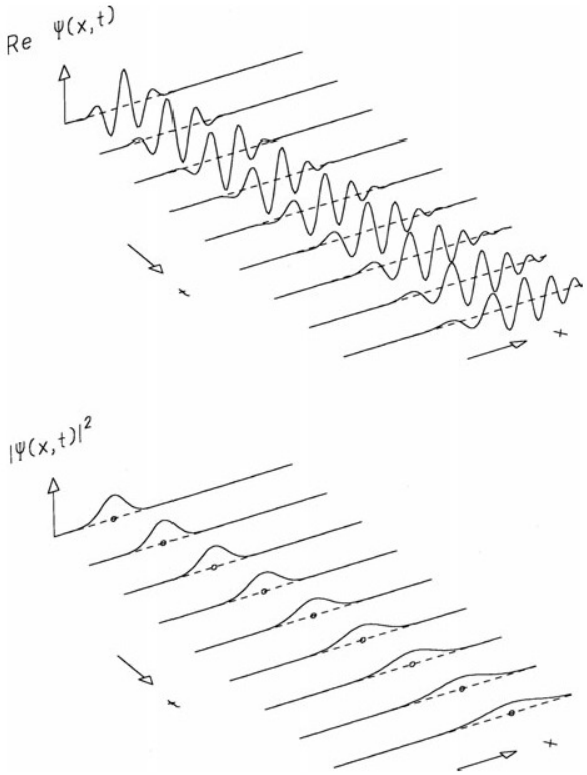


Abb. 9.74: Oben: Die Bewegung eines Wellenpakets repräsentiert die Bewegung eines Teilchens. Unten: Wahrscheinlichkeitsdichte des oben gezeigten Wellenpakets [**?**].

stimmten Zeitpunkt konstruktiv überlagern, separieren im Laufe der Zeit. Durch die Superposition von Wellen unterschiedlicher Frequenz bildet sich ein Schwebungsmuster, siehe Abb. 9.73. Eine Blitzlichtaufnahme der Welle zeigt eine Erhöhung der Amplitude an einem bestimmten Orten. Die Einhüllende der Welle breitet sich mit der Gruppengeschwindigkeit aus.

An dieser Stelle ein kurzer Vorgriff: In der Quantenphysik beinhaltet die so genannte Wellenfunktion Ψ alle Informationen über das Teilchen. Der Experimentator kann aber nur $|\Psi|^2$ beobachten. Diese beiden Größen sind in Abb. 9.74 dargestellt. Näheres dazu in der Vorlesung *Wellenfunktion*. Eine Materiewelle ist zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem bestimmten Raumgebiet konzentriert. In der Vorlesung *Heisenbergsche Unschärferelation* werden wir feststellen, dass dies zu Unsicherheiten im Messprozess führt. Diese Unschärfe in der Position, aber auch der Geschwindigkeit des Teilchens, vergrößern sich im Laufe der Zeit. Der Eine oder Andere wird an dieser Stelle bemerken, dass damit der Determinismus[86] in der klassischen Physik in Frage gestellt wird.

Betrachtet man die Zeitentwicklung einer Materiewelle (Abb. 9.75), beobachtet man, dass das Wellenpaket im Laufe der Zeit immer breiter wird. Gleichzeitig nimmt die Amplitude ab. Dieses Verhalten spiegelt die erhöhte Messunsicherheit wieder.

[86] *Lexikon:* **Determinismus** bedeutet, dass jeder Prozess im Universums und dazu zählen auch alle menschlichen Handlungen durch physikalische Gesetze eindeutig vorherbestimmt sind.

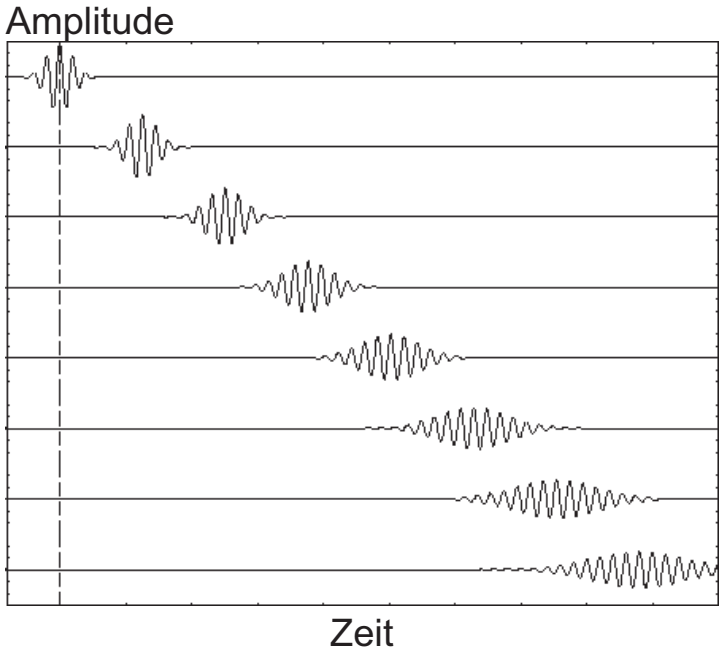


Abb. 9.75: Ein Wellenpaket zeigt während der Ausbreitung das Phänomen der Dispersion.

Eine Welle wird durch die Frequenz (ω) und die Ausbreitungsrichtung ($\vec{k}$) beschrieben. Als Funktion der Zeit kann damit die Amplitude zu jedem beliebigen Zeitpunkt/ Ort bestimmt werden. Setzt man Wellen der Form ($\cos(\omega_i\, t - k_i\, x)$) zusammen, ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip ein Ausdruck für die Schwebung:

$$y(x,\, t) = \cos[(\omega_{avg}+\Delta\omega)]\cdot t-(k_{avg}+\Delta k)\cdot x]+\cos[(\omega_{avg}-\Delta\omega)]\cdot t-(k_{avg}-\Delta k)\cdot x] \quad (9.68)$$

wobei k_{avg} die mittlere Wellenzahl, ω_{avg} die mittlere Frequenz, $\Delta k{=}k_2{-}k_1$ und $\Delta\omega{=}\omega_2{-}\omega_1$. Formt man diesen Ausdruck um, ergibt sich

$$y(x,\, t) = 2\, \cos((\Delta\omega)\cdot t - (\Delta k)\cdot x)\cdot\cos(\omega_{avg}\cdot t - k_{avg}\cdot x) \quad (9.69)$$

Für die uns interessierenden Materiewellen kann das Ergebnis so gedeutet werden. Die Einhüllende

$$A(x,\, t) = 2\, \cos((\Delta\omega)\cdot t - (\Delta k)\cdot x) \quad (9.70)$$

gibt Auskunft über die ungefähre Position. Der Ausdruck $\cos(\omega_{avg}\cdot t - k_{avg}\cdot x)$ beschreibt den Wellencharakter des Teilchens. In der Akustik ist die Schwebung eine periodische wiederkehrende Erhöhung der Lautstärke. Maxima findet man bei

$$\begin{aligned} (\Delta\omega)\cdot t - (\Delta k)\cdot x &= 0 \\ \frac{x}{t} &= \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \end{aligned} \quad (9.71)$$

Das ist der Ausdruck für die Gruppengeschwindigkeit v_{group} (Gl. 9.61). Multipliziert man den Ausdruck mit einer Gaussschen Glockenfunktion kann man sich eines der Schwebungsmaxima herauspicken. Das ist das akustische Analogon zum Wellenpaket eines

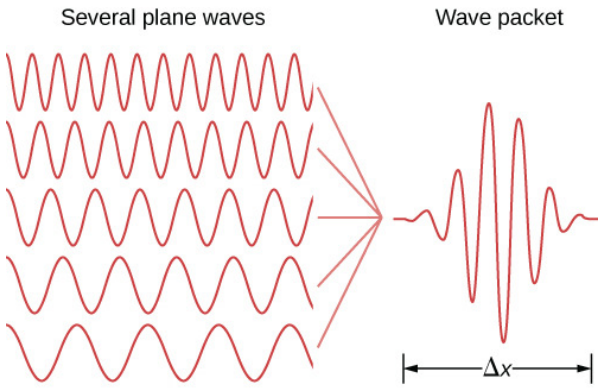
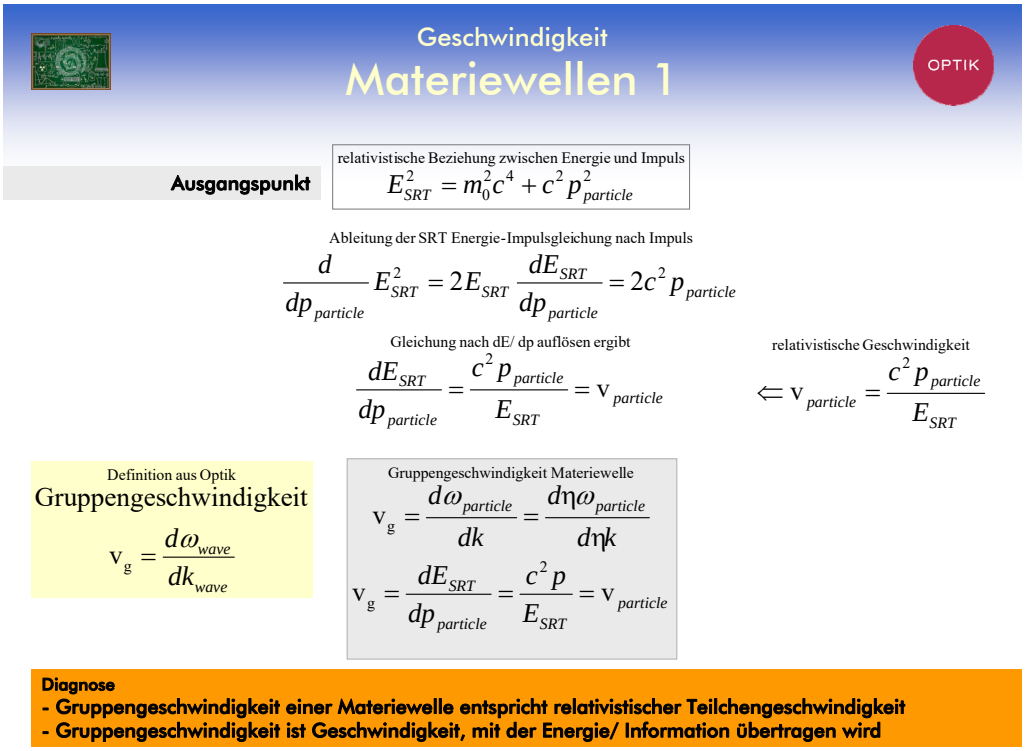


Abb. 9.76: Das Superposition von Wellen unterschiedlicher Wellenlänge erzeugt eine resultierende Welle, die im Raum lokalisiert ist.

Teilchens. Abb. 9.76 illustriert, wie man aus einer Vielzahl von Einzelwellen in einem bestimmten Raumgebiet Δx zu einer bestimmten Zeitspanne Δt ein lokalisiertes Wellenpaket erzeugen kann. Wie wir im Kapitel *Wellenfunktion* sehen werden, stellt das Wellenpaket ein materielles Teilchen dar. Welche Abhängigkeit es zwischen der Position und dem Impuls eines Teilchens gilt, erläutert die Vorlesung *Unschärferelation*. In Bezug auf ein Wellenpaket ergeben sich folgende Aussagen treffen für die zugrundeliegende Wellenfunktion, die das Wellenpaket charakterisiert:

- Die Gesamtwellenfunktion eines Teilchen ist eine Superposition von Wellenfunktionen, die sich in einem bestimmten Bereich des Ortsraums konstruktiv überlagern.
- An allen anderen Orten ist die Überlagerung der Wellenfunktionen destruktiv.
- Die Genauigkeit im Ort wird umso höher, je mehr Wellen sich überlagern, allerdings auf Kosten der Impulsgenauigkeit.
- Eine unendlich große Anzahl an Wellen ist erforderlich, um eine Gesamtwellenfunktion für ein Teilchen an einem genau definierten Ort zu erhalten.

Schauen Sie sich diese Zusammenstellung noch mal an, wenn sie die Kapitel *Unschärferelation* und *Wellenfunktion* durchgearbeitet haben.

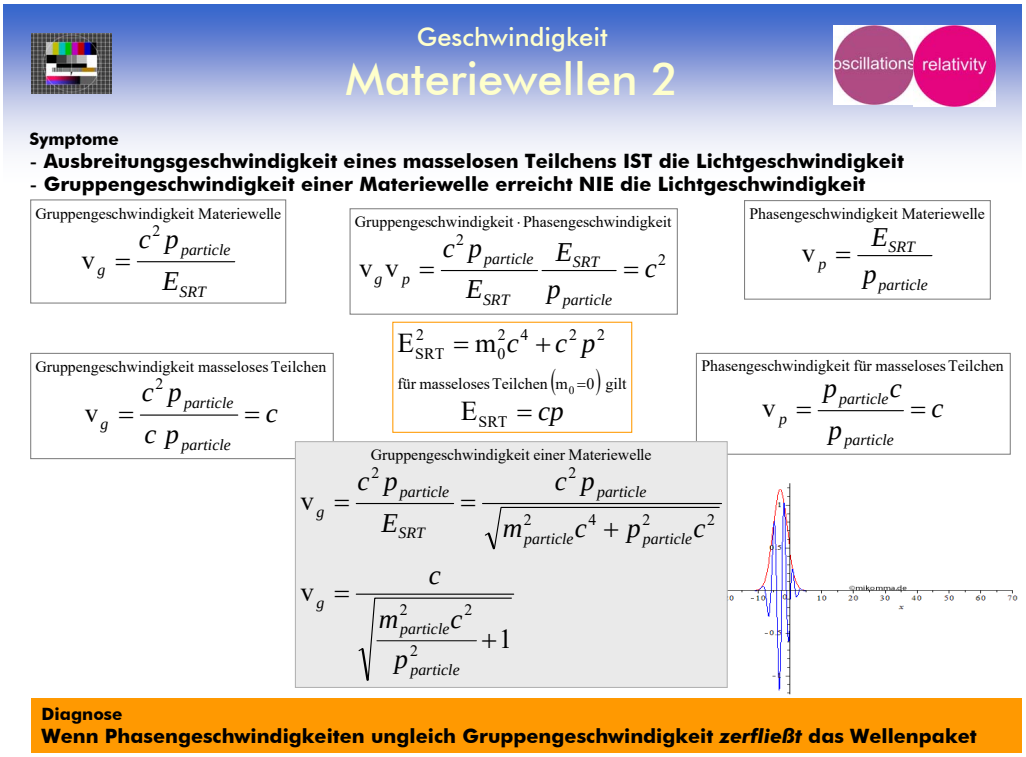


Abschließend noch einige Folgerungen die sich aus den Überlegungen ergeben. Bildet man den Quotienten aus den relativistischen Ausdrücken für kinetische Energie $E_{kin}^{rel} = \gamma\, m_0 c^2$ und Impuls $p_{rel} = \gamma\, m_0 \cdot v_{particle}$, findet man

$$\frac{E_{kin}^{rel}}{p_{rel}} = \frac{m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot v_{particle}} \tag{9.72}$$

$$v_{particle} = \frac{p_{rel} \cdot c^2}{E_{kin}^{rel}} \tag{9.73}$$

Wertet man jetzt die relativistische Energie-Impulsgleichung aus (siehe oben), indem man die Gesamtenergie nach dem Impuls ableitet, findet man, dass die Gruppengeschwindigkeit der Materiewelle der Geschwindigkeit des Teilchen entspricht ($v_{particle} = v_{group}$). Das Ergebnis ist physikalisch sinnvoll, da v_{group} die Geschwindigkeit ist, mit der Information (Achtung! Hier nähert sich ein Teilchen!) übertragen wird.



Die relativistische Betrachtung zeigt schließlich, dass die Gruppengeschwindigkeit nie die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. Die unterschiedlichen Frequenzbeiträge zur Materiewelle sorgen über die Dispersion dafür, dass jedes Wellenpaket mit der Zeit im Raum verbreitert. Man nennt dieses Phänomen in der Quantenphysik das Zerfließen des WellenpaketsWellenpaket! Zerfließen des W..

Aufgaben

Aufgabe 5.1: Ein Elektron hat eine relativistische Gesamtenergie von E_{rel}=0.8 MeV. Bestimmen Sie die kinetische Energie E_{kin}^{rel}, sowie die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit der deBroglie Welle!

Zunächst müssen wir die Ruheenergie des Elektrons abziehen, um die relativistische kinetische Energie zu ermitteln.

$$\begin{aligned} E_0 &= m_0 \cdot c^2 \\ E_0 &= (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2 \\ E_0 &= 8.19 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} \\ E_0 &= 511\,\mathrm{keV} \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt bestimmen wir den Impuls aus der relativistischen Energie-Impuls Gleichung.

$$\begin{aligned} p^2 \cdot c^2 &= E_{rel}^2 - m_0^2 \cdot c^4 \\ p^2 \cdot c^2 &= (0.8\,\mathrm{MeV})^2 - (0.511\,\mathrm{MeV})^2 \\ p^2 \cdot c^2 &= 0.38\,(\mathrm{MeV})^2 \\ p &= 0.616\,\mathrm{MeV/c} \end{aligned}$$

Für die Phasengeschwindigkeit v_{phase} ergibt sich

$$\begin{aligned} v_{phase} &= \frac{E}{p} \\ v_{phase} &= \frac{0.8\,\mathrm{MeV}}{0.616\,\mathrm{MeV/c}} \\ v_{phase} &= 1.31\,c \end{aligned}$$

Wie schon ausgeführt, hat die Phasengeschwindigkeit in Bezug auf Materiewellen keine physikalische Bedeutung. Für die physikalisch relevante Gruppengeschwindigkeit v_{group} ergibt sich

$$\begin{aligned} v_{group} &= \frac{p \cdot c^2}{E} \\ v_{group} &= \frac{(0.61\,\mathrm{MeV/c}) \cdot c^2}{0.8\,\mathrm{MeV}} \\ v_{group} &= 0.76\,c \end{aligned}$$

Der letzte Wert gibt die Geschwindigkeit an, mit der sich das Elektron bewegt.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man in der Optik unter Dispersion?
2. Warum macht man einen Unterschied zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit?
3. Unter welchen Bedingungen ergibt sich keine Trennung zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit?
4. Mit welcher Geschwindigkeit überträgt eine Lichtwelle Energie?
5. Warum ist Annahme, eine deBoglie-Welle sei eine monochromatische Welle, nicht haltbar.
6. Was versteht man in der Quantenphysik unter Dispersion?
7. Zeichnen Sie ein Wellenpaket!
8. Was passiert, wenn ein Wellenpaket einen Berg hinaufklettert?
9. Kann die Phasengeschwindigkeit von Lichtpulsen größer sein als die Lichtgeschwindigkeit?

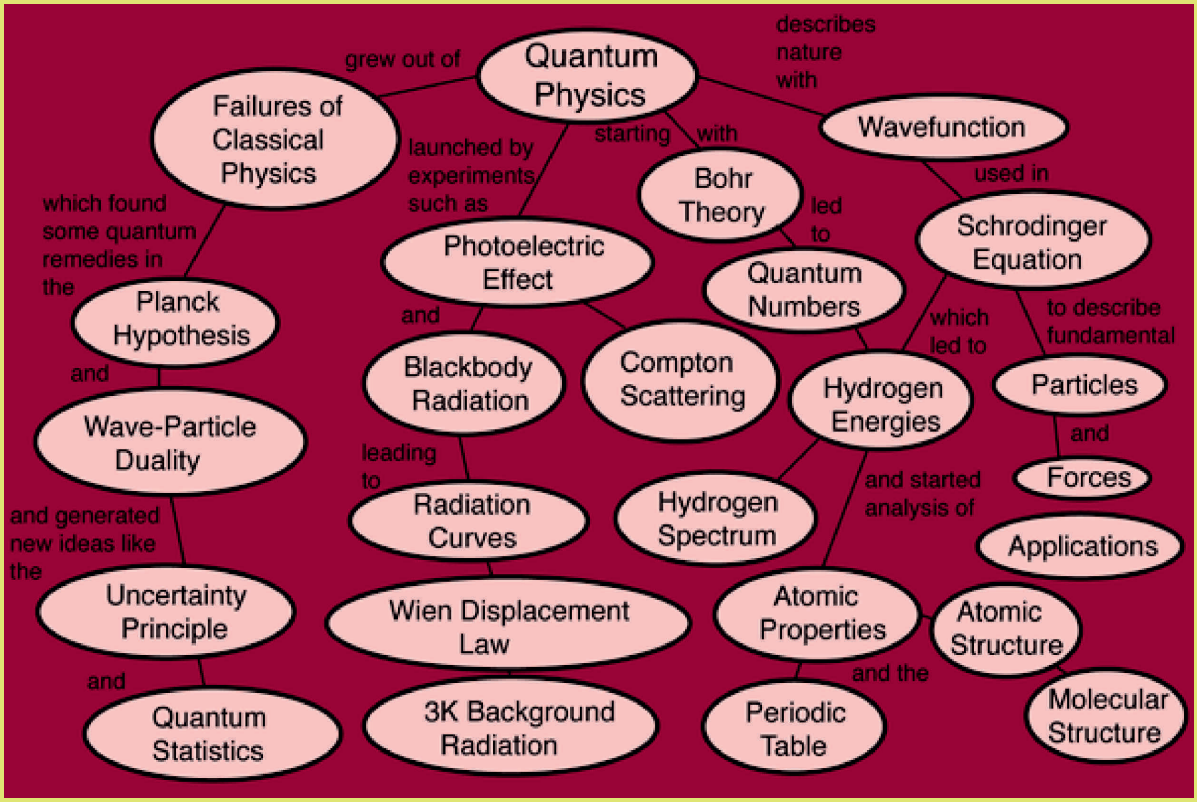


Abb. 9.77: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

- Plancksches Wirkungsquantum (h) und Dirac-Konstante ($\hbar$)
- Plancksche Gleichung für die Energie des Photons (9.1):

$$E_{ph} = h\nu_{ph}$$

- Meilenstein-Experimente der Quantenphysik
- Welle-Teilchen Dualismus
- Compton- Effekt (Gl. 9.12)

$$\lambda^f - \lambda^i = \frac{h}{m_e \cdot c}(1 - \cos\theta_{ph})$$

- Compton-Wellenlänge des Elektrons (Gl. 9.13)

$$\lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e \cdot c}$$

- Youngscher Doppelspaltversuch
- Materiewellen und deBroglie-Beziehung (Gl. 9.30, Gl. 9.53)

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

$$\lambda_{dB}^{rel} = \frac{h}{m \cdot v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- Experiment von Davisson and Germer zur Elektronenbeugung an Kristallen (Gl. 9.45).

$$n \cdot \lambda_{dB} = d_{\text{crystal}} \cdot \sin(\Theta)$$

- Vergleich der Streuung von Licht und Teilchenwellen an Materie.
- Numerische Apertur und Rayleighkriterium (Gl.9.56)

$$\Theta_{\text{min}} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{d}$$

- Aufbau und Funktionsweise eines Elektronenmikroskops

10 Heisenbergsche Unschärferelation



Wissen Sie was die Heisenbergsche Unschärferelation ist. Nein. Ich auch nicht, aber es schindet Eindruck.

Hauke Jacobs[1]

[2]Superposition ist eine fundamentales Prinzip, das in der Quantenphysik Anwendung findet. Allerdings wird das Konzept erheblich erweitert und neu interpretiert, da es durch das Prinzip der Ununterscheidbarkeit[3] erweitert wird. Die Heisenbergsche Unschärferela-

[1]Hinnerk Schönemann als Hauke Jacobs in Nord bei Nordwest - Der Anschlag (ARD 7.1.2021).
[2]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.
[3]Ununterscheidbare Teilchen sind dadurch gekennzeichnet, dass man sie nicht aufgrund bestimmter Eigenschaften voneinander unterscheiden kann, vorausgesetzt sie befinden sich im selben Zustand. Alle fundamentalen Teilchen wie Elektronen, Photonen oder Quarks und darauf aufgebaute Systeme wie Protonen, Kerne, Atome und Moleküle fallen darunter.

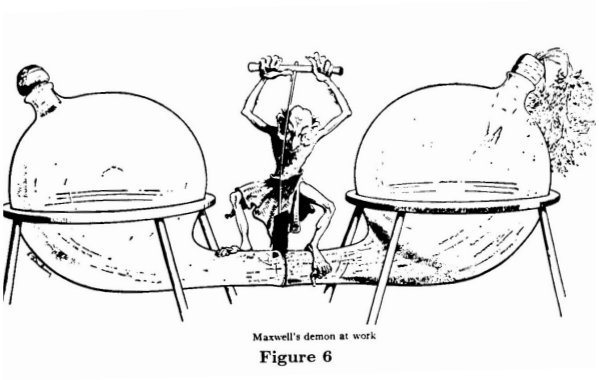


Abb. 10.1: Der Laplacesche Dämon bei der Arbeit.

tion löst den Widerspruch des Wellen-Teichen Dualismus, da es dem Superpositionsprinzip Grenzen aufzeigt. Ein Objekt verhält sich wie ein Teilchen, wenn sein Aufenthaltsort gut bekannt oder wie eine Welle, wenn seine Impulsbreite gering ist. Trifft eine Lichtwelle auf einen Strahlteiler, wird 50% des Lichts reflektiert und die restlichen 50% transmittiert. Wie ist die Situation, wenn ein Photon auf den Strahlteiler trifft? Teilt sich dann das Photon! Aber dann müsste sich die Wellenlänge ändern. Mmmmh? Alle Aspekte der Quantenphysik beinhalten das Prinzip der Superposition. Beispielsweise kann sich ein Atom in einer Überlagerung von unterschiedlichen Energiezuständen befinden.
Die Welleneigenschaften von Elektronen implizieren, dass auch größere Objekte wie Makromoleküle und Zellen durch eine quantenphysikalische Beschreibung im Rahmen der Schrödingergleichung behandelt werden müssen. Man könnte sich fragen, ob diese Eigenschaft der Materie Auswirkungen auf den Messprozess haben könnte, denn die Energie einer Welle ist nicht an einem definierten Ort lokalisiert. In der Quantenphysik wird diese Frage durch die so genannte Unschärferelation beantwortet. Sie besagt zum ersten Mal in der Geschichte der Physik wird der wissenschaftlichen Erkenntnis Grenzen aufgezeigt.

Die Unbestimmtheitsrelationen geben die Grenzen an, bis zu denen die Begriffe der Partikeltheorie angewendet werden können. Ein über diese hinausgehender, genauerer Gebrauch der Wörter Ort, Geschwindigkeit ist ebenso inhaltslos, wie die Anwendung von Wörtern, deren Sinn nicht definiert ist [**?**].

Die Heisenbergsche Unschärferelation[4] macht Aussagen über den Aufenthaltsbereich und die Impulsstreuung mikroskopischer Objekte. Danach ist es unmöglich Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit zu ermitteln. Damit kann die Bahnkurve eines Mikroobjekts nicht vorhergesagt werden, da die Anfangsbedingungen nicht eindeutig sind. Die Größe, die diesen Effekt charakterisiert, ist das Plancksche Wirkungsquantum h [**?**]. Die Unschärferelation spielt in der makroskopischen Welt keine Rolle. Bestimmt man die Position eines Körper mit einer Masse von 1 g auf 0.1 μm, so kann man seinen Impuls mit einer Genauigkeit von 10^{-15} kg·m/s angeben. Für alle denkbaren

[4] The Nobel Prize in Physics 1932 was awarded to Werner Karl Heisenberg *for the creation of quantum mechanics, the application of which has, inter alia, led to the discovery of the allotropic forms of hydrogen.*

Anwendungen ist das gut genug. Für die Beschreibung der Dynamik von Objekten spielt die Unschärferelation erst auf mikroskopischer Ebene eine Rolle. Im Gegensatz zum Laplaceschen Dämon,[5] den man in der Thermodynamik kennen gelernt hat (Abb. 10.1), impliziert die Heisenbergsche Unschärfebeziehung, dass jeder Messvorgang die Bahn eines Teilchen beeinflusst. Es gibt also in der Mikrophysik eine unmittelbare Wechselwirkung zwischen Messapparaturen und Messobjekten. Oder anders motiviert: Eine experimentelle Messung verbraucht Energie![6]

Das Titelbild zeigt einen oft dargestellten Cartoon, der die Welleneigenschaften fester Materie illustrieren soll. Der Effekt ist real, aber natürlich ist das Youngsche Doppelspalt Experiment übertrieben dargestellt.

We ought then to regard the present state of the universe as the effect of its anterior state and as the cause of the one which is to follow. Given for one instant an intelligence which could comprehend all the forces by which nature is animated and the respective situation of the beings who compose it -an intelligence sufficiently vast to submit these data to analysis- it would embrace in the same formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the lightest atom; for it, nothing would be uncertain and the future, as the past, would be present to its eyes.

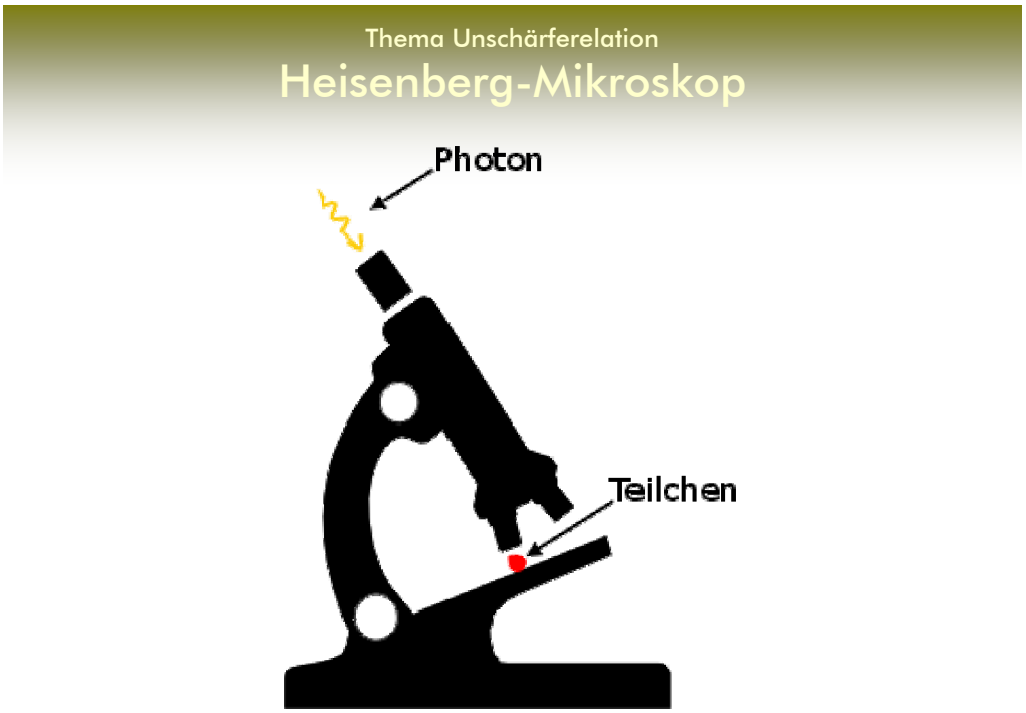
Pierre-Simon Laplace

[5] *Lexikon:* Der **Laplacesche Dämon** ist in der Lage in einem Gas Ort und Impuls jedes einzelnen Moleküls exakt zu bestimmen. Der Laplacesche Dämon steht für die umfassende Vorhersagbarkeit in der klassischen Physik. Man stelle sich einen Gasbehälter vor, den man durch eine Trennwand in zwei Bereiche aufteilen kann. Zwischen den Teilbehältern gibt es ein Verbindungsloch. In dem Reservoir hat das Gas aufgrund der unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Gasmoleküle (Maxwell) eine bestimmte mittlere Temperatur. Diese herrscht in beiden Bereichen. Was würde passieren, wenn ein Experimentator die Geschwindigkeit einzelner Teilchen bestimmt und außerdem die Möglichkeit hat, ohne Energieeinsatz das Verbindungsloch zwischen den beiden Teilbereichen schnell auf- und zuzumachen. Damit ergibt sich für den Forscher die Möglichkeit, die schnellen von den langsamen Teilchen zu trennen und damit einen Temperaturunterschied zu bewirken. Man hätte also einen Wärmefluss ohne Energiezugabe und es ergäbe sich eine Verletzung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik: Dieses so genannte Maxwellsche Paradoxon stellt die Bedeutung der Statistik in der Thermodynamik heraus. Mikroskopische Vorgänge können nicht aufgelöst werden und man betrachtet nur makroskopische Größen.

[6] *Lexikon:* **Zweiter Hauptsatzes der Thermodynamik:** Wärme kann nicht von selbst von einem Körper niedriger Temperatur auf einen Körper höherer Temperatur übergehen.


Inhaltsverzeichnis
Heisenbergsche Unschärferelation
- Heisenbergmikroskop: Wie genau kann man physikalische Größen messen?
- Orts-Impuls Unschärfe: unvermeidliche Fehler
- Energie-Zeit Unschärfe: Teilchen aus dem Nichts
- Virtuelle Teilchen: Information breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit aus
- Hawking-Strahlung: Thermodynamik am Rand eines schwarzen Lochs
Kapitel 1
Heisenbergmikroskop
mechanics
acoustics
electro
optics
Kapitel 2
Orts-Impuls & Energie-Zeit Unschärfe
acoustics
thermo
optics
Kapitel 3
Virtuelle Teilchen
electro
relativity
Kapitel 4
Hawking-Strahlung
thermo
astro

10.1 Heisenberg Mikroskop



The famous Heisenberg uncertainty principle has been one of the most intriguing manifestations of quantum world laws since the early days of quantum mechanics.

Als Einstieg in die Thematik betrachtet man die Messung an einem mikroskopischen Teilchen. Dabei interessiert man sich für seine genaue Position und Geschwindigkeit. In der klassischen Physik sind solche Messungen ohne Probleme möglich. Experimentell ergeben sich natürlich Einschränkungen durch die technischen Möglichkeiten der Messinstrumente, die man aber prinzipiell verbessern könnte. Die quantenphysikalische Analyse zeigt dagegen, dass eine Messung zu unüberbrückbaren Unwägbarkeiten führt, die die Bestimmung hoch genauer Werte verhindern.

Ein Beispiel aus der Seefahrt

In der klassischen Physik kann man eine exakte Orts-Zeit Bestimmung eines Objekts durchzuführen. Ein Beispiel in diesem Zusammenhang ist Bestimmung der Position eines Tauchobjekts mit einem Echolot, siehe Abb. 10.2. Geographische Länge und Breite, Tauchtiefe und Uhrzeit lassen sich präzise angeben.

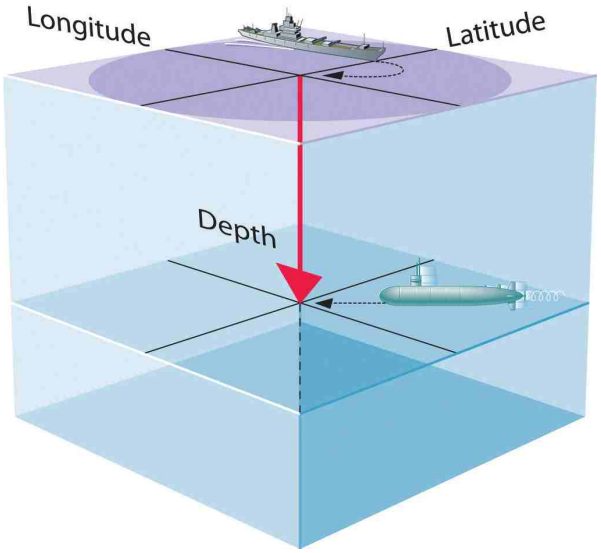


Abb. 10.2: Im Rahmen einer Echolotmessung lassen sich Ort und Zeit eines Tauchboots mit hoher Genauigkeit bestimmen.

Ein Beispiel aus der Welt des Sports

Baseball zeigt, wie schwierig es in der klassischen Physik ist, die genaue Bahn eines Körpers vorherzusehen. Jeder der Bälle trifft an anderer Stelle die so genannte *strike zone*, siehe Abb. 10.3. Man könnte anbringen, dass dies im Wesentlichen am Können des *pitchers* liegt. Aber auch wenn der Werfer seine Technik (Stichwort Magnus-Effekt) nicht einsetzten würde, gäbe es eine Streuung der Bahnkurven. Wichtig für den Moment: Selbst geringe Abweichungen in den Anfangsbedingungen können eine Auswirkung auf den Verlauf eines Experiments haben. In der Quantenphysik nennt man dieses Phänomen das Zerfließen des Wellenpaktes.

Ähnlich verhält es sich bei mikroskopischen Experimenten, bei denen beispielsweise Elektronen aus einer Elektronenkanone emittiert werden. Die Bahnkurven sind aufgrund der Welleneigenschaften der Materie nur ungenau bekannt. Daher kann der Auftreffort der Elektronen nicht vorhergesagt werden. Die Abb. 10.4 zeigt das Ergebnis eines Streuexperimente mit Elektronen-Materiewellen. Die Messung ergibt ein für das Material charakteristisches Streubild. Das Experiment liefert ein auswertbares Resultat. Man kann aber beispielsweise nicht vorhersagen, wo genau das erste Elektron auftrifft.

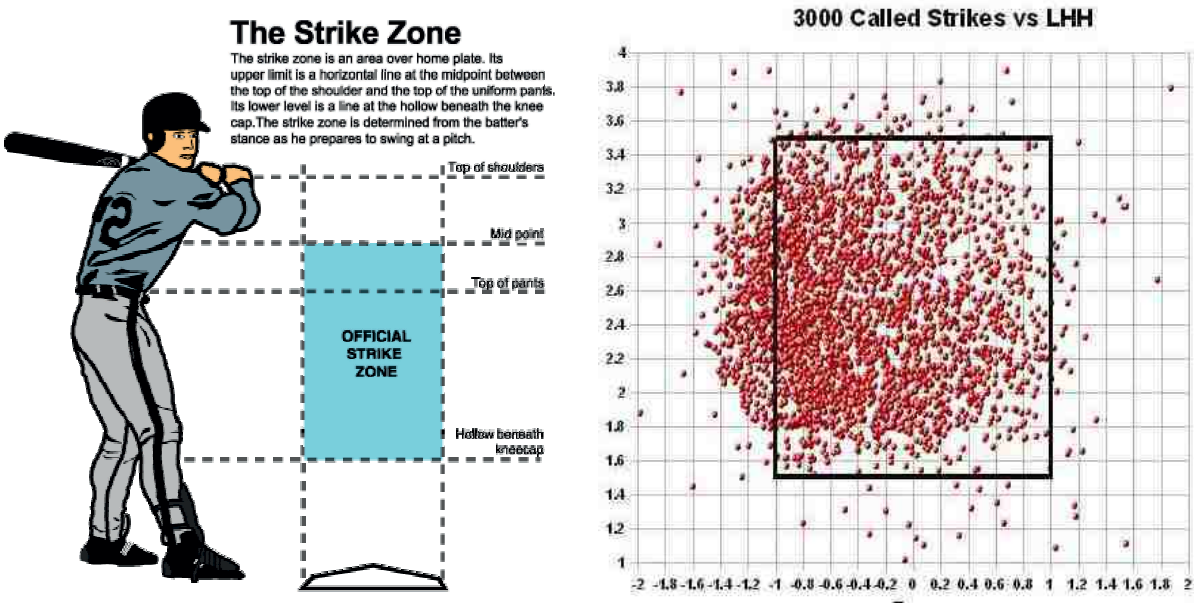


Abb. 10.3: Die Strike Zone ist das *unsichtbare Fenster* beim Baseball, durch das der Werfer den Ball werfen muss. Kleine Änderungen in der Flugbahn führen zu einer Streuung der Eintrefforte.

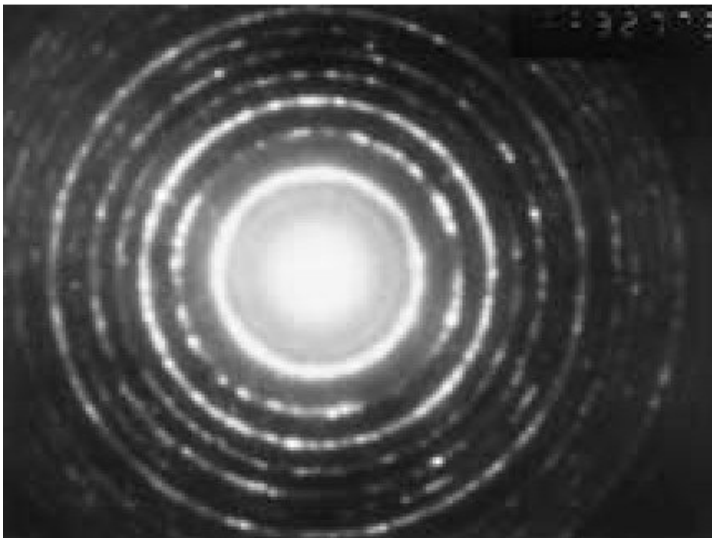
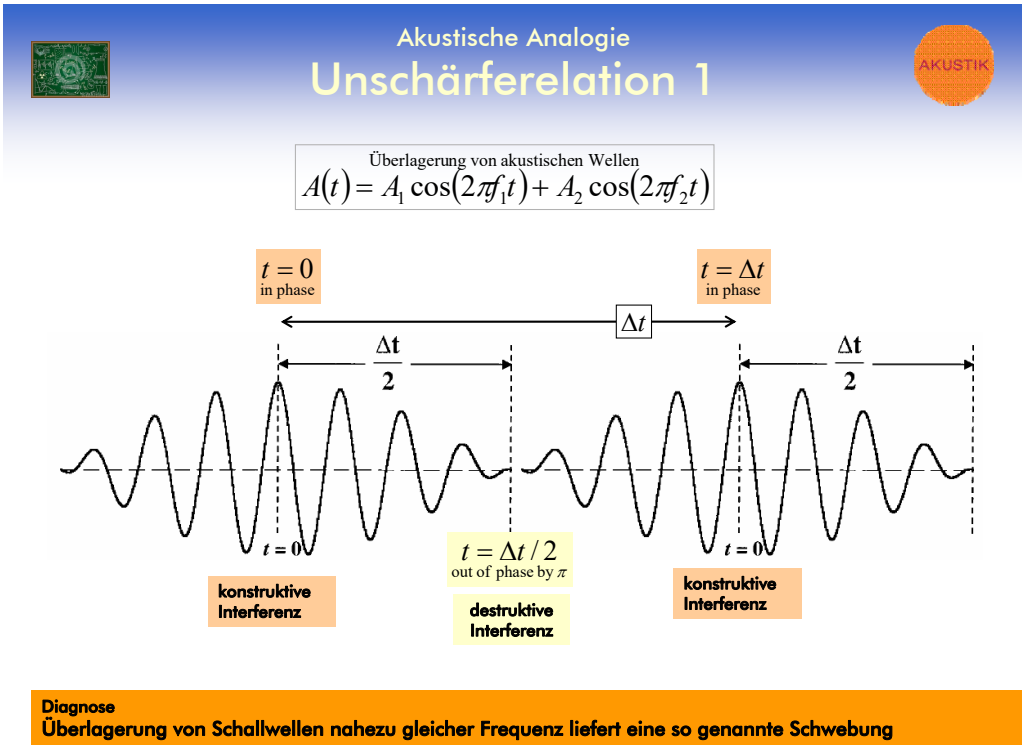


Abb. 10.4: Elektronenbeugung an einem Einkristall. Das Auftreffen einzelner Elektronen ist erkennbar, aber eine Vorhersage über den Aufschlagort des nachfolgenden Elektrons kann nicht getroffen werden. Nach 100 Minuten Bestrahlung mit 200 keV Elektronen liegt der Einkristall aufgrund der Strahlenschäden als polykristalliner Körper vor. Dieser Effekt führt dazu, dass man im Streubild Kreise beobachtet [**?**].



Observations not only disturb what has to be measured, they produce it... We compel the electron to assume a definite position... We ourselves produce the results of measurements [?].

Pascual Jordan

Akustische Schwebung^{4LP}

Wie bestimmt man die Frequenz f einer Schwingung? Praktisch geht folgendermaßen vor. Man zählt die Anzahl an Schwingungen n_f in einem vorgegebenen Zeitintervall Δt. Daraus kann man beispielsweise die Periode der Schwingung T_f berechnen.

$$T_f = \frac{\Delta t}{n_f} \tag{10.1}$$

Die Unsicherheit im Experiment ist EINS, da n_f eine ganze Zahl ist. Die Frequenz erhält man aus:

$$f = \frac{1}{T_f} \tag{10.2}$$

Note	Frequenz
As	103.826 Hz
A	110.000 Hz
B	116.541 Hz
as	207.652 Hz
a	220.000 Hz
b	233.082 Hz
as^1	415.305 Hz
a^1	440.000 Hz
b^1	466.164 Hz
as^2	830.609 Hz
a^2	880.000 Hz
b^2	932.328 Hz

Tab. 10.1: Frequenzen ausgewählter Töne in der gleichstufigen Stimmung. Die ausgewählten Halbtöne liegen auf der Tastatur eines Klavier direkt nebeneinander.

Berücksichtigt man die Messungenauigkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} f \pm \Delta f &= \frac{n_f \pm 1}{\Delta t} \\ f \pm \Delta f &= \frac{n_f}{\Delta t} \pm \frac{1}{\Delta t} \\ \Delta f &\approx \pm \frac{1}{\Delta t} \end{aligned} \tag{10.3}$$

Nach einer Sekunde stellt sich also eine Messungenauigkeit von 1 Hz ein. Um Frequenzen zu unterscheiden, die m_f Hertz auseinanderliegen, benötigt man $1/m_f$ Sekunden. In der Musik liegen Tönen umso enger zusammen, je tiefer die Töne sind, siehe Tab 10.1. Das äußert sich beim Hören so, dass wir falsche Töne im oberen Register sofort bemerken. Auch als Ungeübter sind wir beim Hören ziemlich gut. Wir sind in der Lage, Frequenzunterschiede im Bereich von 3 Hz bei einer Frequenz von einem kHz unterscheiden. Bedingung ist, dass wir die Töne lange genug hören.

Um zu verstehen, wie die Streuung der Messwerte zustande kommt, betrachtet man die Superposition akustischer Wellen mit leicht unterschiedlicher Frequenz f_1, f_2. Die Amplitude $A(t)$ der Welle ergibt sich mit:

$$A(t) = A_1 \cdot \cos(2\,\pi \cdot f_1) + A_2 \cdot \cos(2\,\pi \cdot f_2) \tag{10.4}$$

Wir verwenden diesen Ansatz, um das Verhalten von Materiewellen konzeptionell zu erläutern. Die Überlagerung der Schallwellen ergibt eine Schwebung, die in bestimmten Zeitabständen zu einer Erhöhung der Schallamplitude, so genannte beats, führt. Die Ursache ist die Zeitentwicklung der Phase (ϕ). Zu bestimmten Zeitpunkten kommt es

zu konstruktiver ($\Delta\phi$=0) und destruktiver ($\Delta\phi$=π) Interferenz der Schallwellen. In der *Akustik* findet man, dass für die Schwebungsfrequenz f_{beat} gilt:

$$f_{beat} = f_1 - f_2 = \Delta f \tag{10.5}$$

Aus dem Abstand Δt der Maxima und Minima kann man die zugehörige Periode T_{beat} berechnen:

$$\Delta t = T_{beat} = \frac{1}{f_{beat}} = \frac{1}{\Delta f} \tag{10.6}$$

Dieser Zusammenhang zwischen Frequenz und Periode führt auf folgenden einfachen Zusammenhang:

$$\Delta f \cdot \Delta t = 1 \tag{10.7}$$

Im Rückblick auf das Kapitel *Akustik* sagt uns die Gleichung nichts Neues. Wir haben nur in anderer Form etwas aufgeschrieben, was wir schon kennen. Wir kombinieren drei Aspekte: (i) den Zusammenhang $f = 1/T$ (ii) T_{beat} schreiben wir als Δt und (iii) die Erkenntnis, dass f_{beat} der Frequenzunterschied Δf der beiden Frequenzen ist. Zeit- und Frequenzbreite sind also eng verknüpft. Das bedeutet, dass der Zeitabstand der Schwebungsmaxima immer größer wird, je kleiner der Unterschied der beiden Frequenzen wird. Diese Überlegungen kann man auf eine größere Anzahl von Frequenzen erweitern, genannt Wellenpaket. Die Analyse ergibt einen ähnlichen Zusammenhang:

$$\Delta f \cdot \Delta t \approx 1 \tag{10.8}$$

Die Gleichung liefert ein ungenaueres Ergebnis. Das liegt unter anderem daran, dass Annahmen über die Amplituden einfließen. Im Zusammenhang mit den uns interessierenden Wellenpaketen kommt hinzu:

- Wellenpakte treten in unterschiedlicher Form auf. Der Zusammenhang zwischen Δt und Δf ist davon abhängig.
- Wir haben uns bislang keine exakte Definition von Δt und Δf überlegt. Mit Δt bezeichnen wir grob welche zeitliche Breite das Wellenpaket hat; mit Δf den Bereich an Frequenzen, die wir benötigen, um durch Superposition das beobachtete Wellenpaket zu generieren.

Für die weiteren Betrachtungen spielt das aber keine Rolle. Tatsächlich ist Gl. 10.8 eine untere Grenze, die technisch in den wenigsten Fällen erreicht wird. Um einen kurzen Schallpuls der Dauer Δt zu erzeugen, benötigt man eine Bandbreite an Frequenzen Δf. In einem akustischen Experiment stellt man fest, dass man die Tonhöhe, wie zum Beispiel die Frequenz des Kammertons A, gut bestimmen kann, wenn der Ton eine Zeitlang zu hören ist. Verkürzt man die Dauer, kann auch ein geübtes Ohr die Frequenz nicht mehr genau auflösen. Dieser direkte Zusammenhang zwischen Δt und Δf ist in Tab. 10.2 anhand einer Messung dargelegt. Zusammengefasst ergeben sich also folgende Beobachtungen:

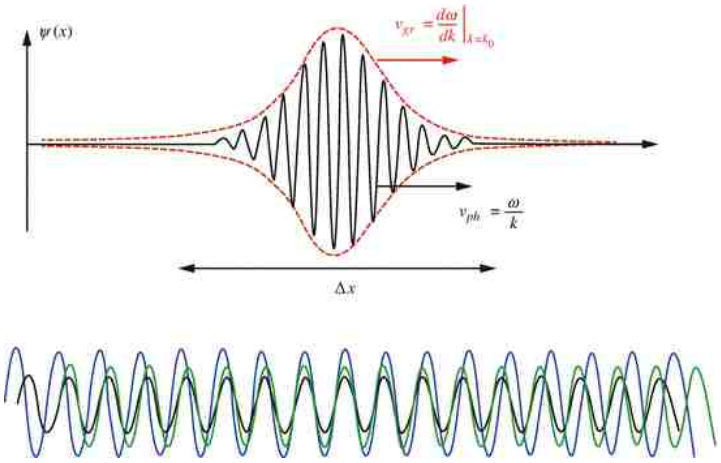


Abb. 10.5: Wellenpaket (oben) gebildet aus der Superposition von Wellen (unten angedeutet). Die Breite des Wellenpakets (Δx) wird über die Einhüllende (gestrichelt) charakterisiert und zeigt die Ortsunschärfe der Teilchenwelle [**?**].

Zeitbreite Δt/,[s]	Frequenzbreite Δf [Hz]	Akustische Unschärfe $(\Delta f) \cdot (\Delta t)$
0.108	11.35	1.23
0.220	5.37	1.18
0.338	3.06	1.19
0.880	1.34	1.18
1.680	0.73	1.22
3.150	0.43	1.35

Tab. 10.2: Daten extrahiert aus einem 200 Hz Ton, wobei die Länge des akustischen Signals variiert wurde. Man erkennt, dass es einen direkten Zusammenhang zwischen der Dauer des Tons und seiner Frequenzbreite gibt. Dies ist das akustische Analog zur Heisenbergschen Unschärferelation der Quantenphysik.

- Wählt man Δt lang, kann die Tonhöhe gut bestimmt werden (Δf gering)
- Wählt man Δt kurz, kann die Tonhöhe nicht mehr bestimmt werden (Δf groß)
- Frequenz und Pulsdauer können nicht unabhängig voneinander bestimmt werden.

Ein Beispiel aus der Welt der Telekommunikation

Jeder Puls, sei es ein akustischer oder elektromagnetischer Puls muss die fundamentale Gl. 10.8 erfüllen. Das bedeutet, dass man bei der Übermittlung von Signalen mit hoher Rate die Pulsbreite Δt einschränken muss. Kürzere Pulse gehen aber einher mit einer größeren Frequenzbreite Δf. Das Medium, dass die Signale überträgt, muss für die Übertragung größerer Frequenzbereiche geeignet sein. Man nennt dies die Bandbreite

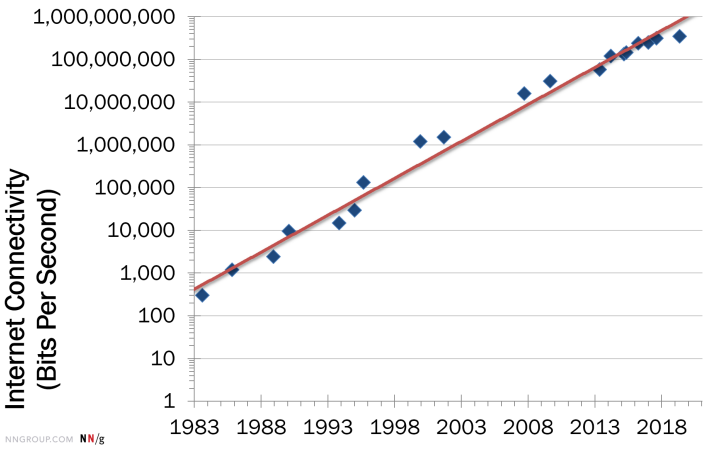


Abb. 10.6: Entwicklung der Übertragungsbandbreite in der Telekommunikationsbranche

Δf_B des Mediums. Der kürzeste Puls, den man übertragen werden kann, ergibt sich mit

$$\Delta t_{\min} \approx \frac{1}{\Delta f_B} \tag{10.9}$$

Diese Erkenntnis ist extrem wichtig für die digitale Telekommunikation. Höhere Bandbreiten erlauben höhere Übertragungsraten. Das schon aus der Mode gekommenen Telefon wurde in der Anfangsphase mit einem Modem bei $50 \cdot 10^3$ Pulsen pro Sekunde betrieben. Pulse deutlich kürzer als $1\,\mu$s konnten nicht gesendet werden, da das Telefonkabel das notwendige Frequenzband nicht übertrug. Eine optisches Faserkabel ist ein Medium mit einer größeren Bandbreite $\Delta f_B > 1\,$GHz, womit Lichtpulse von kleiner als 1 ns übertragen werden können. Übertragungsrate im Bereich von 10^9 Pulsen pro Sekunde sind damit erreichbar. Abb. 10.6 zeigt die rasante Entwicklung in der Digitalisierung.

Was haben diese Überlegungen mit den von uns betrachteten Wellenpaketen (Kapitel *Materiewellen*) zu tun? Jedes Wellenpaket lässt sich zusammensetzen aus einer Überlagerung viele nahe beieinander liegender Einzelfrequenzen, siehe Abb. 10.5. Folgende Aussage sollte man aber im Hinterkopf behalten: Ein so gebildetes Wellenpakt muss für eine gewisse Zeitspanne vorhanden sein.[7]

Man kann auch in anderer Weise auf Gl. 10.8 schauen. Angenommen man will bestimmen, zu welchem Zeitpunkt das Wellenpaket an einem bestimmten Ort ankommt. Was nimmt man als Kriterium? (i) den Anfang (ii) das Maximum oder (iii) das Ende des Pulses. Eigentlich können wir nur feststellen, in welchem Zeitraum Δt das Paket eintrifft.

[7] *Lexikon:* Das Verfahren der Überlagerung vieler leicht unterschiedlicher Lichtfrequenzen wird in der Laserphysik genutzt, um **ultrakurze Lichtpulse** mit Femtosekunden-Pulsdauern von $10^{-15}\,$s zu erzeugen. Abb. 10.7 zeigt schematisch was passiert, wenn man so verfährt. Ein spektral breiter Lichtpuls lässt sich auf eine ultrakurz Zeitspanne konzentrieren. Das untere Limit ist die Periodendauer der Mittenfrequenz. Das sind im Optischen etwa 2.5 fs. Die kürzesten optischen Laserpulse werden übrigens in Rostock erzeugt [**?**].

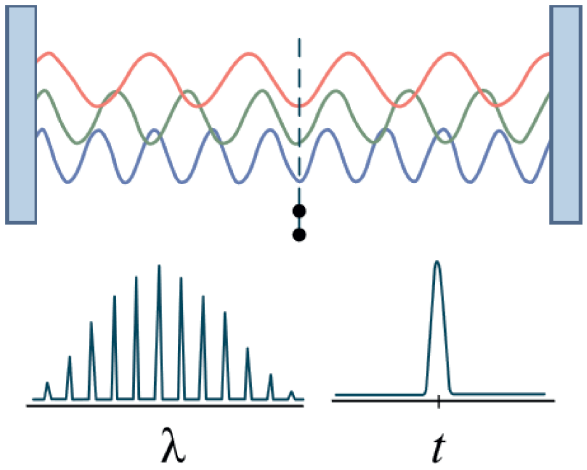


Abb. 10.7: Konzept zur Erzeugung ultrakurzer Lichtpulse in einem Laserresonantor. Die Modenkopplung führt zu Lichtblitzen, die eine große Bandbreite an Wellenlängen umfasst, aber eine extrem kurze zeitliche Dauere haben.

Wir haben also eine Unsicherheit in Bezug auf die Ankunft. Wie sieht es mit der Frequenz aus? Auch hier können wir keine exakte Antwort beisteuern. Alles was wir sagen können ist, dass die gesuchte Frequenz in einem bestimmten Frequenzbereich Δf liegt. Die Zeit-Frequenz Beziehung lehrt uns, dass die Unsicherheit in unserem Wissen über die Ankunftszeit verknüpft ist mit unserer Unwissenheit über die Frequenz. Je genauer wir einen der Parameter bestimmen, desto unbestimmter wird der andere!



In classical physics, science started from the belief - or should one say, from the illusion? - that we could describe the world, or least parts of the world, without any reference to ourselves. This is actually possible to a large extent: We know that the city of London exists whether we see it or not. It may be said that classical physics is just that idealization in which we can speak about parts of the world without any reference to ourselves.

Werner Heisenberg

Heisenberg schaut zu

Diese Überlegungen zu Zeitdauer und Frequenzbreite sollen jetzt auf Ort und Impuls mikroskopischer Teilchen ausgeweitet werden. In einem Gedankenexperiment, das auf Heisenberg zurückgeht, soll versucht werden, die Position eines Elektrons zu bestimmen. In der Vorlesung *Materiewellen* wurde das Rayleigh-Kriterium im Zusammenhang mit der Auflösung von Elektronenmikroskopen angesprochen. Die Auflösungsgrenze war etwa eine halbe Wellenlänge. Um den Ort eines Teilchen also genau zu bestimmen, nutzt man man deshalb eine möglichst geringe Lichtwellenlänge λ, also eine hohe Photonenenergie

$$E_{ph} = h \cdot \nu = h\frac{c}{\lambda} \tag{10.10}$$

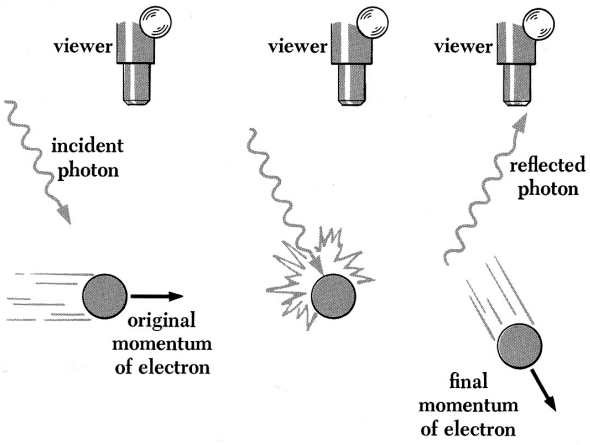


Abb. 10.8: Ein Elektron kann nicht beobachtet werden, ohne dass sich sein Impuls um einen unbestimmten Betrag ändert [**?**].

Allerdings haben wir bei unserer Überlegung einen Quanteneffekt nicht in Betracht gezogen. Nach Planck wird Licht nur in Energiepaketen (Photonen) transportiert. Hinzu kommt, dass die Photonen einen Impuls $p = E/c$ aufweisen, der bei der Wechselwirkung mit Materie übertragen wird. Um ein Teilchen nachzuweisen muss zumindest ein Photon am Partikel gestreut werden. Speziell heißt das für hochenergetische Röntgenstrahlung, dass man den Compton-Effekt bei der Wechselwirkung nicht vernachlässigen kann. Durch den Messvorgang (Lokalisierung) wird ein nicht exakt bekannter Impuls auf das Teilchen übertragen, siehe Abb. 10.8. Die Natur des Vorgangs lässt keine definierte Aussage über die resultierende Geschwindigkeit des Objekts zu.

Fazit: Der Ort des Teilchens wurde mit hoher Genauigkeit bestimmt. Über den Impuls liegen dagegen keine verlässlichen Daten vor.
Um den Beitrag des Compton-Effekts zu minimieren, könnte man die Wellenlänge des analysierenden Lichts vergrößern. Dadurch wäre der Impulsübertrag geringer und die Information über den Impuls des Teilchens wäre genauer. Allerdings reduziert man durch die längere Wellenlänge das Auflösungsvermögen des Mikroskops (Rayleigh-Kriterium).

Fazit: Der Ort des Teilchens wurde mit geringerer Genauigkeit bestimmt. Über den Impuls liegen verlässlichere Daten vor.

Man kann das Heisenberg-Mikroskop auch am Beispiel des Doppelspalt-Experiments mit Elektronen illustrieren. Angenommen, man will herausfinden, durch welchen Schlitz eines der Elektronen geflogen ist. Um das Doppelspalt-Streumuster zu erhalten, verwendet man Elektronen mit deBroglie Wellenlängen λ_{dB} in der Größenordnung der Schlitzbreiten d_{slit}.

$$\begin{array}{rcl} & & \lambda_{dB} \approx d_{slit} \\ p_{dB} & = & \dfrac{h}{\lambda_{dB}} \approx \dfrac{h}{d_{slit}} \end{array} \tag{10.11}$$

Der Lichtstrahl, der den Weg des Elektrons aufzeichnen soll, muss im Durchmesser ge-

ringer sein, als die Schlitzbreite. Daraus lässt sich der zugehörige Impuls berechnen:

$$\lambda_{ph} \leq d_{slit} \tag{10.12}$$

$$p_{ph} = \frac{h}{\lambda_{ph}} \geq \frac{h}{d_{slit}} \tag{10.13}$$

Man erkennt, dass der Impuls des Photons wenigsten genauso groß sein muss, wie der Impuls des Elektrons. Jeder Elektron-Photon Stoß kann also den Impuls des Elektrons signifikant verändern und die Ortsinformation geht dabei verloren. Als Resultat verschwindet das Doppelspalt-Interferenzmuster.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Ein Funkmast erzeugt einen Δt_{pulse}=0.8 μs langen Radiowellenimpuls bei einer Frequenz von f_{UKW}=10 MHz. Welche spektrale Breite Δf hat das ausgesendete Funksignal?

Die Periode T_{UKW} der Radiowelle ist

$$\begin{aligned} T_{UKW} &= \frac{1}{f_{UKW}} \\ T_{UKW} &= \frac{1}{0.8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \\ T_{UKW} &= 1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (\Delta f) \cdot (\Delta t) &= 1 \\ \Delta f_{pulse} &= \frac{1}{\Delta t_{pulse}} \\ \Delta f_{pulse} &= \frac{1}{8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}} \\ \Delta f_{pulse} &= 1.25 \cdot 10^{6}\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

Die durch den kurzen, nur $\Delta t_{pulse}/T_{UKW}$=8 Wellenzüge langen Radioimpuls $(8 \cdot T_{UKW})$ resultierende Unschärfe, verbreitert das Radiosignal in der Frequenz um $\pm$1.25 MHz.

Die Beobachtung, dass die Einschränkungen, wie hier in der Zeitdauer eines Rundfunksignals, Auswirkungen auf das Frequenzspektrum hat und die Erkenntnis, dass Teilchen als Materiewellen betrachtet werden müssen, ist die Grundlage für die Analyse von Messprozeduren in der Quantenphysik.

Aufgabe 1.2: Welche minimale Bandbreite hat ein 100 ns langer Puls?[8]

(a) 1 MHz

(b) 10 MHz

(c) 100 MHz

(d) 1 GHz

[8] Antwort: (b)

Aufgabe 1.3: Ein altertümlicher Fernsehbildschirm (Typ Braunsche Röhre) hat n_x=525 horizontale Linien und erneuert f_{TV}=30 s^{-1} das Bild. Da bedeutet, dass jede der Linien in

$$\begin{aligned} \Delta t_x &= \frac{1}{n_x \cdot f_{TV}} \\ \Delta t_x &= \frac{1}{525 \cdot 30\,\mathrm{s}^{-1}} \\ \Delta t_x &= 6.3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

neu gezeichnet wird. Welchen Frequenzbereich muss der Sender haben, wenn horizontale und vertikale Zeitauflösung gleich sind?

Die vertikale Auflösung ist die Höhe des Bildschirms durch n_x. Um beispielsweise abwechselnd helle und dunkle Pixel zu erzeugen ergibt sich eine notwendige Zeitauflösung von

$$\begin{aligned} \Delta t &\approx \frac{1}{2}\frac{1}{n_x} \cdot \Delta t_x \\ \Delta t &\approx \frac{1}{2}\frac{1}{525} \cdot 6.3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} = 1.2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Damit das auch klappt haben wir die Zeitauflösung verdoppelt. Das entspricht einer Frequenzbreite von

$$\begin{aligned} \Delta\omega &\geq \frac{1}{\Delta t} \approx 8.3 \cdot 10^{6}\,\mathrm{s}^{-1} \\ \Delta f &\geq \frac{\Delta\omega}{2\,\pi} \geq 1.3 \cdot 10^{6}\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

Die Bandbreite muss also mehr als ein MHz betragen. Zum Vergleich, für Audioverstärker (20-20 000 Hz) reichen $4 \cdot 10^4$ Hz.

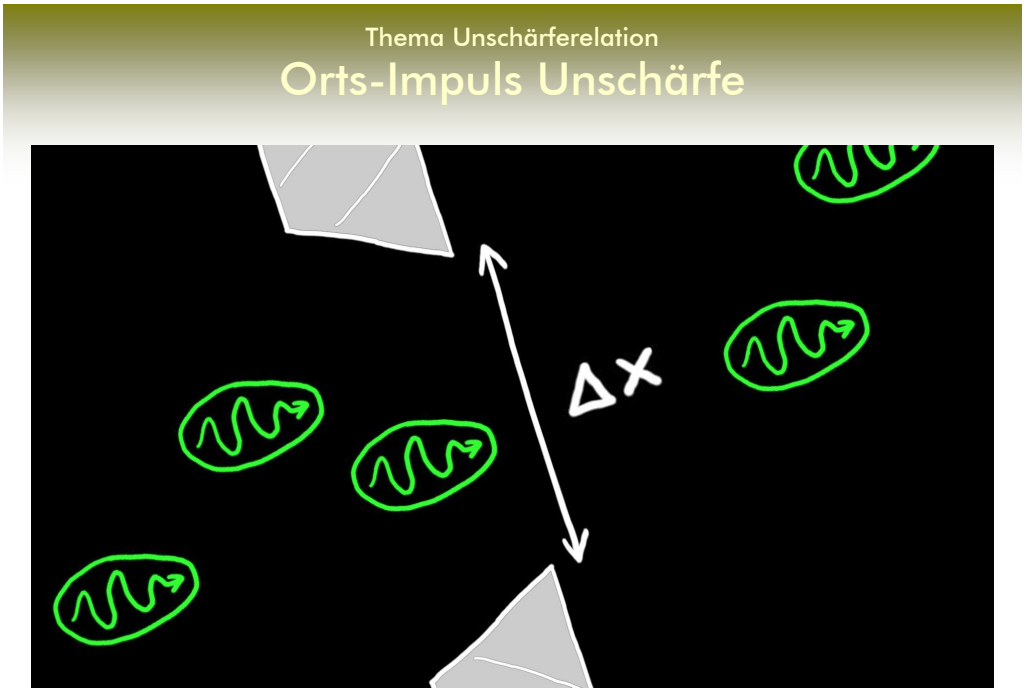
Konzeptionelle und andere Fragen

1. Inwiefern spielt der Comptoneffekt bei der Mikroskopie mit Röntgenlicht eine Rolle?

2. Welche räumliche Auflösung würde man mit einem Mikrowellen-Mikroskop erreichen.

3. Sehen Sie Nachteile in der Mikroskopie biologischer Proben bei der Verwendung einer kurzwelligen Lichtquelle?

10.2 Orts-Impuls Unschärfe



Squeezing quantum noise [?]**:** You can't beat the Heisenberg uncertainty principle, but you can engineer systems so that most of the uncertainty is in the variable of your choice. Doing so can improve the precision of delicate measurements.

Sheila Dwyer

Laplacescher Dämon

Die Frage stellt sich, ob man diese Beobachtungen zur Verknüpfung von Ort und Impuls in einer Gleichung zusammenfassen kann?

In diesem Zusammenhang werden zwei Gleichungen vorgestellt und wichtige Anwendungen besprochen. Zunächst betrachtet man die Orts-Impuls Unschärfe. Die obige Abbildung zeigt Materiewellen, die einen engen Spalt durchfliegen. Was passiert, wenn man Δx reduziert? Der Cartoon in Abb. 10.9 zeigt, was da auf uns zukommt.

Question: Look, your theory is not any good, because you cannot answer certain questions like: What is the exact position of a particle?, which hole does it go through?



Abb. 10.9: Cartoon aus [**?**]

Answer: I do not need to answer such questions, because you cannot ask such a question experimentally.

Werner Heisenberg [**?**]

Der Determinismus der klassischen Physik postuliert, das der Laplacesche Dämon Ort (x) und Impuls (p) eines Teilchens exakt bestimmen kann. In der Quantenphysik verhält es sich anders, wie gerade durch das Heisenberg-Mikroskop motiviert. Statt eines genau vermessenen Punktes im (x, p)-Raum ergibt sich eine Vielzahl an Möglichkeiten, wobei der tatsächliche Wert in einem bestimmten Bereich $(\Delta x, \Delta p)$ zu erwarten ist. Festgelegt ist nur, dass das Produkt von Δx und Δp einen bestimmten Wert nicht unterschreiten darf, siehe Abb. 10.10. Das eröffnet Freiheiten, denn nur die aus Orts- und Impulsunsicherheit aufgespannte Fläche muss konstant bleiben. In diesem Zusammenhang denke man nochmals an das Heisenberg-Mikroskop. Abb. 10.11 verdeutlicht die Idee. Die Position eines Teilchens wird durch Kreise und die Impulse durch Pfeile angedeutet. Links ist der Ort nahezu unbekannt, während die Impulsunsicherheit gering ist. Rechts ist der Position in etwa bekannt. Stattdessen ist nun der Impuls des Teilchens nicht exakt definiert. Also ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

- Erhöht man die Ortsauflösung, reduziert sich die Genauigkeit in der Bestimmung des Impulses.
- Erhöht man die Impulsauflösung, reduziert sich die Genauigkeit in der Bestimmung des Ortes.

Blicken wir in diesem Zusammenhang nochmal auf das Konzept des Materie-Wellenpakets. Eine Welle kann durch eine einzige Wellenlänge charakterisiert werden, wenn sie sich von $-\infty < x < +\infty$ ausbreitet. [9] Diese Bedingung ist mathematisch korrekt, aber physikalisch unrealistisch, da die Welle dadurch weder Anfang noch Ende hat. Es würde auch

[9] *Lexikon:* Die elektrische Feldstärke des Lichts wird durch Amplitude und Phase bestimmt. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation kann man hier spielen und bei Bedarf Licht quetschen. Wenn die Unschärfe in der einen Größen reduziert wird, erhöht sich die Unschärfe in der anderen Größe.

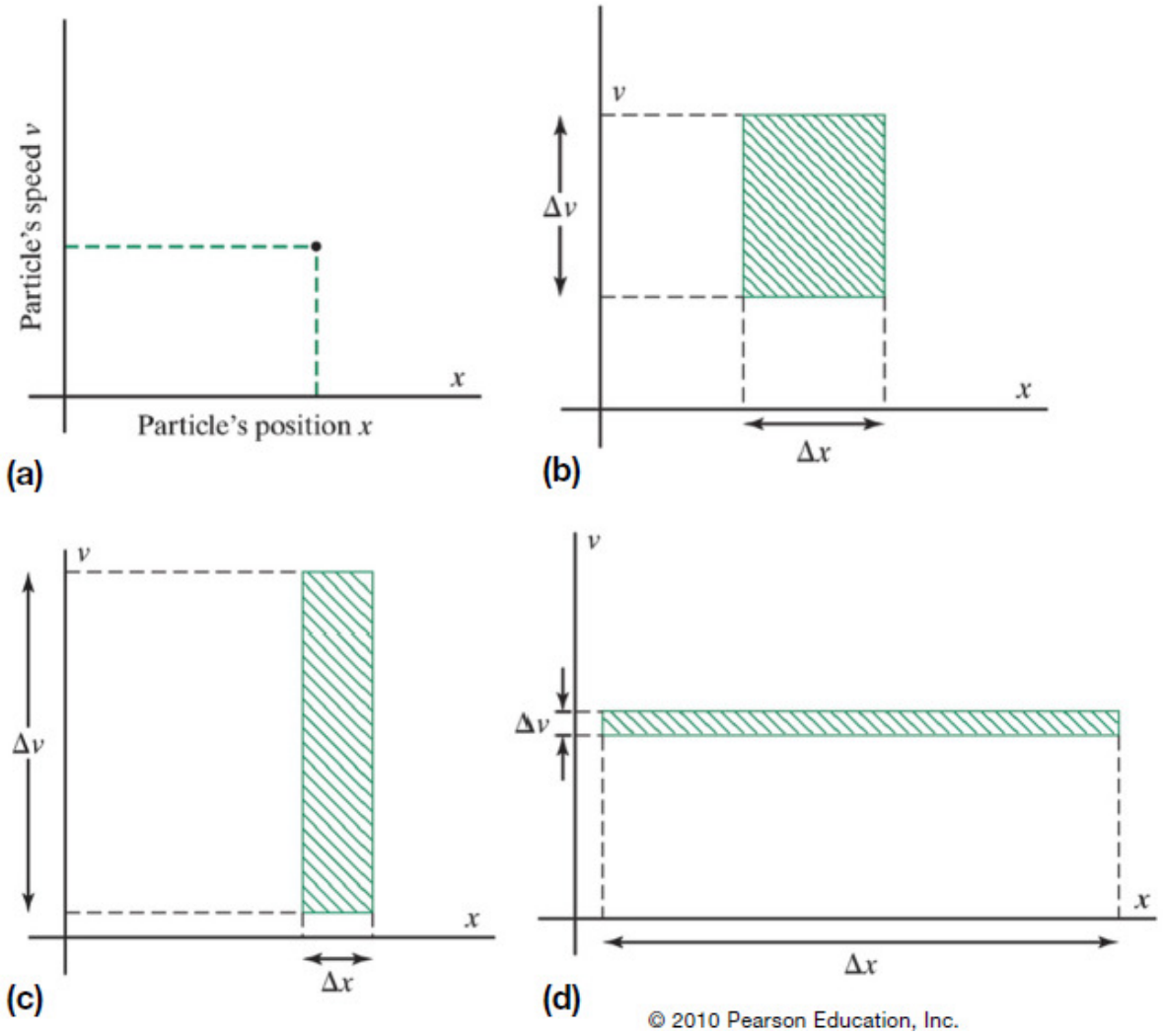


Abb. 10.10: Unsicherheitsbereiche für Ort und Geschwindigkeit. (a) Ein einzelner Punkt in einem $x-v$ Diagramm stellt einen exakten Wert sowohl für x als auch für v dar. Die Quantenphysik lässt solche Situationen nicht zu. (b) Unsicherheitsbereich für ein einzelnes Teilchen. Der schraffierte Bereich muss eine Fläche $\Delta x \cdot \Delta v \geq \hbar/(2\,m)$ haben. (c, d) Wenn in einer Messung Δx (oder Δv) reduziert wird und der Bereich unter den Wert von $\hbar/(2\,m)$ fällt, dann muss Δv (oder Δx) anwachsen, um die Bedingung $\Delta x \cdot \Delta v \geq \hbar/(2\,m)$ weiter zu erfüllen [**?**].

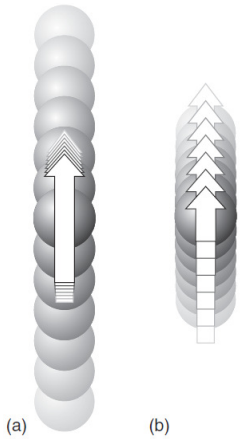


Abb. 10.11: Darstellung des Unbestimmtheitsprinzip. Die Bereich der Orte eines Partikels, angezeigt durch die Kreise und die Werte von Impulse angegeben durch Pfeile. In (a) ist die Lage des Teilchens ziemlich unbestimmt, und der zugehörige Impulsbereich ist klein. In (b) ist die Position des Teilchens genau bekannt. Nun ist allerdings der Impuls des Teilchens ist ziemlich unsicher [**?**].

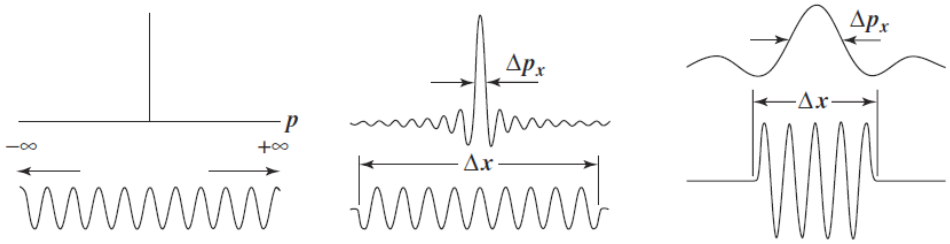


Abb. 10.12: Unschärferelation für x und p: Je besser die Position des Teilchens bekannt ist, desto geringer ist der Wert des zugehörigen Impulses bestimmt [**?**].

bedeuten, dass diese Modellwelle einen definierte Wellenlänge und einen definierten Wellenvektors hat. Die Unsicherheit im Impuls wäre NULL (Abb. 10.12, links). Damit kann man dem Teilchen keine Position zuweisen und die Unschärfe in der Position Δx wäre unendlich. Wenn man die Unschärfe in der Position des Partikels auf einen kleineren Bereich Δx verringert (Abb. 10.12, Mitte und Rechts), führt dies nach Heisenberg zu einer Unschärfe Δp im Impuls p.

Gehen wir nun über zum Begriff *Bahn des Elektrons*. Unter Bahn verstehen wir eine Reihe von Raumpunkten, die das Elektron als *0rte* nacheinander annimmt. Da wir schon wissen, was unter *0rt zu einer bestimmten Zeit* zu verstehen sei, treten hier keine neuen Schwierigkeiten auf. Trotzdem ist leicht einzusehen, daß z.B. der oft gebrauchte Ausdruck: die *1s-Bahn des Elektrons im Wasserstoffatom* von unserem Gesichtspunkt aus keinen Sinn hat. Um diese 1s-*Bahn* zu messen, müsste nämlich das Atom mit Licht beleuchtet werden, dessen Wellenlänge jedenfalls erheblich kürzer als 10^{-8}cm ist. Von sol-

chem Licht aber genügt ein einziges Lichtquant, um das Elektron völlig aus seiner *Bahn* zu werfen (weshalb von einer solchen Bahn immer nur ein einziger Raumpunkt definiert werden kann), das Wort *Bahn* hat hier also keinen vernünftigen Sinn. Dies kann ohne Kenntnis der neueren Theorien schon einfach aus den experimentellen Möglichkeiten gefolgert werden [**?**].

Werner Heisenberg (1927)

Eine der weitreichenden Konsequenzen der Heisenbergschen Unschärferelation ergibt sich für die Bahn des Elektrons im Wasserstoffatom. Die Bahntrajektorie verliert seine Bedeutung, weil die Unsicherheit in der Position des Elektrons vergleichbar wird mit der Größe des Atoms. Ein neuer Ansatz zur Beschreibung von Mikroobjekten scheint deshalb zwingend erforderlich, siehe Kapitel *Wellenfunktion*. Wie wir herausgefunden haben, sind Orts- und Impulsunschärfe miteinander verknüpft. Was für Konsequenzen ergeben sich aus dieser Erkenntnis? Für die Position eines Teilchens ergibt sich:

- Der Wellencharakter der Materie verursacht eine Ortsunschärfe Δx
- Die tatsächliche Position des Teilchen ist unklar: Für eine grobe Abschätzung verwendet man die deBroglie Wellenlänge λ_{dB} des Partikels.
- Eine wiederholte Messung der Position liefert kein genaueres Ergebnis. Die Messwerte streuen weiter in einem bestimmten Raumgebiet.
- Die Ortsunschärfe kann verringert werden durch eine Messung mit energiereicheren Elektronen

Für den Impuls eines Teilchens findet man:

- Die Ortsbestimmung erfordert den Nachweis durch einen Detektor. Bei der Messung wird ein Impuls auf das Teilchen übertragen.
- Im Stoß verliert Teilchen einen Teil seines anfänglichen Impulses.
- Der genaue Impulsverlust kann nicht vorhergesagt werden.
- Eine wiederholte Messung des Impulses liefert kein genaueres Ergebnis. Die Messwerte streuen weiter in einem bestimmten Impulsraum.
- Die Impulsunschärfe kann durch Stoß mit niederenergetischeren Elektronen verringert werden.

Im Gegensatz zur klassischen Physik ergibt sich, dass jede Messung Einfluss auf die Bewegung eines Teilchens hat. Da man diesen Effekt nicht ausschalten kann, kommt es stets zu einem Verlust an Information. **Jede Messung verändert das betrachtete physikalische System!** Sehen Sie sich dazu Abb. 10.13 an. Die exakte quantenphysikalische Rechnung ergibt folgende Ungleichung:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2 \tag{10.14}$$

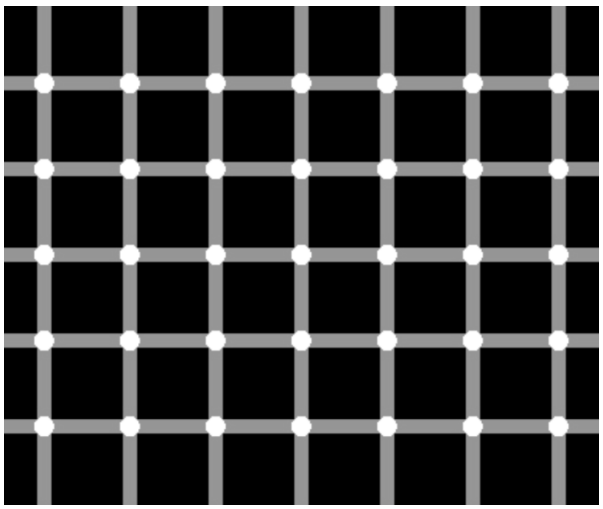


Abb. 10.13: Fixiert man einen der weißen Punkte, sieht man in der Nähe schwarze Punkte aufblitzen. Fixiert man einen dieser Punkte, wird dieser sofort wieder weiß und bleibt es auch. Dies ist eine Analogie, der den Einfluss einer Messung auf ein Quantensystem verdeutlicht.

wobei $\hbar = h/2\pi$. Diese Gleichung ist als Heisenbergsche Unschärferelation bekannt.[10]

Der Impuls eines Teilchens beinhaltet die Masse des Objekts. Ein Proton beispielsweise ist etwa 2000-mal schwerer als ein Elektron. Die größere Masse hat Auswirkungen. Die Orts-Impulsunschärfe ist umgekehrt proportional der Masse des Teilchens. Festzuhalten ist, dass man aus den Anfangsbedingungen die Entwicklung physikalischer Größen nicht exakt vorhersagen kann. Das hat Konsequenzen für Messgrößen in der Quantenphysik (genannt Observable), in der Aussagen nur anhand von Wahrscheinlichkeitsanalysen gemacht werden können. Wellenpakete, mit denen man die Zeitentwicklung von Materiewellen beschreibt, zerfließen und die Positionsbestimmung wird immer ungenauer. Dies ist die Basis für umfangreiche philosophische Diskussionen im Zusammenhang mit dem Thema Determinismus. Auf makroskopischen Größen spielen diese Überlegungen -auch wenn der Cartoon in Abb. 10.15 anderes suggeriert- keine Rolle.

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus Allgemeinen Relativitätstheorie

Gravitationswellen passieren das Interferometer und erzeugen eine metrische Störung, die einer Änderung der Interferometer-Armlängen führt. Die Veränderung in Die effektive Armlänge führt zu einer Phasenverschiebung in den gegenläufig zirkulierenden Lichtwellen und damit zu einer Interferenz. Gravitationswellen erzeugen äußerst schwache Signale. do dass erheblicher Aufwand betrieben werden muss, um die geringen Verzer-

[10] *Lexikon:* In der Literatur findet man häufig unterschiedliche Angaben über den Grenzwert der Unschärferelation. Man liest $\Delta x \cdot \Delta p \geq h$ oder $\geq \hbar$ oder $\geq \hbar/2$. Der genaue Wert ist nicht relevant. Wichtig ist nur zu wissen, dass das Produkt nie signifikant kleiner werden kann als h. Die verwendete Angabe hängt im Wesentlichen davon ab, wie die Breiten Δx und Δp definiert sind. Wir verwenden im weiteren die Angabe $\hbar/2$.

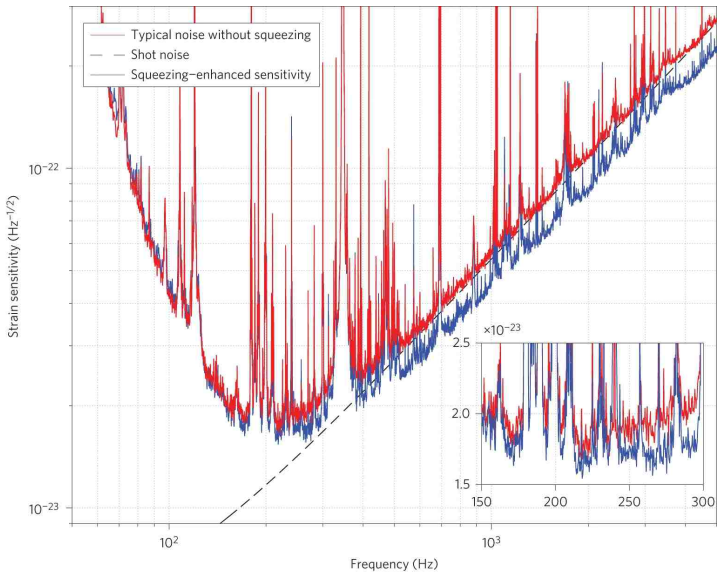


Abb. 10.14: Ausdehnungsempfindlichkeit des LIGO Gravitationswellendetektors H1. Durch eine Quetschung des Lichts erreicht man eine Verbesserung der Empfindlichkeit um 2.15 dB im durch das Schrotrauschen begrenzten Frequenzband. Effekte, wie mechanische Resonanzen in den Spiegelaufhängungen, verursachen die in den Spektren sichtbaren scharfen Linien [**?**].

rungen der Raumzeit experimentell über den Effekt der Interferenz zu erfassen [**?**].

The Quantum enhanced LIGO detector sets new sensitivity record [**?**]**:** The Heisenberg uncertainty principle states that we can't know both the position and the velocity of a quantum particle perfectly - the better we know the position, the worse we know the velocity, and vice versa. For light waves, the Heisenberg principle tells us that there are unavoidable uncertainties in amplitude and phase that are connected in a similar way. One of the stranger consequences of quantum theory is that there must be fluctuating electric and magnetic fields, even in a total vacuum. In a normal vacuum state, these *zero-point* fluctuations are completely random and the total uncertainty is distributed equally between the amplitude and the phase. However, by using a crystal with non-linear optical properties, it is possible to prepare a special state of light where most of the uncertainty is concentrated in only one of the two variables. Such a crystal can convert normal vacuum to *squeezed vacuum*, which has phase fluctuations *smaller* than normal vacuum! At the same time, the amplitude fluctuations are larger, but phase noise is what really matters for LIGO, see Fig. 10.14.

Ein Beispiel aus der Optik

Die Beschränkung der Impulsauflösung durch eine Einschränkung in der Geometrie des Aufbaus, kann man in einem Experiment zur Beugung am Einzelspalt demonstrieren [**?**]. Bei der Beugung am Spalt besteht aufgrund der Spaltbreite eine gewisse Unsicherheit

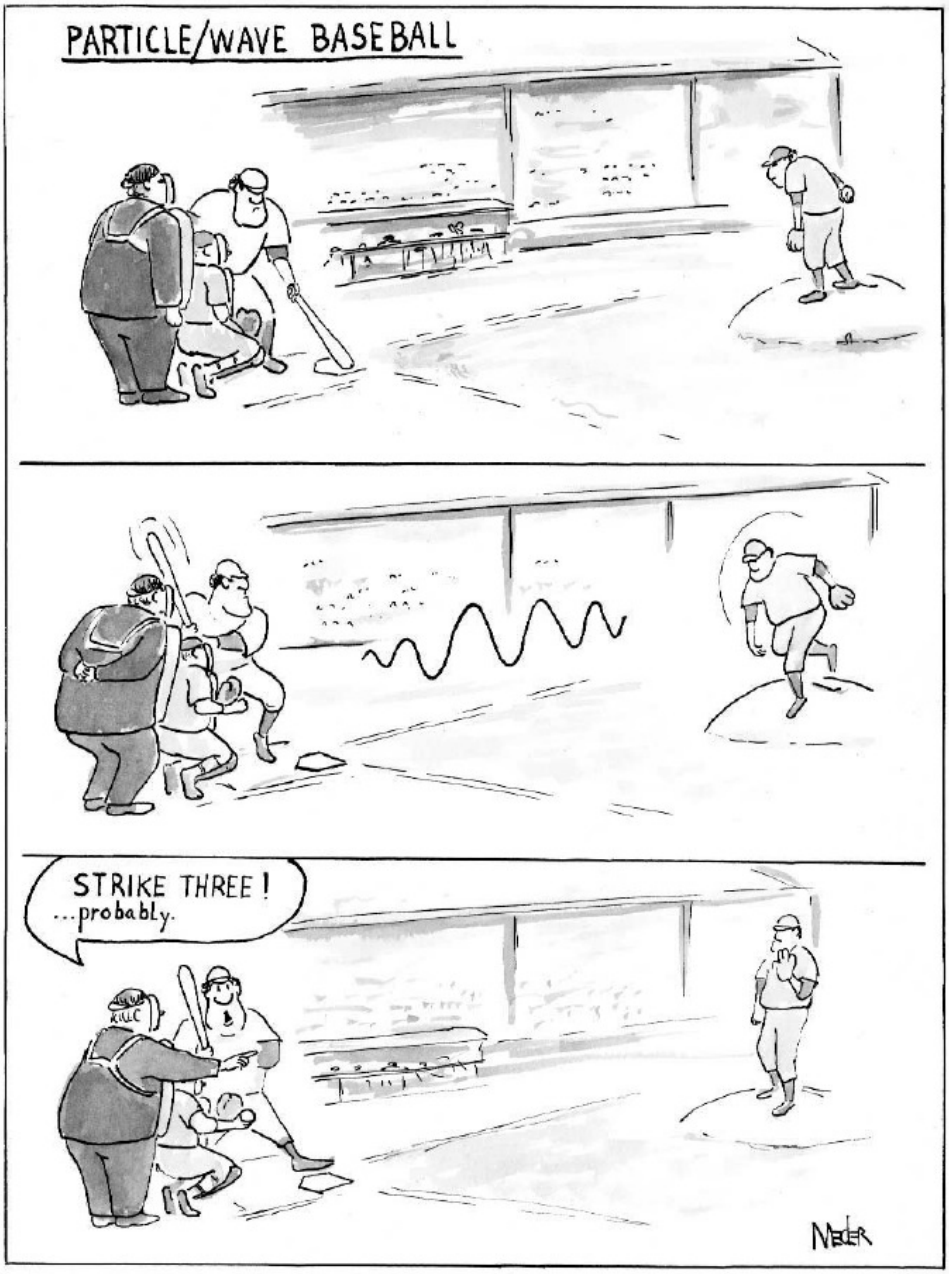


Abb. 10.15: Cartoon zum Welle-Teilchen Dualismus, der die Verbindung zur Heisenbergschen Unschärferelation aufzeigt [**?**].

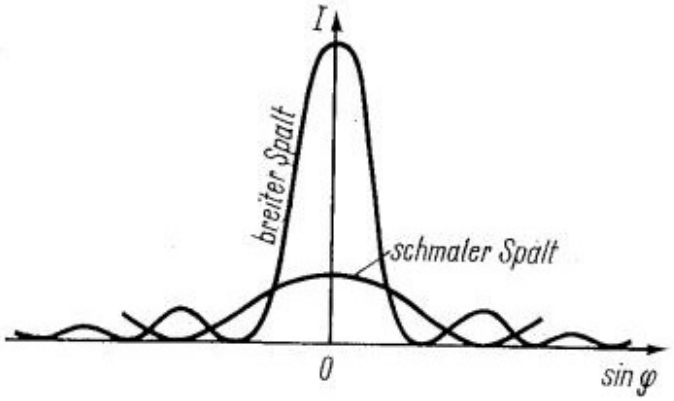


Abb. 10.16: Intensitätsverteilung bei der Beugung am Spalt.

darüber, wo genau das Photon den Spalt durchquert. Die Ortsposition ist also unsicher. Ein geringerer Spaltabstand führt zu verbesserter Lokalisierung in Bezug auf den Weg. Daraus resultiert allerdings eine Erhöhung der Impulsunschärfe. Man kann diesen Umstand als Unsicherheit in der Ausbreitungsrichtung (Wellenvektor $\vec{k}$) interpretieren. Die stärkere Lokalisierung Lichtwegs führt tatsächlich zu einer Verbreiterung des Beugungsstruktur, wie Abb. 10.16 zeigt.

Link to Lecture Demo

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass es im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik nicht möglich ist, die Anfangsbedingungen eindeutig festzulegen. Klassische Mechanik und Quantenphysik sind aber nicht disjunkt, denn die quantenphysikalischen Mittelwerte physikalischer Größen gehorchen den Newtonschen Bewegungsgleichungen[11] und Abweichungen von den klassisch berechneten Bahnen ergeben sich aus der Unschärferelation. Für makroskopische Objekte spielt die Unschärferelation keine Rolle. Beispielweise überträgt die Reflexion von Sonnenlicht einen Impuls auf den Planeten Saturn (Kapitel *Materiewellen*). Dieser Effekt beeinflusst die Bahn des Planeten aber in einer vernachlässigbaren Weise, da der Impuls von Saturn signifikant höher ist. Abschließend gibt Tab. 10.3 eine Übersicht über physikalische Systeme und die Bedeutung der Heisenbergschen Unschärferelation für Messungen an diesen Objekten. Aus den Werten von Orts- und Impulsunschärfe wird berechnet, welche zugehörigen Geschwindigkeiten die Objekte aufweisen. Teils, wie man am Beispiel eines Elektrons im Kern sieht, ergeben sich daraus unrealistische Werte, nämlich $\Delta v > c$.

Experimental verification of the Heisenberg uncertainty principle for fullerene molecules [?]: The Heisenberg uncertainty principle for material objects is an essential corner stone of quantum mechanics and clearly visualizes the wave nature of matter. Here, we report a demonstration of the Heisenberg uncertainty principle for the fullerene molecule C_{70} at a temperature of 900 K. We do this by showing the increase in

[11] Das zugrundeliegende Ehrenfest-Theorem [**?**] stellt den Zusammenhang zwischen klassischen Mechanik und Quantenphysik her.

	Masse [g]	[amu]	Δx [cm]	Δp [g·cm]	$\Delta v = \Delta p/m$ [m/s]	Bemerkung
Kreide	2		10^{-8}	10^{-19}	$5 \cdot 10^{-20}$	unbedeutend
E.Coli	$1.6 \cdot 10^{-13}$	10^{11}	10^{-8}	10^{-19}	$5 \cdot 10^{-7}$	unbedeutend
Neutron	$1.7 \cdot 10^{-24}$	1	10^{-12}	10^{-15}	$6 \cdot 10^{8}$	relevant
Elektron im Atom	$3.1 \cdot 10^{-31}$	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-8}	10^{-19}	10^{8}	relevant
Elektron im Kern	$3.1 \cdot 10^{-31}$	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-12}	10^{-15}	10^{12}	unrealistisch

Tab. 10.3: Beispiele zur Illustration der Unschärferelation.

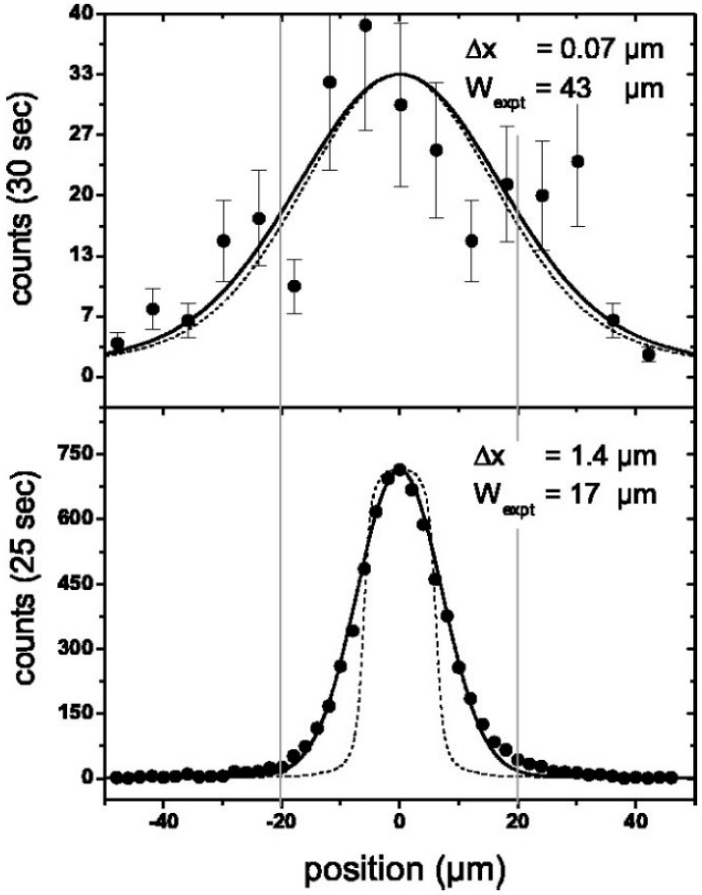


Abb. 10.17: Gemessene Molekülverteilung in der Detektionsebene nach Passieren eines piezogesteuerten Siliziumspalts mit einer Breite von x=1.4 μm (unten) und x=70 nm (oben). Sowohl die quantenmechanische Rechnung (durchgezogene Linie) als auch das Experiment (Kreise) zeigen eine Zunahme des Strahldurchmessers beim Übergang von mittleren (unten) zu schmalen (oben) Spaltbreiten. [**?**].

molecular momentum spread after passage through a narrow slit with a variable width down to 70 nm. We find good quantitative agreement with the theoretical expectation, see Fig. 10.17.

Eine wichtige Konsequenz der Heisenbergschen Unschärferelation werden wir im nächsten Kapitel *Wellenfunktion* kennenlernen. Sperrt man ein Teilchen ein, muss es sich bewegen. Das bedeutet, dass auch die Kinetische Energie ungleich NULL ist. Wir lokalisieren einen Körper im Bereich *Deltax*=[0:a], dann gilt für die Impulsunsicherheit nach Heisenberg:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{a} \tag{10.15}$$

Im Mittel $< p >$ muss der Impuls des Teilchens im Großen und Ganzen diesen Wert annehmen. Gleiches gilt für die kinetische Energie $< E_{kin} >$

$$\begin{aligned} < E_{kin} > &= \left\langle \frac{p^2}{2\,m} \right\rangle \\ < E_{kin} > &\leq \frac{(\Delta p)^2}{2\,m} \\ < E_{kin} > &\leq \frac{\hbar^2}{2\,m \cdot a^2} \end{aligned} \tag{10.16}$$

Man nennt diese Energie die Nullpunktsenergie.

Optically measuring force near the standard quantum limit [?]:[12] The Heisenberg uncertainty principle sets a lower bound on the noise in a force measurement based on continuously detecting a mechanical oscillator's position. This bound, the standard quantum limit, can be reached when the oscillator subjected to the force is unperturbed by its environment and when measurement imprecision from photon shot noise is balanced against disturbance from measurement back-action. We applied an external force to the center-of-mass motion of an ultracold atom cloud in a high-finesse optical cavity and measured the resulting motion optically. When the driving force is resonant with the cloud's oscillation frequency, we achieve a sensitivity that is a factor of 4 above the standard quantum limit and consistent with theoretical predictions given the atoms' residual thermal disturbance and the photodetection quantum efficiency.

[12] **Measuring tiny forces with atomic clouds:** For projects such as detecting gravity waves, physicists need to measure tiny forces precisely. Schreppler et al. developed an extremely sensitive method for force measurement. They applied a known force on a cloud of ultracold rubidium atoms in an optical cavity. The force caused the atoms to oscillate, and the researchers used optical measurements to monitor the motion. Under optimal conditions, the authors could measure forces with a level of sensitivity only four times worse than the fundamental limit imposed by the Heisenberg uncertainty principle.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Ist die Annahme, dass es Neutronen im Kern gibt, realistisch?

Dazu nehmen wir an, dass die Ortsunschärfe von der Größenordnung der Abmessungen des Kerns ist, also $\Delta x{=}10^{-14}\,\mathrm{m}$. Aus dieser Information berechnen wir die Unschärfe im Impuls und daraus die Geschwindigkeit der Neutronen v_n.

$$\begin{aligned}
(\Delta p)\cdot(\Delta x) &\geq \hbar/2 \\
(\Delta(m_N\cdot v_n))\cdot(\Delta x) &\geq \hbar/2 \\
m_N\cdot(\Delta v_n)\cdot(\Delta x) &\geq \hbar/2 \\
v_n &\approx \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m_N\cdot(\Delta x)} \\
v_n &\approx \frac{1}{2}\frac{1.054\cdot10^{-34}\,\mathrm{Js}}{(1.67\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg})\cdot(1\cdot10^{-14}\,\mathrm{m})} \\
v_n &\approx 3.16\cdot10^{6}\,\mathrm{m/s} = 0.01c
\end{aligned}$$

Die geringen Abmessungen des Atomkern sorgen also dafür, dass sich die Neutronen mit erheblicher Geschwindigkeit bewegen. Was stellt man fest, wenn die Rechnung für Elektronen im Kern durchgeführt wird?

Aufgabe 2.2: Details des Wasserstoffatoms werden erst in der Vorlesung *Bohrsches Atommodell* behandelt. Es ergeben sich durch die Heisenbergsche Unschärferelation allerdings schon jetzt Konsequenzen. In der Elektrodynamik kann man die Kreisbahn des Elektrons um das Proton über ein Kräftegleichgewicht berechnen. Eine entsprechende Rechnung ergibt, dass sich das Elektron mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf der ersten Bohrschen Bahn bewegt. Der so genannte Bohrsche Radius beträgt $0.529\cdot10^{-10}\,\mathrm{m}$ und die zugehörige Geschwindigkeit ist $2.19\cdot10^{6}\,\mathrm{m/s}$. Welche Energieunschärfe ergibt nach Heisenberg?

Die Geschwindigkeit des Elektrons ist klein gegen c. In sofern kann man die zugehörige kinetische Energie klassisch ausrechnen.

$$\begin{aligned}
E_{kin} &= \frac{1}{2}\,m_e\cdot v_{Bohr}^2 \\
E_{kin} &= \frac{1}{2}\,(9.109\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg})\cdot(2.19\cdot10^{6}\,\mathrm{m/s})^2 \\
E_{kin} &= 2.18\cdot10^{-18}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir nach Heisenberg die Breite der Geschwindigkeitsverteilung und die

zugehörige Unschärfe in der kinetischen Energie des Elektrons.

$$\begin{aligned}
\Delta p_{Bohr} &= m_e \cdot \Delta v_{Bohr} = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\Delta x_{Bohr}} \\
\Delta v_{Bohr} &= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{m_e \cdot \Delta x_{Bohr}} \\
\Delta v_{Bohr} &= \frac{1}{2}\frac{1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{(9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (0.529 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m})} \\
\Delta v_{Bohr} &= 1.16 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{kin} &= \frac{1}{2}\, m_e \cdot \Delta v_{Bohr}^2 \\
\Delta E_{kin} &= \frac{1}{2}\,(9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (1.16 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m/s})^2 \\
\Delta E_{kin} &= 6.12 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Das Verhältnis der beiden Resultate offenbart erstaunliches:

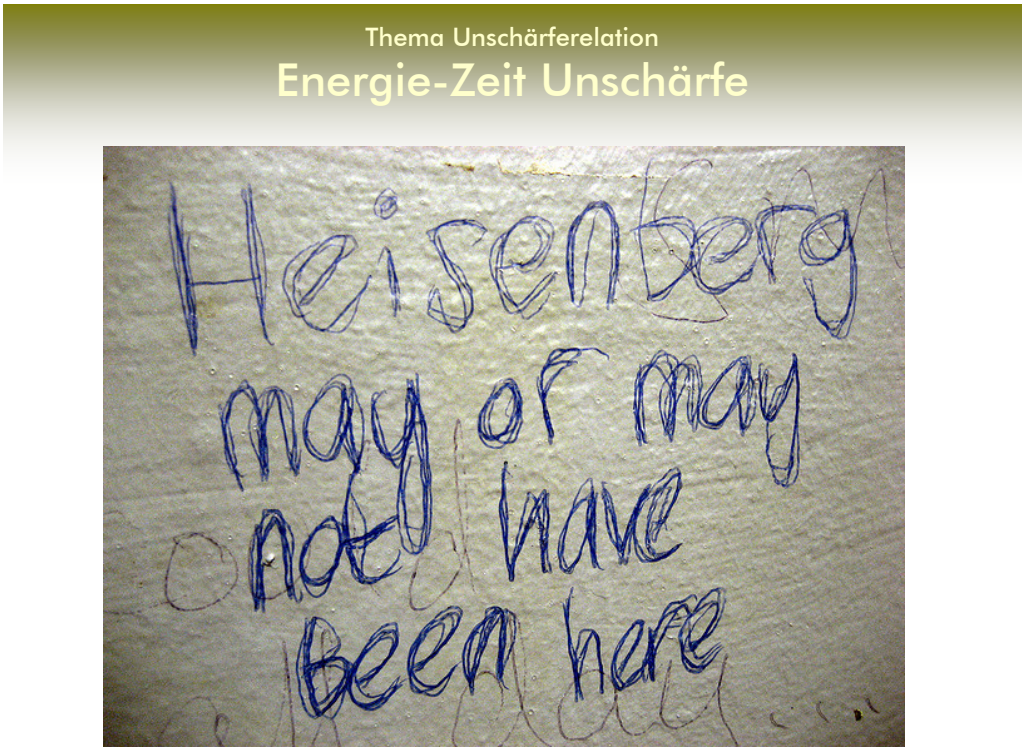
$$\frac{\Delta E_{kin}}{E_{kin}} = 0.28$$

Die Unschärferelation liefert einen merklichen Beitrag zur Energiebilanz. Die kinetische Energie des Elektrons ist im besten Fall (Heisenberg Limit) nur auf etwa 30% genau bestimmt. Die Annahme einer scharf definierten Bahn des Elektrons um das Proton ist demnach nicht mehr haltbar. Was tun? Die Antwort liefert Kapitel *Wellenfunktion.*,

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Erlaubt die Heisenbergsche Unschärferelation, dass ein Teilchen in einer bestimmten Region im Raum ruht?
2. Stimmen die Dimensionen von $\Delta E \cdot \Delta t$ und $\hbar$ überein?
3. Löst die Heisenbergsche Unschärferelation das Paradox, das Licht manchmal Teilchen und manchmal Wellencharakter hat?
4. Wie genau kennt man die deBroglie-Wellenlänge eines Teilchens?
5. Würden Sie die Behauptung unterstützen, dass am absoluten Nullpunkt alle Bewegung (Translation, Vibration, Rotation) aufhört?
6. Warum liefert die Heisenbergsche Unschärferelation eine Begründung dafür, dass der absolute Nullpunkt nicht erreicht werden kann?
7. Wie sind Unschärferelation und Materiewellen miteinander verknüpft?
8. Die Heisenbergsche Unschärferelation sagt aus, dass Elektronen und Atome keinen vorbestimmten Bahnen folgen. Gilt diese Überlegung auch für Golfbälle?
9. Kann es so etwas wie einen perfekten starren Körper überhaupt geben?
10. Was ist die maximale Unschärfe in Bezug auf die Bewegung des Elektrons im Wasserstoffatom?
11. Wenn der Formalismus der Quantenphysik so außerordentlich exakt im Vergleich zur klassischen Mechanik ist, warum verwenden wir dann nicht die Quantenphysik, um die Bewegung eines springenden Frosches zu beschreiben?
12. Können wir die Energie eines freien Teilchens mit absoluter Präzision messen, wenn wir den Ort des Teilchens exakt bestimmt haben?
13. Wenn man einen ionischen Kristall abkühlt, reduziert sich die Amplitude der Schwingung der Ionen auf einen minimalen Wert, der ungleich NULL ist. Warum ist das so?

10.3 Energie-Zeit Unschärfe



Heisenberg hat ein großes Quantenei gelegt [**?**].

Albert Einstein an Paul Ehrenfest,1925

Neben der Orts-Impuls Unschärfe ist für uns die Heisenbergsche Verknüpfung von Energie und Zeit interessant. Als Motivation kann man sich folgende Herleitung überlegen. Für die kinetische Energie gilt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \tag{10.17}$$

Die sich daraus gegebene Energieunschärfe nach Heisenberg ist dann:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta\left(\frac{1}{2} m \cdot v^2\right) \\ \Delta E &= m \cdot v(\Delta v) \\ \Delta E &= v \cdot (\Delta p) \\ \Delta E &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta p \\ \Delta E \cdot \Delta t &= \Delta x \cdot \Delta p \end{aligned} \tag{10.18}$$

Den Wert für die Orts-Impulsunschärfe kennen wir schon und es ergibt sich:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{10.19}$$

und es folgt daraus, dass

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{10.20}$$

Es sei angemerkt, dass es neben den Ort-Impuls und Energie-Zeit Unschärferelationen auch eine Unschärferelation bezüglich der Größen Drehwinkel und Drehimpuls gibt. Die Zeitunschärfe spielt eine wichtige Rolle für die Physik! Warum? Angeregte Atome beispielsweise emittieren Licht erst nach einer gewissen mittleren Verzögerungszeit. Typisch sind 10^{-9} s. Diese Zeitspanne Δt hat Auswirkungen auf die Energiebilanz. Noch fundamentaler wirkt sich die Energie-Zeit Unschärferelation im Hinblick auf kurzlebige Teilchen aus. Wir werden feststellen, dass man aus der Energiebilanz bei der Erzeugung von Elementarteilchen auch Aussagen über deren Lebensdauer extrahieren kann.

Erinnerung: Wie bildet sich aus der Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Frequenz ein Schwebungsmuster? Die Abb. 10.18 zeigt es! Wie man sieht, gibt es einen engen Zusammenhang zwischen Orts- und Impulsraum (Stichwort aus der Mathematik: Fouriertransformation). Man macht folgende allgemeine Beobachtung:

Je breiter das Frequenzband ist, das für die Überlagerung verwendet wird, desto schmaler wird das Wellenpaket im Ortsraum.

Die unterschiedlichen Frequenzen, die zu einem lokalisierten Wellenpaket führen, haben über die Plancksche Gleichung $E = h \cdot \nu$ Auswirkungen auf den gemessenen Energiewert. Je breiter das Frequenzband, desto unsicherer wird die Bestimmung der Energie. Interpretiert man die Breite des Frequenzbandes auch als zeitliche Unsicherheit Δt, ergibt sich der Ausdruck für die Energie-Zeit Unschärferelation. Es sei angemerkt, dass diese Unschärfe im Sinne einer strengen Formulierung der Quantenphysik nicht den Stellenwert der Orts-Impuls Unschärfe hat. Das liegt daran, dass die Zeit keine Observable ist, siehe Vorlesung *Wellenfunktion*. Heisenberg hat aber schon in seiner Originalarbeit [**?**] den Zusammenhang zwischen der zeitlichen Dauer von Vorgängen in der Quantenphysik Δt und der damit verbundenen Breite ΔE des Energiespektrums diskutiert.

Der Ausdruck für die Energie-Zeit Unschärferelation ergibt sich auch für ein extrem relativistisches Teilchen. Für die Gesamtenergie gilt, da man die Ruheenergie vernachlässigen kann:

$$E_{ges} = p \cdot c \tag{10.21}$$

Die Energieunschärfe ergibt sich aus der Impulsunschärfe:

$$\Delta E_{ges} = \Delta p \cdot c \tag{10.22}$$

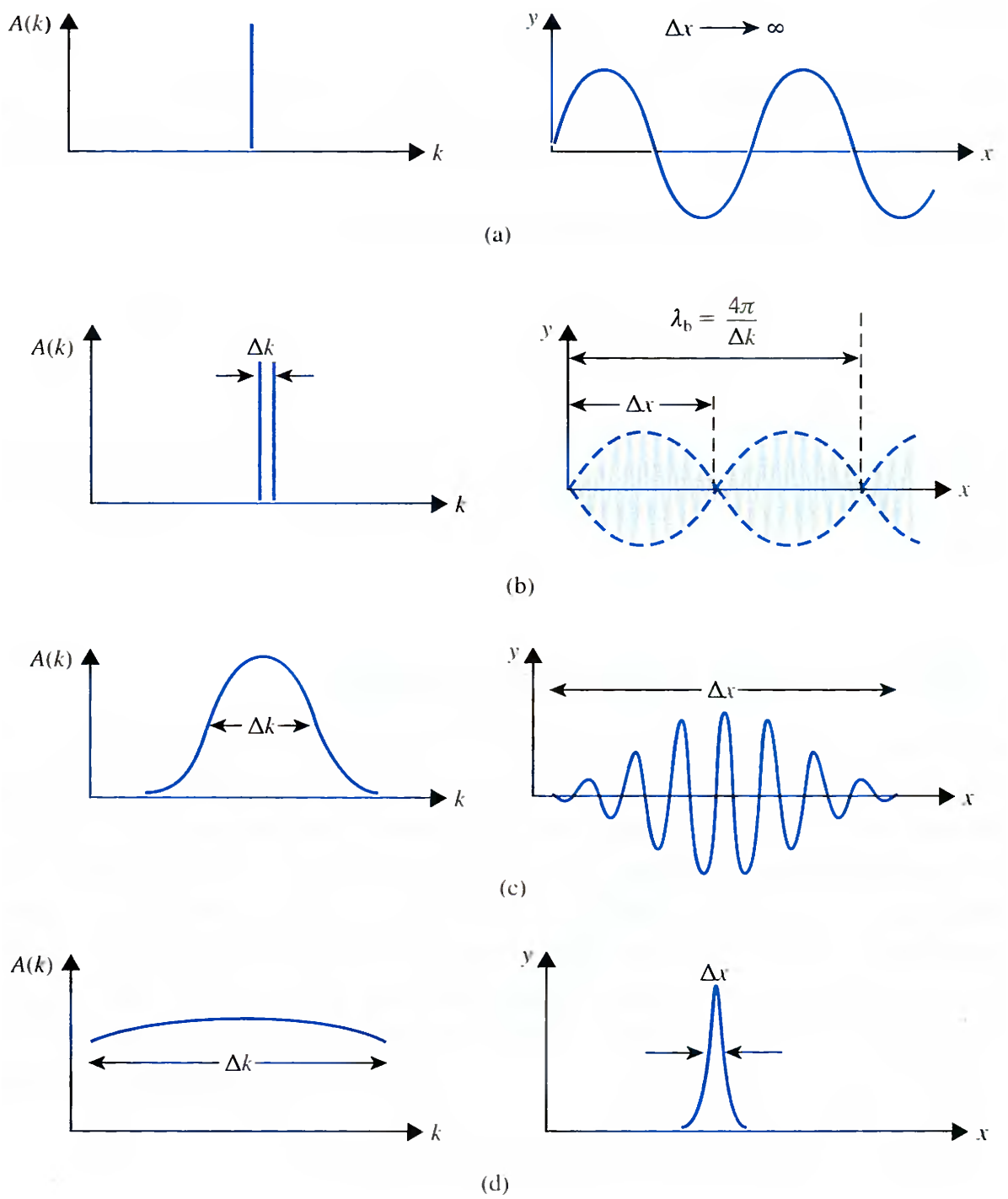


Abb. 10.18: Frequenzspektren und resultierende Wellenformen, betrachtet zu einem festgelegten Zeitpunkt, (a) monochromatische Welle (b) Superposition Wellen leicht unterschiedlicher Frequenz (c) Wellen mit einem kontinuierlichen Spektrum an Frequenzen, die sich über ein kleines Intervall Δk erstrecken (d) Wellen mit einem kontinuierlichem Spektrum an Frequenzen, die sich über ein größeres Frequenzintervall erstrecken [**?**].

Teilchen	Breite Γ	Lebensdauer τ	Zerfallskanal
η	1.0 keV	$6.6 \cdot 10^{-19}$ s	$\gamma + \gamma$
γ	43 keV	$1.5 \cdot 10^{-20}$ s	Hadronen
J/Ψ	60 keV	$1.0 \cdot 10^{-20}$ s	Hadronen
ϕ	4.2 MeV	$1.6 \cdot 10^{-22}$ s	$K^+ + K^-$
ρ	153 MeV	$4.3 \cdot 10^{-24}$ s	$\pi^+ + \pi^-$
Z^0	2.5 GeV	$2.6 \cdot 10^{-25}$ s	$\gamma + \gamma$

Tab. 10.4: Gemessene Energiebreiten von Teilchen und zugehörige Lebensdauern. Die Energiebreiten wurden im Experiment bestimmt und daraus anhand der Unschärferelation die Lebensdauer berechnet [**?**].

Da $\Delta t = \Delta x/c$ folgt wiederum

$$\Delta E \cdot \Delta t = (\Delta p \cdot c) \cdot \left(\frac{\Delta x}{c}\right) = \Delta p \cdot \Delta x \tag{10.23}$$

Die Energieauflösung ist schlechter, wenn man die Energie nur innerhalb einer kurzen Zeitspanne bestimmt. Woran liegt das? Wie wir bald sehen werden, absorbieren und emittieren Teilchen andauernd Photonen. Erst auf einer langen Zeitskalen mitteln sich diese Fluktuationen heraus. Diese führt zu einer natürlichen Grenze für die Bestimmung der Energie eines Teilchens bei kurzen Messzeiten. Man kann anhand der Energie-Zeit Unschärferelation Aussagen über Lebensdauern erhalten. Die mittlere Lebensdauer eines Teilchens sei $\Delta t = \tau$ und $2\,\Delta E = \Gamma$. Dann ergibt sich die Unschärferelation in folgender Weise:

$$\Gamma \cdot \tau = \hbar \tag{10.24}$$

Da bedeutet: Kennt man die Lebensdauer, kennt man die Breite der Energieverteilung und umgekehrt. Die Tabellen 10.4 und 10.5 geben Beispiele. Abb. 10.19 zeigt den Zusammenhang zwischen Lebensdauer und Energiebreite für instabile Teilchen.[13]

Man kann an dieser Stelle, die Konsequenzen zusammenfassen. Die Heisenbergsche Unschärferelation postuliert, dass man in keiner noch so ausgefeilten Messung den genauen Wert bestimmter Observablen gleichzeitig erfassen kann. Die Unschärferelation gestattet es aber, den Wert des Impulses auf Kosten der Ortsinformation genauer zu bestimmen. Allerdings ist es nicht möglich, die Unschärferelation auszutricksen, indem man eine der beiden Eintrage in der Unschärferelation nicht bestimmt. Beispielsweise sind für freie Atome (keine Wechselwirkung mit der Umgebung) die Linienbreite einer Emissionslinie ΔE_{atom} und die Lebensdauer des Energiezustands Δt_{atom} untrennbar miteinander verknüpft. Eine Observable nicht zu messen, ist keine Lösung!

[13] *Lexikon:* Die **natürliche Linienbreite**, siehe Abb. 10.20 ist für Atome und Moleküle die kleinste mögliche spektrale Breite einer Spektrallinie. Wirkt kein anderer Verbreiterungsmechanismus, wie beispielsweise der Dopplereffekt, so beobachtet man im Frequenzspektrum eine Lorentzkurve. Die natürliche Linienbreite ist bestimmt durch die Lebensdauer des angeregten Zustands und ergibt sich aus der vollen Halbwertsbreite.[14]

Teilchen	Lebensdauer τ	Breite Γ	Zerfallskanal
π^0	$9.0 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s}$	$7\,\mathrm{eV}$	$\gamma + \gamma$
π^-	$2.6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$	$2.53 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{eV}$	$\mu^- + \overline{\nu}_\mu$
μ^-	$2.2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$	$2.99 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{eV}$	$e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$
n	$900\,\mathrm{s}$	$7.0 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{eV}$	$p + e^- + \overline{\nu}_e$

Tab. 10.5: Gemessene Lebensdauern von Teilchen und zugehörige Energiebreiten. Die Lebensdauer wurden im Experiment bestimmt und daraus anhand der Unschärferelation die Energiebreiten berechnet [**?**].

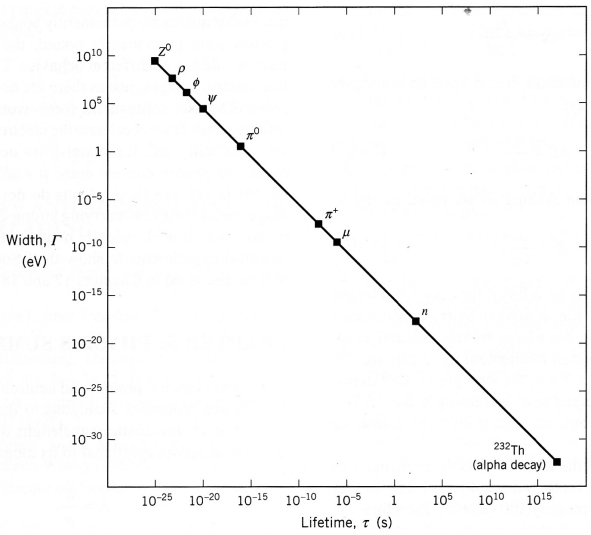


Abb. 10.19: Der Zusammenhang zwischen Energiebreite und Lebensdauer wird bestimmt durch die Energie-Zeit Unschärfe [**?**].

Anwendungen^{4LP}

How wide is a Higgs? In accord with Heisenberg's uncertainty principle, short-lived particles have uncertain mass. So the Higgs boson, which gives mass to other particles, is uncertain about its own mass. New results from the CMS experiment at the CERN LHC have started to tell us how uncertain.

The Guardian, 24.4.2014

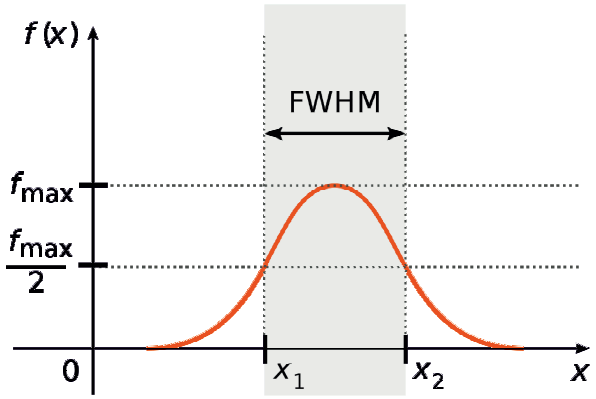


Abb. 10.20: Definition der Halbwertsbreite [**?**].

Über die Einsteinsche Gleichung (Kapitel *Einsteingleichung*) hat dies Auswirkungen auf die Ruhemasse. In einer experimentellen Messung ergibt sich eine breite Verteilung in den Werten für die Masse des betrachteten Teilchens. Möglich ist auch, dass im Zerfall des Teilchen eine breite Verteilung in der kinetischen Energie gemessen wird. Die Unschärferelation kann man auch bei der Relaxation von Objekten anwenden, wenn es beispielsweise bei der Relaxation zur Emission von Teilchen kommt. Ein Beispiel ist der radioaktive α-Zerfall. Eine große Unschärfe in der kinetischen Energie ergibt sich, wenn die Lebensdauer des radioaktiven Kerns gering ist.

Was bedeutet es, wenn ein Teilchen eine definierte Energie ($\Delta E = 0$) hat? Dann ist $\Delta t = \infty$ und ein Quantenteilchen bleibt für alle Zeiten am selben Ort und ändert seinen Energiezustand nicht. Im Zusammenhang mit der Schrödingergleichung und dem Bohrschen Atommodell spricht man von stationären Zuständen. Ändert das Teilchen seinen Zustand wird Δt endlich und konsequenterweise ergibt sich $\Delta E \neq 0$ und die Energiewerte werden *unscharf*.

Ein Beispiel für den Versuch, die Unschärferelation umzustürzen, ist Einsteins Lichtkiste. Einstein beschrieb in Bezug auf $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ eine Kiste voll mit Licht, bei der man sowohl die Energie eines einzelnen Photons als auch die Zeit der Emission genau bestimmt. Eine solche Messung wäre nach der Heisenbergschen Unschärferelation nicht möglich. In dem Gedankenexperiment wird zunächst die Kiste gewogen. Danach entweicht ein einzelnes Photon durch einen Verschluss, der von einer Uhr in der Kiste gesteuert wird. Anschließend wird die Kiste erneut gewogen und die Massendifferenz Δm ermittelt. Die Energie des Photons ist $E = (\Delta m) \cdot c^2$. Es scheint, dass man sowohl die Energie des Photons als auch seine Auskoppelzeit genau bestimmen kann. Niels Bohr erkannte, dass es einen Fehler in Einsteins Argumentation gab. Wenn das Photon freigesetzt wird, wird, aufgrund der Impulserhaltung, die Box einen Impuls zu erhalten und dadurch die Position der Box im Gravitationsfeld der Erde unbestimmter werden. Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie besagt außerdem, dass dieser Vorgang eine entsprechende Unsicherheit in der Uhrzeit verursachen würde. So ist das, wenn man von seiner eigenen Theorie eingeholt wird.

Beispiele aus der Elementarteilchenphysik

When the Nobel Prizes were first awarded in 1901, physicists knew something of just two objects which are now called *elementary particles*: the electron and the proton. A deluge of other *elementary* particles appeared after 1930; neutron, neutrino, μ meson (sic), π meson, heavier mesons, and various hyperons. I have heard it said that *the finder of a new elementary particle used to be rewarded by a Nobel Prize, but such a discovery now ought to be punished by a $ 10,000 fine.*

Willis Lamb (Nobel lecture, 1955)

In der Elementarteilchenphysik wird der November 1974 als Novemberrevolution bezeich-

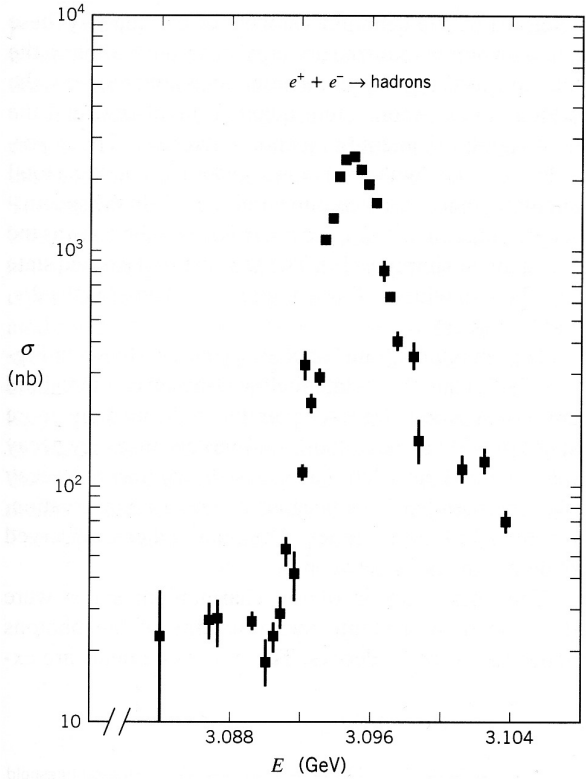


Abb. 10.21: Entdeckung des Psions in $e^+ + e^-$ Stößen. In der Messung wird die Stoßenergie von Elektron und Positron in kleinen Schritten verändert und die Rate der Annihilation in Hadronen registriert [**?**].

net. Forschergruppen[15] (SLAC, Brookhaven) am SLAC und in Brookhaven meldeten unter Ausnutzung unterschiedlicher Stoßprozesse

$$e^+ + e^- \rightarrow \Psi \quad \text{(SLAC)} \tag{10.25}$$
$$p + p \rightarrow J \quad \text{(Brookhaven)} \tag{10.26}$$

die Entdeckung eines Elementarteilchens mit einer Masse von $3.1\,\mathrm{GeV}/c^2$ [**? ? ?**]. Das neu entdeckte Teilchen trägt aus den historischen Gründen den Namen J/Ψ oder Psion, siehe auch Kapitel *Einsteingleichung*. Im Experiment steigt der Wechselwirkungsquerschnitt für die Reaktion enorm an, wenn die Stoßenergie der Ruheenergie des Teilchens entspricht, siehe Abb. 10.21.

Im Zusammenhang mit der Energie-Zeit Unschärfe ergeben sich Möglichkeiten, die enge Verzahnung zu nutzen, um Details physikalischer Prozesse zu erfassen. Beispielsweise kann man die Energie von Teilchen im Experiment gut bestimmen. Ist man an der Lebensdauer dieser Teilchen (Δt) interessiert, stößt man schnell an instrumentelle Grenzen. Über den Umweg einer Messung der Energieverteilung (ΔE) kann diese Größe unter Verwendung der Unschärferelation bestimmt werden. Bei der Messung ergab sich eine

[15] The Nobel Prize in Physics 1976 was awarded jointly to Burton Richter and Samuel Chao Chung Ting *for their pioneering work in the discovery of a heavy elementary particle of a new kind*

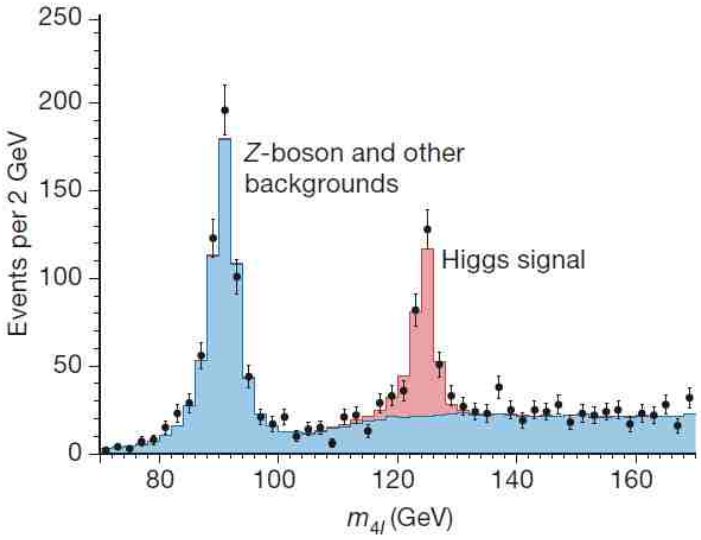


Abb. 10.22: Der Peak um 125 GeV entspricht Zerfällen von Higgs-Bosonen, während man den Peak nahe 91.2 GeV Zerfällen einzelner Z-Bosonen zuordnen kann [**?**].

Linienbreite von ΔE=63 keV. Setzt man diesen Wert in die Unschärferelation ein, ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta E \cdot \Delta t &\geq \hbar/2 \\ \Delta t &= \hbar/2 \cdot \frac{1}{\Delta E} \\ \Delta t &\approx 10^{-20}\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{10.27}$$

Die Lebensdauer war überraschenderweise um drei Größenordnungen höher als typische Zerfallszeiten von Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen. Diese Ergebnis gab Hinweise auf die Quarkstruktur der Materie. Tatsächlich ist das Psion ein gebundenes System aus einem Quark und einem Antiquark. Es ist also ähnlich zum Wasserstoffatom (Proton und Elektron), mit dem Unterschied das die Massen der Teilchen identisch sind und die Wechselwirkung aufgrund der Starken Wechselwirkung erfolgt.

Abb. 10.22 zeigt die Messungen, die zum Nachweis der Higgs-Teilchens führte [**?**].[16] Abb. 10.23 zeigt, welchen Hype die Entdeckung des Higgs-Teilchens damals auslöste.[17]

[16] The Nobel Prize in Physics 2013 was awarded jointly to François Englert and Peter W. Higgs *for the theoretical discovery of a mechanism that contributes to our understanding of the origin of mass of subatomic particles, and which recently was confirmed through the discovery of the predicted fundamental particle, by the ATLAS and CMS experiments at CERNs Large Hadron Collider*

[17] *Lexikon:* Die Symmetrie in den Gleichungen des Standardmodells ergibt, dass alle Teilchen masselos sind. Über welchen Mechanismus erhalten die Elementarteilchen, als Bausteine der Materie, ihre Masse? Der Verursacher ist die Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld. Der Prozess nennt sich Spontane Symmetriebrechung. Photonen und Gluonen wechselwirken nicht mit dem Higgs-Feld und bleiben deshalb masselos. In diesem Medium bewegt sich Materie. Unterschiede ergeben sich durch die Wechselwirkung der Teilchen mit dem Higgs-Feld ($E = m \cdot c^2$). Je stärker die Wechselwirkung, umso größer die Masse des Teilchens. Zum Higgs-Feld gehört das **Higgs-Teilchen**. Dieses Teil-



Abb. 10.23: Ausschnitte aus Zeitungen, nachdem die Entdeckung des Higgs-Teilchen am 4. Juli 2012 bekannt gegeben wurde [**?**].

Die Vermessung des Energiebereichs, bei der das Higgs-Teilchen erzeugt werden kann, liefert den Forschern Informationen über die Lebensdauer. Der akzeptierte Wert für die mittlere Lebensdauer bestimmt aus der Unschärferelation ist 10^{-22} s. Abb. 10.24 soll verdeutlichen, dass zwischen der theoretischen Vorhersage und dem experimentellen Nachweis des Higgs-Bosons als letztem fehlenden Puzzleteil des Standardmodells der Teilchenphysik fast fünfzig Jahre vergingen. Im frühen Universum sprechen wir über kleinste Zeitskalen. Das bedeutet, dass Energien und Energieunschärfen nach Heisenberg extrem hoch und extreme Ausschläge möglich waren. Teilchen entstanden, stoßen miteinander und vergingen wieder, was zur Anisotropie in der Kosmischen Hintergrundstrahlung (Kapitel *Schwarzer Strahler*) führte. Das embryonale Universum kurz nach dem Urknall kann also aufgrund der Unschärferelation nicht einheitlich gewesen sein.

chen ist ein Grundpfeiler des Standardmodells der Elementarteilchenphysik. Abb. 10.25 zeigt eine Simulation wie das Higgs-Teilchen im ATLAS Detektor am CERN in vier Myonen zerfällt.



Abb. 10.24: Cartoon zum Higgs-Boson

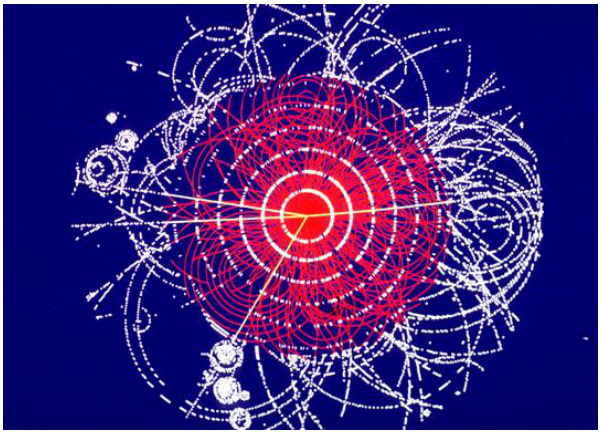


Abb. 10.25: Simulation eines Higgs-Teilchens, das in vier Myonen zerfällt und mit dem ATLAS-Detektor am CERN nachgewiesen werden kann.

Heisenberg Aroma 30 ml - Der Urknall des Dampfens 14,95 Euro

Werbeslogan

Ten years ago, on 4 July 2012, scientists and journalists gathered at CERN, and remotely around the world, for the announcement of the discovery of a new fundamental particle, the Higgs boson. The discovery, by the ATLAS and CMS collaborations at the Large Hadron Collider (LHC), came almost 50 years after theorists had postulated the existence of such a particle. The significance of the discovery was not only that a new, long-awaited particle had been found, but that the existence of this particle provides first direct evidence that surroundingus there is a new kind of fundamental *field*, known as the Higgs field. Fields in physics are familiar in everyday life, for example in the form of the earth's magnetic field, and its impact on the needle of a compass. The most

important difference between the Higgs field and a magnetic field is that if one removes the magnetic source, the magnetic field disappears. By contrast, the Higgs field is non-zero everywhere, all the time, independently of whether anything else is present in the Universe. In a way, it is reminiscent of the ancient Greek concept of Aether with the crucial difference that it is consistent with Einstein's theory of special relativity. Physicists' current theory of fundamental particles and forces is known as the Standard Model, a theoretical framework that provides a description of elementary particles and the forces that make them interact with one another, with the exception of gravity. Within the Standard Model, the Higgs field is essential to describe the world as we know it [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Ein angeregtes Atom kehrt nach etwa $10^8\,\mathrm{s}$ in seinen tiefsten Energiezustand (genannt Grundzustand) zurück. Wie hoch ist die Unbestimmtheit in Bezug auf die ausgesendete Frequenz der Strahlung?

Die zugehörige Energiebreite ΔE ist

$$\begin{aligned}\Delta E \cdot \Delta t &= \frac{\hbar}{2} \\ \Delta E &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\Delta t} \\ \Delta E &= \frac{1}{2}\frac{(1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s})\cdot\mathrm{s}}{1\cdot 10^{-8}\cdot\mathrm{s}} \\ \Delta E &= 5.27 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

Die entsprechende Frequenzunschärfe ergibt sich mit

$$\begin{aligned}\Delta E &= h\cdot(\Delta\nu) \\ \Delta\nu &= \frac{\Delta E}{h} \\ \Delta\nu &= \frac{5.27\cdot 10^{-27}\,\mathrm{J}}{6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}} \\ \Delta\nu &= 7.98\cdot 10^{6}\cdot\mathrm{s}^{-1}\end{aligned}$$

Den Wert $\Delta\nu$ nennt man die natürliche Linienbreite des atomaren optischen Übergangs. Geringer als dieser Wert kann die Breite einer Spektrallinie nicht werden. Man erkennt, dass man durch einen langlebigen angeregten Zustand Spektrallinien mit geringer Breite erhält, siehe die 21-cm Linie im Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*. Darüber hinaus gibt es weitere Mechanismen wie Stöße und thermische Bewegung (Dopplerverbreiterung), die die Linienbreite erhöhen. In hochauflösenden Experimenten wird versucht den Beitrag durch diese Effekte zu vermeiden. Ein Beispiel ist die Dopplerfreie Spektroskopie [**?**].

Aufgabe 3.2: Man kann den Term Δt als Lebensdauer eines Teilchens interpretieren. Dann ergibt sich eine große Energieunschärfe bei einer geringen Lebensdauer eines Teilchens. Manche Kerne oder exotische Teilchen haben Lebensdauern von nur 10^{-25} Sekunden. Berechnen Sie die zugehörige Heisenbergsche Energiebreite ΔE!

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\Delta t} \\ \Delta E &= \frac{1}{2}\frac{1.054\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}}{1\cdot 10^{-25}\,\mathrm{s}} \\ \Delta E &= 5\cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3.13\cdot 10^{9}\,\mathrm{eV} = 3.13\,\mathrm{GeV}\end{aligned}$$

Konzeptionelle und andere Fragen

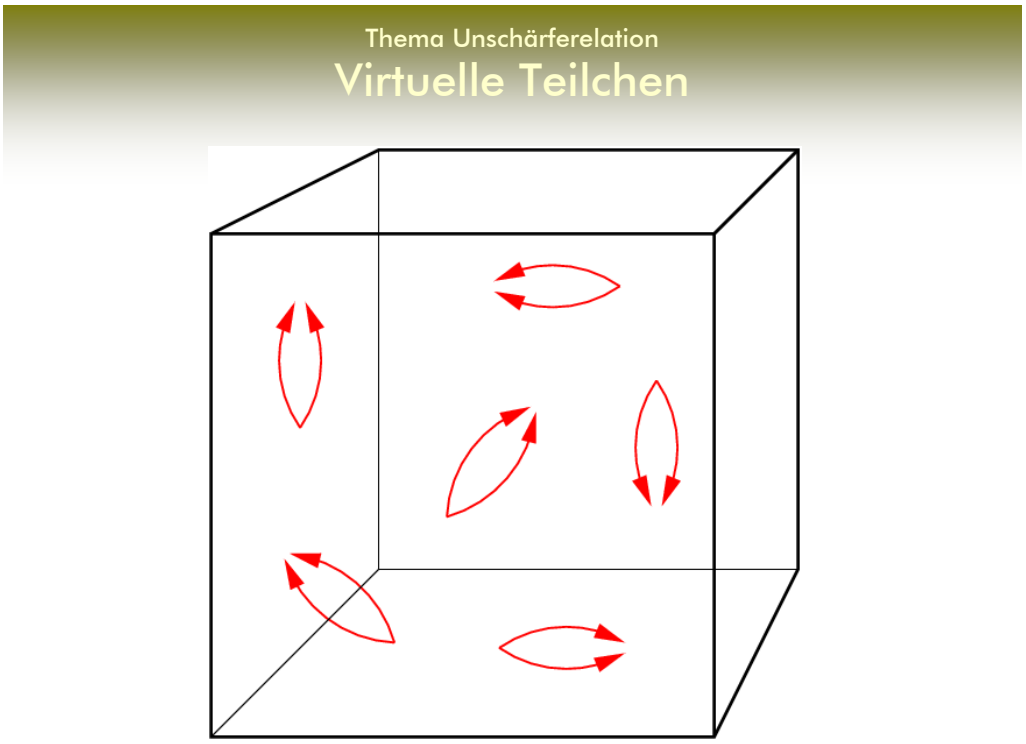
1. Gibt es nach Heisenberg Probleme bei der gleichzeitigen Bestimmung von Ort und Zeit?

2. Ist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit aus der Speziellen Relativitätstheorie ein Problem im Zusammenhang mit der Unschärferelation?

3. Warum schränkt die Unschärferelation unsere Möglichkeiten ein, die Masse eines instabilen Objektes wie einen radioaktiven Kern zu bestimmen?

4. Angenommen, Sie wollten einen Frequenzstandard über die Aussendung von Licht, dass im Zerfall eines elektronisch angeregten Zustands eines Atoms entsteht, definieren. Welche Eigenschaften würden Sie fordern?

10.4 Virtuelle Teilchen



That one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of anything else, by which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity , that I believe no man, who has in philosophical matters a component faculty of thinking, can ever fall into it.

Issac Newton

Die Relativitätstheorie verknüpft Ort, Geschwindigkeit, Zeit und Energie. Insbesondere ergeben sich besondere Beziehungen, wenn man sich der Lichtgeschwindigkeit nähert. Kernnahe Elektronen bewegen sich so schnell, dass die Effekte der Relativitätstheorie berücksichtigt werden müssen, siehe Kapitel *Chemie schwerer Elemente*. Auf dieser Größenordnung gelten aber auch die Gesetze der Quantenphysik. Aus der Unschärferelation resultiert, dass es unmöglich ist, eine Vorhersage über die Gesamtenergie in diesem Volumen zu machen. Und genauso ist es nicht möglich, die Anzahl der Teilchen vorherzusagen, die sich in diesem Volumen aufhalten. Diese Überlegungen führen zum Konzept der Virtuellen Teilchen.

Energie ist wie ein Guthaben auf einer Bank. Man kann es auf unterschiedliche Weise ausgeben. Allerdings ist ein Kredit nicht vorgesehen. Dies ändert sich mit der Unschärferelation. Man könnte es den Heisenberg-Kredit nennen. Die Konsequenzen sind vielfältig.

Wechselwirkung	relative Stärke	Reichweite	Wechselwirkungszeiten
Gravitation	10^{-38}	unendlich	Jahre
Schwache Wechselwirkung	10^{-11}	10^{-15} m	$10^{-8} - 10^{-13}$ s
Elektrostatische Wechselwirkung	1	unendlich	$10^{-14} - 10^{-20}$ s
Starke Wechselwirkung	15	10^{-15} m	10^{-22} s

Tab. 10.6: Fundamentale Wechselwirkungen. Alle physikalischen Systeme können durch ihre Größe und typischen der Wechselwirkungsprozesse charakterisiert werden. Atome sind etwa 10^{-10} m groß und elektronische Übergänge passieren auf einer Zeitskala von 10^{-9} s. Prozesse im Kerne kann man abschätzen über die Zeit, die ein Nukleon (Kinetische Energie 50 MeV) benötigt, um den Kern (10^{-15} m) zu durchqueren. Das ergibt Zeiten von 10^{-23} s.

Beispielsweise gibt es kein Molekül (z.B. CO) was absolut still steht. Tatsächlich schwingen die Atomen stets um ihre Ruhelage. Man nennt die damit verbundene Energiegröße die Nullpunktsenergie.[18] Erkennen Sie den Zusammenhang zur Thermodynamik.[19] Mehr dazu im Kapitel *Wellenfunktion*.

Anwendungen 1^{4LP}

Die Unsicherheit in der Energie führt zu Möglichkeiten auf kurzen Zeitskalen Teilchen entstehen und verschwinden zu lassen (siehe Vorlesung *Einsteingleichung*). Man nennt diese Spezies Virtuelle Teilchen. Vielleicht haben sie ja schon mal von dem Begriff Vakuumfluktuationen[20] gehört. Diese sind Ursache der Van-der-Waals Wechselwirkung.[21] Die dadurch hervorgerufene Wechselwirkung sind es, die Geckos helfen, an glatten Glasoberflächen zu haften und hochzuklettern. Da die Teilchen kurzzeitig tatsächlich real sind, wirken sie natürlich auf ihre Umgebung. Damit sind sie Träger von Information und die Einsteinschen Postulate greifen, siehe die Vorlesung *Gleichzeitigkeit*. Die Analyse erlaubt Aussagen über die Natur fundamentaler Wechselwirkungen. In Tab. 10.6 sind die Stärken der fundamentalen Wechselwirkungen gegenübergestellt.

[18] *Lexikon:* Der **Dritte Hauptsatz der Thermodynamik** besagt, dass es keinen Prozess gibt, mit dem es möglich ist, mit endlich vielen Schritten den absoluten Nullpunkt zu erreichen.

[19] The Nobel Prize in Chemistry 1920 was awarded to Walther Hermann Nernst *in recognition of his work in thermochemistry.*

[20] *Lexikon:* Das Vakuum ist nicht leer, aber der Mittelwert des elektrischen Feldes ist stets Null! Doch mit diesem Mittelwert des Feldes sind gewisse Schwankungen verbunden, so genannte **Vakuumfluktuationen**.

[21] *Lexikon:* **Van-der-Waals-Kräfte** sind schwache elektrische intermolekulare Kräfte, die neutrale Moleküle anziehen. Feststoffe, die durch Van-der-Waals-Kräfte zusammengehalten werden, zeichnen sich durch niedrigere Schmelzpunkte aus. Ionische, kovalente und metallische Bindungen sind im Vergleich deutlich stärker. Die Van-der-Waals Wechselwirkung resultiert daraus, das die Moleküle über permanente oder induzierte Dipole verfügen.

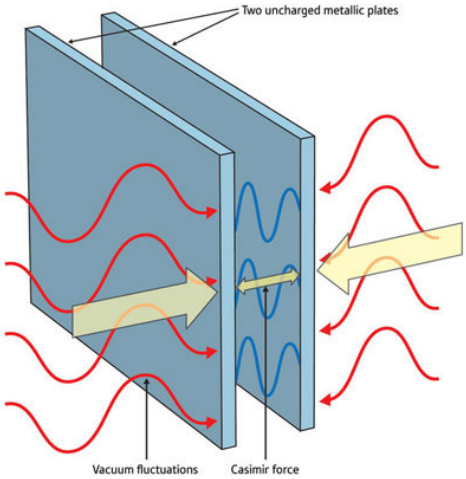


Abb. 10.26: Zwei ungeladene Metallplatten im absoluten Vakuum werden aufgrund von Quantenvakuumfluktuationen angezogen (Casimir-Kraft).

Ein Beispiel aus der Elementarteilchenphysik

Anything that is not expressly forbidden by Nature is compulsory.

Richard Feynman

Wenn aus dem Nichts, also aus dem Vakuum, ein Teilchen (*virtual particle, vp*) mit Masse m_{vp} entsteht, benötigt man zunächst eine gewisse Energiemenge ($E_{vp} = m_{vp}c^2$). Damit ist aber der Energieerhaltungssatz verletzt. Wo vorher keine Energie vorhanden war, kann nicht plötzlich Energie sein. Es sei denn, die Natur spielt mit. Die Energie-Zeit Unschärferelation gestattet es, dass solche Vorgänge stattfinden. Die Bedingung ist, dass die Zeitspanne Δt_{vp} der Existenz des Virtuellen Teilchens entsprechend kurz gewählt wird.

$$\begin{aligned} \Delta E_{vp} \cdot \Delta t_{vp} &\geq \hbar/2 \\ \Delta(m_{vp}) \cdot c^2 \cdot \Delta t_{vp} &\geq \hbar/2 \\ \Delta m_{vp} &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{c^2 \cdot \Delta t_{vp}} \end{aligned} \tag{10.28}$$

Virtuell heißen diese Teilchen, weil sie sich nicht direkt mit einem Teilchendetektor nachweisen lassen. Die Auswirkungen kann man trotzdem beobachten, beispielsweise durch den Casimir-Effekt [**?**], der beschreibt, dass sich zwei parallel ausgerichtete Metallplatten im Vakuum anziehen, siehe Abb. 10.26. Im Bereich zwischen den beiden Platten ist die Anzahl der möglichen Lichtwellenlängen geringer als im Außenbereich. Im Plattenabstand d können nur Virtuelle Photonen mit bestimmter Frequenz entstehen, denn ein Vielfaches der zugehörigen Wellenlänge muss in das Plattenpaar passen. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Stöße der Virtuellen Teilchen mit der Metalloberfläche. Dieser Druckunterschied (hier angegeben pro Einheitsfläche) [**?**]

$$F = \frac{\hbar \cdot c}{240 \cdot d^2} \tag{10.29}$$

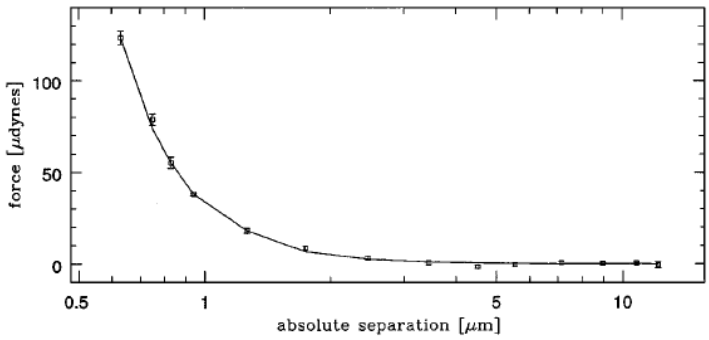


Abb. 10.27: Casimir-Kraft in Abhängigkeit vom Abstand der Metallobjekte (Platte und Kugel) [?]

sorgt dafür, dass sich die Platten zusammengedrückt werden. Die Casimir-Kraft nimmt mit der vierten Potenz des Plattenabstands ab, siehe Abb. 10.27 [?]. Bei einem Abstand der Platten von 1 μm beträgt die Casimir-Kraft lediglich $3.5 \cdot 10^{-10}$ N. Virtuelle Teilchen führen zu messbaren Effekten, die man an realen makroskopischen Körpern beobachten kann.

Ein Beispiel aus der Vakuumtechnik

Kann man eine Energieform wiegen? Das fragte sich im Jahr 1930 Peter Tolman [?]. Man kann es es ja mal versuchen. Das Vakuum hat, wie wir gesehen haben, paradoxe Eigenschaften. Wenn der Raum nicht leer ist, und mit Energie gefüllt ist, dann sollte er über $E = m \cdot c^2$ eine Masse haben. Wie alle Energien verformt auch die Energie des Quantenvakuums die Geometrie der Raumzeit und beeinflusst so die Schwerkraft. Überraschenderweise zeigt sich, dass die durch die Vakuumenergie hervorgerufenen Gravitationskräfte abstoßend sind. Das könnte Auswirkungen auf astrophysikalischer Größenordnung. Ändert sich die beschleunigte Expansion des Universums? NEIN, sagen die Forscher, da die abgeschätzte Größenordnung des Effekts zu gering ist! Das herauszufinden, widmet sich das Archimedes-Experiment [? ?]. In einer Vakuumkammer werden in geringem Abstand zwei Platten angebracht. Die Wechselwirkung erfolgt aufgrund des Casimir-Effekts. Außerdem verwendet man Materialien, die durch eine Temperaturabsenkung von Isolator auf Supraleiter umgeschaltet werden können. In den beiden Zuständen reagieren das System unterschiedlich. Im supraleitenden Zustand vertreibt man die Vakuumenergie aus den Bereich. Wiegt man das System,, sollte es in diesem Moment leichter werden. Man stelle sich ein Tauchboot vor. Drückt es Wasser aus seinen Tanks erhöht das den Auftrieb und das Boot steigt auf. Aha, deshalb also der Name Archimedes für Projekt! Man braucht zur Durchführung eine genaue Temperaturmessung, eine empfindliche Balkenwaage und einen seismisch ruhigen Ort. Deshalb erfolgt der Abbau des Detektors in der Sos-Enattos-Mine auf Sardiniens.

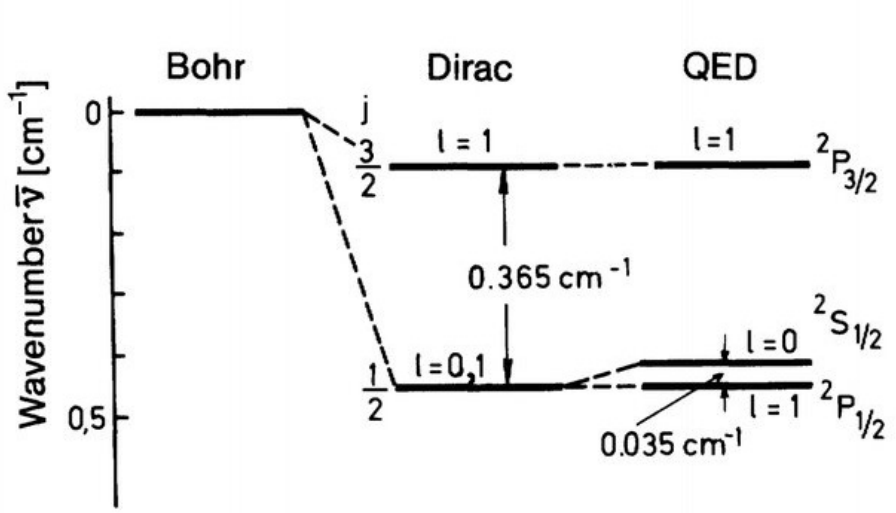


Abb. 10.28: Lamb-Verschiebung: Feinstruktur des Wasserstoff n=2-Niveau gemäß Bohr, Dirac und Quantenelektrodynamik unter Berücksichtigung der Lamb-Verschiebung.

Ein Beispiel aus der Atomphysik

Virtuelle Teilchen haben ebenfalls Einfluss auf die Spektrallinien der Atome. Im Wasserstoffatom beispielsweise sind nach der Theorie (siehe Kapitel *Bohrsches Atommodell*) gewisse Energiezustände -man sagt- entartet. Dass bedeutet, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, die aber alle denselben Bindungsenergiewert liefern. Ein Beitrag zur Aufhebung der Entartung sind Vakuumfluktuationen, bei dem sich Teilchen-Antiteilchenpaare bilden (Abb. 10.28) und sich die Linien spektral separieren. Diesen Effekt nennt den Lamb-shift[? ?].[22] Der Frequenzunterschied ist äußerst gering und diese Entdeckung hat das Forschungsgebiet der Quantenelektrodynamik [?] ins Leben gerufen.

Je nach der Masse des Teilchens (Elektron vs Proton) ergibt sich eine charakteristische Lebensdauer. Anders ausgedrückt: Wenn diese Zeitspanne unterschritten wird, merkt niemand etwas von diesem Vorgang. Oder etwa doch? Hier das Beispiel der Erzeugung eines Elektron-Positron Paars aus einer Energiefluktuation. Durch Anwendung der Heisenbergschen Unschärferelation erfährt man, auf welcher Zeitskala das Ereignis stattfinden kann:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\Delta E} \\ \Delta t &= \frac{1}{2}\frac{1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{2 \cdot (9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2} \\ \Delta t &= 2.55 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{10.30}$$

[22] The Nobel Prize in Physics 1955 was divided equally between Willis Eugene Lamb *for his discoveries concerning the fine structure of the hydrogen spectrum* and Polykarp Kusch *for his precision determination of the magnetic moment of the electron.*

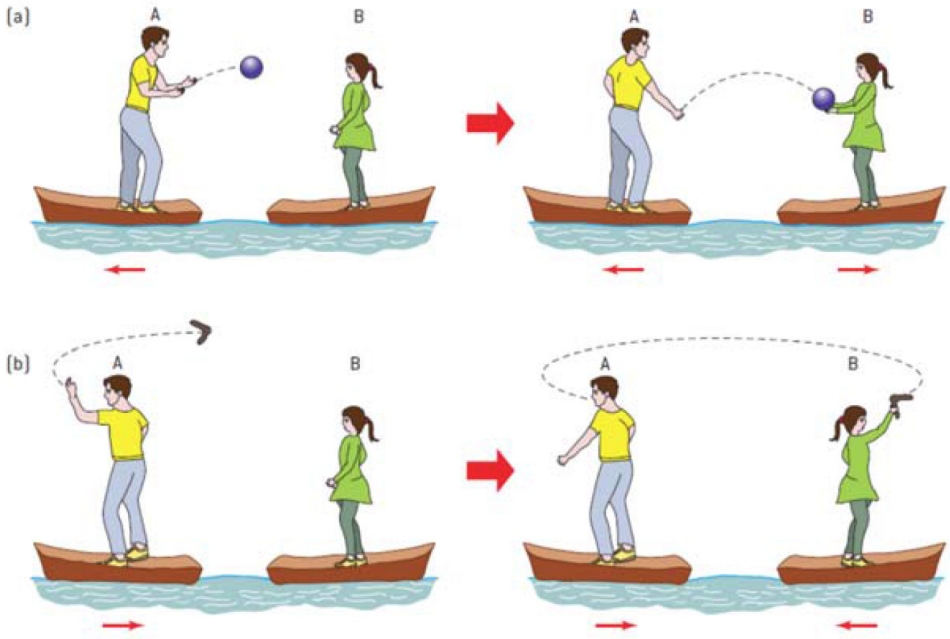


Abb. 10.29: Mechanisches Analogon zum Austausch Virtueller Teilchen als Träger der fundamentalen Kräfte.

Sehr kurz, aber die Natur lässt solche Ereignisse zu.

Austauschteilchen

Es stellt sich die fundamentale Frage, wie Körper eigentlich an Daten über ihre Umgebung gelangen. Die Einsteinschen Postulate fordern, dass solche Informationen mit maximal Lichtgeschwindigkeit übertragen werden. Stellen Sie sich vor, der Mond würde plötzlich am Himmel erscheinen. Wir würden den Verlust erst mit einer Sekunde Verspätung optisch wahrnehmen. Der Mond verursacht aber auch Phänomene wie Ebbe und Flut, die auf die Gravitation zurückzuführen sind. Für diese Wechselwirkung muss dasselbe gelten. Die elektromagnetische Wechselwirkung wirkt auf alle Teilchen mit elektrischer Ladung. Eine Frage wird in der Elektrodynamik nicht angesprochen: Wie wird die elektromagnetische Kraft eigentlich vermittelt? Die Antwort der klassischen Physik lautet: Instantan. Hat die Erkenntnis der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit Auswirkungen auf Kräfte in der Mechanik und Elektrodynamik? Natürlich!

Die Heisenbergsche Unschärferelation erlaubt eine Verletzung des Energieerhaltungssatzes, allerdings nur für geringe Zeitspannen. Daraus resultiert ein verrücktes Szenario. Teilchen erscheinen aus dem NICHTS. Den Prozess nennt man Vakuum-Energiefluktuation und die kurzzeitig erzeugten Teilchen nennt man Virtuelle Teilchen. Wie werden die Informationen für Kräfte im Allgemeinen übertragen? Diese Überlegungen führen zum Konzept der Austauschteilchen als Vermittler der fundamentalen Wechselwirkungen. Abb. 10.29 illustriert eine anziehende (unten) und eine abstoßende (oben) Wechselwirkung. Der Ver-

Name	Bedeutung
Boson	Teilchen mit ganzzahligem Spin
Fermion	Teilchen mit halbzahligem Spin
Hadron	Teilchen, die der Starken Wechselwirkung unterliegen
Quark	fraktioniert geladene Bestandteile von Hadronen
Gluon	Austauschteilchen zwischen Quarks
Meson[23]	Boson-Teilchen aus einem Quark und einem Antiquark
Baryon[24]	Fermion-Teilchen aus drei Quarks
Lepton[25]	Elektron, Myon, Tau, Neutrino und ihre Antiteilchen
Pion	Meson, bestehend aus u- und d-Quark
Kaon	Meson, welches ein s-Quark enthält

Tab. 10.7: Einige Einträge im Teilchenzoo der Elementarteilchenphysik [**?**]

mittler der elektromagnetischen Kraft ist das Photon, dass selbst elektrisch neutral und keine Masse hat. Das Photon bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit und kann unter Umständen erhebliche Strecken zurücklegen. Die Reichweite der elektrostatischen Kraft ist deshalb unendlich!

Wird die Größenordnung der elektrostatischen Wechselwirkung richtig wiedergegeben? Dazu betrachten wir die Streuung zweier Elektronen. Ein Elektron borgt sich als Heisenberg-Kredit die Energie ΔE und emittiert ein Virtuelles Photon. Das Virtuelle Photon hat einen Impuls $p = \Delta E/c$. Bei der Emission bleibt der Gesamtimpuls erhalten und das Elektron erhält einen Rückstoß entgegen der Emissionsrichtung des Photons. Die Lebensdauer des Virtuellen Photons beträgt nach Heisenberg etwa $\Delta t \approx \hbar/(\Delta E)$. Da sich auch das Virtuelle Photon mit Lichtgeschwindigkeit bewegt ist die Reichweite r begrenzt auf:

$$r \approx \Delta t \cdot c = \frac{h \cdot c}{\Delta E} \tag{10.31}$$

Bei der Wechselwirkung mit dem anderen Elektron wird das Virtuelle Photon absorbiert, wobei der Impuls übertragen und die Energie absorbiert wird. Das Elektron ändert dadurch seinen Impuls. Je geringer die Entfernung der Teilchen, desto höher kann der Effekt ausfallen. Tatsächlich gibt dieser Austausch von Virtuellen Photonen die $1/r$ Abhängigkeit des Coulombpotenzials richtig wieder. Das abstoßende Potenzial muss wiedergeben, welche Energiemenge freigesetzt wird.

$$V(r) \approx \Delta E = \frac{\hbar \cdot c}{r} \tag{10.32}$$

Ist die Lebensdauer der Austauschteilchen begrenzt, reduziert sich die Reichweite. Tatsächlich werden im Rahmen des Standardmodells der Elementarteilchenphysik alle Wechselwirkungen über diverse Austauschteilchen (Gluonen, Photon, W-, Z- und Higgs-Boson) vermittelt, siehe Abb. 10.30. Tabelle 10.7 liefert ein Glossar der Teilchennamen.

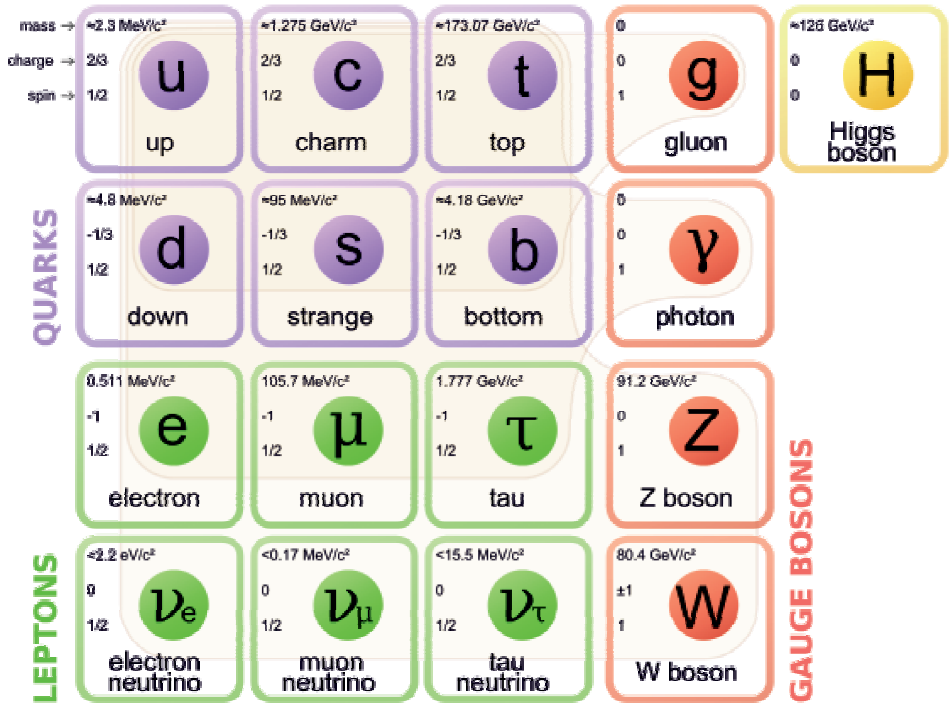


Abb. 10.30: Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik beschreibt drei von vier fundamentalen Wechselwirkungen (Elektromagnetismus (Photon, Elektron), starke (Quarks, Gluonen) und schwache Kernkraft (Neutrinos, Myon, Tauon, Elektron, W- und Z-Bosonen). Weiter das Higgs-Boson, das den Elementarteilchen Masse verleiht [**?**].

Anwendungen 2

Ein Beispiel aus der Kernphysik

Die Messungen von Rutherford (Vorlesung *Der Weg zum Atom*) zeigen, dass der Atomkern einen Durchmesser im Bereich von 10^{-15} m hat. Die enorme Coulombabstoßung der positiven Ladungen muss allerdings durch die Starke Wechselwirkung kompensiert werden, damit der Kern nicht in einer Coulombexplosion auseinander fliegt. Welche Eigenschaften hat Starke Kraft? Yukawa[26] hatte die Idee, dass die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen im Kern über ein massebehaftetes Teilchen (Ruhemasse ungleich NULL) erfolgt. Dieses Austauschteilchen ist das π-Meson oder Pion [**? ?**].[27]

$$p \rightarrow p + \pi^0 \rightarrow p \tag{10.33}$$

Pionen haben eine Masse von $m_\pi{=}273 \cdot m_e{=}2.4 \cdot 10^{-28}$ kg. Wie sich herausstellt, hat die damit vermittelte Kraft nur eine begrenzte Reichweite. Über welche Entfernung könnte

[26] The Nobel Prize in Physics 1949 was awarded to Hideki Yukawa *for his prediction of the existence of mesons on the basis of theoretical work on nuclear forces.*

[27] Das Pion kann neutral oder geladenen auftreten: π^0, π^+, π^-.

ein solches Virtuellen Teilchens diese Kraft vermitteln? Man kennt mit einer gewissen Unsicherheit die Energie im System.

$$\Delta E_\pi \geq \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\Delta t_\pi} \tag{10.34}$$

Die Emission und spätere Absorption eines Pions ($E_\pi{=}m_\pi c^2$) durch ein anderes Nukleon ist mit dem Energieerhaltungssatz nur vereinbar, wenn die Zeitspanne Δt_π nicht überschritten wird.

$$\Delta t_\pi = \frac{1}{4\pi}\frac{6.63\cdot 10^{-34\,\mathrm{J\cdot s}}}{(2.4\cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg})\cdot(3\cdot 10^{8})\,\mathrm{m/s}} = 2.44\cdot 10^{-29}\,\mathrm{s} \tag{10.35}$$

Unter der Annahme, dass sich das Teilchen nahezu lichtschnell bewegt, kann es nur eine bestimmte maximale Entfernung (Δx_π) überbrücken, bevor es wieder verschwindet. Der Vermittler der Kraft kann damit nur ein bestimmtes Raumgebiet mit Informationen versorgen.

$$\Delta x_\pi = c\cdot\Delta t_\pi = (3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})\cdot(2.44\cdot 10^{-29}\,\mathrm{s}) = 7.3\cdot 10^{-16}\,\mathrm{m} \tag{10.36}$$

Die Abschätzung ergibt einen Wert, der gut mit den Abmessungen des Atomkerns ($1\,\mathrm{fm}{=}10^{-15}\,\mathrm{m}$) übereinstimmt. Tatsächlich ist die durch die Pionen vermittelte Kernbindungskraft, die Starke Wechselwirkung, auf den Atomkern beschränkt. In der makroskopischen Welt spielt diese Wechselwirkung deshalb keine Rolle. Mehr dazu im Kapitel *Kernphysik*. Es sei noch hinzugefügt, dass bei ausreichender kinetischer Energie durch Stöße zwischen Nukleonen Pionen erzeugt werden können. Pionen wurden 1947 in der kosmischen Höhenstrahlung und 1948 im Labor nachgewiesen.[28] Man überprüfe anhand der Reaktionsgleichungen, dass in allen Reaktionen der Ladungserhaltungssatz erfüllt ist.

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+ \tag{10.37}$$
$$p + n \rightarrow p + p + \pi^- \tag{10.38}$$
$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+ \tag{10.39}$$
$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^o \tag{10.40}$$
$$\gamma + n \rightarrow p + \pi^- \tag{10.41}$$

[28] The Nobel Prize in Physics 1950 was awarded to Cecil Frank Powell *for his development of the photographic method of studying nuclear processes and his discoveries regarding mesons made with this method.*

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Wie hoch ist die Lebensdauer eines Proton-Antiproton Paars, ohne dass der Energieerhaltungssatz verletzt wird?

$$\begin{aligned}
\Delta t_{p^+p^-} &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{(m_p^+ + m_p^-)\cdot c^2} \\
\Delta t_{p^+p^-} &= \frac{1}{2}\frac{1\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{(2\cdot 1.67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg})\cdot(3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2} \\
\Delta t_{p^+p^-} &= 1.66\cdot 10^{-25}\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

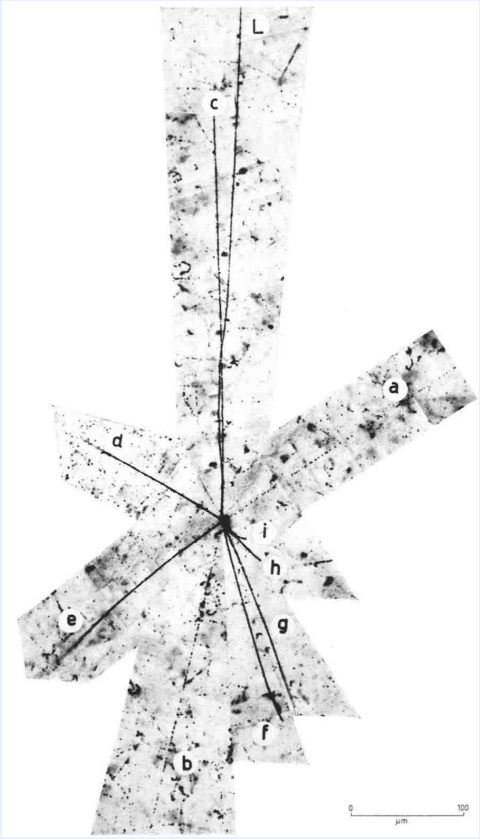


Abb. 10.31: Beobachtung eines Antiproton-Sterns. Das einfallende Aniproton kommt von oben. a, b sind Pionen und c ist ein Proton. Die weiteren Spuren sind entweder Protonen oder α-Teilchen [**?**].

Die Zeitspanne ist extrem kurz. Könnte sich das Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, käme es höchstens $\Delta t \cdot c{=}5\cdot 10^{-17}\,\mathrm{m}$ weit. Das wäre 3% des Durchmessers des Protons. Was passiert, wenn sich ein Proton und ein Antiproton begegnen? Sie zerstrahlen und es bilden sich unter anderem Pionen.[29] Abb. 10.31 zeigt die Vernichtung eines

[29] The Nobel Prize in Physics 1959 was awarded jointly to Emilio Gino Segrè and Owen Chamberlain *for their discovery of the antiproton.*

Proton-Antiproton Paars. Dieser Prozess wurde 1955 erstmals am CERN nachgewiesen [**?**].

Aufgabe 4.2: Berechnen Sie aus der Unschärferelation die Masse Masse des Austauschteilchens, das die Kernkräfte vermittelt!

Oben hatten wir den umgekehrten Weg gewählt und aus der Masse des Pions die Reichweite im Kern bestimmt. Es ist klar, dass ein Austauschprozess zwischen zwei Nukleonen den Energieerhaltungssatz verletzt. Ein Nukleon N kann nicht Energie in Form der Masse eines Pions ausstoßen und sich dabei nicht verändern: $N \rightarrow N + \pi$. Der Energieerhaltungssatz wird dabei um wenigsten $m_\pi \cdot c^2$ verletzt. Die Unschärferelation liefert:

$$\begin{aligned} \Delta E_\pi &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{2\,\Delta t_\pi} \\ m_\pi \cdot c^2 &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{2\,\Delta t_\pi} \\ \Delta t_\pi &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{m_\pi \cdot c^2} \end{aligned}$$

Die Unschärferelation erlaubt eine Reichweite r_π des Teilchens von $c \cdot \Delta t$, was, bei einem Durchmesser der Kerne von etwa $1\,\mathrm{fm}{=}10^{-15}\,\mathrm{m}$, folgendes ergibt:

$$r_\pi \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{m_\pi \cdot c}$$

Damit kann man die Masse des Austauschteilchens bestimmen:

$$\begin{aligned} m_\pi &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{r_\pi \cdot c} \\ m_\pi &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{(1 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}) \cdot 2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}} \\ m_\pi &\approx 1.76 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg} = 98.9\,\mathrm{MeV}/c^2 \end{aligned}$$

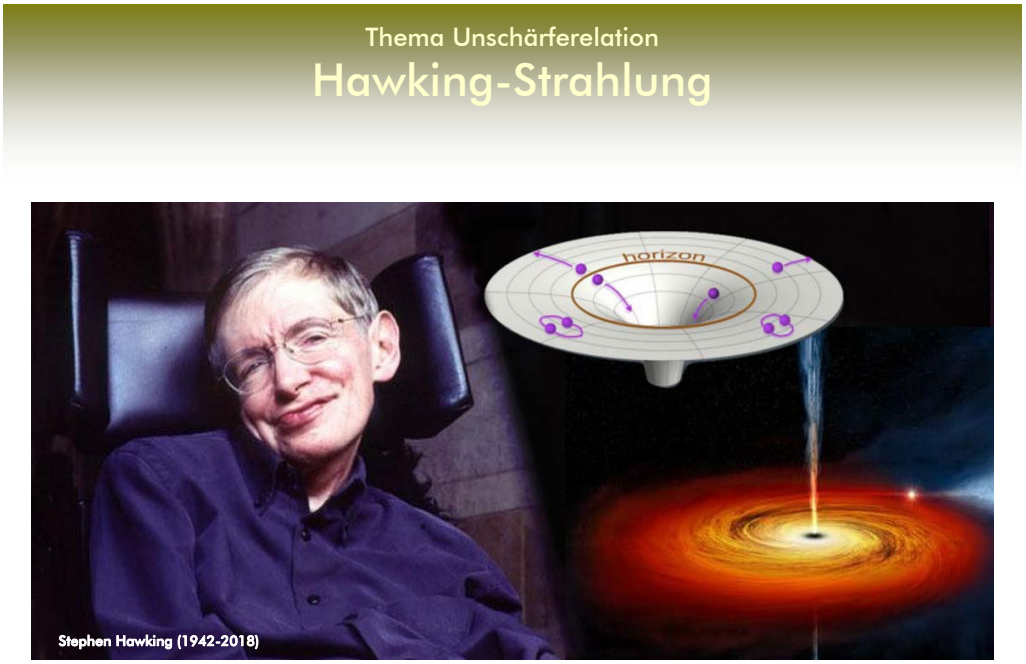
In der Rechnung haben wir die kinetische Energie des Teilchens vernachlässigt, was den Wert um etwa einen Faktor 2 erhöhen würde. Der gemessene Wert von twa $140\,\mathrm{MeV}/c^2$ passt also gut.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Erlaubt die Heisenbergsche Unschärferelation eine Verletzung des Energieerhaltungssatzes?

2. Erlaubt die Heisenbergsche Unschärferelation eine Verletzung aller Erhaltungssätze?

Hawking-Strahlung^{4LP}



Ein Schwarzes Loch hat keine Haare.

John Wheeler

Abschließend noch Überlegungen zur Relevanz der Unschärfebeziehung für die Entwicklung Schwarzer Löcher.[30] Diese Überlegungen sind eng verbunden mit den Arbeiten von Stephen Hawking. Zunächst aber einige historische Informationen: Als erster dachte John Mitchell 1783 über Schwarze Löcher nach [**?**]. Laplace überlegte später, dass in diesen Objekten, wenn sie schrumpfen und dabei ihre Masse beibehalten, die Schwerkraft an der Oberfläche so anwächst, dass die Fluchtgeschwindigkeit den Wert der Lichtgeschwindigkeit erreicht. Unter diesen Bedingungen sollten keine Photonen der Schwerkraft

[30] Die Untersuchung einer Störung auf der Transatlantik-Funkverbindung durch Karl Jansky führte im Jahr 1932 zur Entdeckung einer starke Radioquelle im Sternbild Schütze [**?**], die im nachhinein als superschweres Schwarzes Loch (Sagittarius A*) identifiziert wurde [**?**]. Einen direkten Nachweis für ein Schwarzes Loch erhält man aus der relativistischen Bewegung von Gas nahe dem Ereignishorizont. Bei der Eisen K-α Röntgenlinie in der Galaxie MCG-6-30-15 wird die Linie durch die hohen Gasgeschwindigkeiten von $100\,000\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ extrem breit, asymmetrisch und zeigt eine hohe Rotverschiebung. Diese Merkmale deuten darauf hin, dass die Emission in geringem Abstand vom Zentrum der Schwarzen Lochs (einige Schwarzschildradien) erfolgt [**?**]. Oppenheimer und Snyder vermuteten, dass so ein Objekt durch den Gravitationskollaps des Kerns eines massiven Sterns entsteht [**?**].

Objekt	Masse (kg)	Radius (m)	R_S
$^{238}_{92}$U-Kern	$4 \cdot 10^{-25}$	$7 \cdot 10^{-15}$	$6 \cdot 10^{-52}$
Buch	1	0.1	$1.5 \cdot 10^{-27}$
Erde	$6 \cdot 10^{24}$	$6 \cdot 10^{6}$	$8.9 \cdot 10^{-3}$
Sonne	$2 \cdot 10^{30}$	$7 \cdot 10^{8}$	$3 \cdot 10^{3}$
Milchstraße	$\sim 2 \cdot 10^{41}$	$\sim 10^{20}$	$3 \cdot 10^{14}$
Universum	$\sim 10^{51}$	10^{26}	$\sim 10^{24}$

Tab. 10.8: Schwarzschildradius R_S unterschiedlicher Objekte vom Atomkern bis zum Universum [**?**].

dieses Schwarzen Lochs entkommen. Damit wird auch der Name klar: Das Objekt wird für Beobachter unsichtbar [**?**]. Schwarzschild berechnete mit Hilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie, welchen Radius ein solches Objekt hätte. Für die Erde ergibt sich die Größe eines Kirschkerns. Tatsächlich ergeben Rechnungen, dass ein Stern mindestens die achtfache Masse der heimischen Sonne haben muss, um die Bedingungen für die Bildung eines Schwarzen Lochs zu erfüllen. Im Zentrum der Milchstraße wurde ein Schwarzes Loch mit einer Masse von $4 \cdot 10^6$ Sonnenmassen nachgewiesen [**?**]. Aufgrund seiner enormen Masse ist dieses Objekt kein Überbleibsel einer Riesensterns, sondern muss auf andere Weise entstanden sein.

The star[31] would close itself off from any communication with a distant observer; only its gravitational field persists [**?**].

Robert Oppenheimer, 1939

Ein Schwarzes Loch (engl. *black hole*) entsteht im Kollaps eines Riesensterns, wobei die Masse des Lochs so hoch ist, dass kein Photon aufgrund der enormen Gravitation aus dem Raumgebiet entweichen kann. Damit gibt es keine Möglichkeit Informationen über das Objekt zu erhalten. Den kritische Radius, der Ereignishorizont, nennt man Schwarzschild-Radius R_S. Tab. 10.8 gibt Beispiele. Die Fluchtgeschwindigkeit v_2, die ein Körper benötigt, um den Planeten zu verlassen und den Weltraum zu erreichen, berechnet sich aus:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{v_2^2}{r} &= G_N \frac{m \cdot M}{r^2} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{G_N M}{r}} \end{aligned} \tag{10.42}$$

wobei G_N die Gravitationskonstante und M die Masse des Planeten. Für die Erde findet man einen Wert von 11.2 km/s. Der Schwarzschild-Radius R_S ergibt aus der Überlegung, dass man für v_2 die Lichtgeschwindigkeit c einsetzt.

$$R_S = \frac{2\, G_N \cdot M}{c^2} \tag{10.43}$$

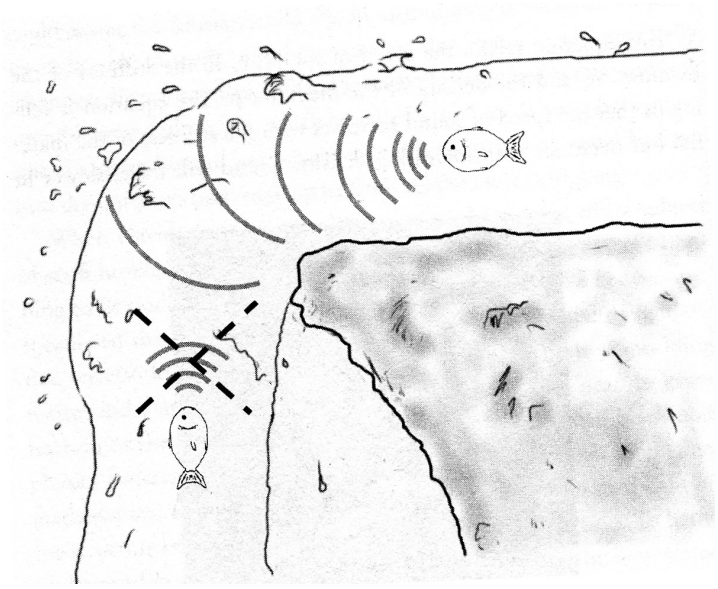


Abb. 10.32: Ein Schallhorizont kann mit einem Wasserfall verglichen werden. Ein Fisch gibt einen Laut von sich. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Tons ist allerdings viel zu gering im Vergleich zum herabfallenden Wasser, sodass der Laut niemals den Fisch oberhalb des Wasserfalls erreicht[**?**].

Hence, according to article 10, if the semi-diameter of a sphaere of the same density with the sun were to exceed that of the sun in the proportion of 500 to 1, a body falling from an infinite height towards it, would have acquired at its surface 3 greater velocity than that of light, and consequently, supposing light to be attracted by the same force in proportion to its vis inertiae, with other bodies, all light emitted from such a body would be made to return towards it, by its own proper gravity [**?**].

John Mitchell, 1783

Damit lässt sich für jeden Körper, also auch für die Erde oder ein schwarzes Loch der Schwarzschild-Radius berechnen. Wie kann man sich die Phänomene am Ereignishorizont verstellen? Man stelle sich einen Wasserfall vor und zwei Fische, siehe Abb. 10.32. Die Geschwindigkeit des Wasser sei höher als die Ausbreitungsgeschwindigkeit es Schalls in Wasser. Der über die Kante des Wasserfalls gefallene Fisch versucht seinen Freund oberhalb zu warnen, aber die Schallwellen sind zu langsam im Vergleich zur Fließgeschwindigkeit und die Nachricht kommt oben nicht an. Für den fallenden Fisch verschwindet sein Freund. Der Ruf seines Freundes erreicht ihn aber. So ist es auch bei einem schwarzen Loch. Licht kann leicht in das Schwarze Loch eindringen. Herauszukommen ist aber unmöglich.

[31] Gemeint ist das Schwarze Loch

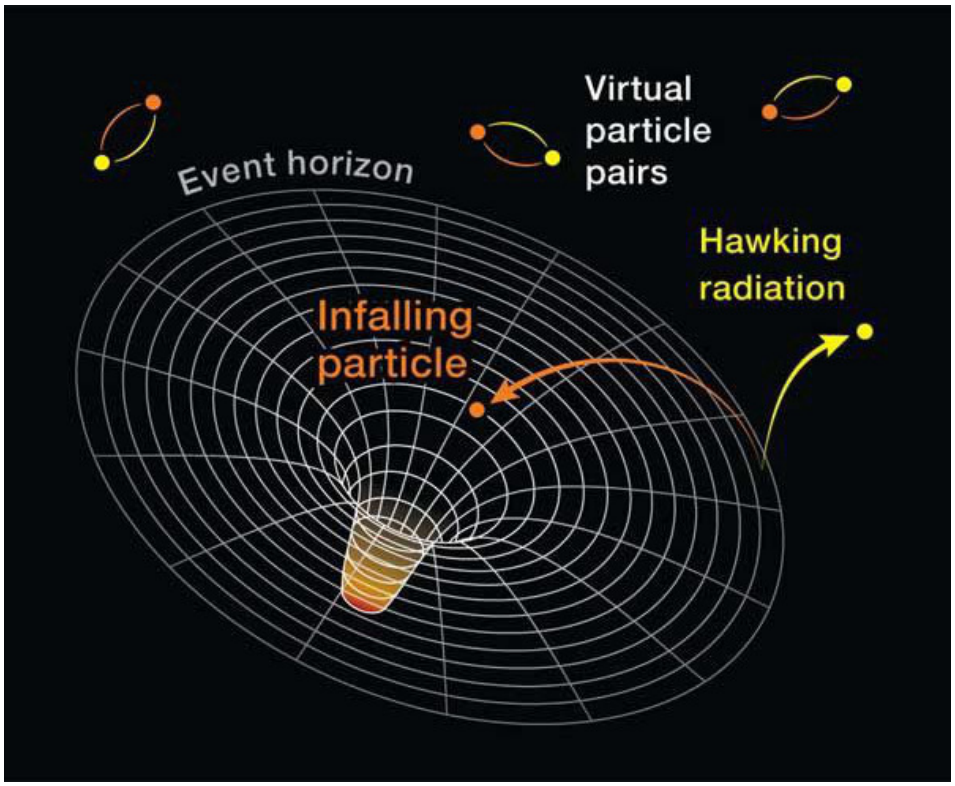


Abb. 10.33: Das Phänomen der Hawking-Strahlung basiert darauf, dass ein leerer Raum (Vakuum) nicht wirklich leer ist. Obwohl dieser Raum keine Masse, keine Teilchen und keine Energiequanten enthält, gibt es Vakuumfluktuationen aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation. Die dadurch vorhandenen kurzzeitigen Felder können Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugen, die sich sofort wieder gegenseitig vernichten. In der Nähe eines Schwarzen Lochs kann es passieren, dass eines dieser Teilchen ins Innere des Schwarzen Lochs gelangt und damit für einen Außenstehenden aufhört zu existieren, während das andere Teilchen als Hawking-Strahlung entweicht.

Da Phänomene der Gravitation eine Rolle spielen, ergeben sich sich Details schwarzer Löcher erst aus einer Behandlung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Stephen Hawking hat die Thermodynamik schwarzer Löcher untersucht und eine Temperatur dieser Objekte berechnet [**?**]. Daraus ergibt sich ein grundsätzliches Problem: Wenn es keine Wechselwirkung des *black hole* mit der Umgebung gibt, dann kann man dem Objekt nach der Thermodynamik keine Temperatur zuordnen, siehe der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik.[32] Mit wem sollte man vergleichen?

Was passiert, wenn am Schwarzschild-Radius ein Teilchenpaar (Elektron+Positron; $m_{e^-}c^2+m_{e^+}c^2$) entsteht und eines der beiden Teilchen ins *black hole* fällt, siehe Abb. 10.35?

[32] *Lexikon:* Der **Nullte Hauptsatz der Thermodynamik** besagt, dass, wenn zwei Körper mit einem dritten Körper im thermischen Gleichgewicht stehen, sie auch miteinander im Gleichgewicht sind.

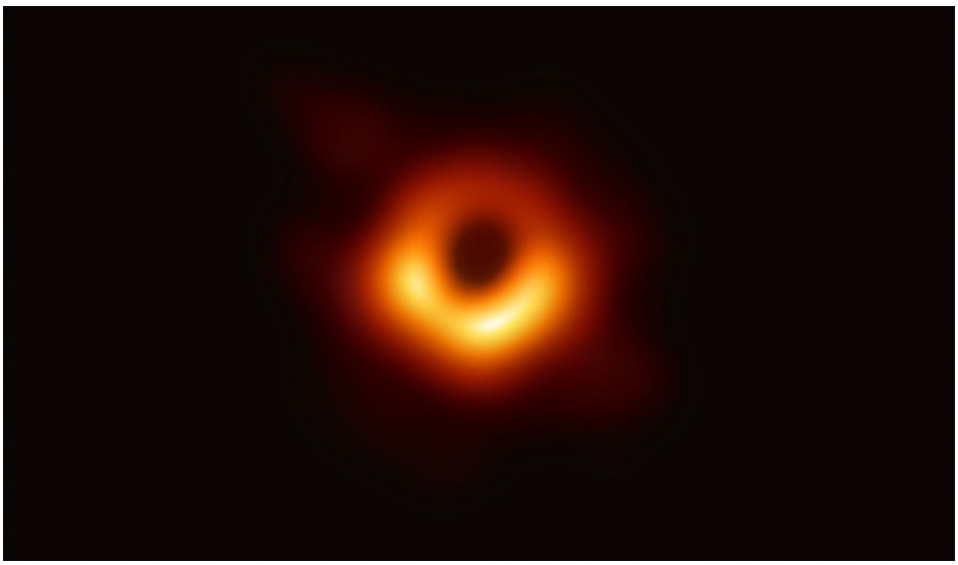


Abb. 10.34: Das *Event Horizon Telescope* wurde entwickelt, um Bilder eines Schwarzen Lochs aufzunehmen. In der Aufnahme ist der Schatten des Schwarzen Lochs in der Galaxis M87 zu sehen. Die Grenze des Schwarzen Lochs -der Ereignishorizont (*event horizon*)- ist etwa 2.5-mal kleiner als der Schatten, den es wirft, und misst knapp $40 \cdot 10^{12}$ m. In Winkeln angegeben, entspricht dies der Größe eines auf dem Mond liegenden Personalausweises.

Es gäbe keine Möglichkeit der Elektron-Positron Annihilation mehr (Informationsweg unterbrochen) und das übrig gebliebene Teilchen wird nicht vernichtet, siehe Abb. 10.33. Da die Energie zur Teilchenbildung (1 MeV) aus dem schwarzen Loch stammt, verliert das Objekt durch diesen Prozess an Masse ($E = m_0c^2$). Allgemein senden alle Körper mit endlicher Temperatur das charakteristische Spektrum eines Hohlraumstrahlers aus (Vorlesung *Schwarzer Strahler*). Durch den Verlustprozess, den dass Schwarze Loch erleidet, wird es sichtbar und es strahlt wie ein Schwarzer Strahler - ein thermische Spektrum also. Damit kann jedem Schwarzen Loch, eine so genannte Hawking-Temperatur zuordnet werden. Diese ist proportional zur Gravitationswirkung und umgekehrt proportional zur Masse des Schwarzen Loches. Die Hawking-Temperatur ist höher für kleine, massearme

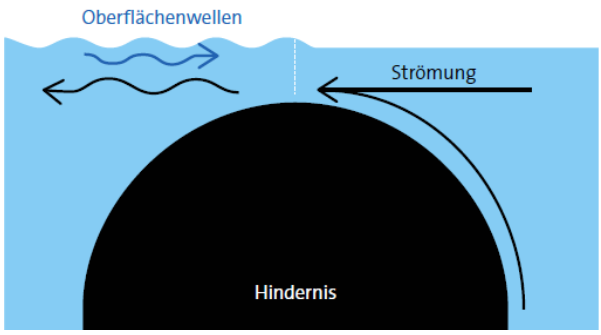


Abb. 10.35: Ein analoger Prozess zur e^-e^+-Paarbildung läuft ab, wenn Wellen, die über eine Wasseroberfläche laufen, auf eine entgegenkommende Wasserströmung treffen, die um ein Hindernis gelenkt wird [**?**].

Schwarze Löcher.[33] Konsequent weitergedacht zehrt der ständige Energieverlust durch solche Prozesse die im *black hole* gespeicherte Energie langsam auf. Ein schwarzes Loch ist also zeitlich nicht stabil und der Energieverlust führt zur Verdampfung des Objekts [**?**]. Man findet eine Größenabhängigkeit, die besagt, dass kleine schwarze Löcher schneller verdampfen. Die mit den oben beschriebenen Prozess verbundene Energieverlust Schwarzer Löcher wird Hawking-Strahlung genannt. Die über diesen Mechanismus abgegebene Strahlung hat eine geringe Intensität und andere Strahlungseffekte in der Umgebung des Objekts überwiegen. Dazu gehört der Akkretionsfluss, wenn es sich um ein Doppelsternsystem handelt. Was passiert durch die Emission der Hawking-Strahlung? Das Schwarze Loch schrumpft und verliert Energie. Das bedeutet, dass sich die Ruhemasse des Schwarzen Lochs verringert. Dadurch reduziert sich der Radius des Ereignishorizont, wobei sich die Stärke des Gravitationsfeldes erhöht. Damit einhergehend ist, dass sich die Rate der Paarerzeugung drastisch erhöht. Dieser Vorgang geht so lange vonstatten, bis das Schwarzes Loch die Größe eines Atomkerns erreicht. Das verschwindet das Schwarzen Lochs unter extrem starker Strahlungsemission. Die Verdampfung Schwarzer Löcher ist allerdings ein extrem langsamer Prozess. Er dauert etwa 10^{67} Jahre.

Schwarze Löcher beobachten

Erst kürzlich gelang es, ein erstes astronomisches Photo eines schwarzen Lochs zu schießen, siehe Abb. 10.34. Schwarze Löcher sind von leuchtenden Gasscheiben umgeben und heben sich daher vom dunklen Hintergrund ab. Auf diese Weise ist es dem Event Horizon Telescope gelungen, ein Schwarzes Loch zu photographieren. Acht bodengestützte Radioteleskope bilden ein virtuelles Teleskop mit einer Öffnung, so groß wie der Durchmesser der Erde (Very Long Baseline Interferometry) und beobachtete das Schwarze Loch[34] in der etwa $55 \cdot 10^6$ Lichtjahre entfernten Galaxis Messier 87. Die Synchronisation erfolgt mit Hilfe hochpräziser Atomuhren. Damit erreicht man eine Winkelauflösung von weniger als $2 \cdot 10^{-7}$ Bogensekunden. Vor kurzen gelang es, ebenfalls mit dem Event Horizon Telescope (EHT) das Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße zu photographieren [**?**].

Link to video **Zoomen in das Herz von Messier 87**

Noch eine letzte Frage. Kann man Schwarze Löcher auch hören. Klar! Seit 2003 wird das Schwarze Loch im Zentrum des Perseus-Galaxienhaufens, 250 Millionen Lichtjahre von der Erde entfernt, akustisch belauscht, siehe Abb. 10.36. Man hat herausgefunden,

[33] Ein Loch mit der Masse der Sonne hat eine Temperatur von 10^{-8} K.

[34] *Lexikon:* Ein Schwarzes Loch ist nicht direkt beobachtbar, weil es keine Strahlung emittiert. Allerdings sendet seine Nachbarschaft Strahlung aus, beispielsweise Synchrotronstrahlung aus der Akkretionsscheibe. Dieses Licht macht den Schatten des Schwarzen Lochs sichtbar. Man denke an eine Person, die das Licht einer Lampe verdeckt. Allerdings nimmt das Licht, aufgrund der starken Gravitation einen komplexen Weg, bevor es am Beobachter ankommt. Strahlung kann beispielsweise erst nach mehreren Umläufen den unmittelbaren Bereich des Schwarzen Lochs verlassen. Über eine Modellierung erhält man Rückschlüsse über die Umgebung des Objekts und kann überprüfen, in wieweit die Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie stimmen.

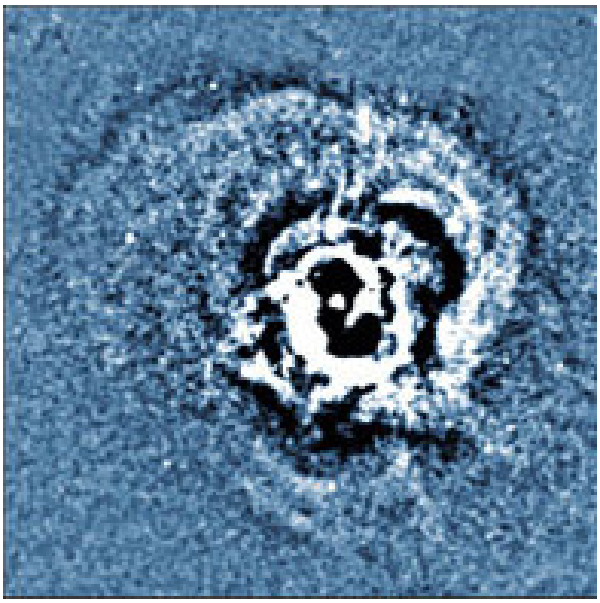


Abb. 10.36: Schallwellen im Perseus-Cluster, aufgenommen mit dem NASA Weltraumteleskop *Chandra X-ray Observatory*.

dass dass die vom Schwarzen Loch ausgesendeten Druckwellen zu Oszillationen im umgebenden heißen Gasführern. Der resultierende Ton dutzende von Oktaven zu tief für unser Gehör. Die dazugehörige Periode der Schwingung beträgt 10 Millionen Jahre. Diese Schallwellen transportieren Energie, die das Gas im Umkreis des Schwarzen Lochs erwärmt. Die erhöhten Temperaturen beeinflussen die Geschwindigkeit der Sternentstehung und damit die Entwicklung des Galaxienhaufens und sind damit wichtig für das Verständnis der Entwicklung des Universums.

Wissenschaftler anderer Fachgebiete haben mit der von Daten experimentiert. So wurde versucht, Schülern das Verständnis der Proteinfaltung zu erleichtern. Aspekte von Proteinen werden Klangparametern wie Lautstärke und Tonhöhe zugeordnet und dann zu einer Audiodarstellung der komplexen Faltung kombiniert [**?**]. Neurowissenschaftler haben untersucht, ob Sonofizierung bei der Diagnose von Alzheimer hilfreich sein kann [**?**]. Schließlich wurde Sonofizierung verwendet, um ökologische Veränderungen zu beschreiben, die durch den Klimawandel in einem Wald in Alaska verursacht wurden. Musikinstrumente wurden bestimmten Baumarten zuordnet [**?**].

Link to video **Hear the Black Hole at Center of Perseus Galaxy Cluster**

Sonification and sound design for astronomy research, education and public engagement [**?**]**:** Over the past ten years there has been a large increase in the number of projects using sound to represent astronomical data and concepts. Motivation for these projects includes the potential to enhance scientific discovery within complex datasets, by utilizing the inherent multidimensionality of sound and the ability of our hearing to filter signals from noise. Other motivations include creating engaging multisensory resources, for education and public engagement, and making astronomy more accessible to people

who are blind or have low vision, promoting their participation in science and related careers. We describe potential benefits of sound within these contexts and provide an overview of the nearly 100 sound-based astronomy projects that we have identified. We discuss current limitations and challenges of the approaches taken. Finally, we suggest future directions to help realize the full potential of sound-based techniques in general and to widen their application within the astronomy community.

Aufgabe 4.1: Wenn sich die Sonne plötzlich in ein Schwarzes Loch verwandelt, dann[35]

(a) verlässt die Erde das Sonnensystem auf einer Bahn entlang einer geraden Linie.

(b) stützt die Erde in das Schwarze Loch.

(c) kreist die Erde weiter um den Punkt, wo die Sonne vorher gestanden hat.

[35] Antwort: (c)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Warum ist gerade die Bildung von Elektron-Positron Paaren so wichtig? Es könnten doch genauso gut Proton-Antiprotonen Paare entstehen?

2. Wie ist die Entwicklungsgeschichte eines Sterns, der sich zu einem schwarzen Loch entwickelt?

3. Ist der Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs die tatsächliche Oberfläche des Objekts?

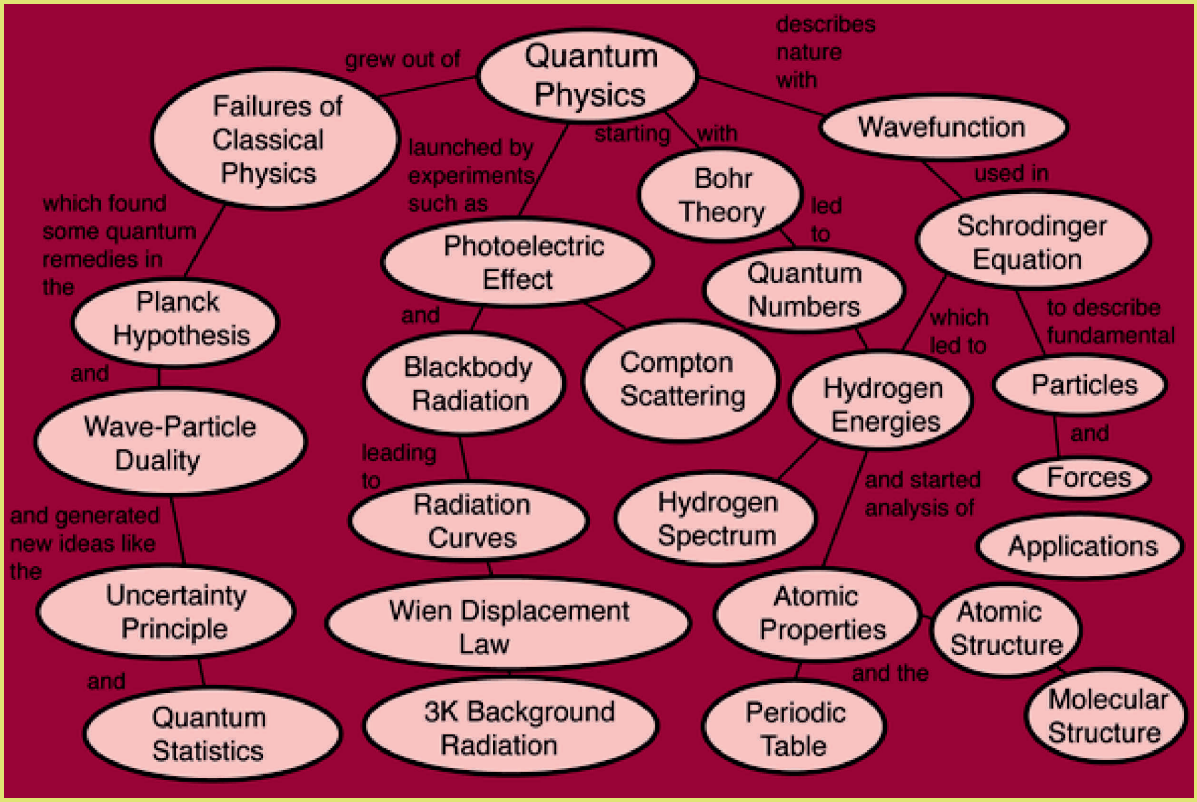


Abb. 10.37: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

- Heisenberg Mikroskop
- Heisenbergsche Unschärferelation für Ort x und Impuls p (Gl. 10.14):

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$$

- Zusammenhänge zur Thermodynamik (Nullter, Zweiter und Dritter Hauptsatz)
- Heisenbergsche Unschärferelation für Energie E und Zeit t (Gl. 10.20):

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Vakuumfluktuationen und fundamentale Wechselwirkungen

11 Wellenfunktion



Schrödingergleichung

I think it is safe to say that no one understands quantum mechanics.

Richard Feynman

[1]Alltagsphänomene lassen sich mit der Newtonschen Physik beschreiben. Newtons drei Bewegungsgesetze in Kombination mit einigen einfachen Kraftgesetzen kann nicht nur die Bewegung von Objekten beschreiben, die auf der Erdoberfläche beobachtet werden, sondern auch die Bewegungen von Himmelskörpern erklären. Der Formalismus gestattet es, die Bahnkurve eines Körper exakt zu berechnen. Mit Hilfe des Ausdruck ($\vec{F}{=}m \cdot \vec{a}$) lässt sich zu jedem Zeitpunkt vorhersagen, wo ein Körper sein wird. Dazu löst man eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung für die Bewegung eines Teilchens in einem externen Potenzial U_{pot}

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = -\nabla U_{pot}(\vec{r}) \tag{11.1}$$

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

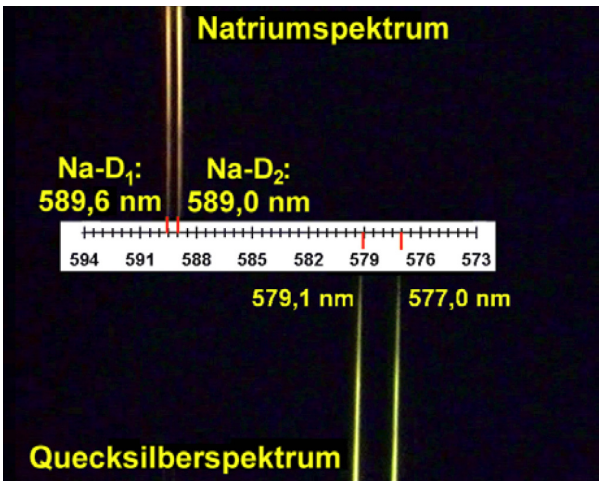


Abb. 11.1: Gegenüberstellung der Spektren von Natrium und Quecksilber. Die Aufspaltung der Spektrallinien erfolgt aufgrund von Wechselwirkungen, die das Bohrsche Atommodell nicht erklären kann [**?**].

I think that it is very interesting that one can see the Ψ functions of Schrödinger's wave mechanics by means of the X-ray study of crystals. This work should be continued experimentally. I believe that much information regarding the nature of the chemical bond will result from it.

Linus Pauling - Letter to A. A. Noyes (1926)

In der mikroskopischen Welt funktioniert die klassische Mechanik nicht. Das Teilchen wird in der Quantenphysik durch eine Wellenfunktion beschrieben und die Newtonsche Bewegungsgleichung wird abgelöst durch die Zeitabhängige Schrödingergleichung. Wenn wir die Wellenfunktion des Teilchens zum Zeitpunkt $t = 0$ kennen, dann ergibt sich aus der Schrödingergleichung die Wellenfunktion zu allen anderen Zeiten. Wie das Zweite Newtonsche Gesetz kann die Schrödingergleichung nicht hergeleitet werden, ist also ein Axiom. Experimente haben in beiden Fällen gezeigt, dass die Gleichungen in der Lage sind, die Natur in allen Fällen der nicht-relativistischen Bewegung von Teilchen klassisch bzw. quantenphysikalisch richtig zu beschreiben. Ein erster Versuch, eine Erklärung für die Eigenschaften mikroskopischer Teilchen zu finden, ist das Bohr Modell des Wasserstoffatoms. Es kann im Großen und Ganzen die Absorption und Emission von Licht durch Wasserstoff und wasserstoffähnlichen Atomen erklären, es vermag aber nicht die Eigenschaften von Mehrelektronensystemen befriedigend zu beschreiben. Die Grenzen des Bohrschen Atommodells zeigen sich beispielsweise in der Beobachtung der Feinstrukturaufspaltung von Spektrallinien, die erst durch die Verwendung der Dirac-Gleichung erklärt werden konnte (Kapitel *Beyond Bohr*) (Abb. 11.1) und teils ergeben sich stark unterschiedliche Intensitäten der einzelnen Linien (Abb. 11.2). Weiter gibt das Bohrsche Modell keine schlüssige Erklärung wie sich aus einzelnen Atomen Moleküle bilden, was sie zusammenhält und wie sich ihre physikalischen und chemischen Eigenschaften ergeben. Abb. 11.3 zeigt als Beispiel die komplexe Struktur von wichtigen Aminosäuren.

Inzwischen wissen wir durch die Arbeiten von deBroglie, dass sich Elektronen nicht wie klassische punktförmige Teilchen verhalten, sondern wie Wellen (Kapitel *Materiewellen*). Der Ort des Elektrons lässt sich des Wellencharakters nicht genau bestim-

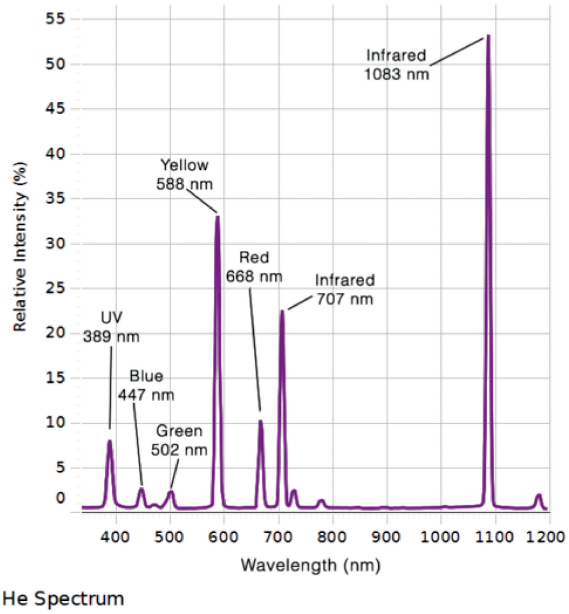


Abb. 11.2: Relative Intensität der Emissionslinien im Spektrum von Helium [**?**].

men, weil die Materiewelle im Raum verschmiert ist, siehe auch Kapitel *Heisenbergsche Unschärferelation*. Im Wasserstoffatom ist der Radius der innersten Bohrschen Bahn nicht exakt $0.53 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$, sondern es stellt sich heraus, dass das nur der wahrscheinlichste Abstand des Elektrons vom Proton ist. Es ist damit nicht möglich, die Trajektorie des Elektrons vorherzusagen oder aus anderen Bewegungsgrößen abzuleiten. Die Dynamik der mikroskopischen Teilchen muss deshalb in anderer Weise beschrieben werden. In der Quantenphysik wird keine Trajektorie $\vec{r}(t)$ berechnet, sondern statt dessen eine so genannte Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t)$, mit der die Dynamik der Objekte beschrieben wird. Aus der Analyse, die wir in diesem Kapitel durchführen, ergibt sich, dass die Newtonsche Mechanik eine Näherung ist auf der Grundlage der Quantenphysik. Dieser Umstand drückt sich im Korrespondenzprinzip aus.

Anyone who can contemplate quantum mechanics without getting dizzy hasn't properly understoood it.

Niels Bohr

Wie Watson und Crick bei der Entdeckung der DNA-Struktur bemerkten, beruht die korrekte Wiederherstellung der DNA auf der Annahme, dass die Basenpaare in ihrer stabilsten, kanonischen Form (gemeint sind die Standard-Basen: Adenin, Guanin, Thymin und Cytosin) verbleiben. Allerdings sind Protonen entlang des Wasserstoffbrückennetzwerks zwischen den Basen keine statischen Einheiten. Tatsächlich können sie ihre Positionen in DNA-Basen durch Protontransfer-Reaktionen austauschen, bevor sich die Stränge auflösen, wodurch nichtkanonische Strukturen entstehen, die man seltene Tautomere nennt. Die Bedeutung dieser seltenen Tautomere wurde auch von Watson und Crick vorausgesehen und einige Jahre später von Löwdin als Quelle spontaner Mutationen

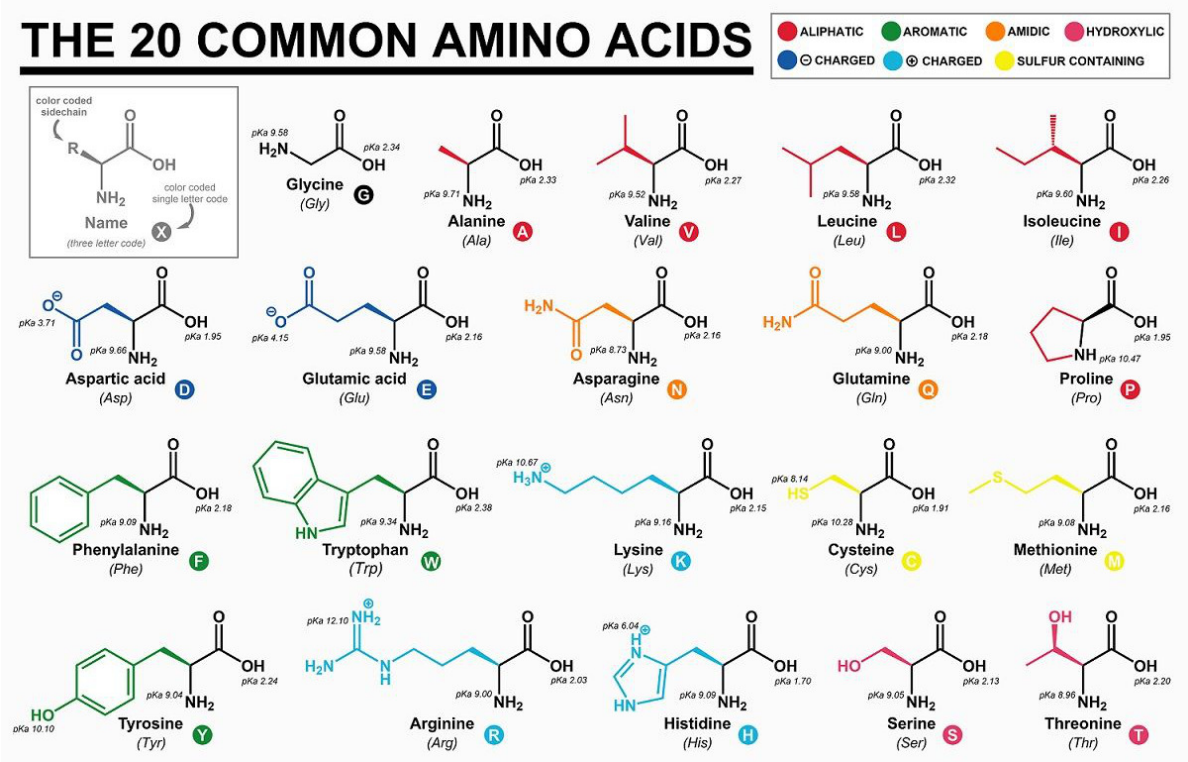


Abb. 11.3: Aminosäuren sind modifizierte Zuckermoleküle. Die etwa 20 unterschiedlichen Aminosäuren können sie in langen Ketten noch komplexere Einheiten, nämlich Proteine bilden.

identifiziert. Mit den Worten von Watson und Cricks: *It would be of interest to know the precise difference in free energy between the various tautomeric forms under physiological conditions.* [**?**]

Der Welle-Teilchen Dualismus hat nicht nur zu innovativen Technologien wie dem Elektronenmikroskope[2] und andere medizinischen Instrumenten geführt, sondern eröffnet einen Zugang auf die Dynamik komplexer Systeme, wie beispielsweise den Proton-Transfer in Biomolekülen. Für die Beschreibung physikalischer Vorgänge ist es notwendig, ein Verständnis dafür zu entwickeln, wie sich insbesondere Elektronen unter Einwirkung äußerer Kräfte verhalten. Im Kapitel *Materiewellen* haben wir gelernt, dass man ein Teilchen durch eine Wellenpaket darstellt. Dieses entsteht durch die Überlagerung vieler ebener Wellen. Die zugehörige Wellengleichung muss eine Differenzialgleichung sein, die als Lösung eine Superposition ebener Wellen hat. Weiter reagieren die zu beschreibenden massiven Teilchen auf ihre Umgebung. Die Wechselwirkung mit externen Kräften oder entsprechenden Potenzialen muss also auch einfließen.

[2] The Nobel Prize in Physics 1986 was divided, one half awarded to Ernst Ruska *for his fundamental work in electron optics, and for the design of the first electron microscope*, the other half jointly to Gerd Binnig and Heinrich Rohrer *for their design of the scanning tunneling microscope*

While the theory agrees incredibly well with experiment and while it is profound mathematical beauty it makes absolutely no sense.

Roger Penrose

In der klassischen Mechanik beschreibt man die Eigenschaften und die Zeitentwicklung einer Welle durch eine Wellenfunktion, die eindimensional z.B. so aussehen kann

$$A(x,\, t) = A_{\max} \sin\Big(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \cdot t\Big), \tag{11.2}$$

wobei $\vec{k}$ der Wellenvektor, ω die Kreisfrequenz und v ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Diese ergibt sich als Lösung $A(\vec{x},\, t)$ der Wellengleichung.[3]

$$\frac{\partial^2 A(x,\, t)}{\partial\, x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A(x,\, t)}{\partial\, t^2} \tag{11.3}$$

My colleague Debye suggested that one should have a wave equation; Well I found one [**?**].

Erwin Schrödinger

Die Frage stellt sich, ob man eine Materiewelle ebenfalls durch eine Wellengleichung beschreiben kann. Die Antwort lautet JA. Die entsprechende Gleichung nennt man die Schrödingergleichung, die Lösungen die Wellenfunktionen. Sie bildet die theoretische Grundlage für die Beschreibung von Teilchen in der Quantenphysik. Die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ ist eine wellenartige Oszillation, die zwischen positiven und negativen Werten wechselt und mit deren Hilfe man Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen kann. Neben diesem statistischen Aspekt kommt hinzu, dass in der Quantenphysik das Superpositionsprinzip gilt. Dieser Umstand führt zu so genannten verschränkten Zuständen (Stichwort Schrödingers Katze), in denen die Eigenschaften des Einzelobjekts unbestimmt sind und nur Aussagen über das Gesamtsystem möglich sind (Kapitel *Tunneleffekt*).

Es lohnt sich also, sich etwas tiefer mit dieser theoretischen Beschreibung von Materie auseinander zusetzen. Es kommt allerdings erschwerend hinzu, dass die Schrödingergleichung komplex ist ($i = \sqrt{-1}$) und das gilt auch für die Lösungen $\Psi(x,\, t)$. Die Wellenfunktion Ψ, die eine Materiewelle beschreibt, beinhaltet also die doppelte Informationsmenge, da sie aus Real- und Imaginärteil besteht. Darüber hinaus ergibt sich, dass man die Wellenfunktion einer Materiewelle experimentell nicht beobachten kann! Im Gegensatz zu klassischen Wellen hat die Amplitude der Wellenfunktion Ψ keine physikalische Bedeutung. $\Psi(x,\, t)$ ist nach Max Born[4] eine so genannte Wahrscheinlichkeitsamplitude.

[3] Im Folgenden verzichten wir auf den Vektorpfeil, weil alle Probleme und Beispiele eindimensional behandelt werden. Der Betrag des Wellenvektors ist die so genannte Wellenzahl k.

[4] The Nobel Prize in Physics 1954 was divided equally between Max Born *for his fundamental research in quantum mechanics, especially for his statistical interpretation of the wavefunction* and Walther Bothe *for the coincidence method and his discoveries made therewith.*

Man denke beim Konzept Wahrscheinlichkeit an den Zusammenhang zwischen Amplitude und Intensität einer klassischen Welle. Quantenphysikalische Probleme werden gelöst, wie Wellenphänomene in der klassischen Physik - sie gehorchen Gleichungen vom Typ Wellengleichung. In der Quantenphysik betrachtet man statt Ψ das Betragsquadrat der Wellenfunktion $|\Psi(x, t)|^2$, denn dieser Wert ergibt einen realen Wert, der dem Messwert für eine physikalische Größe entspricht. Man nennt diese Größe eine Observable. Das die Wellenfunktion keine physikalische Bedeutung hat, kann man sich folgendermaßen klarmachen: Der Wert von Ψ für ein sich bewegendes Teilchen bei (x, y, z) zum Zeitpunkt t, entspricht der Wahrscheinlichkeit, es zu diesem Zeitpunkt, an einem vorgegebenen Ort zu finden. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich irgendwas irgendwo befindet, kann Werte zwischen NULL und EINS annehmen. Ein Wert von NULL bedeutet mit Sicherheit Abwesenheit und EINS mit Sicherheit Anwesenheit. Die Amplitude der Wellenfunktion kann aber sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Eine negative Wahrscheinlichkeit ist aber physikalisch unsinnig. Die Wellenfunktion selbst kann also nicht eine beobachtbare Größe sein.

Die Grundlagen der theoretischen Beschreibung physikalischer Vorgänge in der Quantenphysik gehen zurück auf die Arbeiten von Erwin Schrödinger[5] und Werner Heisenberg.[6] Beide Ansätze sind äquivalent und beschreiben die zeitliche Entwicklung eines Quantensystems. In dieser Vorlesung werden nur die Grundzüge der Schrödingergleichung behandelt. Tatsächlich konzentrieren wir uns auf stationäre Bedingungen. Für eine tiefere theoretische Behandlung schaue man in die einschlägige Literatur der theoretischen Physik, z.B. [**? ? ?**]. Die für Physik wichtigste Anwendung der Schrödingergleichung ist die quantenmechanische Behandlung des Wasserstoffatoms. Warum ist das so?

- Die Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom ist ein Beispiel für ein Zentralkraftproblem, wobei die potenzielle Energie allein vom Abstand zwischen den beiden Teilchen abhängt.

- In einem Zentralkraftsystem hat der Drehimpuls definierte Werte, wenn sich das System in einem Zustand definierter Energie befindet.

- Mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung kann das Wasserstoffatom exakt gelöst werden. Als Lösungen ergeben sich elektronische Wellenfunktionen, die die Bewegung eines Teilchens beschreiben, genannt Orbitale.

We cannot make the mystery go away. We will just tell you how it works.

Richard Feynman

[5] The Nobel Prize in Physics 1933 was awarded jointly to Erwin Schrödinger and Paul Adrien Maurice Dirac *for the discovery of new productive forms of atomic theory.*

[6] The Nobel Prize in Physics 1932 was awarded to Werner Karl Heisenberg *for the creation of quantum mechanics, the application of which has, inter alia, led to the discovery of the allotropic forms of hydrogen.*

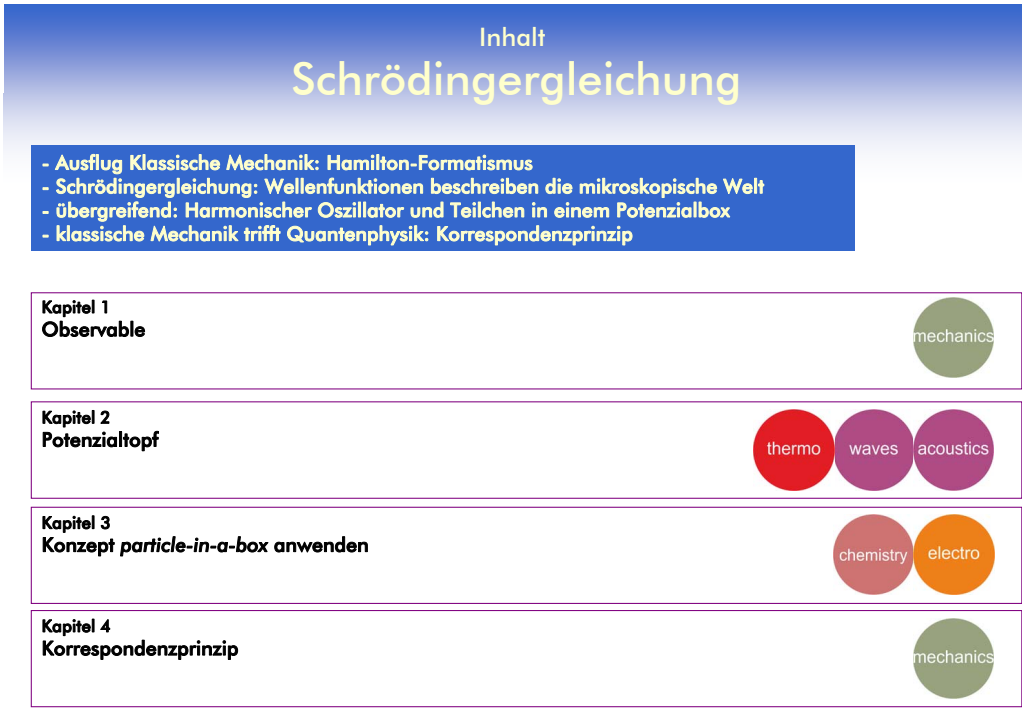
Im Rahmen der Quantenphysik muss man sich an neue Begrifflichkeiten gewöhnen. Weiter ändert sich die Herangehensweise, um zu einem Verständnis der mikroskopischen Phänomene zu gelangen.

- Der Ort und die Zeit werden wie in der Newtonscher Mechanik behandelt.
- Der Zustand eines Teilchens wird vollständig beschrieben durch die so genannte Wellenfunktion. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem bestimmtem Raumgebiet zu finden, kann berechnet werden.
- Zu jeder Beobachtungsgröße in der klassischer Physik existiert ein linearer Operator in der Quantenphysik.
- Die Berechnung von Observablen (experimentelle Messgrößen) erfolgt über Eigenwerte einer Eigenwertgleichung.
- Der so genannte Erwartungswert der Wellenfunktion kann berechnet werden.
- Die Schrödingergleichung beschreibt die Zeitentwicklung der Wellenfunktion.

Die Quantenphysik basiert auf diesen wenigen Postulaten, deren Inhalt an dieser Stelle kurz erläutert werden soll. Für eine ausführlichere Beschreibung sei auf [**?**] verwiesen. Zwei Postulate befassen sich mit der Rolle der Wellenfunktion in der Beschreibung physikalischer Vorgänge in der Quantenmechanik. Die Wellenfunktion für ein Teilchen oder ein Teilchensystem enthält alles, was man über das System wissen kann. Das dritte Postulat stellt die Verbindung zwischen experimentell messbaren Größen (Observablen) und den dazugehörigen mathematischen Operatoren her. Das vierte Postulat gibt an, wie man den Wert einer Observablen bestimmt. Das fünfte Postulat erläutert, wie man den Zustand eines Systems durch experimentelle Verfahren bestimmen kann. In dieser Vorlesung werden wir uns die Schrödingergleichung erarbeiten und an Beispielen die Bedeutung ausloten. Beispielsweise war die Erklärung der kovalenten Bindung in Molekülen eine der ersten großen Erfolge der jungen Quantenphysik. Die Beispiele sind so gewählt, dass die mathematische Behandlung einfach, die Erkenntnisse aber für viele Bereiche der Physik, die anderen Naturwissenschaften und die Technik relevant sind.

Wenn es doch bei dieser verdammten Quantenspringerei bleiben soll, so bedaure ich, mich mit der Quantentheorie überhaupt beschäftigt zu haben.

Erwin Schrödinger


Inhalt
Schrödingergleichung
- Ausflug Klassische Mechanik: Hamilton-Formatismus
- Schrödingergleichung: Wellenfunktionen beschreiben die mikroskopische Welt
- übergreifend: Harmonischer Oszillator und Teilchen in einem Potenzialbox
- klassische Mechanik trifft Quantenphysik: Korrespondenzprinzip
Kapitel 1
Observable
mechanics
Kapitel 2
Potenzialtopf
thermo
waves
acoustics
Kapitel 3
Konzept particle-in-a-box anwenden
chemistry
electro
Kapitel 4
Korrespondenzprinzip
mechanics

11.1 Observable



Zusammenfassend kann man sagen: Es ist nicht die Einführung der deterministischen statistischen Beschreibung, was die Quantenmechanik von der klassischen Mechanik abhebt, sondern andere Züge, vor allem die Auffassung der Wahrscheinlichkeitsdichte als Quadrat einer Wahrscheinlichkeitsamplitude, $P = |\Psi|^2$; dadurch entsteht das Phänomen der Interferenz der Wahrscheinlichkeiten; dieses macht die Anwendung der naiven Ding-Vorstellung auf die Massenteilchen der Physik unmöglich und erzwingt eine Revision des Begriffs der physikalischen Realität. [**?**]

Max Born, 1954

Wellenfunktion

Zunächst muss geklärt werden, wie der Zusammenhang zwischen dem experimentellen Messwert und einem Wellenpaket ist, das ein Teilchen beschreibt. Dabei tauchen neue Begriffe wie Observable[7] und Erwartungswert[8] auf.

[7] *Lexikon:* Eine **Observable** ist eine physikalische Größe, deren Wert man in einem Experiment bestimmen kann. Dazu gehören beispielsweise Größen wie Energie, Impuls oder Ladung.

[8] *Lexikon:* Der **Erwartungswert** stellt eine Verbindung zwischen dem Ergebnis einer quantenphysikalischen Rechnung (Wellenfunktion des Teilchens) und gemessenen Laborwerten (Observablen)

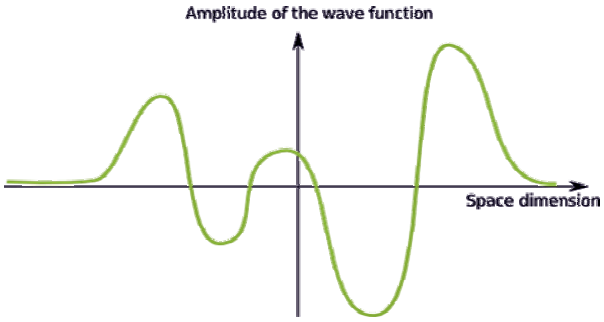


Abb. 11.4: Beispiel für eine Wellenfunktion

Im Zusammenhang mit dem Erwartungswert stelle man sich vor, man wolle dass Durchschnittsalter $< A >$ einer Gruppe von N Studierenden ermitteln. Es gibt n_1 Studierende die ein Alter a_1 haben, n_2, die a_2 alt sind und so weiter. Das mittlere Alter ist dann

$$< A >= \frac{\sum_i n_i \cdot a_i}{N} \tag{11.4}$$

Man kann auch so um stellen:

$$< A >= \sum_i a_i \frac{n_i \cdot}{N} \tag{11.5}$$

Der Quotient n_i/N gibt die Wahrscheinlichkeit P_i an, dass Studierende ein bestimmtes Alter haben.

$$< A >= \sum_i a_i \cdot P_i \tag{11.6}$$

In ähnlicher Weise wird die mittlere Position eines Teilchens oder auch andere Observable in der Quantenphysik berechnet.

Eine wichtige Erkenntnis im Zusammenhang mit der Beschreibung von Materiewellen ist, dass ein Wellenpaket durch eine Wellenfunktion Ψ beschrieben werden kann. Allerdings ergibt sich ein experimentell nachprüfbarer Messwert erst aus dem Betragsquadrat der Wellenfunktion $|\Psi|^2$. Aus der Optik kennt man dieses Phänomen schon. Das elektrische Feld $\vec{E_{EM}}$ einer Lichtwelle ist nicht messbar, wohl aber das Betragsquadrat $|\vec{E_{EM}}|$. Die entsprechende Messung liefert die Intensität I_{EM} der Strahlung. Damit ergeben sich bestimmte Bedingungen und Rückschlüsse, die man in Bezug auf eine Wellenfunktion ziehen kann. Abb. 11.4 zeigt, wie eine typische Wellenfunktion für ein Teilchen aussehen könnte.

- Die Wellenfunktion muss an beliebigen Orten einen endlichen Wert haben und insbesondere bei $x = \pm\infty$ den Wert NULL annehmen, siehe Abb. 11.5 und Abb. 11.6.

her. Der Erwartungswert ergibt sich aus dem Mittelwert z.B. für die Position eines Teilchens bei einer großen Anzahl von experimentellen Messungen. Eine alternative Interpretation ist, dass der Erwartungswert die mittlere Position angibt, die eine Vielzahl von Teilchen einnehmen, die mit der gleichen Wellenfunktion beschrieben werden. Zum Beispiel werden alle Wasserstoffatome im Grundzustand durch eine Wellenfunktion beschrieben. Für das Wasserstoffatom gibt der Erwartungswert beispielsweise den mittleren Radius an, auf dem sich ein Elektron bewegt.

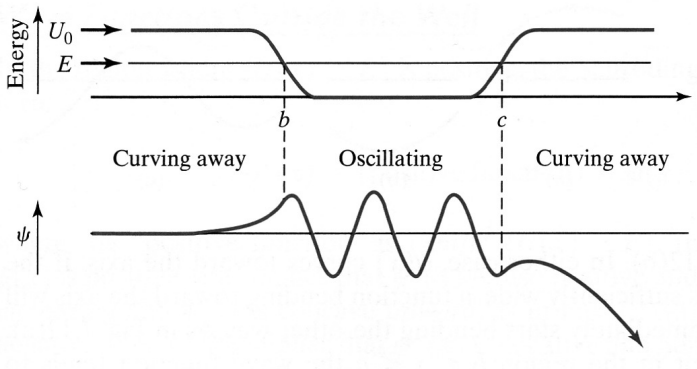


Abb. 11.5: Die Wellenfunktion oszilliert zwischen den beiden Umkehrpunkten $x = b$ und $x = c$. Im Gegensatz zu $x \to -\infty$ strebt die Wellenfunktion für $x \to \infty$ nicht gegen NULL. Eine solche Wellenfunktion beschreibt nicht das Verhalten eines realen Teilchens. Die Lösung ist also nicht-physikalisch [**?**].

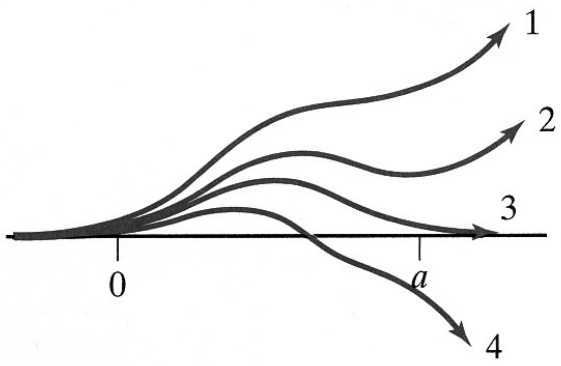
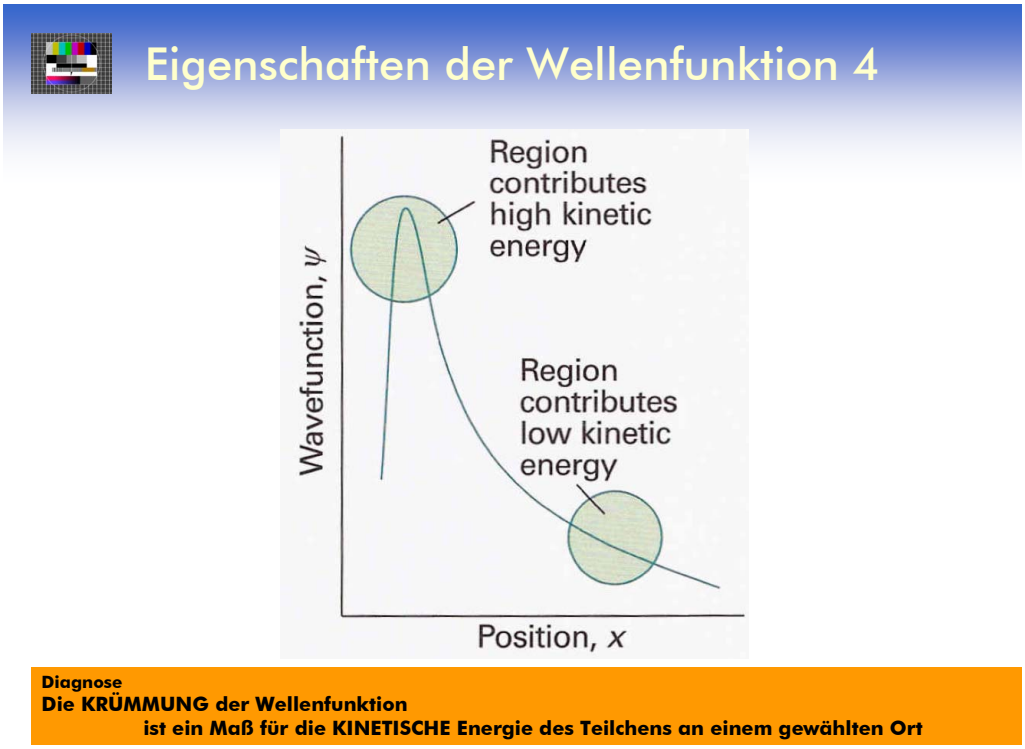


Abb. 11.6: Wellenfunktionen, die ein Teilchen mit vier unterschiedlichen Energien beschreibt. Für $x \to \infty$ erfüllt aber allein (3) die Anforderung an eine physikalisch realistische Wellenfunktion[**?**].

- Ein Wert der Wellenfunktion von $\Psi(x = x_0) = \infty$ würde bedeuten, dass sich das Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit EINS an genau diesem Ort befindet, was der Heisenbergschen Unschärferelation widersprechen würde.

- Die Wellenfunktion Ψ gibt für einen bestimmten Ort stets nur EINEN Funktionswert an. Ansonsten gäbe es unterschiedliche Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für ein Teilchen an ein und demselben Ort.

- Die Wellenfunktion beschreibt ein echtes physikalisches Objekt, was bedeutet, dass man das Teilchen in einer Messung experimentell beobachten kann. Aus diesem Grund darf Ψ keine Unstetigkeitsstelle aufweisen. Das bedeutet auch, dass die Ableitungen $d\Psi/dx$, $d\Psi/dy$ und $d\Psi/dz$ stetig sein müssen.



Wie verhält sich sich ein mikroskopisches Teilchen in einem anharmonischen Potenzial?

Die obige Abbildung zeigt das Ergebnis, das sich aus der Behandlung dieses Problems durch Lösen der Schrödingergleichung ergibt. Die Wellenfunktion zeigt einen Anstieg der Amplituden im Bereich des Potenzials. Das bedeutet, dass sich das Teilchen gerne hier aufhält. Die Analyse liefert, dass eine starke Krümmung der Wellenfunktion eine hohe kinetische Energie der Teilchen bedeutet. In Bereichen, in denen die Wellenfunktion nicht so stark gekrümmt ist, ist der Anteil der kinetischen Energie zur Gesamtenergie geringer. Die Ursache werden wir in Kürze kennenlernen, wenn Operatoren eingeführt werden. Hier handelt es sich um den so genannten Impulsoperator $\hat{p}$, den wir hier schon mal als kleinen Vorgeschmack hinschreiben

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \tag{11.7}$$

Das Vorgehen ist dann so: Der Operator wird in die klassischen Gleichungen eingesetzt. Beispielsweise in die Gleichung, die bei Newton Energie und Impuls verbindet

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \tag{11.8}$$

Daraus ergibt sich ein Operator für die kinetische Energie

$$\hat{E}_{kin} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \tag{11.9}$$

Dieser Operator-Ausdruck für die kinetische Energie wird auf die Wellenfunktion losgelassen. Man erkennt, dass, mathematisch betrachtet, (d^2/dx^2) die Krümmung der Funktion abtastet. Man kann daraus den Schluss ziehen, dass eine starke Krümmung der Wellenfunktion ein Hinweis auf eine hohe kinetische Energie des Teilchens an dieser Position ist.

Nun können Sie überlegen, wo sich in der Abbildung das Minimum des Potenzials befindet und warum es anharmonisch ist!

Quadriert man die Wellenfunktion[9]

$$\Psi_{dB}(x,t) = A_\lambda \cdot \exp(i(k_\lambda \cdot \lambda - \omega_\lambda \cdot t)) \tag{11.16}$$

ergeben sich reelle Werte[10]

$$|\Psi_{dB}(x,t)|^2 = \Psi^*_{dB}(x,t) \cdot \Psi_{dB}(x,t) \tag{11.17}$$

Diese Vorgehen liefert Informationen über das betrachtete Teilchen. Eine solche Größe nennt man eine Observable. Eine Observable ist eine messbare physikalische Größe. Beispiele sind die Energie, der Impuls, der Bahndrehimpuls oder die elektrische Ladung. Wie wir am Beispiel des Heisenberg-Mikroskops (Kapitel *Unschärferelation*) gelernt haben, verändert jede experimentelle Messung den Zustand des zu messenden Objektes. Der Begriff der Messgröße der klassischen Physik wird in der Quantenphysik durch den Ausdruck Observable ersetzt.

Wahrscheinlichkeitsdichte

In der klassischen Physik haben wir den Begriff der linearen Massendichte μ_M z.B. eines Seils der Länge ℓ kennengelernt. Die Masse M des Seils ergibt sich aus $M = \mu_M \cdot \ell$.

[9] Mathematisch muss man bei der Bildung des Betragsquadrats die Regeln der Multiplikation von komplexen Größen beachten und man erinnere sich weiter an die Eulersche Formel:

$$z = x + iy \tag{11.10}$$
$$|z| = \sqrt{x^2 - y^2} \tag{11.11}$$
$$|z|^2 = z^* \cdot z \tag{11.12}$$
$$\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) \tag{11.13}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\exp(i\alpha) + \exp(i\alpha)}{2} \tag{11.14}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{\exp(i\alpha) - \exp(i\alpha)}{2} \tag{11.15}$$

[10] $(-i) \cdot (+i) = -(-1) = 1$

Analog kann man in der Elektrodynamik eine lineare Ladungsdichte λ_q definieren. Für die Ladung ergibt sich $Q = \lambda_q \cdot \ell$. Für geringe Abstände δx formen sich diese Ausdrücke um

$$\mu_m(x) \cdot \delta x \tag{11.18}$$

$$\lambda_q(x) \cdot \delta x \tag{11.19}$$

Die Größen $\mu_M(x)$ und $\lambda_q(x)$ haben die Einheit [kg/m] bzw. [C/m]. Die Definition besagt, dass μ_m und λ_m keine Masse bzw. keine Ladung sind. Erst die Multiplikation mit einer Länge ergibt die physikalischen Größen. In dieser Weise definiert sich auch die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$. $P(x)$ hat die Einheit [1/m]. Nur $P(x) \cdot \delta x$ ergibt eine Wahrscheinlichkeit. Da die Wellenfunktion im Raum ausgedehnt ist, kann sie keinen exakt definierten Wert für den momentanen Ort des Teilchen liefern. Damit berücksichtigt die Wellenfunktion den Wellencharakter von Materie und die Vorgaben durch die Heisenbergsche Unschärferelation. $|\Psi|^2$ macht daher nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über den zu erwartenden experimentellen Messwert.

$$P_{dB}(x,t)\,dx = |\Psi_{dB}(x,t)|^2\,dx \tag{11.20}$$

Mit dieser Definition von Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte für ein massives Teilchen spielt die Wellenfunktion eine ähnliche Rolle wie Amplitude $A(x)$ für die Photonen in der Optik:

$$P(x,t) \propto |A(x,t)|^2 \tag{11.21}$$

Der Unterschied ist, dass $|A(x,t)|^2$ nur proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte ist, ein Photon an einem bestimmten Ort zu finden.

Hinweis: Ein Problem beim Umgang mit dem Konzept Wellenfunktion ist, dass hier nichts wellenartig oszilliert. Es gibt keine Störung eines physikalischen Mediums. Die Wellenfunktion ist schlicht eine wellenartige Funktion, die zwischen positiven und negativen Werten oszilliert und womit man Wahrscheinlichkeitsaussagen über mikroskopische Teilchen machen kann.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einem vorher festgelegten Raumgebiet zu finden? Abb. 11.7 illustriert, wie man aus der Kenntnis von $|\Psi_{dB}|^2$ die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass sich ein Teilchen im Gebiet $[x : x+dx]$ befindet. Integration von $|\Psi_{dB}|^2$ über den gesamten Raumbereich in dem sich das Teilchen aufhalten kann, liefert die Wahrscheinlichkeit EINS. Das Teilchen muss irgendwo in diesem Volumen sein. Diese scheinbar triviale Aussage ist oft sehr nützlich, um die Anzahl möglicher Lösungen für die zu berechnende Wellenfunktion einzuschränken. Es sei noch angemerkt, dass nicht $\Psi_{dB}(x,\, t)$, sondern $|\Psi_{dB}(x,\, t)|^2$ integriert wird. Wir wissen daher nicht, was das Integral der Wellenfunktion selbst ergibt. Ist das ein Problem? Da die Wellenfunktion keine physikalische Aussage hergibt, ist der sich ergebene Wert auch nicht relevant.

Eine Wellenfunktion beschreibt die Eigenschaften eines Teilchens, das sich irgendwo im Universum aufhält. Diese Information können wir ausnutzen, um mehr über das Objekt

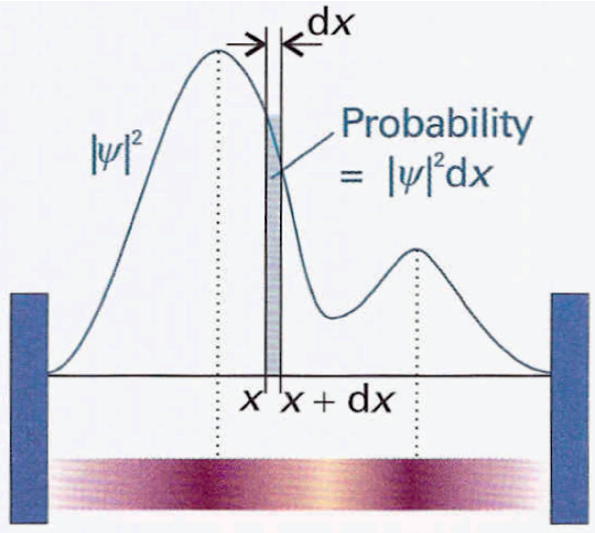


Abb. 11.7: Die Wellenfunktion ist eine Wahrscheinlichkeitsamplitude in dem Sinne, dass ihr quadrierter Wert ($\Psi^* \cdot \Psi$ oder $|\Psi|^2$) eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Bereich dx am Ort x zu finden, ist proportional zu $|\Psi|^2 dx$, in der Abbildung schattiert dargestellt[**?**].

zu erfahren. Es ist sinnvoll, die Wahrscheinlichkeitsdichte über den gesamten Raum, also $[-\infty : +\infty]$ zu integrieren. Damit kann man $P_{dB}(x,t)$ normalisieren.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{dB}(x,t)|^2 \, dx = 1 \tag{11.22}$$

Wir wissen damit, dass das Teilchen tatsächlich vorhanden ist. Mehr aber auch nicht. Das Vorgehen erscheint zunächst wenig sinnvoll, weil man scheinbar nur eine Trivialität ausnutzt. Sie werden später an einem Beispiel sehen, wie man damit nicht relative, sondern experimentell nachprüfbare Energiewerte bestimmt.

Newtonian physics says *If such and such is the case now, then such and such is going to happen next.* Quantum mechanics says *If such and such is the case now, then the probability that such and such is going to happen next is . . . (whatever it is calculated to be) [**?**].*

Anwendungen 1^{4LP}

Beispiele aus der Molekülphysik

Man macht mit einer Kamera eine Momentaufnahme eines Wassermoleküls (Abb. 11.8a). Man kann sich leicht vorstellen, dass man die Atome nicht stets an der derselben Position vorfindet. Legt man viele dieser Einzelaufnahmen übereinander, erhält man folgendes Ergebnis, siehe Abb. 11.8b. Die Aufnahme wirkt verschwommen.[11]

[11] Tatsächlich kann das Molekül zusätzlich sogar noch rotieren.

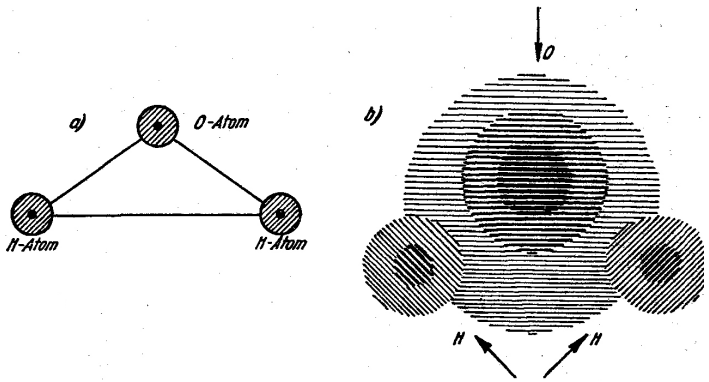


Abb. 11.8: *Links:* Bekannte Darstellung des Wassermoleküls H_2O. *Rechts:* Mit einer Kamera werden Momentaufnahmen des Moleküls aufgenommen und die Bilder überlagert. Das Ergebnis gibt die Wahrscheinlichkeit wieder, die Atome von H_2O in einer Messung aufzufinden [**?**].

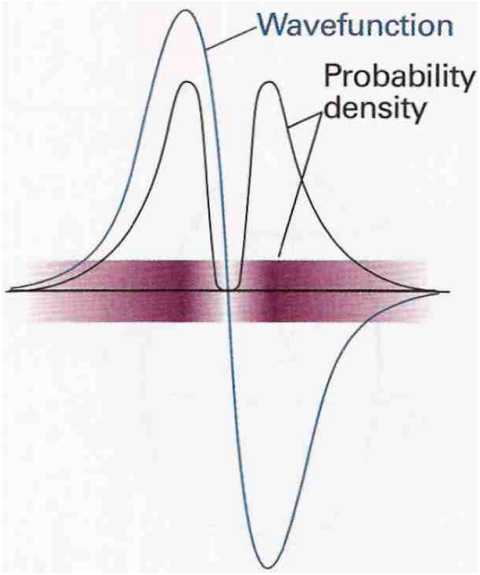


Abb. 11.9: Das Vorzeichen einer Wellenfunktion hat keine direkte physikalische Bedeutung: Die positiven und negativen Bereiche dieser Wellenfunktion entsprechen beide derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung (wie durch die Schattierung dargestellt) [**?**].

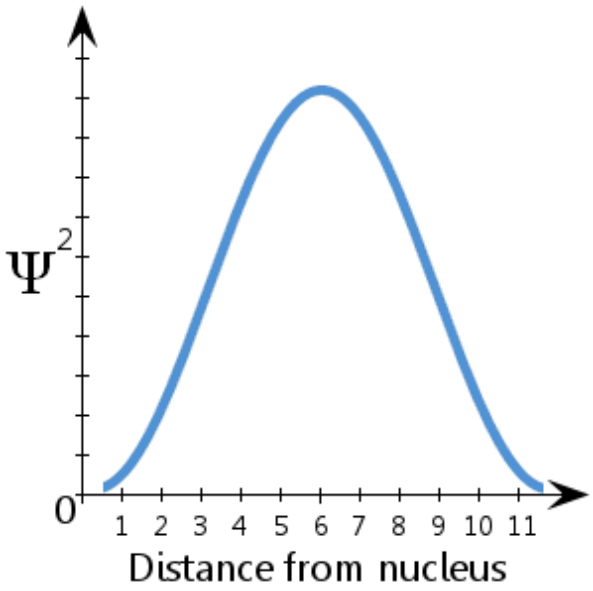


Abb. 11.10: Wahrscheinlichkeit dafür, das Elektron in der Nähe des Kerns zu finden.

Abb. 11.9 zeigt eine Wellenfunktion und die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte. Zunächst scheint es so,als dass es keinen Unterschied macht, ob die Wellenfunktion Ψ positive, negative oder komplexe Werte annimmt, da für die Ermittlung des Wertes der Observable quadriert wird. Jede Erhöhung der Amplitude äußerst sich in einer erhöhten Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in diesem Raumgebiet zu finden. Tatsächlich ergibt sich indirekt eine merkliche Konsequenz, wenn man daran denkt, dass die Superposition von Wellenfunktionen, wie in der klassischen Optik, zu konstruktiver und destruktiver Interferenz führen kann. Im Wasserstoffmolekül H_2^+ führt dieser Umstand zu stark unterschiedlichen Bindungsverhältnissen.

Ein Beispiel aus der Kernphysik

In Abb. 11.10 ist für ein Elektron der Wert von $|\Psi|^2$ gegen die Entfernung vom Kern aufgetragen. Man kann anhand der blauen Kurve ablesen, dass das Elektron mit hoher Wahrscheinlichkeit zwischen etwa 5 und 7 Einheiten entfernt vom Kern gefunden wird. Weiter stellt man fest, dass es eine geringe Wahrscheinlichkeit gibt, dass sich das Elektron am Kernort (r=0) oder mehr als 11 Einheiten von der Mitte des Kerns entfernt befindet. Es besteht aber eine 100% Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron irgendwo befindet - mit anderen Worten eine Wahrscheinlichkeit von EINS.

Heisenberg ausgeschaltet^{4LP}

Nehmen wir an, dass es die Einschränkungen durch die Heisenbergsche Unschärferelation

$$(\Delta x) \cdot (\Delta p) \geq \hbar/2 \tag{11.23}$$

nicht geben würde. Dann könnte man die Geschwindigkeit eines Teilchen mit höchster

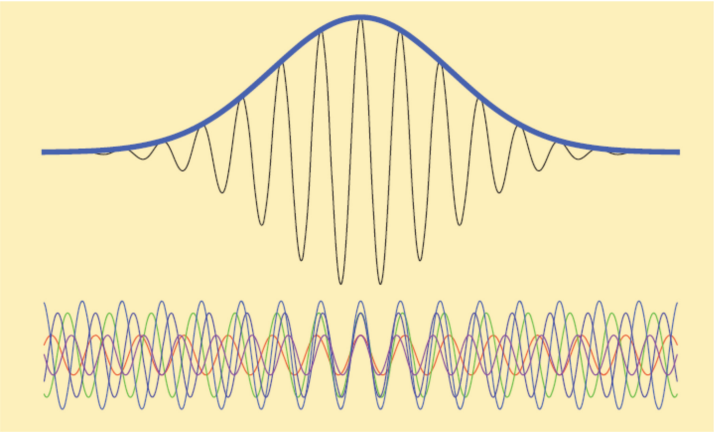


Abb. 11.11: Ein Wellenpaket (schwarz) hat eine Einhüllende (blau), deren Breite die Ortsunschärfe charakterisiert. Ein Wellenpaket kann man räumlich in unendlich ausgedehnte, Wellen mit exakt definiertem Impuls (reine Sinusschwingungen mit scharfer Frequenz) zerlegen. *Unten:* Einige für das dargestellte Paket notwendige Einzelwellen mit entsprechenden Amplituden. Die Einhüllende klingt trotz der unendlich ausgedehnten ebenen Wellen ab, weil sich die Wellen in größerer Entfernung von der Mitte des Pakets gegenseitig auslöschen [**?**].

Genauigkeit messen. Die zugehörige Wellenfunktion kann man durch eine monochromatische Welle (hier am Beispiel einer komplexen Funktion ($\exp\{i\varphi\} = \cos\varphi + i\sin\varphi$) -wie oben gezeigt- beschreiben. Die Wahrscheinlichkeitsdichte[12] wird mit Hilfe der komplex konjugierten Funktion Ψ^* berechnet, das heißt allgemein formuliert

$$\Psi^* \cdot \Psi \quad = \quad (A - iB) \cdot (A + iB) = A^2 - i^2 B^2 = A^2 + B^2 \tag{11.24}$$

Das bedeutet, dass der Ausdruck $\Psi^* \cdot \Psi$ stets eine positive und reale Zahl ergibt. Eine solche Wellenfunktion reicht von $-\infty$ bis $+\infty$. Für $|\Psi|^2$ erhält man einen Wert, der konstant für alle Orte ist. Hier wird ein Elektron beschrieben, dass sich nicht lokalisieren lässt. Das ist physikalisch nicht sinnvoll, denn man könnte das Teilchen an jedem beliebigen Ort mit gleicher Wahrscheinlichkeit finden.

Bemerkung: Bei der Superposition von zwei solchen Wellen ergäbe sich sofort ein Schwebungsmuster, der die Position verschmiert (Kapitel *Unschärferelation*). Das Konzept des Wellenpakets als Superposition vieler monochromatischer Wellen wie in Abb. 11.11 dargestellt, macht also auch im Rahmen dieser Betrachtung einen Sinn.

[12] Zu Beginn hat man den Ausdruck $\Psi^*\Psi$ als Teilchendichte interpretiert. Die Interpretation des Ausdruck als eine Wahrscheinlichkeitsdichte geht auf Max Born zurück.

Erwartungswert

Mathematisch gibt es genaue Verfahren, mit dem man aus der Wellenfunktion Informationen über physikalische Größen erhalten kann. Dazu bedarf es so genannter Operatoren. Damit ergeben sich Erwartungswerte $< Q >$ für eine physikalische Größe wie beispielsweise den Impuls oder den Ort. Allgemein schreibt man:

$$< Q >= \int_{x=\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \cdot Q_{operator} \cdot \Psi(x,t) \tag{11.25}$$

Man bedenke, dass es einen Unterschied gibt zwischen der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis und dem Ereignis selbst. Wenn wir davon sprechen, dass die Wellenfunktion ein Teilchen beschreibt, dass sich in einem ausgedehnten Raumgebiet befindet, heißt das nicht, dass das Teilchen tatsächlich so ausgedehnt ist. In einem Experiment mit Elektronen, findet man ein ganzes Teilchen zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort und nicht einen Teil des Elektrons. Aussagen werden getroffen über die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen wann und wo zu finden. Dieser Umstand wird durch das Quadrat der Wellenfunktion ausgedrückt. Man kann ähnliche Überlegungen für Licht anstellen. Man stelle sich vor, dass man einen Lichtstrahl der Intensität I_{ph} in einen dunklen Raum schickt. Aus der Intensität kann man die mittlere Anzahl an Photonen bestimmen, die sich zu einem bestimmten Moment in einem kleinen Volumen aufhalten. Geht das tatsächlich? NEIN, denn es gibt nur ganze Photonen und ein ausgewählten Volumen kann auch mal NULL Photonen enthalten. Auch in diesem Fall kann man nur die Wahrscheinlichkeit angeben, eine gewisse Anzahl an Photonen zu finden. Erst durch viele Messungen erhält man eine Zahl, die der mittleren Photonenanzahl in dem Volumen angibt.

Mit diesem Ansatz lässt sich die Zeitentwicklung eines Körpers, beschrieben durch ein Materie-Wellenpaket, berechnen. Dies ist in der Abbildung am Beispiel der Bewegung eines Teilchens dargestellt. Da die Anfangsposition nicht genau bekannt ist (Ortsunschärfe), wird es im Laufe der Zeit immer schwieriger, den Aufenthaltsort des Teilchens vorherzusagen. Man stelle sich vor, man führe ein Experiment mit Teilchen durch, die alle dieselbe Wellenfunktion haben. Die Messung liefert ein exaktes Ergebnis, zum Beispiel einen Leuchtpunkt auf einem Bildschirm an einer ganz bestimmten Stelle. Die Wiederholung des Experiments mit den anderen Teilchen liefert ebenfalls solche Resultate. Allerdings ergeben sich Leuchtpunkte an anderen Orten, also unterschiedliche Antworten des Systems auf die gleiche Frage. Was liefert uns dann die Wellenfunktion? Ψ gibt Aussagen darüber, mit welcher Häufigkeit die Ereignisse in bestimmten Bereichen des Bildschirms auftauchen. Am häufigsten findet man die Einschläge da, wo $|\Psi|^2$ groß ist und wenige Ereignisse da, wo $|\Psi|^2$ einen geringen Wert hat. Was bleibt? Auch wenn wir die Wellenfunktion genau kennen, ist das Ergebnis der Experimente nicht genau vorhersehbar.

Hamilton-Formalismus^{4LP}

Die theoretische Beschreibung im Rahmen der Quantenphysik fällt nicht vom Himmel, sondern greift auf Erkenntnisse der theoretischen Mechanik zurück. Man geht zur Beschreibung eines physikalischen Systems folgendermaßen vor:

- Die Freiheitsgrade der Bewegung werden durch geeignete Ortsvariable q_k beschrieben.
- Die Kinetische Energie E_{kin} und die Potentielle Energie E_{pot} werden durch die Variablen q_k und $\dot{q_k}$ ausgedrückt.
- Man stellt die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$=$E_{kin} - E_{pot}$ auf.
- Zu jeder Variablen q_k bestimmt man die so genannte kanonisch konjugierte Variable

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_k}} \tag{11.26}$$

- Man ersetzt in der Gleichung für E_{kin} die Zeitableitungen der Ortsvariablen durch die kanonisch konjugierten Impulse und stellt die Hamiltonfunktion[13] $H = E_{kin} + E_{pot}$ auf.
- Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik.

$$\dot{q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{11.27}$$

$$\dot{p_k} = \frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{11.28}$$

Der Hamilton-Formalismus verknüpft Orts- (q) und Impuls (p) Information und liefert Daten (q, p) zur Dynamik von Körpern. An dieser Stelle sei nochmal auf die Vorlesung *Heisenbergsche Unschärferelation* ($\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$) hingewiesen. Auch hier hatten wir eine enge Verknüpfung dieser beiden physikalischen Größen kennengelernt. In der Quantenphysik werden die kanonisch konjugierten Orts- und Impuls-Variablen durch Operatoren ersetzt. Wie man erkennt, werden Konzepte der klassischen Physik auf die Mikrowelt übertragen. Als Einstieg in die Schrödingergleichung betrachten wir eine Materiewelle und versuchen eine Wellengleichung zu finden, die ein deBroglie Teilchen beschreibt.

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p_{dB}} = \frac{h}{\sqrt{2\,m \cdot E_{kin}^{dB}}} \tag{11.29}$$

Wir erinnern uns daran, dass für ein Teilchen die deBroglie Wellenlänge und seine Geschwindigkeit zusammenhängen. Nehmen wir als Grundstock eine Welle, wie man sie für

[13] *Lexikon:* Die charakteristische Funktion im Rahmen des Hamilton-Formalismus ist die Hamilton-Funktion, die typischerweise der Gesamtenergie des mechanischen Systems entspricht.

akustische Wellen, Seilwellen, aber auch Materiewellen nutzt.

$$\Psi(x) = \Psi_0 \sin\left(\frac{2\,\pi \cdot x}{\lambda_{dB}}\right) \tag{11.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) &= -\left(\frac{2\,\pi}{\lambda_{dB}}\right)^2 \cdot \Psi_0 \sin\left(\frac{2\,\pi \cdot x}{\lambda_{dB}}\right)\\ \frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) &= -\left(\frac{2\,\pi}{\lambda_{dB}}\right)^2 \cdot \Psi(x)\end{aligned} \tag{11.31}$$

Setzt man Gl. 11.29 in die obige Gleichung ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_{dB}^2} &= \frac{2\,m \cdot E_{kin}^{dB}}{h^2}\\ \frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) &= -\frac{8\,\pi^2 \cdot m \cdot E_{kin}^{dB}}{h^2} \cdot \Psi\\ \frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) &= -\frac{2\,m \cdot E_{kin}^{dB}}{\hbar^2} \cdot \Psi\end{aligned} \tag{11.32}$$

$$E_{kin}^{dB} = E_{ges} - E_{pot} \tag{11.33}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -\frac{2\,m}{\hbar^2}(E_{ges} - E_{pot}) \cdot \Psi \tag{11.34}$$

Hier haben wir die Schreibweise $\hbar{=}h/2\,\pi$ ausgenutzt. Ein Teilchen, dass sich in einem konstanten Potenzial mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ändert seine deBroglie Wellenlänge NIE. Ist die kinetische Energie des Teilchen nicht konstant, wird die kinetische Energie unter Energieerhaltung in potenzielle Energie überführt. Die potenzielle Energie hervorgerufen durch die Schwerkraft ($m{\cdot}g{\cdot}h$) ist ein bekanntes Beispiel für ein Potenzial.

Eine typische Hamiltonfunktion, die man im Rahmen der klassischen Physik auswertet, ist die relativistische Energie eines freien Teilchens.

$$H(q,p) = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2} \tag{11.35}$$

Leitet man nach den Variablen ab, [14]

$$\frac{d}{dq_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} H(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p_k \cdot c^2}{\sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}} \tag{11.37}$$

$$\frac{d}{dp_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} H(q,p) = 0 \tag{11.38}$$

[14] Die Kettenregel für eine Funktion $f(s) = \sqrt{x}$ liefert:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \tag{11.36}$$

Das Einsetzen in den Hamilton-Formalismus liefert das erwartete Ergebnis. Das Teilchen bewegt sich:

$$\frac{d}{dt}q_k \neq NULL \tag{11.39}$$

Die Geschwindigkeit des Objekts ändert sich dagegen nicht, da keine Kräfte auf den Körper wirken.

$$\frac{d}{dt}p_k = NULL \tag{11.40}$$

Operatoren[4LP]

Sie reden von Materiewellen. Wo ist die Wellengleichung?

Peter Debye

Wie kann man dieses Konzept im Hinblick auf die Quantenphysik adaptieren?

Dazu verwendet man komplexe Ausdrücke als Operatoren, um Werte für die ausgewählten Observablen zu ermitteln (Jordansche Regeln).

Der Operator, der den Impuls in der Quantenphysik ergibt, ist $\hat{p}$

$$\hat{p} = i\,\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{11.41}$$

Damit lautet die Gleichung für den Impuls:

$$\left(-i\,\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = p\cdot\psi \tag{11.42}$$

$$\hat{p}\psi = p\cdot\psi \tag{11.43}$$

Weiter verwendet man Operatoren für Energie und Potenzial:

$$\hat{U} := U_{pot}(x,t) \tag{11.44}$$

$$\hat{E} := i\,\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{11.45}$$

Man hat es also unter Anderem mit partiellen Ableitungen zu tun. Wir wenden den Impulsoperator auf die Funktion $f(x)$=exp$\{i\,x\}$ an:

$$\begin{aligned}\hat{p}\exp\{i\,x\} &= -i\,\hbar\frac{\partial}{\partial x}\exp(i\,x)\\ \hat{p}\exp\{i\,x\} &= -i^2\,\hbar\exp(i\,x)\\ \hat{p}\exp\{i\,x\} &= \hbar\exp(i\,x)\end{aligned} \tag{11.46}$$

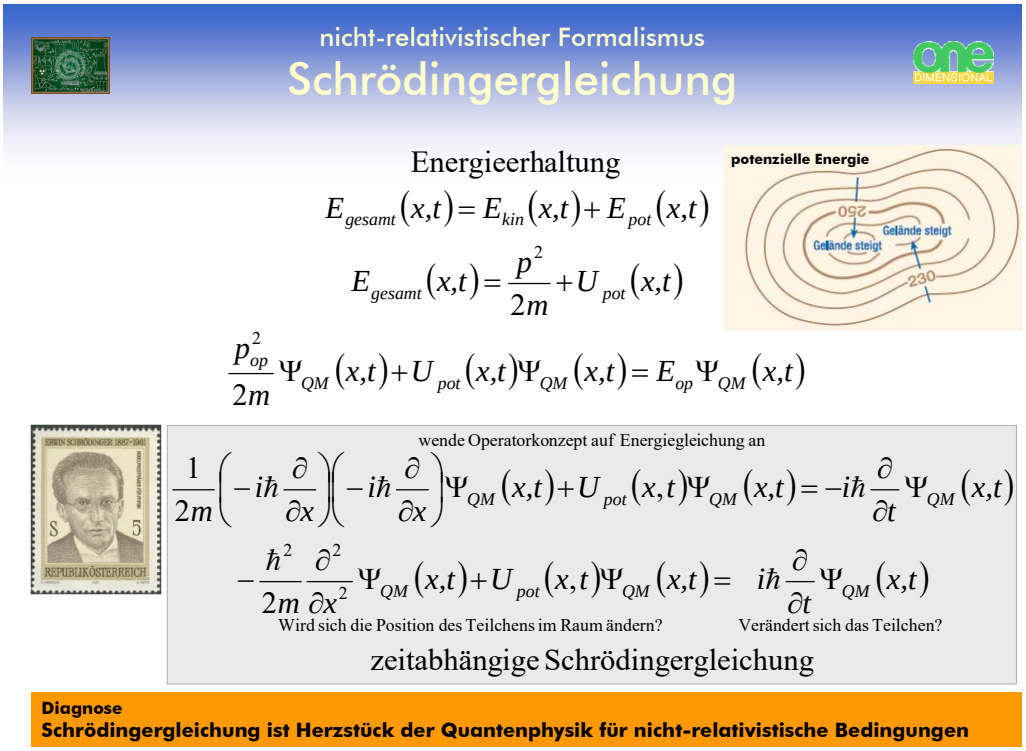
Man nennt diesen Ausdruck eine Eigenwertgleichung. Das Beispiel zeigt exemplarisch, wie das Verfahren angewandt wird. Man erkennt, wie ein Operator in der Quantenphysik arbeitet:

- Der Impulsoperator berechnet, ob sich der Ort des Teilchens mit der Zeit verändert. Damit ist der Bezug zur Geschwindigkeit ($v = \Delta x / \Delta t$) hergestellt.

- Der Energieoperator prüft, ob sich sich generell etwas als Funktion der Zeit tut. Dahinter verstecken sich Energieerhaltung und der Energietransfer, wie zum Beispiel die Umwandlung von potenzieller in kinetische Energie.

- Die allgemeine Form ist stets:

$$operator \cdot function = constant \cdot function \tag{11.47}$$



Time is nature's way to keep everything from happening all at once [?].

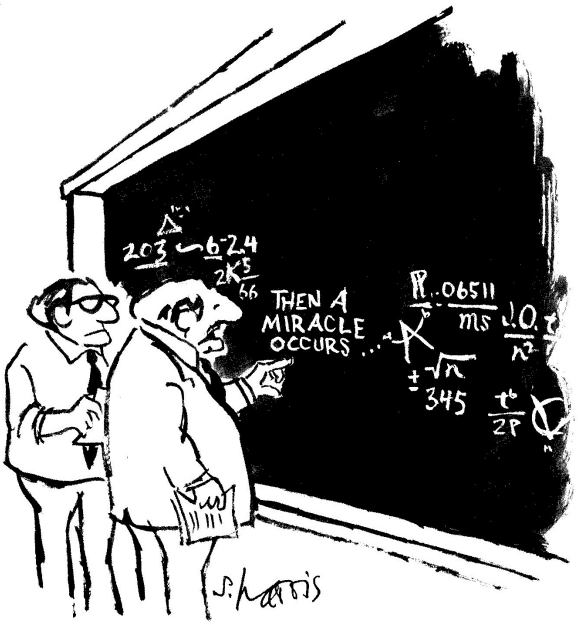
Ray Cummings, 1919

Zeitabhängige Schrödingergleichung

Die quantenphysikalische Beschreibung von Materie durch die Schrödingergleichung berücksichtigt keine Effekte der Relativitätstheorie. Daher beschränken wir uns im Weiteren auf den klassischen Energieerhaltungssatz und ersetzen die Ausdrücke für Energie und Impuls durch die Operatoren der Quantenphysik. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass man die Schrödingergleichung nicht überprüfen kann. Ihr Erfolg beruht allein darauf, dass sie geeignet scheint, verschiedenste mikroskopische Phänomene der Quantenphysik zu erklären, die sich der Analyse der Klassischen Physik entziehen und Vorhersagen zu machen. Man kann die Gleichung nicht herleiten, aber es gelingt sie durch einige Überlegungen plausibel zu machen, siehe auch Abb. 11.12.

Führt man diese Idee fort, ergibt sich eine allgemeine Gleichung, die das statische und dynamische Verhalten von Materie im Rahmen der Quantenphysik beschreibt. Die so genannte Schrödingergleichung lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,\,t) + U(x,t)\Psi(x,\,t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,\,t) \tag{11.48}$$



"I think you should be more explicit here in step two."

Abb. 11.12: Ein Cartoon [**?**]

wobei $U(x,t)$ ein beliebiges Potenzial ist. Denken sie im Zusammenhang mit dem Begriff Potenzial an die Äquipotenziallinien und Äquipotenzialflächen[15] in der Elektrodynamik. Abb. 11.13 zeigt am Beispiel einer Landkarte ein weiteres Beispiel für Äquipotenziallinien im Zusammenhang mit dem Gravitationspotenzial.

There are no waves in the game. The equation that the the game obeys is a wave equation, but there are no waves running around. (This is one of the mountains of quantum mechanics). There are no particles running around either. What's running around are quanta, the third alternative.

Esalen Tapes[16] (1979)

Anwendungen 2^{4LP}

Ein Beispiel aus der Welt der freien Teilchen

Wir betrachten die Quantenphysik eines Teilchens, dass keine Wechselwirkung mit der Umgebung erfährt (Newton 1). Auf den Körper wirkt also keine Kraft F.

$$F = -\frac{\partial U(x,\,t)}{\partial x} = 0 \tag{11.49}$$

[15] *Lexikon:* Eine **Äquipotenzialfläche** in der Elektrodynamik, ist die Menge aller Punkte gleicher potentieller Energie einer Ladung in einem Potential. Diese Äquipotenzialfläche steht stets senkrecht zu den Feldlinien.

[16] Transcribed freom tapes recorded at the Esalen conference on physics and consciousness, Big Sur, Valifornia, January, 1979

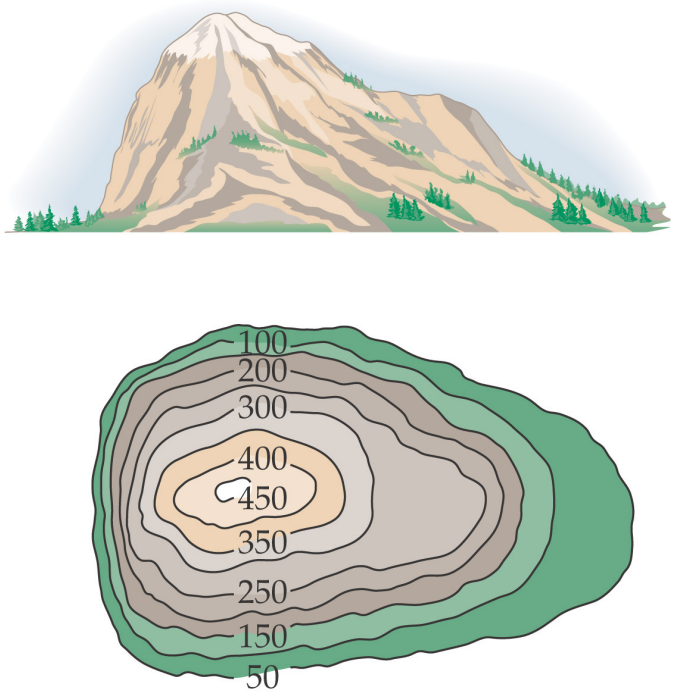


Abb. 11.13: Die Gravitations-Potenzialhyperfläche ist die Hyperfläche, die die potentielle Energie eines Systems in Abhängigkeit von der Topologie beschreibt. Die Höhenlinien sind die Äquipotenzialflächen.

Das Potenzial $U(x,\, t)$ ist zeitlich und räumlich konstant. Man wählt zweckmäßigerweise $U = 0$. Der Vorschlag für eine Wellenfunktion, die die Schrödingergleichung erfüllt ist, eine ebene Welle.

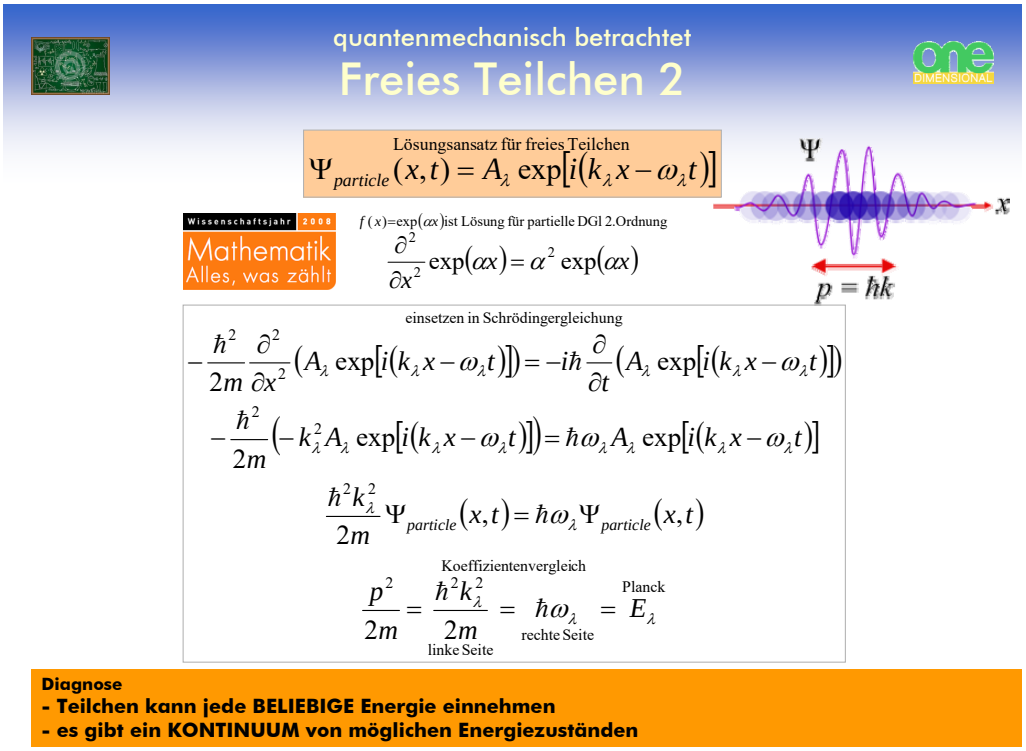
$$\Psi_{dB}(x,\, t) = A_\lambda \exp(i(k_\lambda x - \omega_\lambda t)) \tag{11.50}$$

Anmerkung: Lösungsfunktionen beispielsweise der Form

$$\Psi_{dB}(x,\, t) = -A \sin(k_\lambda x - \omega_\lambda t) \tag{11.51}$$

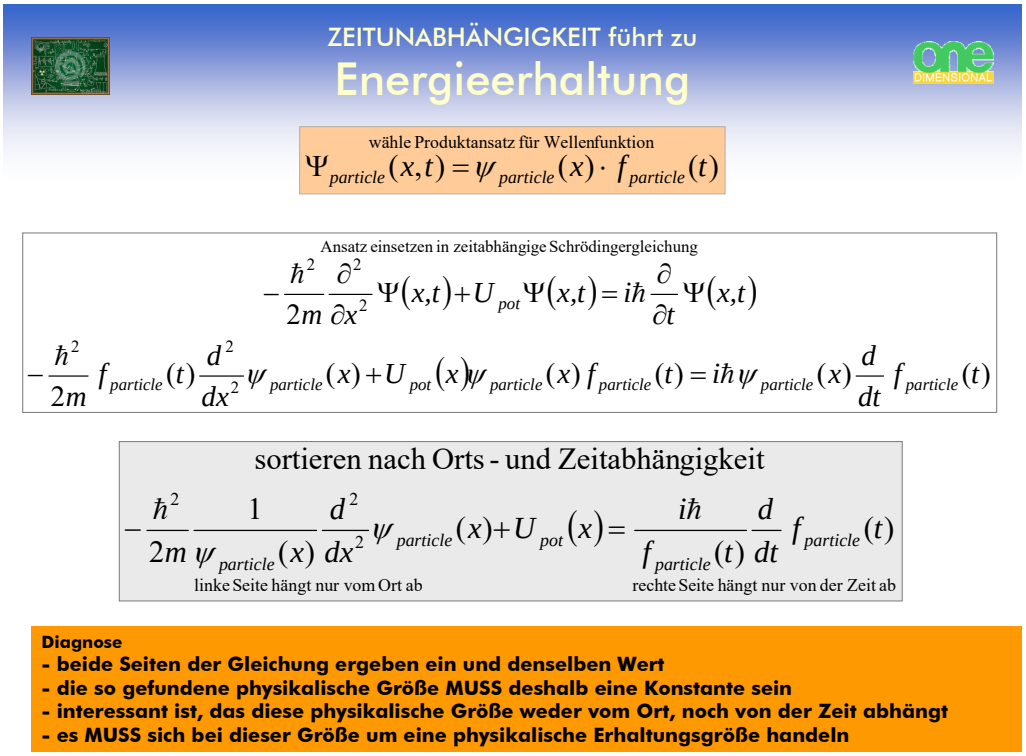
führen nicht zu einer allgemeinen Lösung, sondern es ergibt sich für $(kx - \omega t)$ nur ein einziger Wert, den man aus der folgenden Gleichung berechnen könnte:

$$\tan(k_\lambda x - \omega_\lambda t) = \frac{2 \cdot, m \cdot \omega_\lambda}{\hbar \cdot k_\lambda^2} \tag{11.52}$$



Oben ist die Rechnung ausgeführt. Man setzt Gl. 11.50 in die Schrödingergleichung ein. Wie man erkennt, kann man die Einträge in der Gleichung als Ausdruck für Impuls und Energie interpretieren. Es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen p und E, den man schon aus der Newtonschen Mechanik kennt: $E = p^2/2m$. Wichtig ist, dass k_λ beliebige Wert annehmen kann. Damit kann die Energie des Teilchens beliebige Werte annehmen.

Anmerkung: Die angegebene Wellenfunktion ist eine fortschreitende Welle in x-Richtung, wobei die Amplitude unabhängig von x ist. Damit kann sich das Partikel an jeder beliebigen Position befinden. Das Objekt ist also vollkommen delokalisiert. Um ein reales Teilchen zu beschreiben ist also zusätzlich notwendig, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf ein kleines Raumgebiet einzuschränken. Das ist es erforderlich, ein Wellenpaket zu formen.



The underlying physical laws necessary for the mathematical treatment of a large part of physics and the whole of chemistry are thus completely known, and the difficulty is only that the exact application of these laws leads to equations much too complicated to be soluble. It therefore becomes desirable that approximate practical methods of applying quantum mechanics should be developed, which can lead to an explanation of the main features of complex atomic systems without too much computation [**?**].

Paul Dirac, 1929

Zeitunabhängige Schrödingergleichung

Es ist oft sinnvoll, die Orts- und Zeitabhängigkeit zu entkoppeln. Damit erreicht man eine Vereinfachung der Schrödingergleichung. Sammelt man die entsprechenden Einträge, ergeben sich zwei Ausdrücke:

- Die linke Seite der Gleichung hängt nur von der Ortskoordinate ab.
- Die rechte Seite der Gleichung beinhaltet die Zeitabhängigkeit.
- Da nach unterschiedlichen Variablen abgeleitet wird, kann das Ergebnis der einzelnen Rechnungen nur eine Konstante sein.

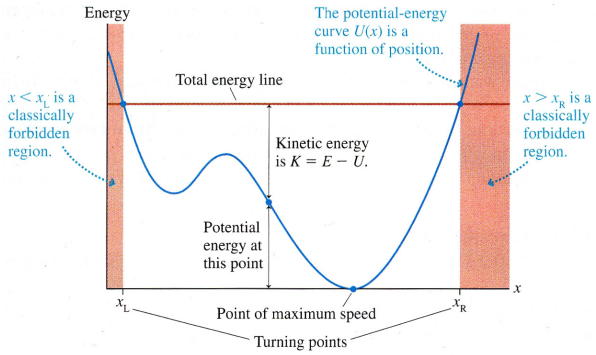
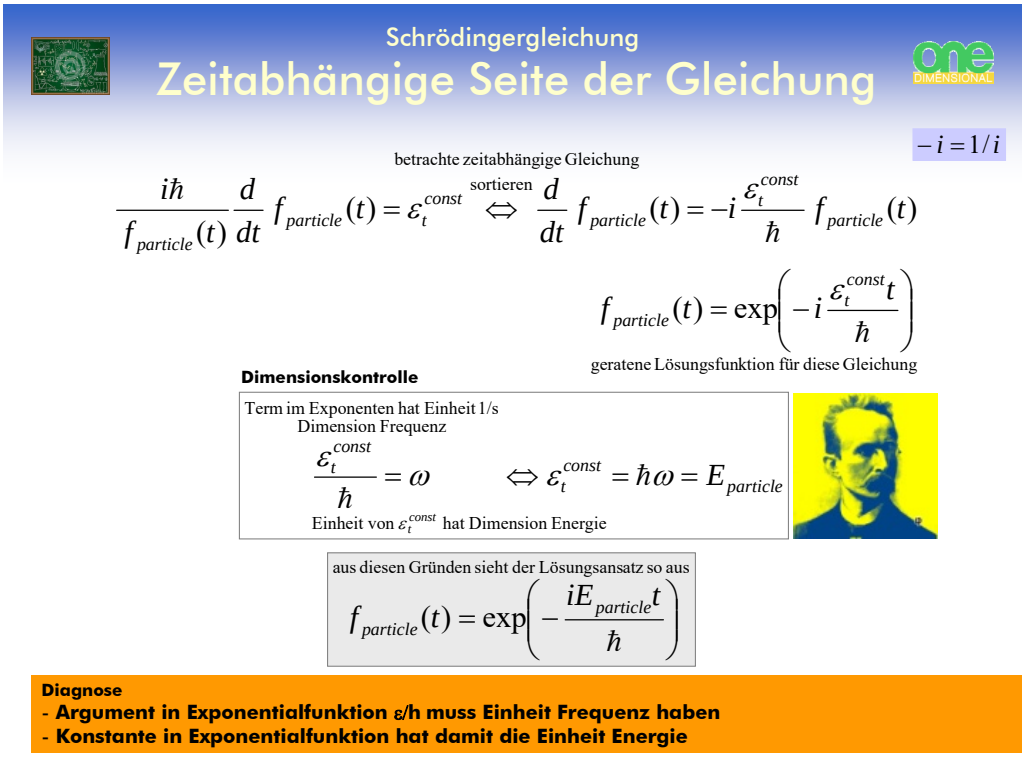


Abb. 11.14: Hilfe zur Interpretation einer Potenzialenergiefunktion [**?**].

Physikalisch bedeutet das, dass es sich hier um eine Erhaltungsgröße handeln muss, da der Wert weder von $\partial/\partial x$ noch von $\partial/\partial t$ abhängt.

Hinweis: In der Newtonschen Mechanik lernt man, dass es wichtig für ein physikalische Verständnis der Natur ist, Modelle zu entwickeln. Um beispielsweise die Bewegung eines Körper zu verstehen, werden Näherungen gemacht, beispielsweise indem man annimmt, dass sich Reibung durch eine einfache Gleichung beschreiben lässt. Damit erreicht man eine gut nachvollziehbare, aber nicht exakte Beschreibung der Vorgänge. In der Quantenphysik liegt der Fall ähnlich. Die Beschreibung kann extrem komplex sein und auch hier ist es notwendig Näherungen zu machen, um den Überblick zu behalten und sich nicht in Details zu verlieren. Der kritische Test ist stets das Experiment mit dem man vergleicht. Deshalb ist es notwendig, aus den Modell messbare Größen zu extrahieren, wie beispielsweise Ladungen, Ströme oder Temperaturen. Ein wichtiger Unterschied besteht in der Behandlung der physikalischen Phänomene in der Klassischen Physik und der Quantenphysik: In der Klassischen Physik beschreibt man Bewegung über die Wirkung von Kräften. Die Schrödingergleichung liefert Energiewerte. Ein Potenzial beschreibt die Wechselwirkung mit der Umwelt. Wir wissen, dass es einen engen Zusammenhang gibt zwischen der Potenziellen Energie und den wirkenden Kräften. Abb. 11.14 zeigt die gegenseitige Beziehung. Man liegt also nicht weit auseinander!



Tatsächlich stellt sich anhand der Analyse der zeitabhängigen Seite der Gleichung, dass es sich bei der Konstanten ϵ_t um die Erhaltungsgröße Energie handelt. Aus einer Dimensionsanalyse und der Auswertung der Planckschen Gleichung sieht die vermutliche Lösungsfunktion folgendermaßen aus:

$$f_{dB}(t) = \exp\left(-i\frac{E_{dB}\cdot t}{\hbar}\right) \tag{11.53}$$

Stationäre Zustände

Eine physikalische Größe kann nach der Heisenbergschen Unschärferelation einen ganz bestimmten Wert annehmen. Dann ist die andere Größe in der Gleichung aber vollkommen unbestimmt. Betrachtet man Energiezustände, die sich mit der Zeit nicht ändern, ergeben sich die so genannten stationären Energiezustände. Mit dieser Erkenntnis kann man die zeitunabhängige Schrödingergleichung formulieren:

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi_{dB}(x) + U(x)\cdot\Psi_{dB}(x) = E_{dB}\cdot\Psi_{dB}(x) \tag{11.54}$$

Der erste Term rührt die Wellenfunktion erst mal kräftig durch $(\partial^2/\partial x^2)$. Dabei spielt die Masse des Teilchens eine gewisse Rolle. Die andere Terme skalieren die Wellenfunktion mit den Potenzialverhältnissen und der kinetischen Energie des Teilchens. Die

Lösungen dieser Gleichungen geben somit eine Momentaufnahme der Energieverhältnisse wieder. Das System wird also praktisch in seinem aktuellen Zustand eingefroren und eine Messung würde für das Teilchen einen definierten Wert zum Beispiel für die Energieverhältnisse liefern. Die Angabe eines exakten Energiewertes steht dabei nicht im Widerspruch mit der Heisenbergschen Unschärferelation ($\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$), da der Wert von E für ($\Delta t \to \infty$) angegeben wird. Man nennt die sich ergebenden Ausdrücke die stationären Lösungen der Schrödingergleichung. Aus den zugrunde liegenden Wellenfunktionen (meistens kommen eine ganze Reihe an Lösungsfunktionen in Frage) können die zugehörigen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten berechnet werden. Die Energiewerte, die sich aus der Lösung der stationären Schrödingergleichung ergeben, nennt man Eigenwerte und die zugehörigen Wellenfunktionen Eigenfunktionen. Die diskreten Energieniveaus des Wasserstoffatoms, zeichnen sich durch charakteristische Aufenthaltsbereiche aus (siehe oben).

(i) Zur Erläuterung gehen wir zurück auf die klassische Behandlung des Problems. Eine stehende Wellen kann beschrieben werden durch:

$$\Psi(x,t) = A \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{11.55}$$

wobei die Wellenfunktion ein Produkt aus einer Funktion des Ortes ($\sin(k \cdot x)$) und der Zeit ($\cos(\omega \cdot t)$) ist. Man kann Ψ also schreiben als:

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{11.56}$$

wobei $\psi(x)$ der Ortsanteil ist. Man erkennt, dass $\psi(x)$ den Wert von $\Psi(x,t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt, da $\cos(\omega \cdot t)$ zu diesem Zeitpunkt EINS ist. Allgemeiner kann man sagen: Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ ist der Wert von $\psi(x)$ mal einem oszillierenden Faktor. Die Zeitabhängigkeit ist sinusförmig und das bleibt auch so in komplexeren Situationen. Allein der Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ kann variieren. Man schreibt deshalb

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot (a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)) \tag{11.57}$$

wobei die Koeffizienten a, b die Phasenabhängigkeit berücksichtigen.

(ii) Für eine stehende Welle in einem Quantensystem kann man analog vorgehen. Allerdings ist die Wellenfunktion komplex und für der Zeitabhängigkeit schreibt man deshalb:

$$\cos(\omega \cdot t) - i \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{11.58}$$

Die Wellenfunktion sieht dann also so aus:

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot (\cos(\omega \cdot t) - i \cdot \sin(\omega \cdot t)) \tag{11.59}$$

Zur Vereinfachung verwendet man in der Regel die Euler-Formel :

$$\exp(i \cdot \Theta) = \cos\theta + i \cdot \sin\Theta \tag{11.60}$$

$$|\exp(i \cdot \Theta)| = \sqrt{(\cos\Theta)^2 + (i \cdot \sin\Theta)^2} \tag{11.61}$$

Da $(\cos(\Theta) = \cos(-\Theta))$ und $(\sin(-\Theta) = -\sin(\Theta))$ ist, ergibt sich:

$$\exp(-i \cdot \Theta) = \cos\theta - i \cdot \sin\Theta \tag{11.62}$$

und die komplexe Wellenfunktion für Quantenobjekte sieht so aus:

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) \tag{11.63}$$

Schlussfolgerung: Da die Funktion ein definiertes ω hat, hat sie aufgrund $E = \hbar \cdot \omega$ eine definierte Energie. Andersherum: Eine stehende Welle in einem Quantensystem mit definierter Energie hat eine Wellenfunktion in der obigen Form. Noch ein bemerkenswerter Schluss ergibt sich. Dazu betrachten wir die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned} |\Psi(x,t)|^2 &= |\psi(x)|^2 \cdot |\exp(-i \cdot \omega \cdot t)|^2 \\ |\Psi(x,t)|^2 &= |\psi(x)|^2 \end{aligned} \tag{11.64}$$

da $|\exp(-i \cdot \omega \cdot t)|^2$=EINS. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für diese Systeme ist also zeitunabhängig. Das liegt daran, dass in der Funktion $\exp(-i \cdot \omega \cdot t)$ der Sinus und der Kosinus eine Phasenverschiebung von 90^o haben. Wenn die eine Funktion ansteigt verringert sich der Wert der Anderen. Die Summe der Quadrate ändert sich nicht. Deshalb spricht man in der Quantenphysik in solchen Situationen von stationären Zuständen. Man denke in diesem Zusammenhang auch an die Elektronenorbits im Wasserstoffatom (Kapitel *Bohrsches Atommodell*). Weil die Zustände statisch sind, kommt es nicht zu einer Änderung der Ladungsverteilung und deshalb strahlen sie auch nicht.

Extrablatt

Schrödinger vs deBroglie

Symptome

Betrachte das allgemeine Problem eines Teilchens in einem konstanten Potenzial, also V(x)=V

stationäre Schrödingergleichung

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi(x)$$

Lösung

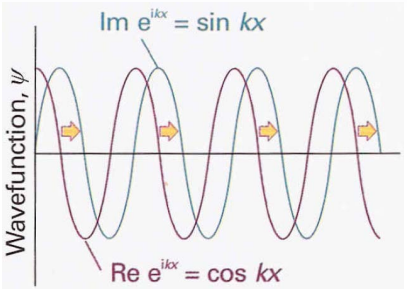
$$\psi(x) = e^{ikx}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)} \qquad E_{kin} = E - V$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_{kin}} \Leftrightarrow E_{kin} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \hbar \cdot k$$

$$p = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda}$$



$$e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$$

$$e^{ikx} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right)$$

Diagnose

Die Lösung der Schrödingergleichung
für die Bewegung eines kräftefreien Teilchens ergibt die deBroglie Beziehung

Die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für einen kräftefreien Körper (Newton 1) führt auf den Zusammenhang zwischen dem Impuls eines Teilchens und seiner deBroglie Wellenlänge, wenn man annimmt, dass die Lösung eine ebene Welle ist.

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{11.65}$$

Aufgaben

Hinweise zur Lösung von Aufgaben in der Quantenphysik mit Hilfe der Schrödingergleichung:

- Zeichnen Sie die Potenzialfunktion!
- Welche Informationen stehen zur Verfügung?
- Welche Randbedingungen muss die Wellenfunktion erfüllen?
- Nutzen Sie Randbedingungen bei der Lösung der Schrödingergleichung!
- Normalisieren Sie die Wellenfunktion!
- Zeichnen Sie $\psi(x)$ und $|\psi(x)|^2$!
- Bestimmen Sie die erlaubten Energiewerte!
- Berechnen Sie die Observablen!
- Formulieren Sie eine Antwort!

Aufgabe 1.1: Für eine Wellenfunkion eine Teilchens gilt $\Psi(x)$=0 für $x < 0$ und $x > \ell = 10^{-9}$ nm. Im interessanten Bereich gilt:

$$\Psi(x) = c \cdot (1 - x/\ell) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1\,\text{nm}$$

(i) Welchen Wert hat die Konstante c?

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in einem Raumgebiet der Breite δx=0.05 nm an der Position x_1=0.05 nm, x_2=0.5 nm und x_3=0.95 zu finden!

(i) Wir nutzen die Normierungsbedingung, um den Wert der Konstanten c zu ermitteln:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^\ell |\psi(x)|^2\,dx \\
1 &= c^2 \cdot \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 dx \\
1 &= c^2 \cdot \int_0^\ell \left(1 - \frac{2x}{\ell} + \frac{x^2}{\ell^2}\right) dx \\
1 &= c^2 \left[x - \frac{x^2}{\ell} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{\ell^2}\right]_0^\ell \\
1 &= c^2 \left(\ell - \frac{\ell^2}{\ell} + \frac{1}{3}\frac{\ell^3}{\ell^2}\right) - 0 \\
1 &= c^2 \left(\ell - \ell + \frac{1}{3}\ell\right) \\
1 &= \frac{c^2 \cdot \ell}{3} \\
c &= \sqrt{\frac{3}{\ell}} \\
c &= \sqrt{\frac{3}{1.0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}} \\
c &= 1.732\,\mathrm{nm}^{-1/2}
\end{aligned}$$

Man bemerkt schon an der Einheit, dass die Wellenfunktion als Maß keine SI-Einheit hat. Das weist nochmal darauf hin, dass Ψ keine direkte physikalische Bedeutung hat. Die resultierende Wellenfunktion Ψ und die Wahrscheinlichkeitsdichte P_{dB} lauten damit:

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= (1.732 \cdot \mathrm{nm}^{-1/2}) \cdot \left(1 - \frac{x}{1.0\,\mathrm{nm}}\right) \\
P_{dB}(x) &= |\Psi|^2 \\
P_{dB}(x) &= (3.0\,\mathrm{nm}^{-1}) \cdot \left(1 - \frac{x}{1.0\,\mathrm{nm}}\right)^2
\end{aligned}$$

(ii) Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Raumgebiet δx an den angebenden Positionen aufzufinden, ist

$$\begin{aligned}
P_{dB}(x)\,\delta x &= c^2 \cdot (1 - x_1/\ell)^2 \cdot \delta x \\
P_{dB}(x)\,\delta x &= 0.027 \\
P_{dB}(x)\,\delta x &= c^2 \cdot (1 - x_2/\ell)^2 \cdot \delta x \\
P_{dB}(x)\,\delta x &= 0.0075 \\
P_{dB}(x)\,\delta x &= c^2 \cdot (1 - x_3/\ell)^2 \cdot \delta x \\
P_{dB}(x)\,\delta x &= 0.008
\end{aligned}$$

Wie man vielleicht erwartet hat, ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen nahe dem Ursprung zu finden am höchsten. Nehmen Sie sich die Zeit und skizzieren Sie $\Psi(x)$ und $P(x)$!

Aufgabe 1.2: Gegeben sei ein Teilchen, dass in einen 1-dimensionalen Kasten der Breite ℓ eingesperrt ist. Eine Analyse führt auf folgende Wellenfunktion:

$$\Psi_n = \Psi_n^* = \frac{2}{\ell} \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

wobei n eine ganze Zahl ist. Berechnen Sie den Erwartungswert $< p >$ für den Impuls!

Vorbetrachtung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Psi &= \frac{2}{\ell}\frac{n \cdot \pi}{\ell} \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{\ell} \\ \sqrt{\frac{2\,m \cdot E}{\hbar^2}} &= n \cdot \pi \end{aligned}$$

Nun zur Rechnung:

$$\begin{aligned} < p > &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \cdot p \cdot \Psi \, dx \\ < p > &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \cdot \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \cdot \Psi \, dx \\ < p > &= \frac{\hbar}{i}\frac{2}{\ell}\frac{n \cdot \pi}{\ell} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{\ell} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{\ell} \, dx \\ < p > &= \frac{\hbar}{i\ell} \left[\sin^2 \frac{n \cdot \pi \cdot x}{\ell} \right]_0^{\ell} \\ < p > &= 0 \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass allgemein gilt

$$\int (\sin\, a \cdot x) \cdot (\cos\, a \cdot x) = \frac{1}{2a} \sin^2\, a \cdot x$$

und

$$\sin^2\, 0 = \sin^2\, n \cdot \pi = 0 \quad \text{für} \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Der Erwartungswert des Impulses ist also überraschenderweise NULL. Man bedenke, dass für die kinetische Energie gilt

$$\begin{aligned} E &= p^2/(2\,m) \\ p_n &= \pm\sqrt{2\,m \cdot E_n} \\ p_n &= \pm n \cdot \pi \cdot \hbar \end{aligned}$$

Abb. 11.15:

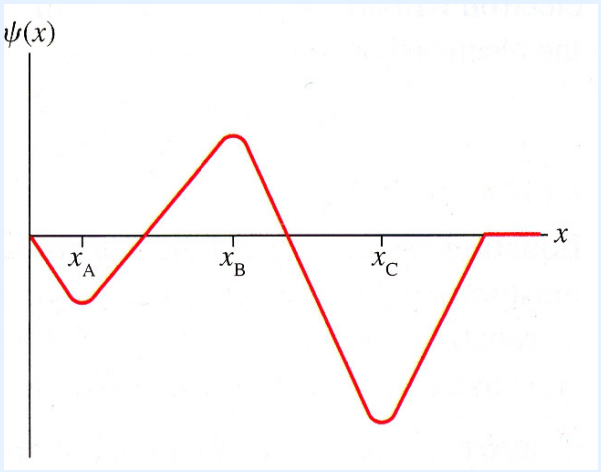
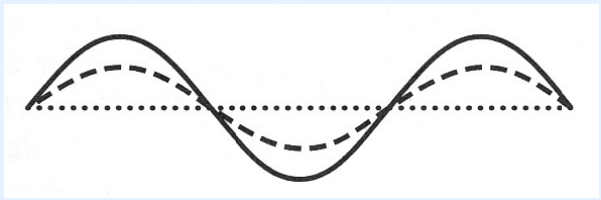


Abb. 11.16:



Die Erklärung liegt in der Bewegung des Teilchen. Es bewegt sich im Kasten hin und her, was sich in dem $+/-$ Zeichen ausdrückt und der Mittelwert dieser Bewegung ergibt für den Impuls den Wert NULL, im Einklang mit dem Ergebnis der Rechnung.

Aufgabe 1.2: In Abb. 11.15 ist die Wellenfunktion eines Neutrons dargestellt. Wo hält sich das Teilchen mit höchster Wahrscheinlichkeit auf?[17]

Aufgabe 1.3: Abb. 11.16 zeigt drei Schnappschüsse einer stehenden Welle auf einer Geige (durchgezogene, gestrichelte und gepunktete Linien). Die durchgezogene Linie beispielsweise entspricht dem Zeitpunkt an der man die maximale Auslenkung beobachtet. Wurden die Aufnahmen im gleichen Zeitabstand aufgezeichnet?[18]

[17] Antwort: x_C
[18] Antwort: Nein

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Ein Teilchen bewegt sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit und konstantem Impuls. Welche Variablen, die das Teilchen beschreiben, bleiben konstant?

2. Ein Teilchen wird durch ein Zentralpotenzial angezogen. Welche Variablen, die das Teilchen beschreiben, bleiben konstant?

3. Was ist eigentlich eine Observable?

4. Gibt es zu jeder Observablen auch einen zugehörigen Erhaltungssatz?

5. Was ist die physikalische Bedeutung der Wellenfunktion eines Teilchens?

6. Welche Dimension hat $\psi(x)$, $\psi(x,t)$?

7. Welche physikalische Größe wird durch die Wellenfunktion eines Elektrons dargestellt?

8. Keine der folgenden Wellengleichungen stellt eine Lösung der Schrödingergleichung dar. Warum?
   (a) $\psi(x) = A \cdot \cos(k \cdot x);\ x < 0$
   (b) $\psi(x) = A \cdot \sin(k \cdot x);\ x > 0$
   (c) $\psi(x) = A \cdot x^{-1} \cdot \exp(-k \cdot x);\ -L \leq x \leq +L$
   (d) $\psi(x) = A \cdot \sin^{-1}(k \cdot x)$
   (e) $\psi(x) = A \cdot \tan(k \cdot x);\ x > 0$

9. In Physik und Chemie bezieht man sich in der Regel auf das Quadrat der Wellenfunktion und nicht auf die Wellenfunktion selbst. Warum?

10. Was versteht man unter dem Begriff Erwartungswert?

11. Welche Relevanz haben Eigenwert und Eigenfunktion?

12. Was ist der Unterschied zwischen $\Psi(x,y,z)$ und $\Psi(x,y,z,t)$?

13. Angenommen, eine Wellenfunktion ist irgendwo unstetig. Stellt diese Funktion ein physikalischen Teilchens dar? Kann diese Funktion einen Quantenzustand eines physikalischen Teilchens darstellen?

14. Was ist die physikalische Bedeutung von $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx$=1?

15. Warum ist es wichtig, dass eine Wellenfunktion normalisiert wird? Ist eine nicht normalisierte Wellenfunktion eine Lösung der Schrödingergleichung?

16. Wenn sich ein Quantenteilchen in einem stationären Zustand befindet, bedeutet das, dass es sich nicht bewegt?

17. Ein Philosoph sagte einmal, dass *es für die Existenz der Wissenschaft notwendig ist, dass gleiche Bedingungen stets gleiche Ergebnisse hervorbringen.* Stimmen Sie zu?

11.2 Potenzialtopf



Gar Manches rechnet Erwin schon
Mit seiner Wellenfunktion
Nur wissen möcht' man gerne wohl
Was man sich dabei vorstell'n soll [**?**].

Erich Hückl, 1926

Mit diesem Handwerkszeug ist es nun möglich, komplexe physikalische Szenarien zu untersuchen. Im Folgenden beschränken wir uns auf die zeitunabhängige Schrödingergleichung und betrachten aussagekräftige Modellsysteme, die durch speziell geformte eindimensionale Potenziale $U(x)$ gekennzeichnet sind. Dazu betrachten wir Teilchen in einem

- harmonischen Potenzial ($U(x) \propto x^2$)
- Kastenpotenzial ($U(x) = 0$ für $0 \leq x \leq a$) und UNENDLICH anderswo

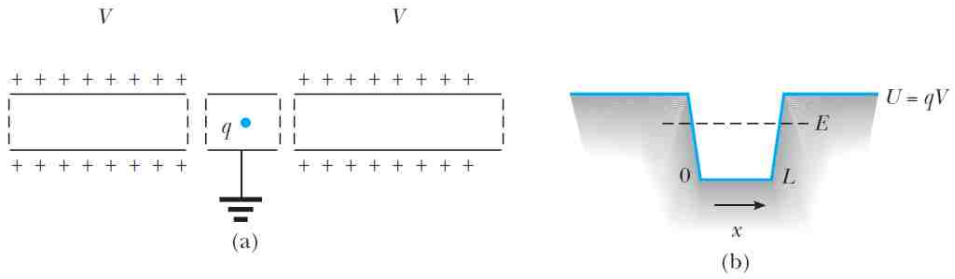


Abb. 11.17: (a) Ausgerichtete Metallzylinder dienen dazu, ein geladenes Teilchen in einen definierten Bereich einzusperren. Der innere Metallzylinder ist geerdet, während die äußeren Zylinder auf einem hohen elektrischen Potential gehalten werden. Eine Ladung bewegt sich frei im mittleren Zylinder, stößt aber auf abstoßende elektrische Kräfte in den Lücken zwischen den Zylindern. (b) Zugehöriges elektrisches Potenzial [**?**].

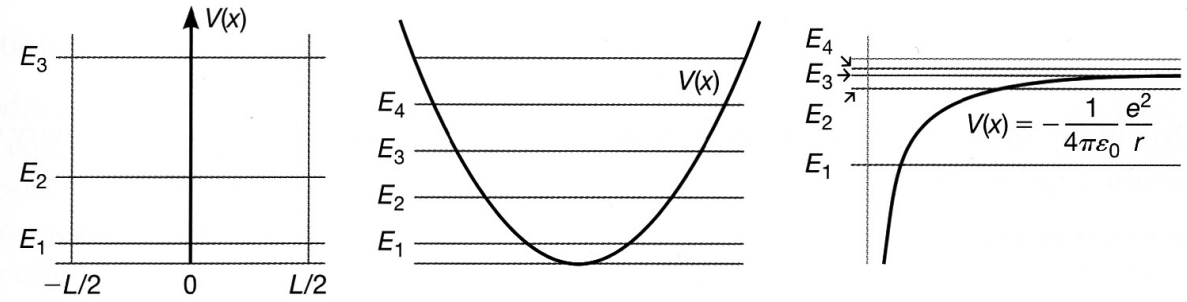


Abb. 11.18: Zugehörige quantisierte Energiezustände von Teilchen in unterschiedlichen Modellpotenzialen (Links: Kastenpotenzial, Mitte: Potenzial des Harmonischen Oszillators, Rechts: Coulombpotenzial) [**?**].

Zur Einstimmung betrachten wir eine Ladung, die sich entlang der Achse von ausgerichteten Metallröhren bewegt. Diese werden unterschiedlichen Potentialen gehalten, siehe Abb. 11.17. Das zentrale Rohr ist geerdet, so dass eine Testladung in dieser Röhre ein elektrisches Potenzial von NULL *sieht*. Die Ladung erfährt unter diesen Potenzialbedingungen keine elektrische Kraft. Die beiden äußeren Röhren haben dagegen ein hohes elektrisches Potential. Das sorgt für abstoßende Felder, wenn die Ladung aus dem mittleren Rohr austritt. Damit lässt sich ein eindimensionales Kastenpotenzial mit beliebig hohen Potenzialwänden experimentell realisieren.
Die Idee ist, die Energieverhältnisse von Teilchen in typischen Situationen aus der klassischen Physik, wie zum Beispiel die Bewegung einer Masse an einer Feder, in der mikroskopischen Welt zu untersuchen. Dabei rechnet man nicht mit den Kräften, sondern mit den zugehörigen Potenzialen, die die Kräfte hervorrufen. Kräfte ergeben sich aus der lokalen Änderung eines Potenzials.[19] Mathematisch formuliert man das dreidimensional

[19] *Lexikon:* Die **Potenzielle Energie** eines Teilchens am Ort P ist definiert als NEGATIVER Wert der Arbeit an dem Körper durch das Kraftfeld, wenn man das Teilchen von x_i nach x_f bewegt. Im

so;

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \tag{11.67}$$

Nehmen wir als Beispiel die Bewegung eines Teilchens mit Ladung q im Feld einer Ladung Q im Abstand r. Das Coulomb-Gesetz liefert die Wechselwirkungskraft zwischen den Ladungen:

$$F_e(x) = \frac{1}{k_C} \frac{q \cdot Q}{r^2} \tag{11.68}$$

Als Referenz wählen als Wert für F bei $r = \infty$ den Wert NULL. Das Potenzial ist dann:

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{q \cdot Q}{k_C} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{(r')^2}\, dr' \\ V(r) &= -\frac{q \cdot Q}{k_C} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned} \tag{11.69}$$

Für den Spezialfall des Wasserstoffatoms ergibt sich:

$$V(r) = -\frac{e^2}{k_C} \cdot \frac{1}{r} \tag{11.70}$$

Es wird sich herausstellen dass es nur diskrete Energiewerte gibt, wenn man in der mikroskopischen Welt Teilchen einsperrt. Die Lage und der Abstand untereinander hängt vom betrachteten Potenzial ab. Abb. 11.18 zeigt, welche Energieleitern sich für die drei am häufigsten betrachteten Potenziale ergeben.

Wir werden es im Weiteren mit stehenden Wellen zu tun haben. Es ist deshalb sinnvoll, nochmal kurz einige Aspekte der klassischen Behandlung zu rekapitulieren. Betrachten wir zwei Wellen, die sich gegenläufig bewegen.

$$\Psi_r(x,t) = B \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \tag{11.71}$$

$$\Psi_l(x,t) = B \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t) \tag{11.72}$$

Da das Superpositionsprinzip für Wellen gilt, ist die Summe der beiden Wellen ebenfalls eine mögliche Wellenform. Wir nutzen aus, dass

$$\sin a + \cos b = 2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \tag{11.73}$$

und erhalten mit $2\,B = A$:

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= \Psi_r(x,t) + \Psi_l(x,t) \\ \Psi(x,t) &= B \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) + B \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t) \\ \Psi(x,t) &= 2\,B \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \Psi(x,t) &= A \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{aligned} \tag{11.74}$$

eindimensionalen Fall kann man schreiben:

$$V = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx \tag{11.66}$$

Heraus kommt eine Welle, die sich weder nach rechts noch nach links bewegt, sondern scheinbar auf der Stelle steht. An bestimmten Stellen, nämlich wenn sin $k \cdot x$=NULL, beobachtet man Knoten, das heißt, die Amplitude der Wellen ist ebenfalls NULL. An anderen Stellen oszilliert die Welle in Abhängigkeit von $\cos \omega \cdot t$ mit der Amplitude $A \cdot \cos \omega \cdot t$. Das ist eine stehende Welle, wie man sie auch von den Saiten einer Geige kennt. In dem Fall kommt ein Ton heraus.

Harmonisches Potenzial

Kurze Erinnerung an den klassischen harmonischen Oszillator und das Hooksche Gesetz:

Nach dem **Hookschen Gesetz** ist die rücktreibende Kraft F_H proportional der Auslenkung x.

Die Bedeutung des Hookschen Oszillators in der Klassischen Physik und in der Quantenphysik liegt nicht in der Einhaltung der tatsächlichen Rückstellkräfte nach dem Hookschen Gesetz. Solche Bedingungen sind selten erfüllt. Vielmehr resultiert die Relevanz aus der Erkenntnis, das die Rückstellkräfte für geringe Auslenkungen durch das Hooksche Gesetz beschrieben werden können. Entwickelt man die Kräfte in einer Potenzreihe ergibt sich

$$F(x) = F_{x=0} + \left(\frac{d}{dx}F\right)_{x=0} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2}F\right)_{x=0} + \dots \tag{11.75}$$

Am Gleichgewichtspunkt x=0 ist $F_{x=0}$=0 und alle Glieder mit x^2, x^3,... sind klein gegen x. Damit reduziert sich die Reihe auf

$$F(x) = \left(\frac{d}{dx}F\right)_{x=0} \tag{11.76}$$

Das ist das Hooksche Gesetz, wenn es sich um Rückstellkräfte handelt. Die allgemeingültige Feststellung ist also, dass alle Schwingungen Hookschen Charakter haben, wenn die Amplituden gering sind. Die Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -k_H \cdot x(x) \tag{11.77}$$

ergibt eine Schwingungsfrequenz[20]

$$\omega_{SHM} = 2\,\pi \cdot f_{SHM} \tag{11.78}$$

die von der Federkonstante k_H und der angehängten Masse m abhängt:

$$\omega_{SHM} = \sqrt{\frac{k_H}{m}} \tag{11.79}$$

[20] SHM: simple harmonic motion

Anmerkungen: (i) Wichtig ist, dass man den dynamisch ablaufenden Vorgang der Schwingung zu jedem Zeitpunkt durch den Energieerhaltungssatz analysieren kann. (ii) Ist das System in Ruhe, gibt es genau einen zeitlich konstanten Wert für die potenzielle Energie E_{pot}. Die kinetische Energie E_{kin} ist in diesem Fall NULL. Wir werden am Beispiel des harmonischen Oszillators feststellen, dass das in der Mikrophysik anders ist!

Die Relevanz des einfachen Harmonischen Oszillators liegt in der Möglichkeit, die Analyse des Schwingungsverhaltens auf nahezu allen dynamischen Systeme in der Physik anwenden zu können - jedenfalls in erster Näherung. Diese zunächst zu grob erscheinende Näherung erweist sich in fast allen Fällen als ausreichend, um einen tiefen Einblick in die Dynamik der untersuchten Systeme zu erhalten. Dazu gehören Schwingungen zweiatomiger Moleküle oder Gitterschwingungen in einem Festkörper. Ein gutes Beispiel für ein Teilchens in einem harmonischen Potenzial ist die Bewegung des Protons im Wassermolekül.
Zum Lösen der Schrödingergleichung benötigt man ein Potenzial U_{SHM}, welches das Hooksche Verhalten beschreibt. Dazu schauen wir uns die Rückstellkraft in der Nähe der Ruhepunktslage an und entwickeln die Kraft in einer Potenzreihe:

$$\begin{aligned} F &= F_{x=0} + x \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} + \dots \\ F &= x \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} \end{aligned} \tag{11.80}$$

Für geringe Auslenkungen ergibt sich, dass

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} < NULL \tag{11.81}$$

da es sonst keine rücktreibende Kraft gibt. Daraus folgt das Hooksche Gesetz:

$$F(x) = -k_H \cdot x \tag{11.82}$$

In der Quantenphysik verwendet man in der Regel Potenziale an Stelle von Kräften. Das stellt kein Problem dar, denn Kräfte ergeben sich aus der Ableitung oder allgemeiner aus dem Gradienten eines Potenzials, hier U_{SHM}.

$$F(x) = -\frac{d}{dx} U_{SHM} \tag{11.83}$$

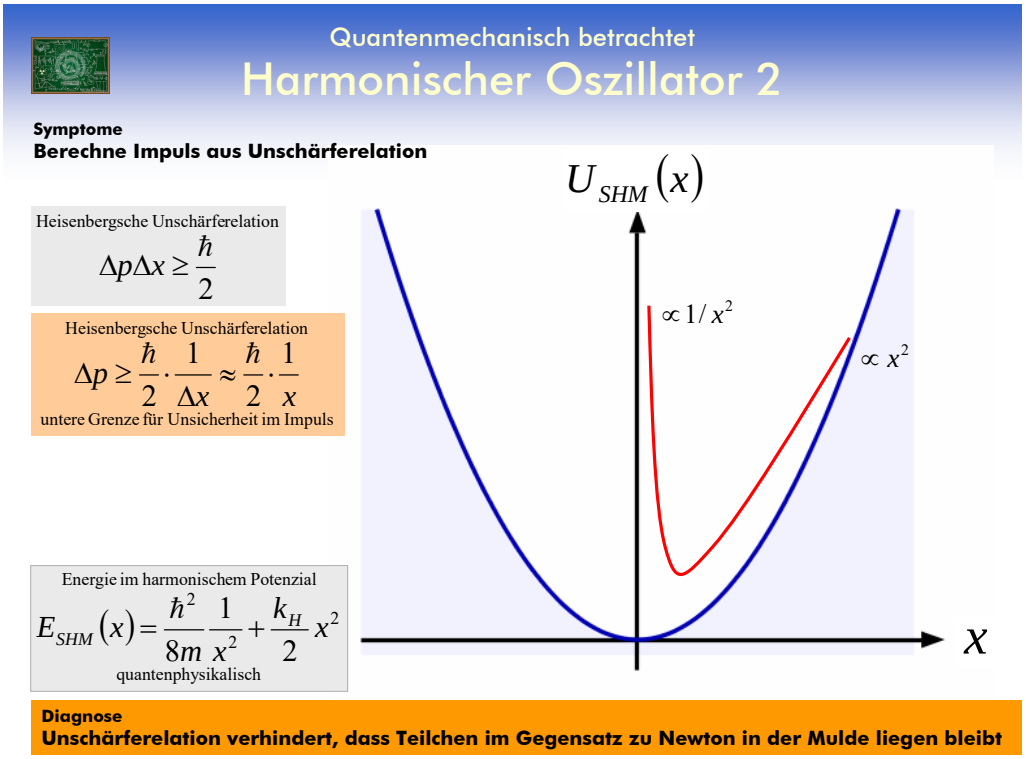
Wie sieht das zugehörige Potenzial im Falle des Hookschen Gesetzes aus?

$$U_{SHM}(x) = \frac{1}{2} k_H \cdot x^2 \tag{11.84}$$

Das Potenzial hat einen parabolischen Verlauf. Die Gesamtenergie im harmonischen Oszillator ist dann

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{kin} + U_{SHM} \\ E_{ges} &= \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2} k_H \cdot x^2 \end{aligned} \tag{11.85}$$

Das Potenzial des harmonischen Oszillators könnte man jetzt in die Schrödingergleichung einsetzen und nach einer Lösungsfunktion suchen. Schauen Sie in den einschlägigen Lehrbüchern nach. Dort werden Sie fündig. Im Folgenden beschränken wir uns auf eine grobe Analyse auf der Grundlage der Energieerhaltung, indem wir unsere Erkenntnisse aus der Kapitel *Unschärferelation* nutzen.



Aus der Heisenbergschen Unschärferelation lässt sich ein ungefährer Wert für den Impuls eines Teilchens ermitteln, dass sich in einem harmonischen Potenzial aufhält. Als Ortsunschärfe verwenden wir die Breite Topfes Δx für bestimmte Werte von U_{SHM}:

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta x} \approx \frac{\hbar}{2} \frac{1}{x} \tag{11.86}$$

Man setzt nun Δp als Maß für den Impuls des Teilchens in die Gleichung ein. Damit ergeben sich Energiewerte, die das Teilchen einnehmen kann.

$$E_{SHM} = \frac{\hbar^2}{8\,m} \frac{1}{x^2} + \frac{k_h}{2} x^2 \tag{11.87}$$

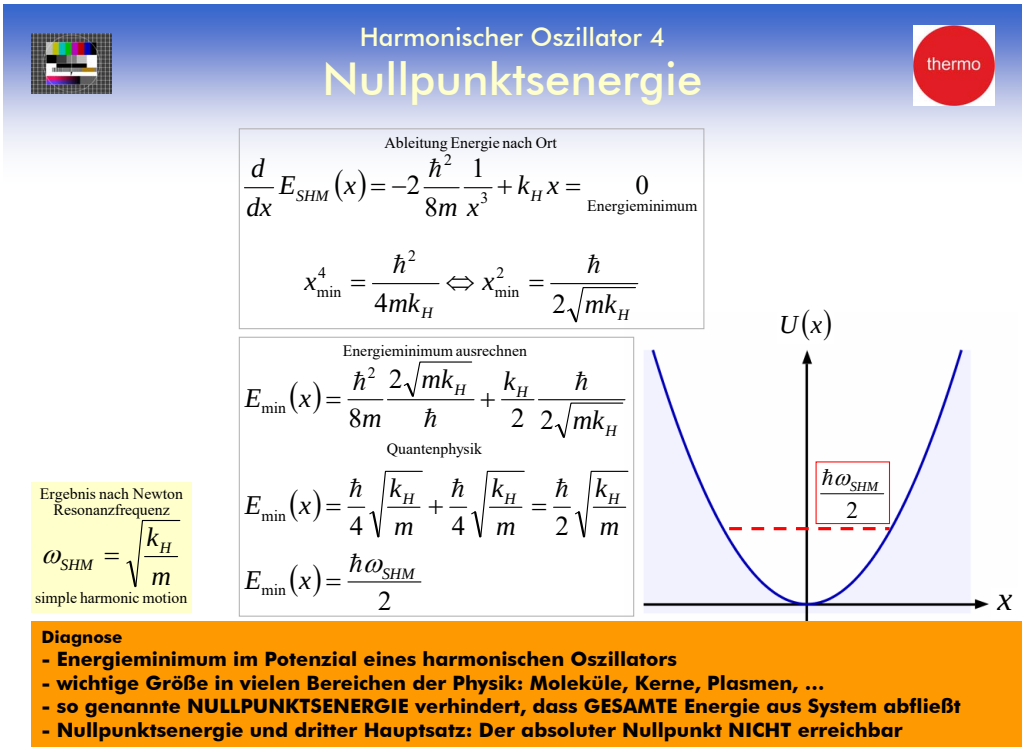
Die grobe Abschätzung liefert ein überraschendes Ergebnis, wie die rote Kurve zeigt:

- Im Bereich großer Auslenkungen nähert sich der abgeschätzte Energiewert des Teilchens E_{SHM} dem Wert von U_{SHM}, der proportional ist zu x^2.
- Bei geringen Auslenkungen steigt der Energiewert stark an ($U_{SHM} \approx x^{-2}$). Man muss also viel Energie einsetzten, um das Teilchen zu bewegen, in diesen Bereich vorzudringen.
- Das Minimum der möglichen Energiewerte liegt nicht bei $x = 0$ sondern bei einem Wert $x \neq 0$.

Für das Teilchen besteht also keine Möglichkeit, den tiefsten Punkt des Potenzials zu erreichen

Hinweis: In der klassischen Physik wäre die minimale Energie die Ruhelage der Feder am Punkt $x = 0$. Die Quantenphysik vermeidet diesen Zustand.

Können Sie sich vorstellen, warum das so ist?



Nullpunktsenergie

Über eine Nullstellenbetrachtung erhält man eine Aussage über den minimalen Energiewert, den das System erreichen kann. Dieser minimale Wert ist ungleich NULL. Die Konsequenzen dieser Erkenntnis sind weitreichend. Hooksche Bedingungen findet man in vielen physikalischen Zusammenhängen. Das bedeutet, dass kein physikalisches System bewegungslos ist. Stets gibt es eine Bewegung im System, die man nicht abstellen kann. Man nennt diese kinetische Energie die Nullpunktsenergie.

$$E_{\min} = \frac{1}{2}\hbar \cdot \omega_{SHM} \tag{11.88}$$

Hinweis: Der Dritte Hauptsatz der Thermodynamik, das Theorem von Nernst,[21] drückt dieses Verhalten physikalischer Systeme folgendermaßen aus:

Es ist nicht möglich, einen Körper bis zum absoluten Nullpunkt abzukühlen.

[21] The Nobel Prize in Chemistry 1920 was awarded to Walther Hermann Nernst *in recognition of his work in thermochemistry.*

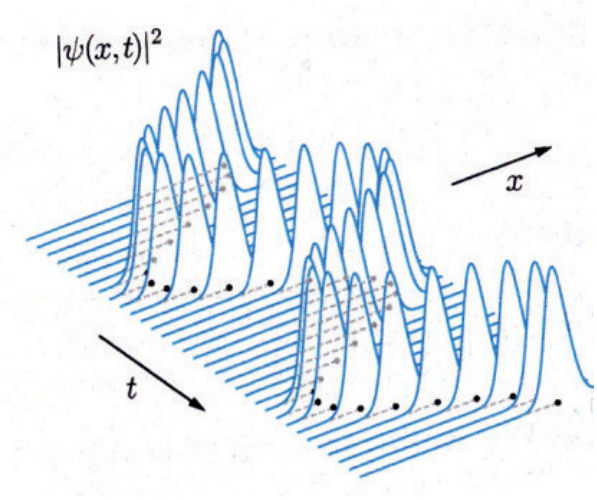


Abb. 11.19: Bewegung eines Wellenpakets in einem Oszillatorpotenzial[**?**].

Die allgemeine Lösung liefert Energien, die das Teilchen annehmen kann.

$$E_n^{SHM} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \hbar \cdot \omega_{SHM}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11.89}$$

Folgendes ist bemerkenswert:

- Im quantenmechanischen Oszillator kann ein Teilchen keine beliebigen Energiewerte annehmen.
- Die ermittelten Energiewerte E_n^{SHM} sind diskret (quantisierte Energiezustände).
- Im Spezialfall des harmonischen Oszillators ergibt sich ein konstanter Energieabstand von $\hbar \cdot \omega_{SHM}$.
- Der Zustand geringster Energie (n=0), die Nullpunktsenergie, ist $\hbar \cdot \omega_{SHM}/2$.

Diese Analyse gilt für alle physikalischen Systeme, deren Verhalten sich durch das Hooksche Gesetz beschreiben lassen. Dazu zählen Moleküle, Festkörpern, Plasmen, Kerne, etc. Abb. 11.19 zeigt, wie sich ein Wellenpaket in einem Oszillator-Potenzial bewegt. In Tab. 11.1 sind die ersten drei Energiezustände und ihre Wellenfunktionen aufgeführt.

Eine weitere wichtige Erkenntnis deutet sich an: Will man von einem Energiezustand in einen anderen wechseln, bedarf es der Zu- oder Abgabe einer genau definierten Energiemenge. Abb. 11.20 zeigt, wie die Wellenfunktionen in den einzelnen Energiezuständen des harmonischen Oszillators aussehen. Weicht die eingesetzte Energie von diesem Wert ab, erfolgt kein Übergang in den anderen Energiezustand! Im Zusammenhang mit dem Absorptionsverhalten von Cyaninen (siehe unten) werden wir diese Aussage nutzen.

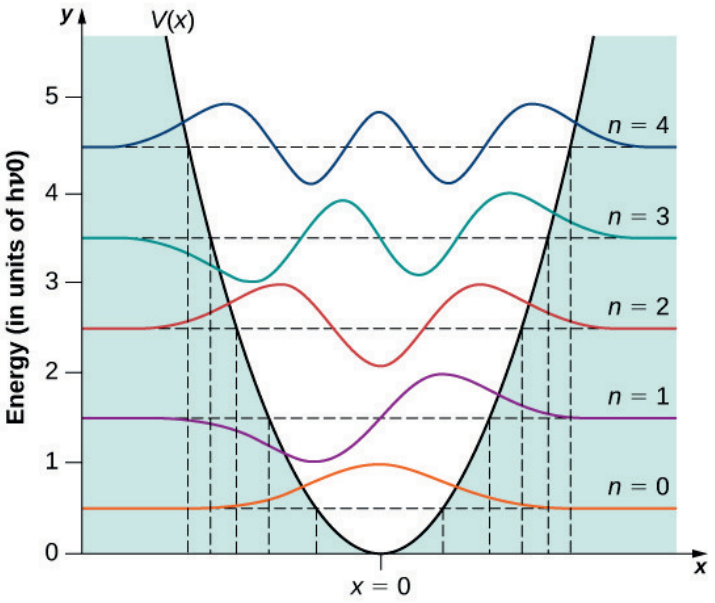


Abb. 11.20: Die ersten fünf Wellenfunktionen eines quantenphysikalischen harmonischen Oszillators. Die klassischen Grenzen der Bewegung sind mit vertikalen Linien markiert. Die maximalen Auslenkungen des klassischen Oszillators $x = \pm A$ hat die gleiche Energie, wie der Quantenoszillator in den markierten Zuständen.

n	Energie	Wellenfunktion
0	$\frac{1}{2} \cdot \hbar \cdot \omega_{SHM}$	$A_0 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\,b^2}\right)$
1	$\frac{3}{2} \cdot \hbar \cdot \omega_{SHM}$	$\frac{A_1 \cdot x}{b} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\,b^2}\right)$
2	$\frac{5}{2} \cdot \hbar \cdot \omega_{SHM}$	$A_2 \cdot \left(1 - \frac{2\,x}{b^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\,b^2}\right)$

Tab. 11.1: Energien und Wellenfunktionen der ersten drei Energiezustände im Harmonischen Oszillator. Die Länge b ist definiert als $b = \sqrt{\hbar/2\,m \cdot \omega_{SHM}}$ [**?**]

example Extrablatt

makroskopisch

Quantenpendel 2

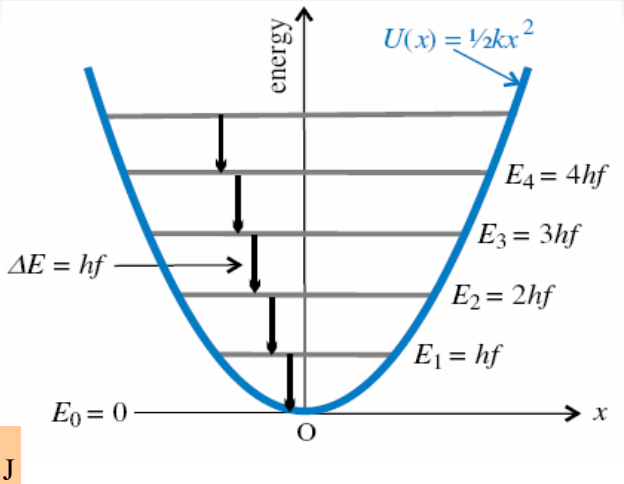
Eigenfrequenz Federpendel

$$f_{SHM} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_H}{m}}$$

$$f_{SHM} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\frac{1}{1\,\mathrm{kg}}}$$

$$f_{SHM} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{100\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s^2}}\frac{1}{\mathrm{m}}\frac{1}{\mathrm{kg}}}$$

$$f_{SHM} = 1.6\,\mathrm{Hz}$$



Abstand der Energieniveaus

$$\Delta E_{SHM} = h\cdot f_{SHM} = 1.32\cdot 10^{-33}\,\mathrm{J}$$

Diagnose
- **Abstand der Energieniveaus zu gering, um in Experiment aufgelöst zu werden**
- **Plancksche Vermutung hat auf Verhalten eines makroskopischen Pendel keinen Einfluss**
- **Photonenhypothese beeinflusst aber makroskopische Phänomene (Schwarzer Strahler)**

Anwendungen^{4LP}

Ein Blick auf die makroskopische Welt

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist ein klassisches System und zwar die Bewegung einer Masse (m=1 kg), die an einer Feder hängt (Federkonstante k_H=100 N/m). Man lengt die Masse um x=10 cm aus und lässt sie schwingen.[22] Hat das quantenphysikalische Ergebnis Auswirkungen auf die Analyse im Rahmen der Newtonschen Mechanik? Dazu betrachten wir ein makroskopisches System und berechnen beispielhaft die sich ergebenden Energiewerte. Die Potenzielle Energie berechnet sich zu[23]

$$E_{SHM} = \frac{1}{2}k_H \cdot x^2 = 0.5\,\mathrm{J} \tag{11.90}$$

Die Analyse im Rahmen der Quantenphysik liefert, dass die für dieses makroskopische System berechneten diskreten Energiewerte viel zu eng zusammenliegen, um sie experimentell auflösen zu können. Aus diesem Grund spielen in der Regel die auf mikroskopischer Ebene auftretenden Quantenphänomenen in der makroskopischen Welt keine Rolle.

[22] SHM: *simple harmonic motion*

[23] Das quantenphysikalische Gegenbeispiel ist das Schwingungsverhalten des Wasserstoffmoleküls (k_H=510.5 N/m, reduzierte Masse μ=8.37 · 10^{-28} kg). Eingesetzt in Gl. 11.79 ergibt sich eine Kreisfrequenz von 7.81 · 10^{14} rad/s, was einen Energieabstand von $E_{SHM} = \hbar \cdot \omega$=0.513 eV ergibt.

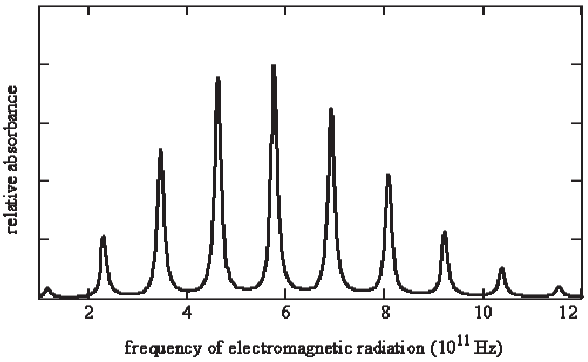


Abb. 11.21: Rotationsspektrum des Dimermoleküls ${}^{12}_{6}\mathrm{C}^{16}_{8}\mathrm{O}$.

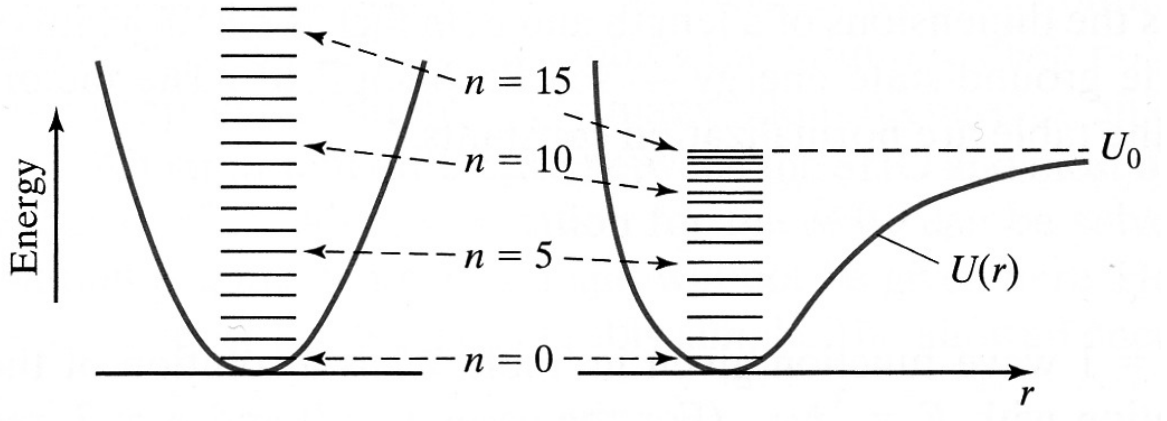


Abb. 11.22: Verschiebung der Energieniveaus beim Übergang vom Harmonischen Oszillator zu einem realistischeren Morse-Potenzial für zweiatomige Moleküle. Für höhere Anregungsenergie reduziert sich der Abstand der Energieniveaus. Ursache ist die Asymmetrie des Potenzials. Man erkennt, dass oberhalb einer bestimmte Anregungsenergie U_0 das Molekül in zwei separierte Atome zerfällt [**?**].

Die Newtonsche Mechanik ergibt sich aus der quantenphysikalischen Beschreibung im Grenzwert großer Massen. Das ändert sich, wenn mikroskopische Phänomene makroskopisches Verhalten beeinflussen. Ein Beispiel, die Wärmekapazität von Materialien bei tiefen Temperaturen, werden wir in der Vorlesung *Schwarzer Strahler* kennenlernen.

Ein Beispiel aus der Molekülphysik^{4LP}

Zweiatomige Moleküle wie CO oder HCl sind komplexe dreidimensionale Systeme da sich die Energie des Moleküls aus drei Beiträgen zusammensetzt. Ein elektronischer, ein Schwingungs- und ein Rotationsbeitrag. Es stellt sich aber heraus, dass diese Terme separieren kann, weil die typischen Zeitkonstanten grob unterschiedlich sind (Born-Oppenheimer Näherung). Die Schwingungsbewegung ist eindimensional und kann für geringe Auslenkungen durch das Modell des harmonischen Oszillators beschrieben werden.

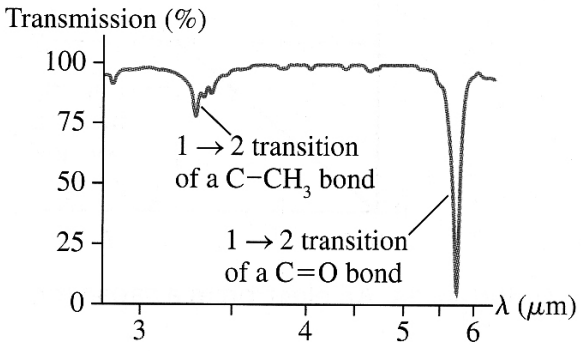


Abb. 11.23: Infrarot-Absorptionsspektrum des Aceton-Moleküls [**?**].

Für größere Amplituden wird die Näherung schlechter. Hinzu kommt, dass bei größeren Amplituden das Molekül auseinanderfällt. Eine adäquate Beschreibung erfolgt durch das Morse-Potenzial. Abb. 11.22 zeigt, wie sich die beiden Potenziale unterscheiden und wie sich die Energieniveaus unterscheiden. Bei Übergängen zwischen den Niveaus wird Licht ausgesendet und dieses Strahlung liefert wichtige Informationen, die es ermöglichen, die Bindungsverhältnisse in dem Moleküle zu charakterisieren. Die Abb. 11.23 zeigt als Beispiel das Absorptionsspektrum von Aceton im Wellenlängenbereich 3-6 μm. Hier findet man Signaturen von Vibrationsübergängen. Das Molekül ist nahezu transparent für Licht, aber man erkennt zwei markante Einbrüche im Spektrum, die man verschiedenen Schwingungen zuordnen kann. Auch für die Astrophysik sind solche Daten interessant. Das Wasserstoffmolekül H_2 emittiert Licht der Frequenz $1.2 \cdot 10^{14}$ Hz, wenn es von einem Vibrationsniveau zu einem tieferen wechselt. Astronomen nutzen dies, um beispielsweise H_2 oder CO-Moleküle (Abb. 11.24)[24] in der Milchstraße nachzuweisen.

Ein Molekül kann nicht nur in Schwingung versetzt werden, sondern auch rotieren. Löst man die Schrödingergleichung für einen so genannten starren Rotator (2 Teilchen mit Masse M und festem Abstand r), ergeben sich ebenfalls quantisierte Energiezustände:

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2\,M \cdot r^2} \cdot m^2 \tag{11.91}$$

wobei m eine ganze Zahl ist. Diese Gleichung gilt für den Fall, dass das System nur um eine Achse rotieren kann. Bei zwei Rotationsachsen ergibt sich

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\,M \cdot r^2} \cdot J \cdot (J+1) \tag{11.92}$$

J ist ebenfalls einen ganze Zahl. Experimente an zweiatomigen Molekülen bestätigen diese Analyse, wie das Infrarotspektrum von $^{12}C^{16}O$, aufgenommen bei einer Temperatur von 40 K, demonstriert, siehe Abb. 11.21. Das Molekül absorbiert nur bei bestimmten

[24] *Lexikon:* Der **Satellit PLANCK** wurde im Jahr 2009 gestartet, um den Himmel bei neun Frequenzen zu vermessen: drei Frequenzbänder im Bereich von 30-70 GHz und sechs Frequenzbänder im Bereich von 100-857 GHz. Der Satellit diente zur Erkennung von Fluktuationen in der Temperatur der Hintergrundstrahlung mit einer Auflösung von 10^{-6} K.

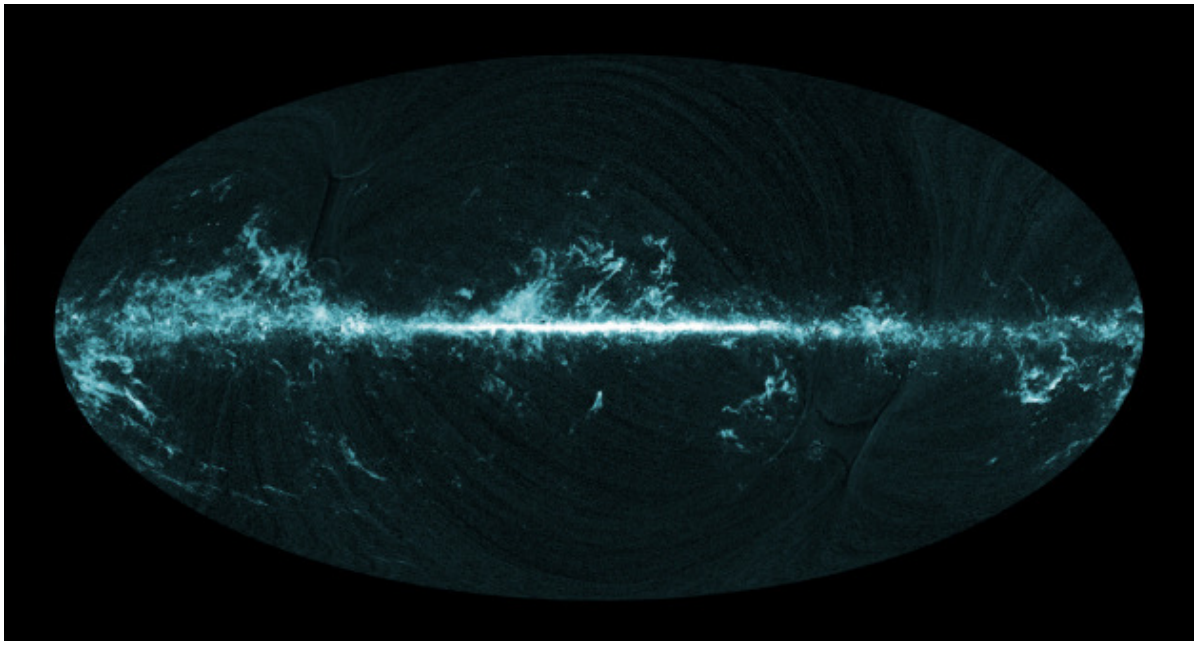
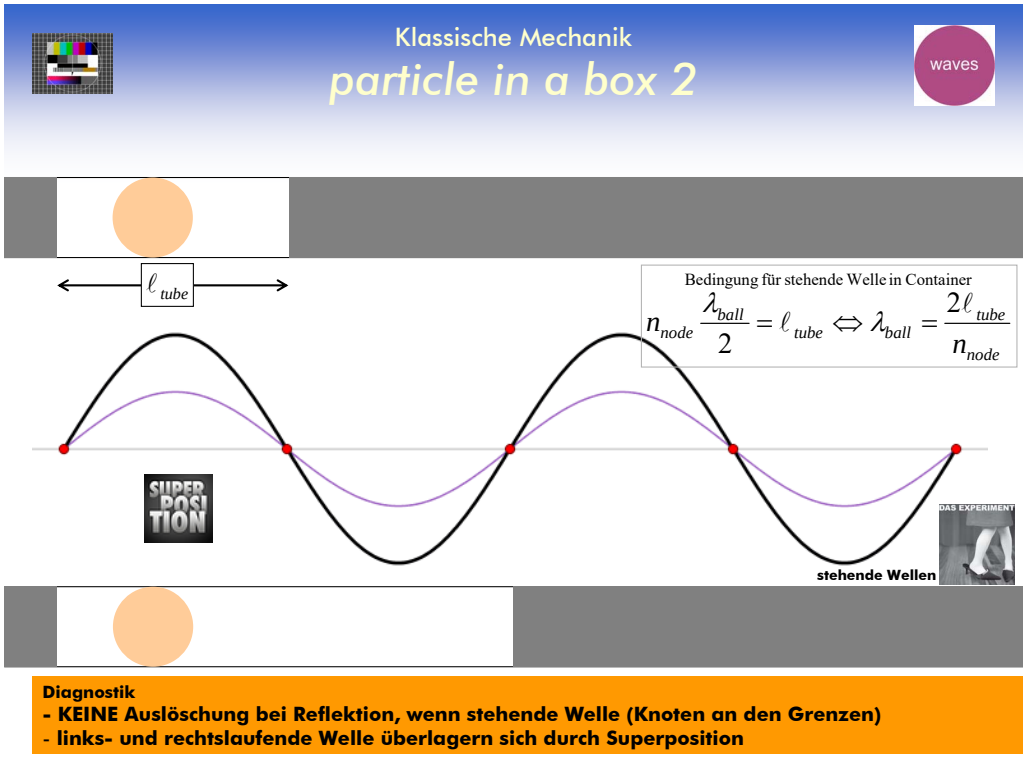


Abb. 11.24: Verteilung von Kohlenmonoxid (CO) in der Milchstraße, aufgenommenen mit dem Satelliten Planck. Detaillierte Untersuchungen der physikalischen und chemischen Bedingungen ermöglichen es, die Bildung von Molekülwolken und die frühen Phasen der Sternentstehung zu verstehen.

Frequenzen elektromagnetische Strahlung. Dabei ist der Abstand der Absorptionsfrequenzen nahezu konstant. Das rührt daher, dass die beteiligten Energieniveaus einen konstanten Abstand haben.



Kastenpotenzial

Im nächsten Beispiel wird ein Teilchen in ein eindimensionales Volumen eingesperrt. Man denke an ein abgeschlossenes Rohr, in dem sich eine Kugel befindet. Diese kann sich reibungsfrei in dem Zylinder bewegen. Dabei sind die Stöße mit der Wand elastisch. Das heißt, dass man keine Energieverluste berücksichtigen muss und die Kinetische Energie des Teilchens konstant bleibt. Klassisch gibt es für den Impuls und die Kinetische Energie keine Einschränkungen. Alle Energiewerte sind möglich. Die Frage stellt sich, wie sich das System quantenphysikalisch verhält.
Da mikroskopische Teilchen Materiewellen sind, gehorchen sie der deBroglie Beziehung. Wir betrachten das klassische Analogon einer Schallwelle, die sich in einem geschlossenen Rohr ausbreitet. Diese Überlegung führt zu stehenden Wellen,[25] für die bestimmte Randbedingungen berücksichtigt werden müssen. Die Wellenlänge λ_{ball} muss ein Vielfaches der Länge des Tubus ℓ_{tube} sein. Genauer:

$$\lambda_{ball} = \frac{2 \cdot \ell_{tube}}{n} \tag{11.93}$$

[25] *Lexikon:* Eine **stehende Welle** entsteht aus einer Überlagerung (Superposition) von zwei Wellen gleicher Amplitude und gleicher Frequenz, die sich in gegensätzlicher Richtung ausbreiten. An bestimmten Punkten im Raum tritt keine Amplitudenänderung auf (Schwingungsknoten). An anderen Stellen erfolgen starke Änderungen in der Amplitude.

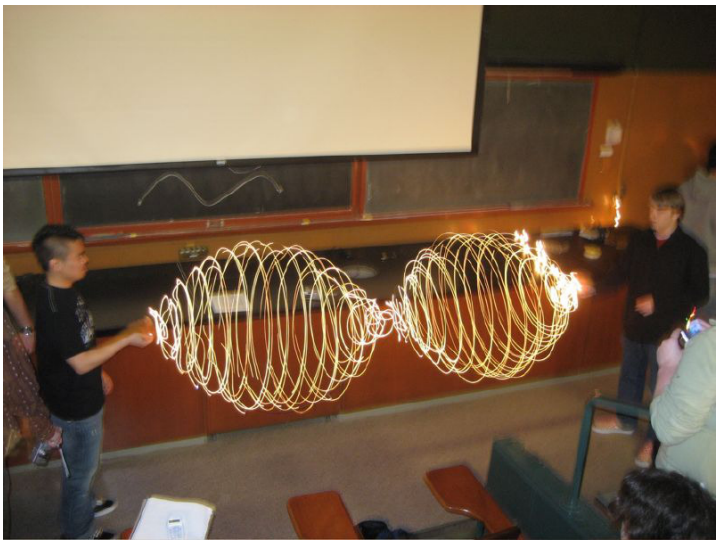
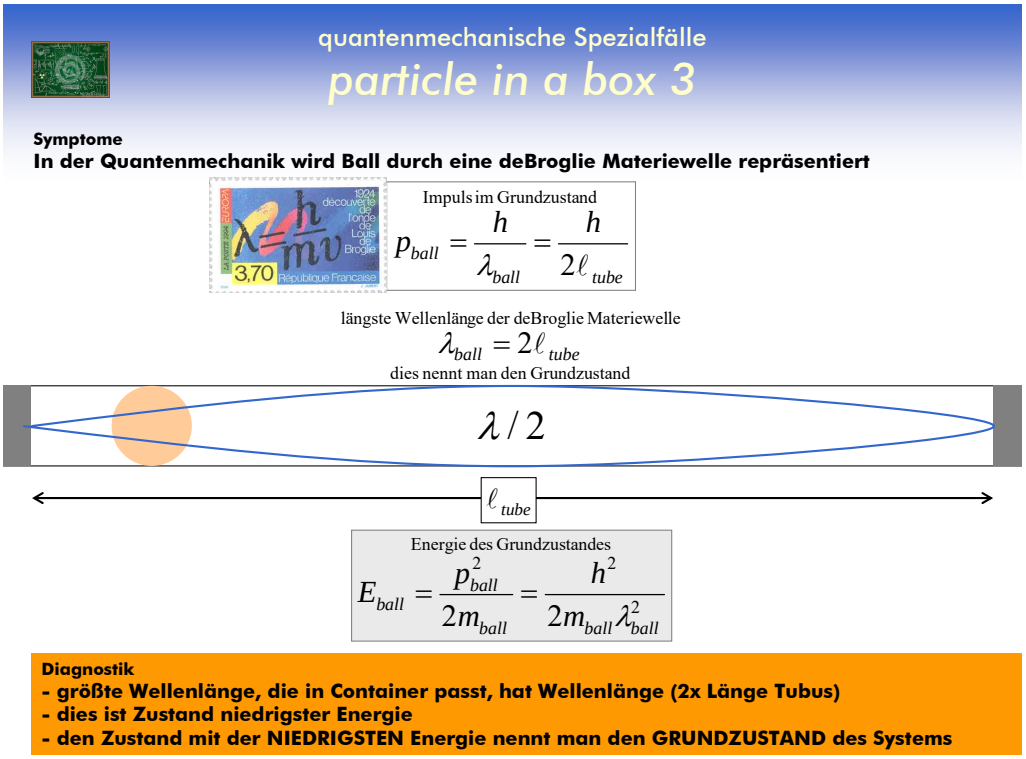


Abb. 11.25: Stehende Welle realisiert mit Hilfe einer Lichterkette.

wobei n eine ganze Zahl ist.

Grundsätzlich gibt es eine Vielzahl an Funktionen, die die Schrödingergleichung für ein gegebenes Problem erfüllen. Allerdings sind nicht alle Lösungen vereinbar mit der Physik. Sinnvolle Lösungen gehorchen bestimmten Randbedingungen, die durch die Natur des betrachteten Problems vorgegeben sind. Im jetzt behandelten Fall sind nur solche Wellenfunktionen realistisch, die den Randbedingungen (Schwingungsknoten an den Enden des Tubus) genügen. Da jede akzeptierte Wellenfunktion einer charakteristischen Energie zugeordnet werden kann und die Randbedingungen viele andere Lösungen ausschließen, sind die Energiewerte diskret. Abb. 11.25 zeigt als weihnachtliches Beispiel eine stehende Seilwelle, wobei als Seil eine Lichterkette verwendet wurde.



Wir identifizieren die Randbedingung für die stehende Welle quantenphysikalisch mit der Wellenlänge der deBroglie Materiewelle. Damit lässt sich ein minimaler Energiewert für das Teilchen berechnen. Der Zustand niedrigster Energie ist in der Physik von enormer Bedeutung. In der Quantenphysik nennt man diesen Zustand den Grundzustand.[26] Für den Grundzustand eines Teilchens im Kastenpotenzial ergibt sich eine Halbwelle:

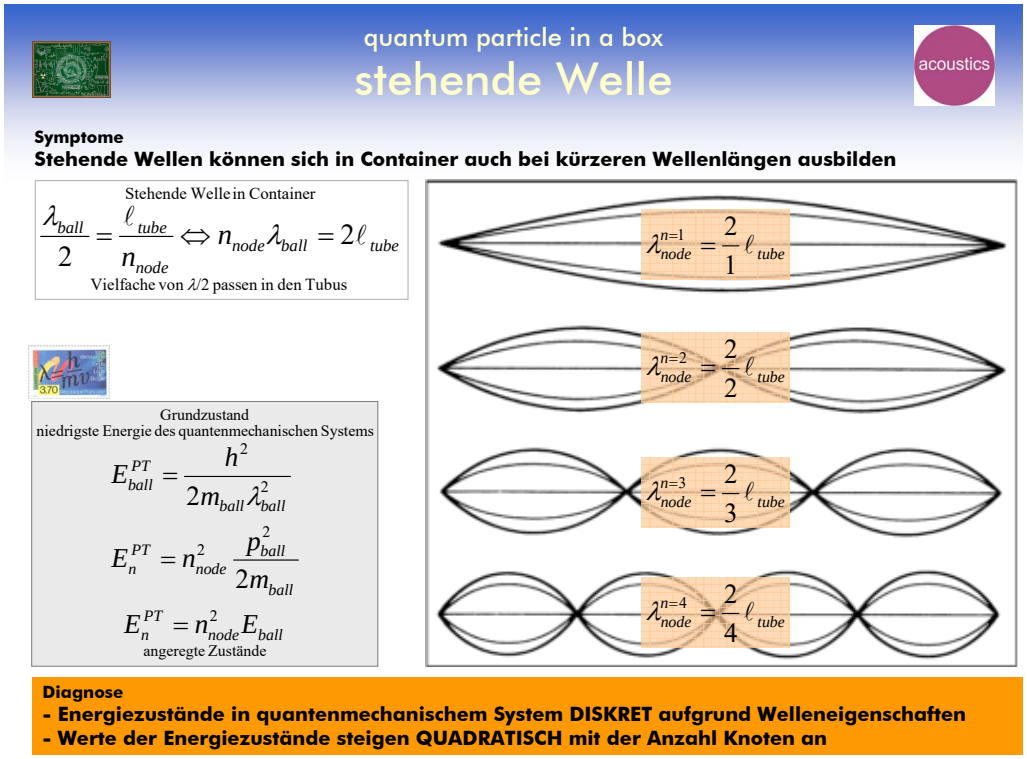
$$E_{GS} = \frac{h^2}{2\,m \cdot \lambda_{dB}^2} \tag{11.94}$$

Es sei angemerkt, dass der einzig niedrigere Energiezustand, der den Randbedingungen des Kastenpotenzials genügt, einer Wellenfunktion entspricht, deren Amplituden überall im Kasten NULL ist. Das heißt aber, dass sich gar kein Teilchen im Potenzial aufhält.

Die Existenz eines von NULL verschiedenen Energieminimums hat Auswirkungen auf das betrachtete System. Schränkt man die Bewegungsfreiheit eines Teilchens ein, erhöht sich die Grundzustandsenergie. Im Extremfall könnte man sich vorstellen, dass das Partikel still steht. Die aus der Betrachtung abgeleiteten Energiewerte und die Überlegungen

[26] *Lexikon:* Der **Grundzustand** ist ein stationärer Zustand eines quantenphysikalischen Systems. Beispiele sind Atome oder Kerne. Im Grundzustand hat das System seine geringste Energie. Alle Systeme streben danach, durch Energieabgabe in diesen Zustand zu gelangen. Beim Übergang in angeregte Zustände muss dem System Energie zugeführt werden.

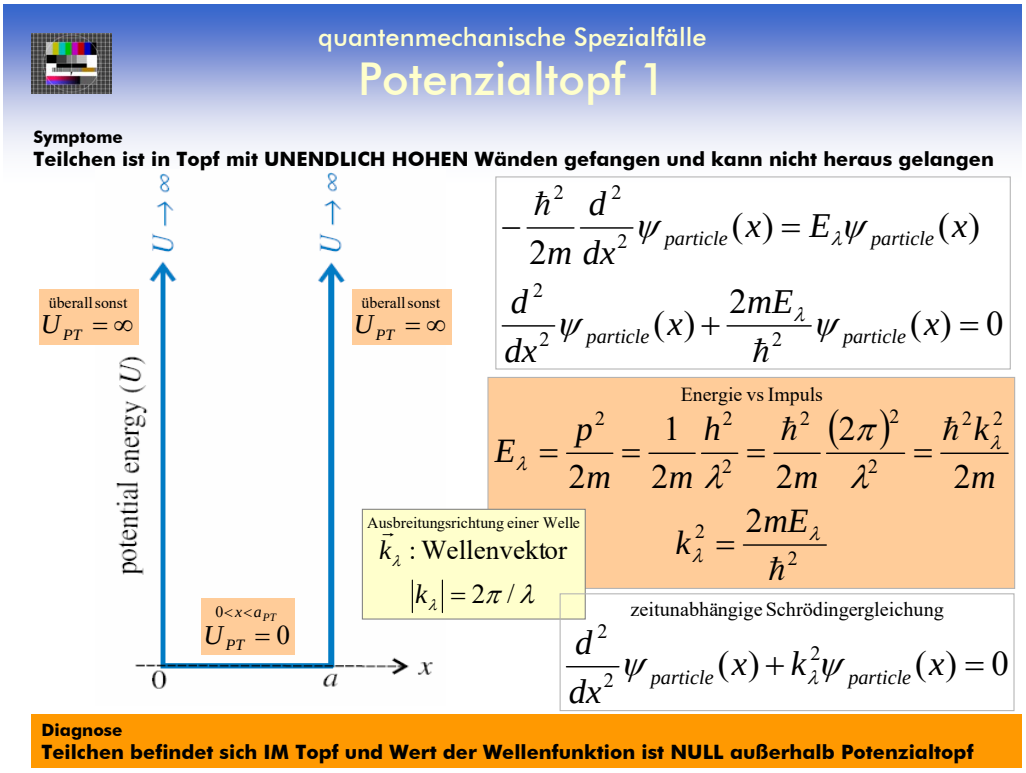
zum quantenphysikalischen harmonischen Oszillator sagen aber aus, dass ein Objekt eingesperrt in einer Box nicht eine kinetische Energie von NULL haben kann. Auch die Heisenbergsche Unschärferelation meldet sich zu Wort und bemerkt, dass Stillstand in der Mikrophysik nicht realisierbar ist. Eine Verkleinerung der Box (Δx) erhöht die Impulsunschärfe (Δp), was bedeutet, dass sich das Teilchen sogar immer schneller bewegt, je kleiner man das begrenzende Raumgebiet wählt. Die Kinetische Energie steigt an und damit die Gesamtenergie.



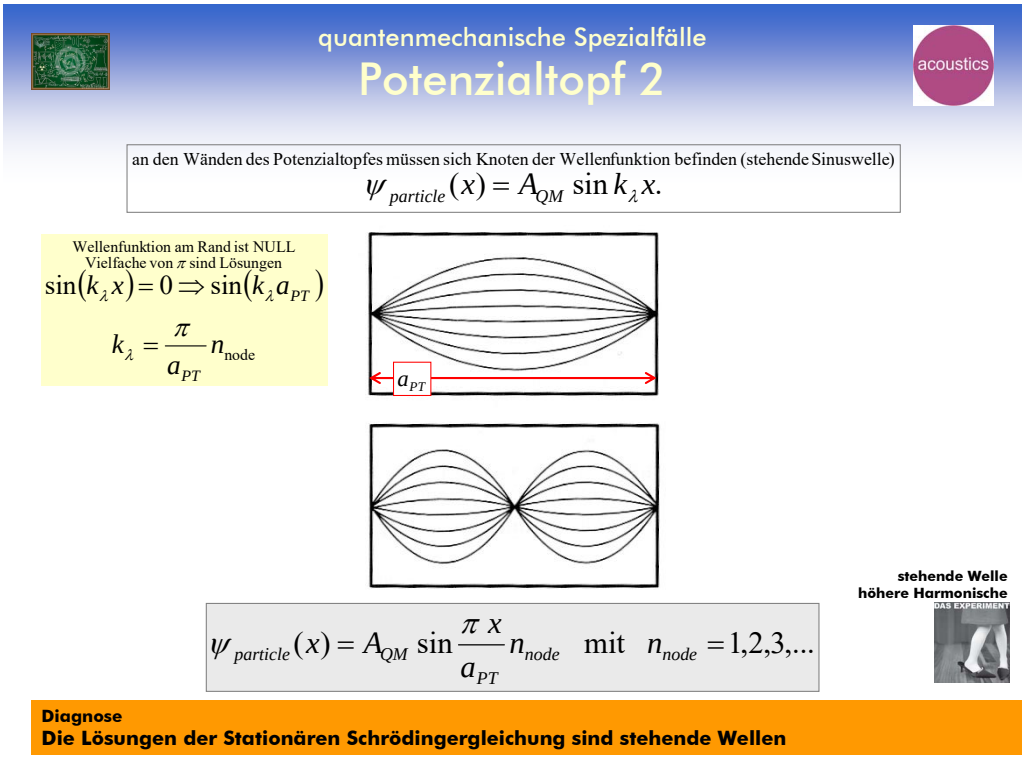
Analog zum harmonischen Oszillator lassen sich auch hier diskrete Energiewerte E_n berechnen. Aus der Bedingung für die stehende Welle findet man eine Abfolge für die möglichen E_n, wobei $n = 1, 2 \ldots$ die Anzahl der Knoten berücksichtigt. Allerdings ergibt sich im Gegensatz zum harmonischen Oszillator ein Abstand der Energiewerte, der quadratisch mit n ansteigt.

$$E_n = n^2 E_{ball} \tag{11.95}$$

Das ist eine wichtige Aussage, denn wie schon Eingangs erwähnt, sind harmonischer Oszillator und Teilchen-in-einer-Box Prototypen für Quantensysteme.



Die Erkenntnisse aus der Betrachtung stehender Wellen in einem Rohr wird jetzt auf ein mikroskopisches Teilchen in einem Potenzialtopf mit Breite a angewendet. Wir betrachten einen Topf mit unendlich hohen Wänden, der das Teilchen einschließt und stellen die zeitunabhängige Schrödingergleichung auf, wobei die Energie durch den zugehörigen Wellenvektor k ausgedrückt wird. Die gewählte Wandhöhe $(+\infty)$ verhindert, dass das Teilchen den Topf verlassen kann. Im Kapitel *Tunneleffekt* wird der Fall endlich hoher Begrenzungswände behandelt. Wir werden feststellen, dass sich in dem Fall dem Teilchen Möglichkeiten bieten, aus einem endlich hohen Potenzialtopf heraus zu hüpfen.

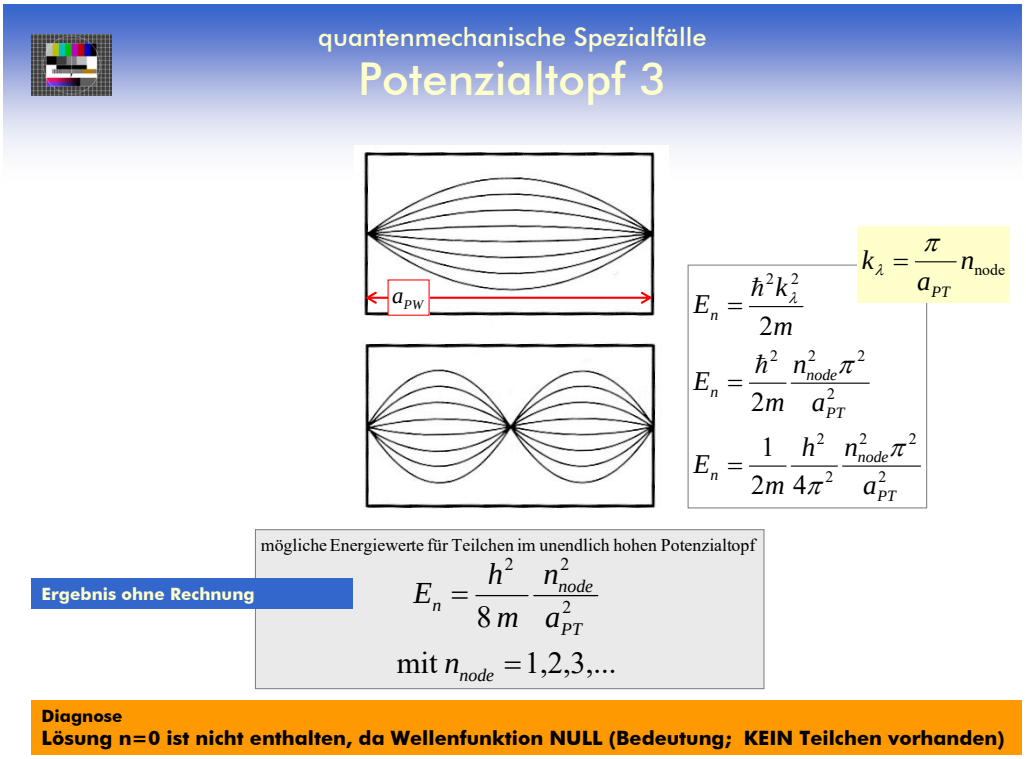


Lösungen für die Wellenfunktion sind Sinuswellen, die an die gewählte Geometrie angepasst sind.

$$\Psi_{dB}(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{a} n\right) \tag{11.96}$$

wobei n die Anzahl der Knoten angibt. In der Abbildung sind die Werte n=1, 2.

Link to Lecture Demo



Die sich daraus ergebenden Energiewerte

$$E_n = \frac{h^2}{8\,m\,a^2} n^2 \tag{11.97}$$

n=1, 2, 3,... können folgendermaßen charakterisiert werden:

- Es ergeben sich diskrete Energiewerte.
- Die Energien berechnen sich aus den Eigenschaften des Potenzialtopfes a und der Masse m des Teilchens.
- Die Energiewerte skalieren mit der Anzahl der Knoten n der Sinuswelle zum Quadrat ($n \geq 1$).
- Teilchen geringer Masse m weisen größere Energieabstände auf.
- Teilchen größerer Masse m weisen geringere Energieabstände auf.
- Der Abstand der Energiewerte vergrößert sich bei Verringerung der Topfbreite ($E_n \propto a^{-2}$).

Zusammenfassend ergeben sich die möglichen quantisierten Energiezustände eines Teilchens in einem unendlich hohen Potenzialtopf. Wie beim Potenzial des harmonischen Oszillators ergibt sich in diesem Modellsystem ein Zustand geringster Energie (n=1) (Grundzustand), dessen Energie ungleich NULL ist.

$$E_1^{PT} = \frac{h^2}{8\,m\,a^2} \tag{11.98}$$

Wenn man auf der Grundlage der Heisenbergschen Unschärferelation kann man berechnen, welche Energie ein in dem Kasten eingesperrtes Teichen haben müsste und man erhält:

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2\,m \cdot a} = \frac{h^2}{4\,\pi^2} \cdot \frac{1}{2\,m \cdot a} \tag{11.99}$$

Das hier gefundene Ergebnis in Gl. 11.98 passt, denn es ergibt sich ein Wert, der um π^2, also einen Faktor 10 höher ausfällt. Höhere Energiezustände berechnet man nach

$$E_n^{PT} = \frac{h^2}{8\,m\,a^2} n^2 \tag{11.100}$$

Abbildung 11.26 zeigt, wie die zugehörigen Wellenfunktionen für die untersten sechs Energiezustände aussehen. Die Krümmung der Wellenfunktion zeigt, dass sich die Teilchen immer schneller bewegen, je höher ihr Energiewert ist. Was noch fehlt ist der Vorfaktor der Sinusfunktion. Wenn man nun die Informationen ausnutzt, dass sich das Teilchen definitiv im Potenzialtopf befindet, kann man die Amplitude der Wellenfunktion für einen beliebigen rechteckigen Potentialtopf angeben. Innerhalb des Kastenpotenzials gilt:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= A \cdot \sin(k_x \cdot x) \\ \Psi(x) &= A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot n \cdot x\right) \end{aligned} \tag{11.101}$$

während außerhalb $\Psi(x)$ = NULL ist. Hier nutzen wir die Normierung aus, das die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen innerhalb des Potenzialtopfes zu finden, gleich EINS ist. Wir verwenden bei der Rechnung, dass

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi \cdot n}{a \cdot x}\right)\, dx = \frac{a}{2} \tag{11.102}$$

ist. Mit dieser Information ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{dB}^2(x)\, dx &= 1 \\ \int_0^a A^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot n}{a \cdot x}\right)\, dx &= 1 \\ A^2 \cdot \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi \cdot n}{a \cdot x}\right)\, dx &= 1 \\ \frac{A^2 \cdot a}{2} &= 1 \end{aligned} \tag{11.103}$$

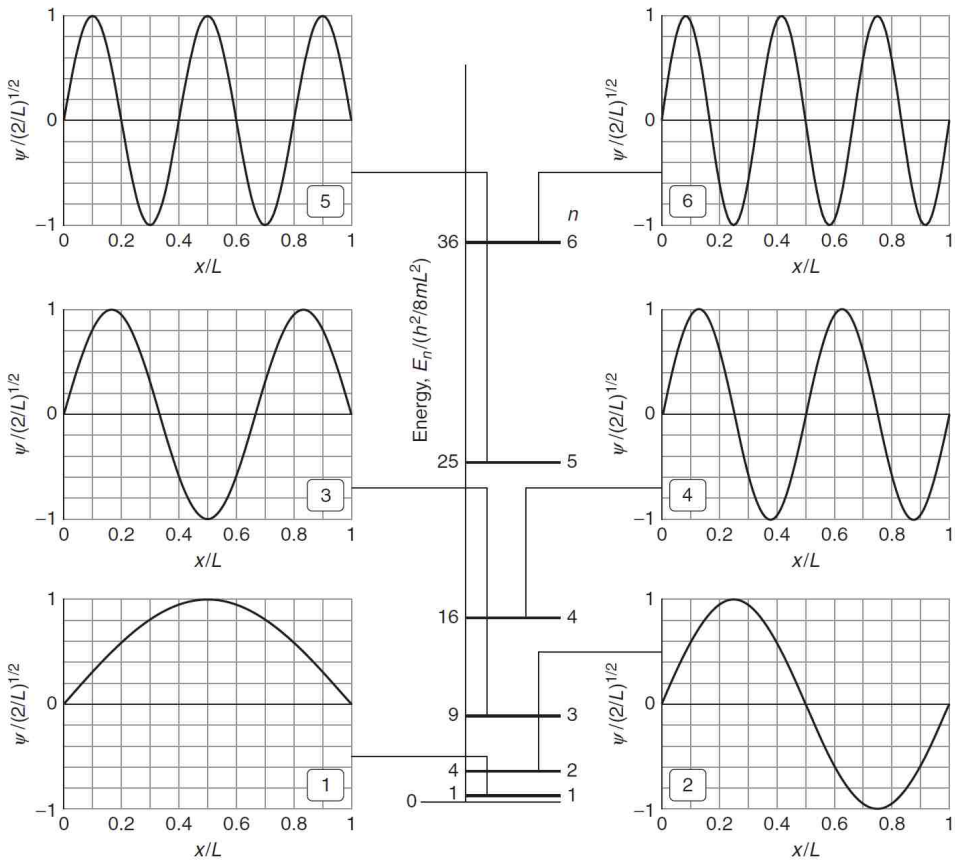


Abb. 11.26: Energieniveaus und entsprechende Wellenfunktionen für ein Teilchen in einem Kasten. Die Lage der Energiezustände und ihre Abstände nehmen mit n^2 zu. Jede Wellenfunktion ist eine stehende Welle, wobei aufeinanderfolgende Funktionen eine Halbwelle mehr und damit eine entsprechend kürzere Wellenlänge haben [**?**].

Damit ergibt sich die Amplitude der Wellenfunktion. Man beachte, dass A unabhängig von n ist

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{11.104}$$

Damit erhält man damit die exakte Wellenfunktion für das Teilchen

$$\Psi_{dB}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{a}\right) & \text{wenn } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{wenn } x < 0 \text{ und } x > a \end{cases} \tag{11.105}$$

und können Aussagen darüber machen, wo sich das Teilchen im Kastenpotenzial -sagen wir mal salopp- *gerne* aufhält:

$$|\Psi_{dB}(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi \cdot n}{a} \cdot x\right) \tag{11.106}$$

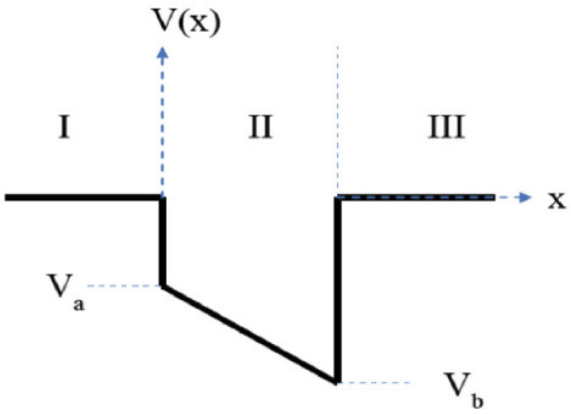


Abb. 11.27: Asymmetrischer Potentialwall [**?**].

Wegen der Unschärferelation erhält man wieder nur ungefähre Werte aus den errechneten Wahrscheinlichkeitsdichten. Wir kommen auf dieses Ergebnis später nochmal zurück. Die vollständige Wellenfunktion für die hier betrachteten stehenden Wellen ist

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\exp(-i\omega\cdot t) \tag{11.107}$$
$$\Psi(x,t) = A\cdot\sin(-i\omega\cdot t) \tag{11.108}$$
$$\Psi(x,t) = \frac{A}{2\,i}(\exp(i(kx-\omega\,t)) - \exp(i(kx+\omega\,t))) \tag{11.109}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass

$$\sin\Theta = \frac{\exp\, i\Theta - \exp\, i\Theta}{2\,i} \tag{11.110}$$

Das führt uns zurück an den Anfang der Betrachtungen, Hier handelt es sich um stehende Wellen, die sich aus der Superposition von nach links und nach rechts laufenden Wellen ergeben, wobei sich die Ausbreitung aus dem Impuls $\hbar k$ ergibt. Was passiert, wenn man relativistische Effekte anschaltet? Nichtrelativistisch ist die Wellenfunktion und damit die Wahrscheinlichkeitsdichte für den ersten angeregten Zustand einen Knoten am Mittelpunkt der Kastens. Unter Berücksichtigung relativistischer Effekte ergibt sich ein Wert, der leicht ungleich NULL ist. Unter welchen Abmessungen des Kastens ist es notwendig, relativistische Effekte zu berücksichtigen? Es stellt sich heraus, dass die kritische Breite L_{rel}

$$L_{rel} = \frac{\hbar}{m_e\cdot c}$$
$$L_{rel} = \frac{1.054\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{(9.109\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg})\cdot(2.998\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}$$
$$L_{rel} = 3.86\cdot 10^{-13}\mathrm{m}$$

ist, wobei m_e die Elektronenmasse ist.

Nach der Heisenbergschen Unschärferelation muss ein eingesperrtes Teilchen eine bestimmte kinetische Energie haben. Die Lösung der Schrödingergleichung muss dieser

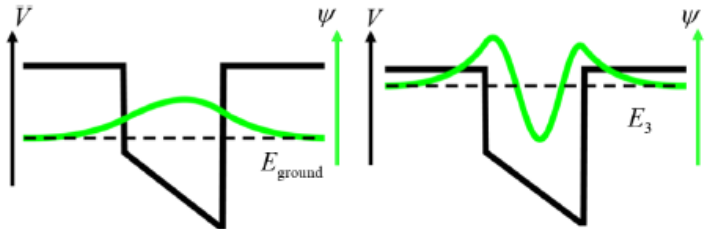


Abb. 11.28: Beispiele akzeptabler Antworten auf die gestellten Fragen [**?**]

Abbrev.	Description	Example	Abbrev.	Description	Example
Prob.	The wave function is drawn like a probability ($\|\psi\|^2$)		Extra nodes	There are too many nodes for the wave function described	
Sym.	The wave function is symmetric in the classically allowed region		Asym. decay	In the classically forbidden region, the decay is to different zeros	
Wrong sym.	The maximum in the probability amplitude appears to the right of the center (part b)		Follow slant	The wave function appears to follow the slant of the potential well	
Disc. ψ	A discontinuity appears in ψ (x)		Osc. forb.	ψ (x) is oscillatory in the classically forbidden region	
Disc. ψ'	A discontinuity appears in $\psi'(x)$		Too few nodes	There are too few nodes for the wave function described	
$\psi = 0$ at bound.	Wave function goes immediately to zero at the well's edge		Amp. λ err.	The amplitude is inconsistent with the wavelength	

Abb. 11.29: Häufige Fehler beim Zeichnen der Wellenfunktion im asymmetrischen Potenzialtopf [**?**].

Anforderung genügen! Die Unschärfe für die Position eines Teilchens in einem Potenzialtopf der Breite L ergibt sich mit

$$\Delta x \approx L/\sqrt{12} \tag{11.111}$$

Daraus ergibt sich eine Unsicherheit im Impuls von

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{2} \cdot \Delta x = \frac{\sqrt{12} \cdot \hbar}{2} \tag{11.112}$$

Die zugehörige Unsicherheit in der mittleren Kinetischen Energie ist

$$< E_{kin} >= \frac{(\Delta p)^2}{2\,m} = \frac{3\,\hbar^2}{m \cdot L^2} \tag{11.113}$$

Die exakte Lösung liefert für den Grundzustand

$$E_1 = \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2}{m \cdot L^2} \tag{11.114}$$

einen Wert, der ungefähr einen Faktor 3 größer ist. Die Lösung der Schrödingergleichung erfüllt also die Vorgaben der Unschärferelation.

*Misconception:*Abschießend zu diesem Thema noch ein Hinweis auf typische Missverständnisse, bei der Einzeichnung von Wellenfunktion, gezeigt am Beispiel eines asymmetrischen Potentialtopf [**?**], siehe Abb. 11.27. Die Aufgabe lautet, unter Angabe möglicher notwendiger zusätzlicher Annahmen die Wellenfunktionen zu den niedrigsten Energiezuständen einzuzeichnen, die sich über die drei Bereiche erstrecken:

- Zeichnen Sie die Wellenfunktion des Grundzustands. Es gilt $E \geq V_a$.
- Zeichnen Sie eine qualitative Skizze des zweiten und dritten (falls vorhanden) angeregten Zustands ein.

Überlegen Sie zuerst, bevor Sie weiterblättern und mögliche Lösungen in Abb. 11.28 anschauen. Das Ergebnis dieser Studie mit den typischen Fehlern zeigt die Tabelle in Abb. 11.29.

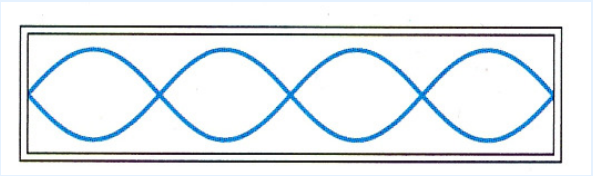


Abb. 11.30:

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
☐ geraten; ☐ unsicher; ☐ unentschieden; ☐ sicherlich richtig; ☐ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 2.1: Welche Energiewerte ergeben sich für ein Elektron (Masse m_e=9.1 · 10^{-31} kg) eingesperrt in einem Topf der Breite 1 Å (10^{-10} m)?

Man findet folgende Energiewerte:

$$\begin{aligned} E_n &= (6 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}) \cdot n^2 = (38\,\mathrm{eV}) \cdot n^2 \\ E_1 &= 38\,\mathrm{eV} \\ E_2 &= 152\,\mathrm{eV} \\ E_3 &= 342\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2: Welche Energiewerte findet man für eine Glaskugel (m=10 g) in einem Kasten der Breite 10 cm?

$$\begin{aligned} E_n &= (5.5 \cdot 10^{-64}\,\mathrm{J}) \cdot n^2 \\ E_1 &= 5.5 \cdot 10^{-64}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Die dazugehörige Geschwindigkeit beträgt nur $3.3 \cdot 10^{-31}$ m/s. Damit kann eine ruhende Kugel nicht von einer Kugel im Energiezustand E_1 unterscheiden. Um eine Geschwindigkeit von 0.33 m/s zu erreichen muss sich die Kugel im Energiezustand 10^{30} befinden. In dem Fall stößt man auf ein messtechnisches Problem. Die einzelnen Energiezustände lassen sich nicht mehr unterscheiden.

Aufgabe 2.3: In welchem Quantenzustand befindet sich das Teilchen, dass in der Abb. 11.30 anhand seiner Wellenfunktion dargestellt ist?[27]

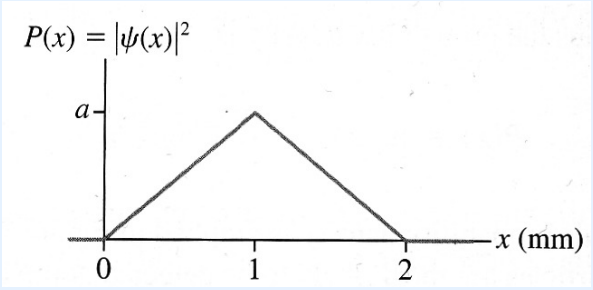
Aufgabe 2.4: Welchen Wert hat die Konstante a in Bezug auf Abb. 11.31?[28]

(a) a=2.0 mm^{-1}

(b) a=1.0 mm^{-1}

[27] Antwort: (4)
[28] Antwort: (b)

Abb. 11.31:



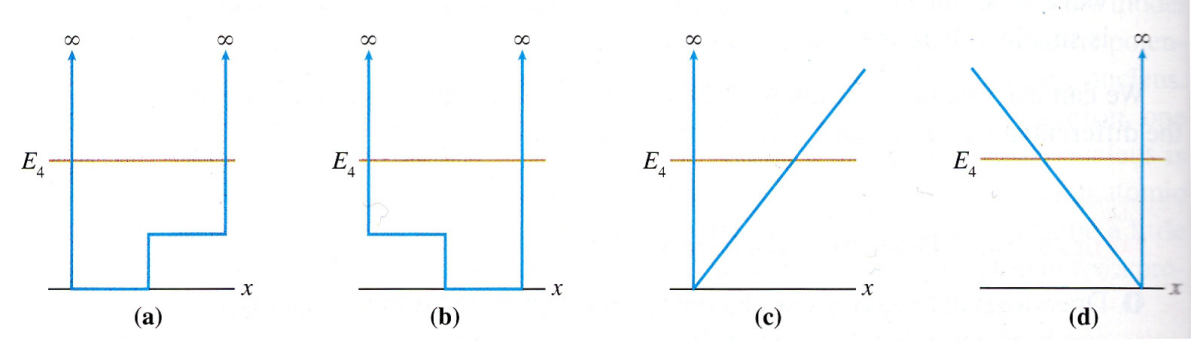


Abb. 11.32:

(c) a=0.5 mm^{-1}

(d) a=2.0 mm$^{-1/2}$

(e) a=1.0 mm$^{-1/2}$

(f) a=0.5 mm$^{-1/2}$

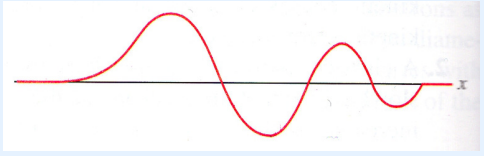
Aufgabe 2.5: Für welches der in Abb. 11.32 dargestellten Potenziale würde sich die in Abb. 11.33 angegebene Wellenfunktion (n=4) ergeben?[29]

Aufgabe 2.6: Welches Eigenwerte und welche Kinetischen Energien ergeben sich für die Wellenfunktion

$$\psi(x) = A \cdot \exp(i\,k \cdot x)$$

[29] Antwort: (c)

Abb. 11.33:



Berechnen wir zunächst den Impuls, in dem wir den Impulsoperator auf die Wellenfunktion loslassen:

$$\begin{aligned} -i\,\hbar \cdot \frac{d}{dx}\, A \cdot \exp(i\,k \cdot x) &= \hbar \cdot k \cdot A \cdot \exp(i\,k \cdot x) \\ \hat{p} \cdot \psi(x) &= \hbar\, k \cdot \psi(x) \end{aligned}$$

Der Eigenwert für den Impuls ist daher $p = \hbar \cdot k$ und ψ ist die zugehörige Eigenfunktion.

Für den Energiewert ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2\,m} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\, A \cdot \exp(i\,k \cdot x) &= \frac{\hbar^2\, k^2}{2\,m} \cdot A \cdot \exp(i\,k \cdot x) \\ \hat{H}\psi(x) &= \frac{\hbar^2\, k^2}{2\,m} \cdot \psi(x) \end{aligned}$$

Das ist die Eigenwertgleichung für die Energie. Die obige Wellenfunktion $\psi(x)$ ist die Eigenfunktion, die eine Energie $(\hbar \cdot k)^2/(2\,m)$ ergibt. Mit $p = \hbar \cdot k$ ergibt sich die klassische Newtonsche Gleichung $p^2/(2\,m)$.

Aufgabe 2.7: Welche Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit der Energie $E = \frac{5}{2}\,\hbar \cdot \omega$?[30]

Aufgabe 2.8: Ein Teilchen bewegt sich eindimensional zwischen $[0{:}L]$ und wird beschrieben durch die Wellenfunktion:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{30}{L^5}} \cdot x \cdot (L - x)$$

Leiten Sie eine Ausdruck her, der die mittlere Energie des Teilchens angibt.

Ausgehend von der Energie-Impulsbeziehung der klassischen Physik:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2\,m}$$

findet man den Operator für die Kinetische Energie über den Operator für den Impuls:

$$\hat{E}_{kin} = -\frac{\hbar^2}{2\,m} \cdot \frac{d^2}{dx^2}$$

[30] Antwort: (c) $E = \left(n - \frac{1}{2}\right)\,\hbar \cdot \omega$. Danach ist $E = \frac{5}{2}\,\hbar \cdot \omega$ erfüllt für den Zustand n=3.

Diesen Operator wenden wir jetzt auf die gegebene Wellenfunktion an:

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_{kin} &= \int_0^L \left(\sqrt{\frac{30}{L^5}} \cdot x \cdot (L-x)\right) \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2\,m} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{30}{L^5}} \cdot x \cdot (L-x)\right) dx \\
\hat{E}_{kin} &= \left(\frac{30}{L^5}\right) \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2\,m}\right) \cdot \int_0^L x \cdot (L-x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left(x \cdot L - x^2\right)\right) dx \\
\hat{E}_{kin} &= \left(\frac{30}{L^5}\right) \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2\,m}\right) \cdot \int_0^L x \cdot (L-x) \cdot (-2)\, dx \\
\hat{E}_{kin} &= \left(\frac{30}{L^5}\right) \cdot \left(\frac{\hbar^2}{m}\right) \cdot \int_0^L L \cdot x - x^2\, dx \\
\hat{E}_{kin} &= \left(\frac{30}{L^5}\right) \cdot \left(\frac{\hbar^2}{m}\right) \cdot \left[\frac{x^2 \cdot L}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^L \\
\hat{E}_{kin} &= \left(\frac{30}{L^5}\right) \cdot \left(\frac{\hbar^2}{m}\right) \left(\frac{L^3}{6}\right) \\
\hat{E}_{kin} &= \frac{5\,\hbar^2}{m \cdot L^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.9: In Tab. 11.1 sind die Wellenfunktionen für die ersten drei Zustände n=0-2 im Harmonischen Oszillator aufgeführt, wobei

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m \cdot \omega_{\mathrm{SHM}}}}$$

Man zeige, dass für den Zustand n=1 die Wellenfunktion $\Psi_1(x)$

$$\Psi_1(x) = A_1 \cdot \frac{x}{b} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\,b^2}\right)$$

eine Lösung der Schrödingergleichung ist, wobei $E = 3/2 \cdot \hbar \cdot \omega_{\mathrm{SHM}}$.

Für das Potenzial $U = 1/2 \cdot k \cdot x^2$ ergibt sich folgende Schrödingergleichung:

$$\Psi_1''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{2\,m}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}\,k \cdot x^2 - E\right) \cdot \Psi$$

Die Ableitungen von $\Psi_1(x)$ ergeben unter Anwendung der Produktregel:

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(x) &= \frac{d}{dx}\left[A_1 \cdot \frac{x}{b} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\,b^2}\right)\right] \\
\Psi_1'(x) &= A_1 \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{x^2}{b^3}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\,b^2}\right) \\
\Psi_1''(x) &= A_1 \cdot \left(-\frac{3\,x}{b^3} - \frac{x^3}{b^5}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\,b^2}\right) \\
\Psi_1''(x) &= \left(\frac{x^2}{b^4} - \frac{3}{b^2}\right) \cdot \left[A_1 \cdot \frac{x}{b} \exp\left(-\frac{x^2}{2\,b^2}\right)\right] \\
\Psi_1''(x) &= \left(\frac{x^2}{b^4} - \frac{3}{b^2}\right) \cdot \Psi_1(x) \\
\Psi_1''(x) &= \left(\frac{m^2 \cdot \omega_{\mathrm{SHM}^2} \cdot x^2}{\hbar^2} - \frac{3\,m \cdot \omega_{\mathrm{SHM}}}{\hbar}\right) \cdot \Psi_1 \\
\Psi_1''(x) &= \left(\frac{m^2 \cdot k^2 \cdot x^2}{m^2 \cdot \hbar^2} - \frac{3\,m \cdot \omega_{\mathrm{SHM}}}{\hbar}\right) \cdot \Psi_1 \\
\Psi_1''(x) &= \frac{2\,m}{\hbar^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\,k \cdot x^2 - \frac{3}{2}\,\hbar \cdot \omega_{\mathrm{SHM}}\right) \cdot \Psi_1 \\
\Psi_1''(x) &= \left(\frac{1}{2}\,k \cdot x^2 - E\right) \cdot \Psi_1
\end{aligned}$$

wobei wir $\Psi_1(x)$, sowie für b die Gl. 11.115 und $\omega_{\mathrm{SHM}}^2 = k/m$ eingesetzt haben. Die angegebene Wellenfunktion erfüllt also tatsächlich die Schrödingergleichung.

Aufgabe 2.10: Ein Teilchen befindet sich im Grundzustand eines unendlich tiefen Potenzialkastens mit einer Breite L. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich dieses Teilchen in der mittleren Hälfte des Topfes, d.h. zwischen $x{=}L/4$ und $3L/4$, befindet.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist gegeben durch ψ_n^2 mit $n{=}1$ für den Grundzustand. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
P &= \int_{L/4}^{3L/4} |\psi_1|^2\,dx \\
P &= \left(\frac{2}{L}\right) \cdot \int_{L/4}^{3L/4} \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)\,dx \\
P &= \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \int_{L/4}^{3L/4} \left[1 - \cos\left(\frac{2\,\pi \cdot x}{L}\right)\right]\,dx \\
P &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2\,\pi}\right)[-1-1] \\
P &= 0.818
\end{aligned}$$

Der gefundene Wert ist erheblich größer als 1/2. Das wäre das Resultat, welches man für ein klassisches Teilchen erwarten würde.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Gleicht die Wellenfunktion eines Teilchens im unendlich hohen Potenzialtopf der schwingenden Saite einer Geige?

2. Was ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte im unendlich hohen Potenzialtopf, wenn $n \to \infty$?

3. Warum muss die Wellenfunktion eines Teilchens in einem unendlich hohen Potenzialtopf am Rand NULL werden?

4. Wie hängen in einem Kastenpotenzial die möglichen Energiewerte eines Teilchens mit den Abmessungen des Kastens zusammenhängen

5. Wie hängen die Abstände der Energiezustände in einem Potenzialtopf von der Masse des Teilchens ab?

6. Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl an Wellenzügen einer Materiewelle, die in einen eindimensionale Potenzialtopf passen und der Grundzustandsenergie?

7. Warum ist der Grundzustand eines Teilchens in einem Potenzialtopf geben durch n=1 und nicht durch n=0?

8. Ist es möglich, dass die Energie eines Teilchens in einem Kasten geringer ist als die Grundzustandsenergie?

9. Kann man gleichzeitig Position und Energie eines quantenmechanischen Oszillators messen?

10. Metalle im Festkörper enthalten Elektronen, die sich frei in einem Potenzialtopf bewegen können. Sehen Sie eine experimentelle Chance, diskrete Energiezustände in einem Metallwürfel mit 1 mm Kantenlänge zu nachzuweisen?

11. Wie würde sich unser Leben verändern, wenn die Plancksche Konstante den Wert 1 J·s hätte? Wie ist es dann, wenn man schaukelt?

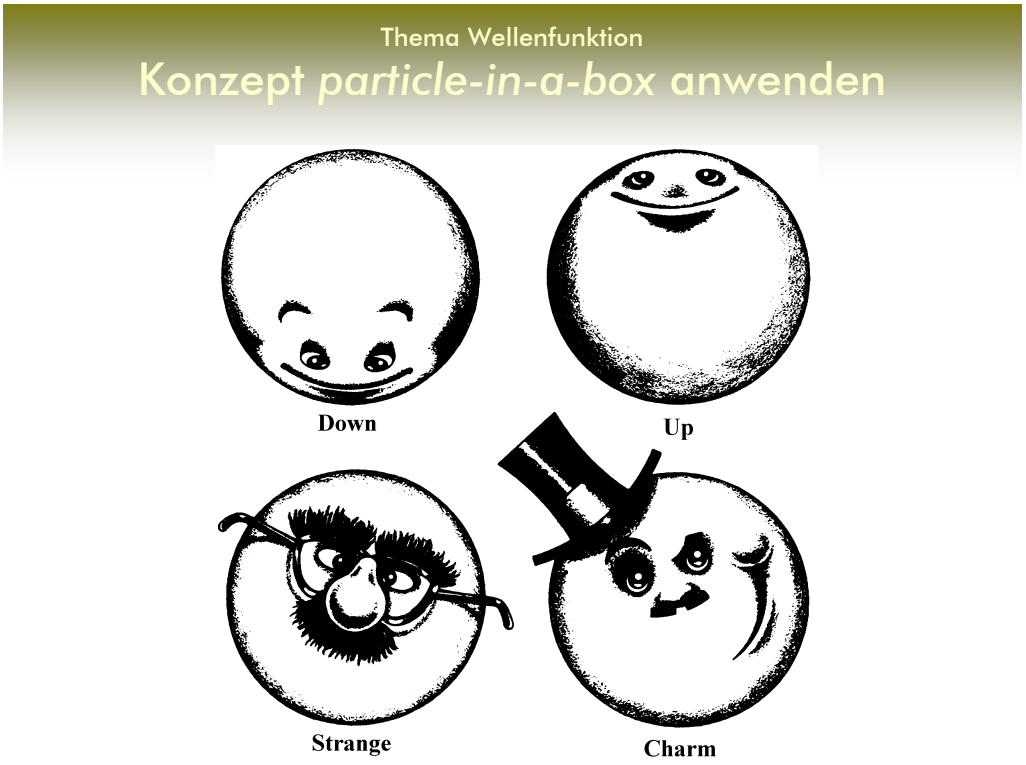
12. Warum kann ein eingesperrtes Teilchen nur bestimmte Energiewerte annehmen?

13. Kann man sagen, dass die Schwingungsenergie einer Gitarrensaite quantisiert ist?

14. Die Wellenfunktion eines Teilchen in einem Kastenpotenzial ($\pm a$) hat bei x=0 den Wert NULL. Die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen an dieser Stelle zu finden, ist also genau NULL. Was ist falsch, wenn man sagt: *Wenn die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenteilchen im Mittelpunkt zu finden, NULL ist, befindet sich das Teilchen niemals an diesem Punkt!* Wie kommt es, dass das Teilchen auf seinem Weg von der linken zur rechten Seite des Kastens diesen Punkt passieren kann?

15. Geben Sie ein Beispiel für eine physikalische Größe, die nicht quantisiert ist!

11.3 Konzept particle-in-a-box anwenden



If I could remember the names of all those particles, I'd be a botanist [**?**].

Enrico Fermi

Nachdem die Grundzüge der Behandlung von Teilchen in einem Potenzialtopf (particle-in-a-box) vorgestellt wurden, sollen im Folgenden eine Reihe von Beispielen behandelt werden, die sich mit diesem einfachen Ansatz in erstaunlich guter Weise beschreiben lassen. Die Reihe ist lang und man erkennt anhand der folgenden Liste, dass man in vielen Bereichen der Physik dieses Konzept zur Beschreibung der Verhältnisse nutzt.

- Elektronen in einem Kondensator
- Bindungsenergien von Elektronen im Atom
- Bindungsenergien von Nukleonen im Kern
- Valenzelektronen in Quantendrähten
- Energiezustände in einem *quantum-well* Laser
- Bindung in Wasserstoffmolekülen

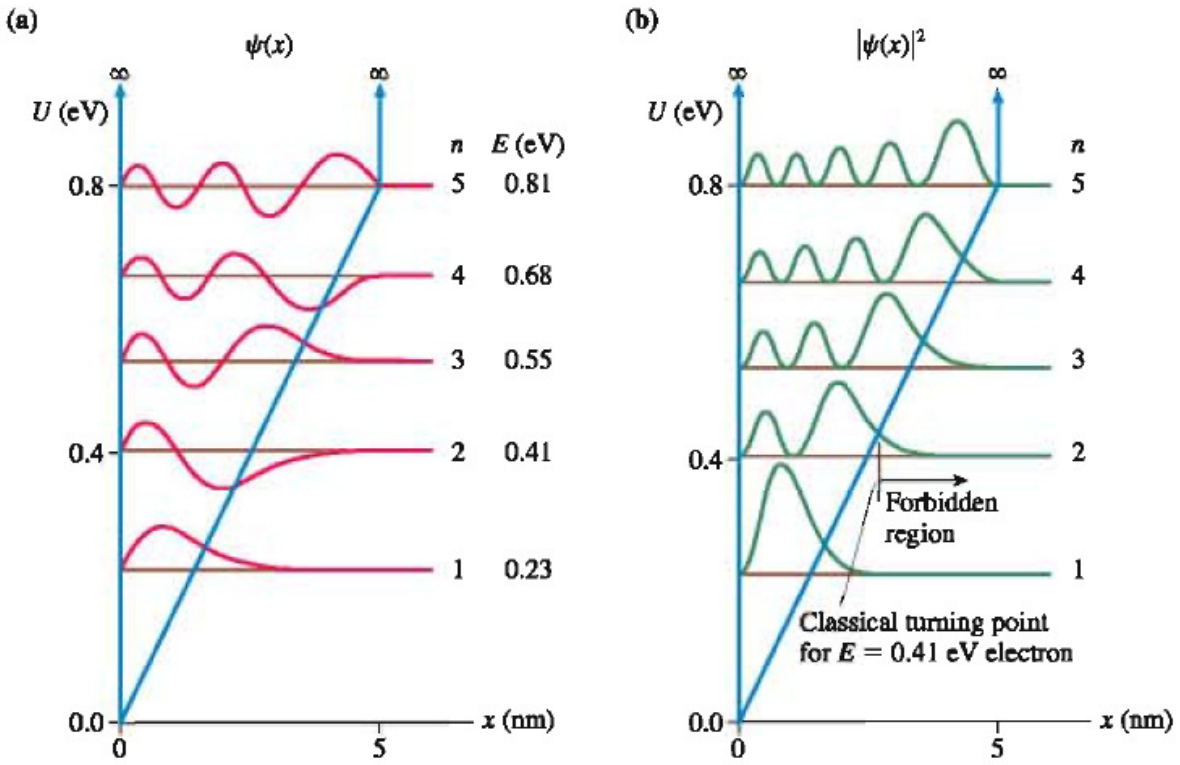


Abb. 11.34: Energieniveaus, Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsdichten für ein Elektron in einem Kondensator mit einem Plattenabstand von 5 nm und einem Potenzial von 0.8 V [**?**].

- Optische Eigenschaften von Cyanin-Farbstoffen und Halbleiter-Nanokristallen
- Casimir-Effekt virtueller Teilchen
- ... und viele weitere.

Selbst die Eigenschaften von *quarks*, aus denen beispielsweise Protonen und Neutronen bestehen, können mit diesem simplen Modell behandelt werden. Die obige Abbildung zeigt die vier der sechs unterschiedlichen *quarks*.

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Elektrostatik

Als Anwendung betrachten wir die Bewegung eines Elektrons im Feld eines elektrischen Kondensators. Das Elektron tritt mit einer bestimmten kinetischen Energie in den Kondensator ein und wird durch das elektrische Feld E_e abgebremst. Denken Sie bei diesem Beispiel daran, dass sich eine Geschwindigkeitsänderung des Teilchens auf die deBroglie Wellenlänge auswirkt.

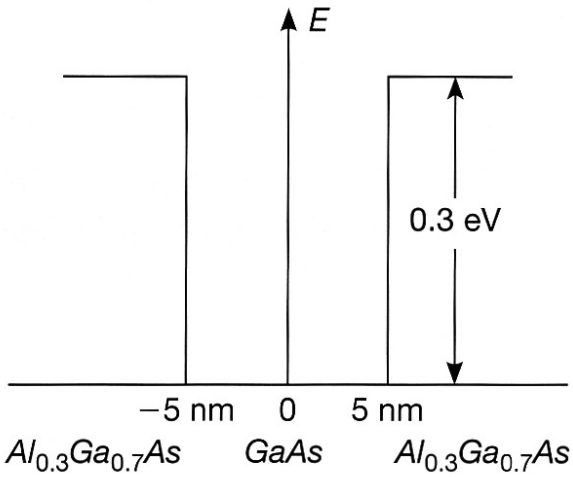


Abb. 11.35: Potenzialtopf, gebildet aus Sandwich-Halbleiter. Der $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$-Kristall hat einen Anteil von 30% Aluminium und 70% Gallium. Elektronen sind im 10 nm breiten Quantentopf einer Tiefe von 0.3 eV gefangen und bilden so ein *particle-in-a-box* system [**?**].

Hinweis: Eine Murmel rollt eine Rampe hinauf. Was wird passieren? Die Kugel kommt bis in eine gewisse Höhe und rollt dann die Rampe wieder herunter. Im Fall des Elektrons ist das Verhalten ähnlich. Das Gegenfeld ist groß genug, dass das Elektron nicht die andere Kondensatorplatte erreichen kann, sondern an einer bestimmten Stelle zum Stillstand kommt, umdreht und in Gegenrichtung beschleunigt wird. In dem Gedankenexperiment reduzieren wir den Abstand der Kondensatorplatten auf eine mikroskopische Entfernung ($5 \cdot 10^{-9}$ m). Unter diesen Bedingungen werden die quantenphysikalischen Eigenschaften der Materie sichtbar und es entwickeln sich diskrete Energiezustände. Da sich die Topftiefe in diesem Fall kontinuierlich ändert, hat das Auswirkungen auf die Lage der Energiezustände. Eine Materiewelle, die das Elektron repräsentiert, bewegt sich auf den Umkehrpunkt zu. Da das Teilchen langsamer wird, vergrößert sich die deBroglie Wellenlänge. Mehr noch, wenn das Teilchen seine Geschwindigkeit verringert, reduziert sich die Impulsunschärfe und die Position des Teilchens verschmiert. Die veränderlichen Potenzialbedingungen in diesem Beispiel machen folgendes deutlich: Die Breite des Potenzialtopfes ist nicht entscheidend für die Ausbildung von Energiezuständen, sondern nur, dass sich an den Systemgrenzen Knoten der Wellenfunktion befinden. Was sind die Auswirkungen? Das Elektron dringt einen Bereich vor, der, wie die Abbildung zeigt, hinter dem klassischen Umkehrpunkt liegt (*forbidden region*). Das klingt spannend. Mehr dazu im nächsten Kapitel *Tunneleffekt*.

Ein Beispiel aus der Festkörperphysik

Wir betrachten ein großes quantenphysikalisches System, wobei N freie Teilchen in einem eindimensionalen Kasten untergebracht werden. Man denke dabei an die Valenzelektronen in einem Metall, wobei die Elektron nicht miteinander wechselwirken. Als weitere Näherung wird das Coulombpotenzial der Atomrümpfe vernachlässigt. Mit Hilfe dieses einfachen Modells kann man die elektrischen Eigenschaften von einfachen Metallen wie Natrium verstehen. Im Kapitel *Beyond Bohr* werden wir das wichtige Pauliprinzip kennenlernen. Es besagt, dass die Elektronen bei der Besetzung der Energiezustände

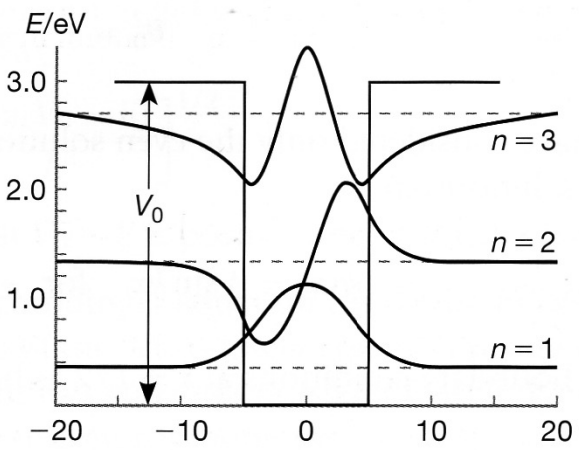


Abb. 11.36: Energiezustände und Wellenfunktionen in einem Quantentopf, wie in Abb. 11.35 beschrieben [**?**].

bestimmte Regeln befolgen müssen. Und zwar kann jeder Bindungszustand nur mit 2 Elektronen besetzt werden. Bei beispielsweise 20 Elektronen sind im Grundzustand die Zustände von n=1 bis 10 besetzt, aber Zustände geringerer Bindungsenergie ($n > 10$) sind frei. Die Dichte der Zustände $D(N)$, also die Anzahl an Zuständen im einem Energieintervall dE kann folgendermaßen ausdrücken:

$$D(N) = \frac{d}{dE} N(E) \tag{11.115}$$

wobei nach der Pauli-Regel $N(E) = 2\,n$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{2\,m_e \cdot L^2 \cdot E}{\pi^2 \cdot \hbar^2} \right) \\ n &= \left(\frac{8\,m_e \cdot L^2 \cdot E}{h^2} \right) \\ n &= \frac{2\,L^2}{h} \cdot \sqrt{2\,m_e \cdot E} \qquad (11.116) \\ N(E) &= \frac{4\,L^2}{h} \cdot \sqrt{2\,m_e \cdot E} \qquad (11.117) \end{aligned}$$

Das ist die Anzahl der Zustände im System. Die Zustandsdichte ergibt sich mit Gl. 11.115:

$$\begin{aligned} D(E) &= \frac{4\,L^2}{h} (2\,m_e)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} E^{-1/2} \\ D(E) &= \frac{4\,L^2}{h} \cdot \left(\frac{m_e}{2\,E} \right)^{-1/2} \qquad (11.118) \end{aligned}$$

Die Zustandsdichte fällt also mit $1/\sqrt{E}$ ab. Wohlgemerkt, dass ist das Ergebnis, wenn es sich um einen eindimensionalen Leiter handelt. Für Festkörper muss das Resultat für drei Dimensionen hergeleitet werden.

Ein Beispiel aus der Halbleiterphysik

Für elektronische Bauteile schichtet man verschiedene Halbleitermaterialien übereinander. Die Schichtdicken sind oft im nm-Bereich, so dass Quanteneffekte zum Tragen kommen. Abb. 11.35 zeigt eine solche Struktur. Elektronen am Boden der Potenzialmulde können sich aufgrund der Topftiefe nicht frei bewegen, da es in $Al_{0.3}Ga_{0.7}As/GaAs$ keinen entsprechenden Energieniveaus gibt. Der Transport von Elektronen ist also auf zwei Dimensionen beschränkt. Man nennt diese Struktur einen Quantentopf. Eine Besonderheit in einem Kristall kommt hinzu. Die Periodizität des Kristallgitters führt dazu, dass man den Elektronen einen geringere effektive Masse zuordnen kann (Kapitel *Festkörperphysik*). Die effektive Masse in GaAs beträgt nur $0.67 \cdot m_e$. Damit ändert sich die deBroglie Wellenlänge erheblich und es ergeben sich Energiezustände in diesem Quantentopf, die von GaAs-Elektronen besetzt werden können, wie Abb. 11.36 zeigt. Solche Strukturen sind die Grundlage für *quantum-well*-Laser [**?**].[31] Diese Halbleiterdioden bestehen aus einer hauchdünnen Lage aus GaAs zwischen GaAlAs-Schichten. Dies beschränkt die Bewegung der Ladungsträger auf eine Dimension. Übersteigt der Strom einen bestimmten Grenzwert, beginnt die Schicht zu leuchten. *Quantum-well*-Laser zeichnen sich durch einen äußerst geringen Schwellenstrom aus. Verringert man die Topfbreite, vergrößern sich die Energieabstände. Dies ermöglicht Lasertätigkeit bis in den optischen Spektralbereich. Anwendung finden diese Lasersysteme in der Laserspektroskopie, der optischen Nachrichtenübertragung, sowie der Materialbearbeitung.

Ein Beispiel aus der Atomphysik

Im Atom ist die Bewegung der Elektronen auf ein eng begrenztes Raumgebiet von etwa $10^{-10}\,\mathrm{m}$ begrenzt, Wir vereinfachen die Betrachtung und sehen das Atom als Kasten für Quantenteilchen an. Setzt man die Randbedingungen für das Atom in die gefundene Gleichung ein, ergeben sich akzeptable Werte. Zumindest die Größenordnung der tatsächlichen Energieabstände wird gut wiedergeben, was aufgrund der vereinfachten Behandlung der Objekte erstaunlich ist.

Für die Rechnung verwenden wir den mittleren Radius eines neutralen Atoms von $0.158\,\mathrm{nm}$.

$$
\begin{aligned}
E_N^{electron} &= \frac{h^2}{8\,m_e\,e}\left(\frac{n^2}{a_{atom}^2}\right) \\
E_N^{electron} &= 3.77 \cdot 10^{-19}\left(\frac{n^2}{(0.316 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})^2}\right)\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{m}^2 && (11.119)\\
E_1^{electron} &= 3.75\,\mathrm{eV} && (11.120)\\
E_2^{electron} &= 14.98\,\mathrm{eV} && (11.121)
\end{aligned}
$$

[31] The Nobel Prize in Physics 2000 was awarded *for basic work on information and communication technology* with one half jointly to Zhores I. Alferov and Herbert Kroemer *for developing semiconductor heterostructures used in high-speed- and opto-electronics* and the other half to Jack S. Kilby *for his part in the invention of the integrated circuit*

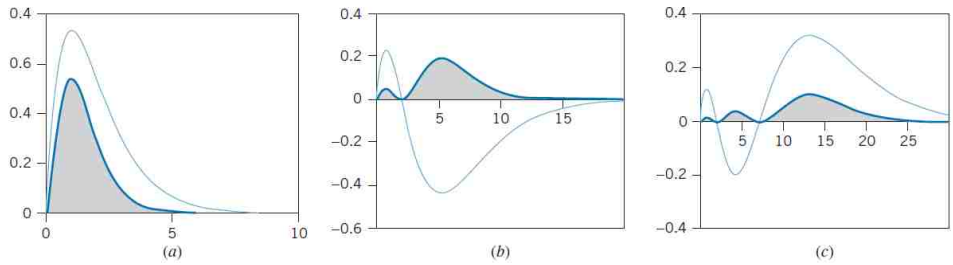


Abb. 11.37: Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsdichten (schattiert) für ein Elektron in einem eindimensionalen Coulombpotential. Die horizontale Achse stellt den Abstand zwischen dem Proton und dem Elektron in Einheiten des Bohrschen Radius dar. (a) Grundzustand. (b) 1. angeregter Zustand. (c) 2. angeregter Zustand [**?**].

Im Wasserstoffatom sendet das Atom Licht aus, wenn das Elektron auf ein tieferes Energieniveau wechselt. Die Energiedifferenz zwischen E_2 und E_1 beträgt 11.24 eV. Dies entspricht nach Planck einer Wellenlänge von 110 nm. Die Emission liegt im ultravioletten Spektrum. Zum Vergleich findet man für die entsprechende Lyman-α Linie im Wasserstoff ($1 \leftarrow 2$) einen Wert von 121 nm. Für ein so stark vereinfachtes Modell des Wasserstoffatoms ist das Ergebnis erstaunlich nahe an der Realität. Wie sieht die Wellenfunktion und die Wahrscheinlichkeitsdichte aus, wenn man ein eindimensionales System mit einem Coulombpotenzial betrachtet (Abb. 11.37)?

Ein Beispiel aus Molekülphysik

Die Bildung von Molekülen wie H_2, N_2, Cl_2, H_2O und NH_3 erfolgt aufgrund der kovalenten Bindung.[32] Dabei bewegen sich die Elektronen in einem Bereich der beide Atome umschließt. H_2^+ ist das einfachste kovalent gebundene Molekül und besteht aus zwei Protonen und einem Elektron. Oben haben wir dieses System schon kurz im Zusammenhang mit der resultierenden Wellenfunktion betrachtet. Um die Physik zu verstehen, approximieren wir das Coulombpotenzial des Protons durch einen eindimensionalen Potenzialtopf der Breite 0.1 nm und einer Tiefe von 24.2 eV. Im Kapitel *Bohrsches Atommodell* werden wir feststellen, dass der Radius der Elektronenbahn, der Bohrsche Radius etwa 0.05 nm beträgt und das Elektron mit 13.6 eV gebunden ist. Löst man die Schrödingergleichung für den angegebenen Potenzialtopf ergeben sich die Bindungsenergie im Wasserstoff-Grundzustand. Für unsere Zwecke reicht die obige grobe Näherung aus. Im H_2^+ beträgt der Gleichgewichtsabstand der Protonen 0.12 nm. Wir betrachten zwei Potenzialtöpfe in genau diesem Abstand. Abb. 11.38 zeigt die resultierenden Wellenfunktionen und Aufenthaltswahrscheinlichkeiten. Für n=1 hat die Wellenfunktion eine hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit im verbotenen Bereich zwischen den beiden Potenzi-

[32] *Lexikon:* Die **Kovalente Bindung** ist in der Molekülphysik eine interatomare Bindung, bei der die Atome Elektronen gemeinsamen nutzen. Die Bindung entsteht durch die elektrostatische Anziehung der Elektronen durch mehrere Kerne. Eine kovalente Bindung bildet sich, wenn das gebundene System eine geringere Gesamtenergie hat als die separierten Atome.

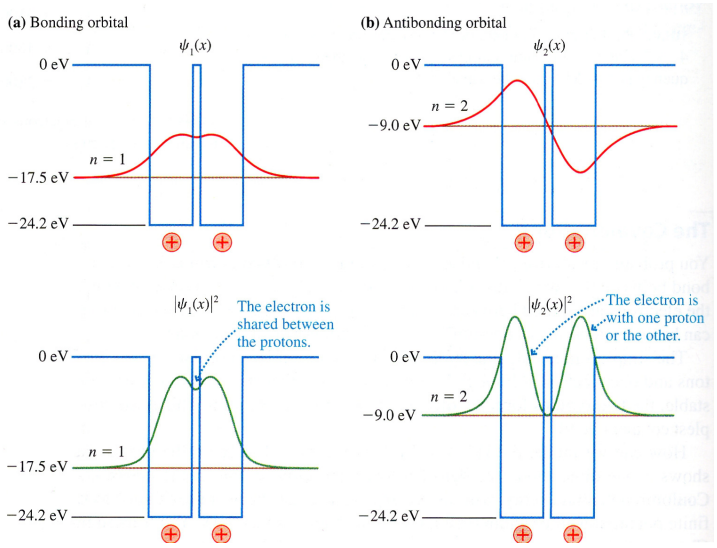


Abb. 11.38: Energiewerte, Wellenfunktionen und Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für das Elektron im Molekül H_2^+ [**?**].

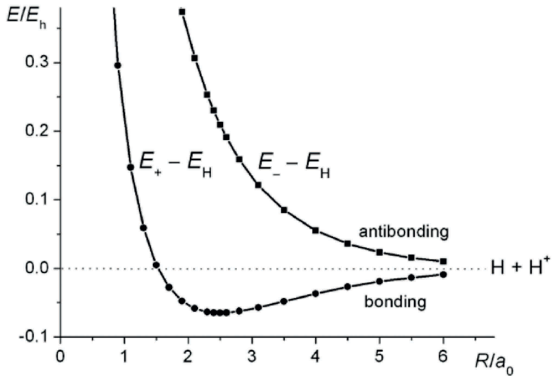


Abb. 11.39: Berechnete bindende und antibindende Potenzialkurven für H_2^+ [**?**].

altöpfen. Die beiden Protonen teilen sich also das Elektron. Im Energiezustand $E_{electron}$ für $n = 2$ hat das Elektron ein Minimum in der Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Bereich zwischen den Potenzialtöpfen. Das Elektron ist demnach entweder am Ort des einen oder des anderen Protons zu finden. Zusätzlich zu diesem Wert müssen wir noch die Coulombabstoßung der beiden Protonen berücksichtigen. Der resultierende Energiewert ist E_{pp}=+12 eV. Die Energiebilanz für das Molekül $E_{H_2^+}$ sieht dann folgendermaßen aus:

$$E_{H_2^+}(n=1) = E_{pp} + E_{electron} = 12.0\,\text{eV} - 17.5\,\text{eV} = -5.5\,\text{eV} \quad (11.122)$$

$$E_{H_2^+}(n=2) = E_{pp} + E_{electron} = 12.0\,\text{eV} - 9.0\,\text{eV} = +3.0\,\text{eV} \quad (11.123)$$

Die Gesamtenergie für n=1 ist negativ und das System ist mit –5.5 eV gebunden. Der Beitrag des Elektrons reicht aus, das Molekül zu stabilisieren. Man spricht von einem bindenden Orbital. Dagegen ist das System im Zustand n=2 mit +3.0 eV nicht gebunden und das Molekül würde in ein Wasserstoffatom und ein Proton zerfallen. In diesem Fall spricht man von einem antibindenden Orbital. Ändert man den Abstand der Protonen,

verändern sich die Energiewerte. Kommen sich die Protonen zu nahe, überwiegt die Coulombabstoßung, sind die Protonen zu weit entfernt reicht der bindende Beitrag des Elektrons nicht mehr aus um das System im Energiezustand n=1 zu binden. Abb. 11.39 zeigt das Ergebnis einer genaueren Rechnung [**?**]. Aufgrund dieser Überlegungen kann man darauf schließen, dass es einen Abstand gibt, bei dem die Bindungsenergie am höchsten ist. Genau diesen Fall haben wir betrachtet.

Beispiele aus Kernphysik

Ein ähnliche Rechnung kann man für den Atomkern durchführen. Auch hier stimmen die Werte des einfachen Potenzialtopf-Modells gut mit den experimentellen Werten überein. An dieser Stelle kann man die Frage aufwerfen: Gibt es auch Elektronen im Kern? Ein Kern mit A=20 Nukleonen hat einen Durchmesser von $2\,r_A$=$3\cdot10^{-15}$ m.[33] Die zugehörige (halbe!) deBroglie Wellenlänge des Elektronengrundzustands ist

$$\lambda_{dB} = 2 \cdot r_A = 1.2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m} \tag{11.124}$$

Mit dieser Informationen kann man die Geschwindigkeit v_e der Elektronen berechnen. Wie sich herausstellt, erreicht v_e eine relativistische Größenordnung. Unter diesen Bedingungen wird die Ruheenergie des Teilchens vernachlässigbar und die Einsteinsche Energie-Impulsgleichung (Kapitel *Einsteingleichung*) reduziert sich auf die kinetische Energie des Teilchens

$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{p^2c^2 - m_0^2c^4} \\
E &\approx p \cdot c \\
E_{kin} &= \frac{h \cdot c}{\lambda_{dB}} \\
E_{kin} &= \frac{(6.6. \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{(1.2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m})} \\
E_{kin} &= = 1.27 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J} \\
E_{kin} &= = 77.3 \cdot 10^{6}\,\mathrm{eV} \\
E_{kin} &= = 77.3\,\mathrm{MeV}
\end{aligned} \tag{11.125}$$

Dieser Wert für die kinetische Energie ist deutlich höher als typische Bindungsenergie pro Nukleus von etwa 8 MeV in Kernen (siehe Kapitel *Kerne*). Es ist also höchst zweifelhaft, ob Elektronen mit solch hohen kinetischen Energien durch das Kernbindungspotenzial gehalten werden könnten. Bei geringeren E_{kin} ergäbe sich eine zu große deBroglie Wellenlänge. Es ist also recht unwahrscheinlich, dass sich Elektronen im Kern aufhalten, obwohl der radioaktive β^--Zerfall[34] (Kapitel *Ionisierende Strahlung*) das suggeriert.

[33] Im Kapitel *Kerne* wird gezeigt, wie man die Größe eines Atomkerns aus der Anzahl der Nukleonen bestimmt.

[34] Beim β^--Zerfall relaxiert der Kern unter Aussendung eines Elektrons.

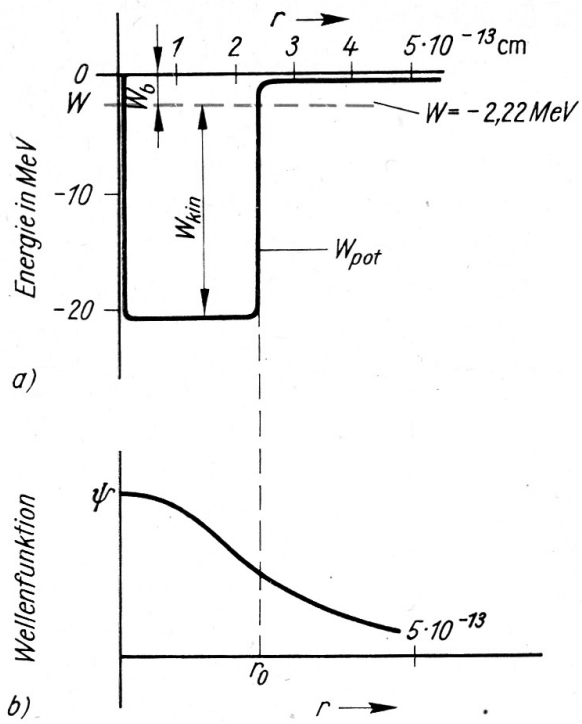


Abb. 11.40: (a) Der Potenzialverlauf für die Neutron-Proton Wechselwirkung ist annähernd kastenförmig. (b) Wellenfunktion für den Grundzustand des Systems. Die Bindungsenergie beträgt -2.22 MeV [**?**].

Deuterium (D) ist ein Isotop des Elements Wasserstoff und besteht aus einem Kern, der aus einem Proton (p) und einem Neutron (n) zusammengesetzt ist. Aus der Analyse des Massendefekts (m_D: 1875.49 MeV/c^2; m_p: 938.21 MeV/c^2; m_n: 939.50 MeV/c^2) (Kapitel *Einsteingleichung*) ergibt sich eine Bindungsenergie von 2.22 MeV. Man kann die Bindungsverhältnisse unter Zuhilfenahme eines Kastenpotentials der Breite $2r$=$2.3 \cdot 10^{15}$ m in erster Ordnung klären. Abb. 11.40, oben zeigt das entsprechende Potential in dem der Bindungszustand eingezeichnet ist. Die zugehörige Wellenfunktion zeigt das untere Bild. Der Grundzustand ist durch eine Halbwelle gekennzeichnet, die sich über die Größe des Deuteron ausdehnt

$$2\,r = \frac{\lambda_{dB}}{2} \quad \leftrightarrow \quad \lambda_{dB} = 4\,r \tag{11.126}$$

Proton und Neutron haben dann jeweils den Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{4\,r} \tag{11.127}$$

Damit ergibt sich eine kinetische Energie von

$$\begin{aligned} E_{kin}^{np} &= E_{kin}^{n} + E_{kin}^{p} \\ E_{kin}^{np} &= \frac{p^2}{2\,m_n} + \frac{p^2}{2\,m_p} \\ E_{kin}^{np} &= \frac{h^2}{32\,m_n \cdot r^2} + \frac{h^2}{32\,m_p \cdot r^2} \\ E_{kin}^{np} &= 19.3\,\text{MeV} \end{aligned} \tag{11.128}$$

Damit ergibt sich die Topftiefe des Deuterium-Potenzials mit

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{pot} + E_{kin} \\ E_{ges} &= 19.3\,\mathrm{MeV} + 2.22\,\mathrm{MeV} \\ E_{ges} &= 21.52\,\mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{11.129}$$

Eine Besonderheit der in Abb. 11.40 eingezeichneten Wellenfunktion ist, dass sie sich deutlich über den Rand des verwendeten Kastenpotenzial erstreckt. Die Kerndichte Deuterium ist daher geringer als in den schwereren Elementen.

Ein Beispiel aus der Welt der Quarks

Three quarks for Muster Mark.

Finnegans Wake by James Joyce [**?**].

Im Gegensatz zu den Elektronen haben Nukleonen eine Substruktur aus Quarks.[35] Aus der Grundzustandsenergie im Kastenpotenzial kann man auf die kinetische Energie der Teilchen schließen.

- Das *up*-Quark hat eine Masse von $10\,m_e$ und eine elektrische Ladung in Höhe von $+2/3\,e$.
- Das *down*-Quark hat eine Masse von $20\,m_e$ und eine elektrische Ladung in Höhe von $-1/3\,e$.

Die Bausteine des Kerns setzten sich aus jeweils drei Quarks zusammen.

- Das Proton besteht aus zwei *up*-Quarks und einem *down*-Quark.
- Das Neutron besteht aus einem *up*-Quarks und zwei *down*-Quarks.

Jedes der beiden *up*-Quarks im Proton spürt eine Nettoladung von $+e/3$ aufgrund der Ladung des *down*- und des anderen *up*-Quarks. Da es selbst ebenfalls positiv geladen ist, resultiert daraus eine abstoßende elektrostatische Wechselwirkung. Die Geschwindigkeit der Teilchen im Kastenpotenzial als Funktion von n ergibt sich aus dem Abstand des Energieniveaus zum Boden des Topfes, also Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{h^2}{8\,m \cdot \ell^2} \\ E_{kin} &= \frac{1}{2} m \cdot v^2 \\ v &= \frac{h}{2\,m \cdot \ell} \end{aligned} \tag{11.130}$$

[35] *Lexikon:* Allgemein bilden Gruppen aus drei Quarks die Klasse der **Baryonen**, während Teilchen aus zwei Quarks zur Klasse der **Mesonen** zählen. Baryonen und Mesonen bilden zusammen die Klasse der **Hadronen**.

Mit diesen Informationen können wir die Größenordnung der elektrostatischen Wechselwirkung wieder anhand einer Betrachtung zur Energieerhaltung berechnen.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= |E_{pot}| \\ \frac{1}{2} m_u \cdot v_u^2 &= \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{q_u \cdot q_u}{\ell_u} + \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{q_d \cdot q_u}{\ell_u} \\ \frac{1}{2} m_u \cdot v_u^2 &= \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{(2/3e - 1/3e) \cdot (2/3e)}{\ell_u} \\ \frac{1}{2} m_u \cdot \frac{h^2}{4\,m_u^2 \cdot \ell_u^2} &= \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{(2/3e - 1/3e) \cdot (2/3e)}{\ell_u} \\ \ell_u &= \frac{9}{8} \frac{\varepsilon_0 \cdot h^2}{m_u \cdot e^2} \\ \ell_u &= 1.87 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{11.131}$$

Dieser Wert, berechnet auf der Grundlage einer irgendwie gearteten elektrostatischen Wechselwirkung stimmt noch nicht mal annähernd mit der tatsächlichen Größe des Protons von $r_p = 1.7 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$ überein. Das lässt nur den Schluss zu, dass es eine weitere Kraft geben muss, die das Proton zusammenhält. Diese neue fundamentale Wechselwirkung ist die starke Wechselwirkung, die die Protonen über Gluonen[36] im wahrsten Sinne zusammen leimt. Man kann aus unserer groben Überlegung sogar die Größenordnung der neuen Kraft abschätzen. Dazu berechnen wir wie oben die Verhältnisse im Wasserstoffatom. Man erhält für den entsprechenden Kasten für Elektron und Proton

$$\begin{aligned} \ell_e &= \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h^2}{2\,m_e \cdot e^2} \\ \ell_e &= 2.61 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \approx 5\,r_{Bohr} \end{aligned} \tag{11.132}$$

$$\begin{aligned} \ell_p &= \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h^2}{2\,m_p \cdot e^2} \\ \ell_p &= 1.42 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{11.133}$$

Bohrscher Radius: $r_{Bohr=}0.529 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$

Der Wert für das Elektron (ℓ_e) entspricht in etwa dem fünffachem des Bohrschen Radius (Kapitel *Bohrsches Atommodell*), der den Radius der ersten Bohrschen Bahn, also im Grundzustand angibt. Kein schlechtes Ergebnis für das grobe Modell! Nutzen wir das Ergebnis für das Proton und sperren es ein in einen Kasten, der dem Protondurchmesser

[36] glue, englisch Leim

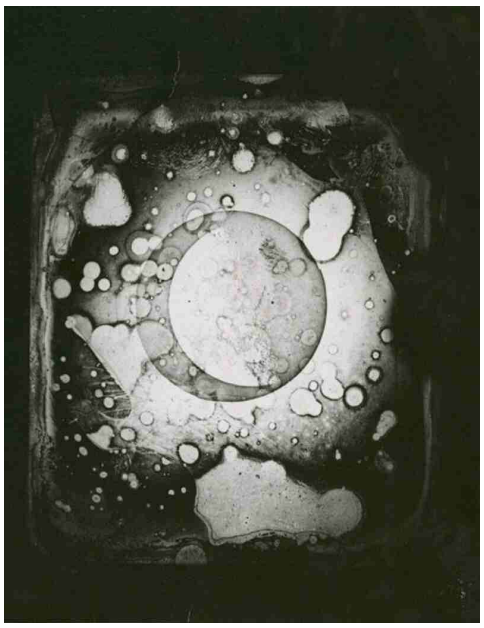


Abb. 11.41: Erste astronomische Photografie. Diese Aufnahme des Mondes wurde am 26. März 1840 vom Dach des Observatoriums der New York University von John W. Draper aufgenommen [**?**].

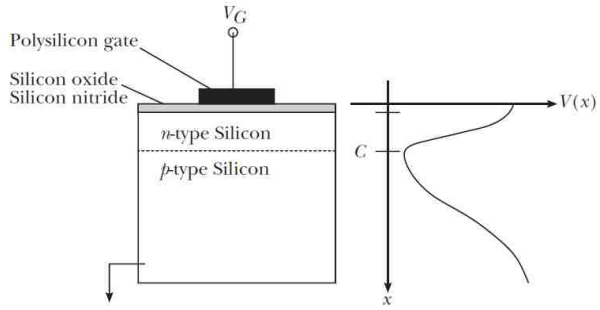


Abb. 11.42: Struktur eines einzelnen Pixels in einer CCD-Zeile. Die Abbildung rechts zeigt, wie die potenzielle Energie mit der Tiefe im Gerät variiert und für Elektronen einen Potenzialtopf ausbildet [**?**].

entspricht.

$$\begin{aligned} f \cdot r_p &= \ell_p \\ f &= \frac{\ell_p}{r_p} \\ f &= \frac{1.42 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}}{1.7 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}} \\ f &= 83.6 \end{aligned} \tag{11.134}$$

Der ermittelte Faktor stimmt gut mit dem Literaturwert von 100 für die Starke Wechselwirkung überein. Man sieht, dass das Konzept des Kastenpotenzials in vielen Fällen und in unterschiedlichsten Zusammenhängen physikalisch vernünftige Ergebnisse liefert.

Ein Beispiel aus der Astronomie

Bis zum 17. Jahrhundert wurde die Astronomie ausschließlich mit dem bloßen Auge betrieben. Das Auge ist ein guter Lichtdetektor, aber es hat Grenzen in Bezug auf die Anforderungen der Astronomie: (i) Die Nachweiseffizienz beträgt wenige Prozent. (ii)

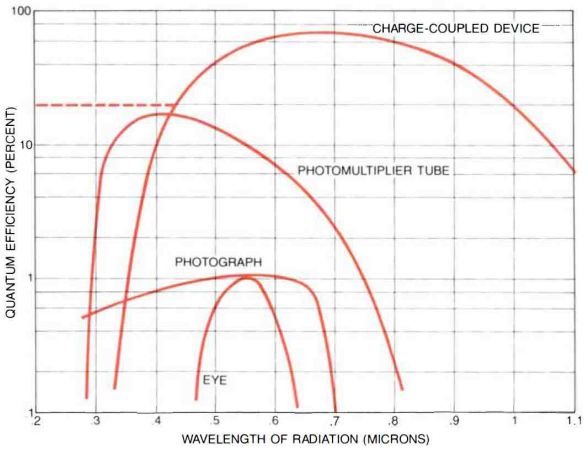


Abb. 11.43: Einordnung der in der Astronomie verwendeten Lichtdetektoren in Bezug auf ihre Sensibilität (Quanteneffizienz) und ihren Spektralbereich. Eine CCD ist bei fast allen Wellenlängen anderen Nachweismethoden überlegen [**?**].

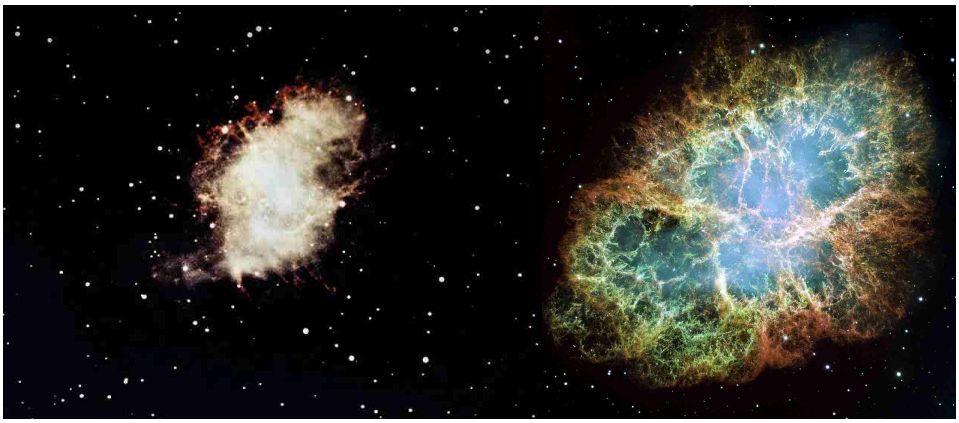


Abb. 11.44: Aufnahmen des Krebsnebels. *links:* Photographie, aufgenommen mit dem Hale-Teleskop (1959); *rechts:* CCD-Aufnahme mit dem Hubble Weltraumteleskop Teleskope!Weltraum-T.!Hubble (2000). Die Steigerung in der Qualität der Aufnahme ist unter anderem auf die Verwendung von CCDs zurückzuführen [**?**].

Der Mensch detektiert nur den optischen Spektralbereich und kein ultraviolettes und infrarotes Licht. (iii) Man kann geringe Unterschiede in der Lichtintensität wahrzunehmen, aber absolute Helligkeiten zu bestimmen oder Lichtsignale integrieren ist praktisch unmöglich. Letzteres anders ausgedrückt: Länger in den Nachthimmel zu schauen führt nicht dazu, dass man mehr Sterne wahrnimmt. Ein wichtiger Fortschritt war die Entwicklung von Teleskopen. Galileo Galilei bemerkte: Stars, which escape the unaided sight, so numerous as to be beyond belief. Immer noch war das Auge mit seinen nachweislichen Unzulänglichkeiten der Nachweisdetektor. Am Ende des 19. Jahrhunderts entwickelte man die Photographie (siehe Fig. 11.41), die schnell zum wichtigsten Nachweisverfahren der Astronomie wurde. Eine photographische Emulsion ist nicht empfindlicher als das Auge, hat aber den Vorteil, dass man das Signal eines lichtschwaches Objekts über lange Zeit akkumulieren kann. Ein Photo ist darüber hinaus eine dauerhafte Aufzeichnung, die auch später untersucht oder als Referenz verwendet werden kann. Aber es geht besser.

Aber es geht besser und das mit Hilfe des Konzepts Potenzialtopf. Allerdings weicht die Realisation oft von der hier behandelten kastenförmigen Potenzialform ab. CCDs (*charged-coupled-devices*) nutzen Potenzialtöpfe, um Elektronen einzufangen und Informationen über die Lichtintensität zu liefern. CCDs bestehen aus einer zweidimensionalen Anordnung variabler Elektronenfallen auf der Oberfläche eines Siliziumchips, Das Silizium erfüllt einen doppelten Zweck: (i) ein Elektron wird emittiert, wenn ein Photon auftrifft (ii) das freigesetzte Elektronen wird vom Potenzialtopf lokal eingefangen, siehe Abb. 11.42. Die Aufzeichnung eines Lichtsignals mit einer CCD ist vergleichbar mit der Messung der Verteilung von Niederschlags auf einem Feld nach einem Regenguss. Eimer werden vor dem Regen aufstellt und danach auf Förderbändern zu einer Messstation transportiert, an der die Wassermenge in jedem Eimer bestimmt wird. In einer CCD sind die Eimer Zonen (Pixel), die Elektronen aufsammeln. Die Anzahl an Elektronen in einem der Sammelbereich und damit die Anzahl der Photonen, die auf einen bestimmten Pixel des Chips treffen, kann Topf-für-Topf ausgelesen werden. Der Name *charge-coupled-devive* beschreibt, dass die Elektronengruppen zwischen den Potenzialtöpfen bewegt werden. Die eingefangenen Elektronen werden schrittweise in benachbarte Potenzialtöpfe verschoben und schließlich ausgelesen, indem die Spannung an den Elektroden systematisch verändert wird. Die Erfindung der CCDs hat einen wichtigen Beitrag zum optischen Nachweis weit entfernter astronomischer Objekte geliefert. Abb. 11.43 demonstriert, wie sich stark sich die Nachweisempfindlichkeit durch den Einsatz von CCDs erhöht hat. Abb. 11.44 zeigt eine Vergleich von historischen Aufnahmen des Krebsnebels vor und nach Einführung der CCD-Technik.

CCD-Bildsensoren haben Vorteile gegenüber anderen Methoden der Lichtdetektion. So weisen CCDs etwa 90% der auftreffenden Photonen nach und sind deutlich empfindlicher als photografische Emulsionen, die nur wenige Prozent nachweisen. Weiter ist die Auslesespannung direkt proportional zur Stärke des einfallenden Lichts. Die Messung lichtstarker Objekte wird nur limitiert durch die maximale Anzahl an Elektronen, die in die einzelnen Potenzialtöpfe passen. CCDs können bis zu 10^5 Elektronen in jedem Topf speichern. Der Dynamikbereich ist damit um einen Faktor 100 höher im Vergleich zu Emulsionen.

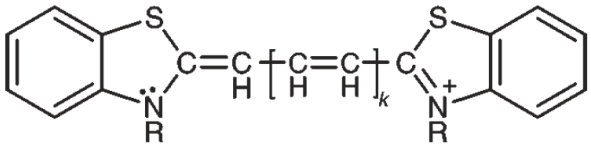
Ein Beispiel aus der Chemie

Elektronen sind häufig nicht frei beweglich. In bestimmten Strukturen können sich die Teilchen nur entlang bestimmter Richtungen frei bewegen. Diese bilden einen eindimensionalen Potenzialtopf. Beispiele sind Halbleiter-Quantendrähte[37] und Kettenmoleküle. Kann das Konzept des Potenzialtopfs die Farbe von Blumen, wie beispielsweise die von roten Rosen (Abb. 11.45), erklären? Verantwortlich für den Farbeindruck sind organische Kettenmoleküle, so genannte Cyanine, siehe Abb. 11.46. In diesen Molekülen sind die

[37] *Lexikon:* Wenn zwei Dimensionen eines Materials auf den Nanometer Größenbereich reduziert werden und nur die dritte Dimension makroskopisch bleibt, dann bezeichnet man diese Struktur als **Quantendraht**.



Abb. 11.45: Eine Rose ist eine Rose ist eine Rose (Gedicht von Gertrude Stein, 1913).



2

Abb. 11.46: Thiacarbocyanin Farbstoff [**?**].

π-Elektronen[38] entlang der Kette nahezu frei beweglich. Die so beschriebenen Systeme haben also starke Ähnlichkeiten mit dem gerade beschriebenen Modellsystem eines freien Teilchens in einem eindimensionalen Kasten. Bei der Besetzung der Energiezustände gilt das Pauli-Prinzip (Kapitel *Beyond Bohr*): Die Energiezustände werden von unten angefangen aufgefüllt und in jeden Zustand passen immer nur zwei Elektronen, siehe Abb. 11.47. Bei einer Anregung wechselt ein Elektron aus dem höchsten besetzten in den darüber liegenden unbesetzten Zustand. Diese Überlegungen geben eine empirische Regel der Farbstoffchemie wieder. Je länger eine Kohlenstoffkette ist, desto länger ist die Wellenlänge des Lichts, das von dem Molekül bevorzugt absorbiert wird. Das bestätigt sich beispielsweise in den Carotinen.

[38] *Lexikon:* In aromatischen Verbindungen können π-Elektronen in Molekülorbitalen lokalisiert sein, die sich über mehrere Kohlenstoffatome erstrecken und eine Wolke delokalisierter Elektronen darstellen. Ein klassisches Beispiel für ein solches Molekül ist Benzol.

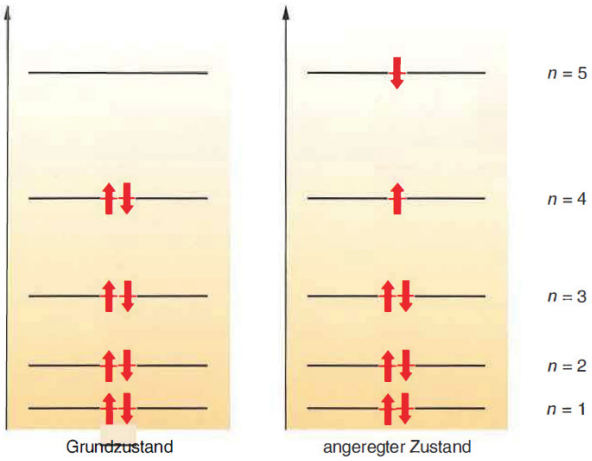


Abb. 11.47: Grundzustand und erster angeregter Zustand eines Farbstoffmoleküls mit 8π-Elektronen im Rahmen des *particle-in-a-box* Modells [**?**].

Die Länge der Kettenmoleküle kann von der Chemie eingestellt werden. Damit ergibt sich die Möglichkeit, die Abmessungen der Systeme variabel zu gestalten. Die Analyse ergibt eine Gleichung, die jede der Ketten eine bestimmte Abfolge an möglichen Energiewerten vorgibt. Wir berechnen den Energieunterschied ΔE zwischen den einzelnen Energiezuständen.

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{h^2}{8\,m_e}\frac{n_f^2 - n_i^2}{L_{cyanine}^2} \tag{11.135}$$

In Molekülen sind alle Energiezustände bis zum HOMO[39] besetzt. Alle darüber liegenden Orbitale mit niedrigerer Bindungsenergie sind unbesetzt. Das niedrigstliegende Orbital nennt man LUMO.[40] Der Energiesprung mit der geringsten Energie ist deshalb der zwischen HOMO und LUMO. Jedes Molekülorbital enthält 2 Elektronen. Bei N Elektronen, ist die Anzahl der besetzten Molekülorbitale also $N/2$ und für ΔE ergibt sich [**?**]:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{h^2}{8\,m_e \cdot L_{cyanine}^2}\left[\left(\frac{N}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{N}{2}\right)^2\right] \tag{11.136}$$

Im Kapitel *Bohrsches Atommodell* werden wir lernen, dass der Energieunterschied ΔE der Energie eines absorbierten Photons entspricht. Abb. 11.48 verdeutlicht den Zusammenhang. Mit $\Delta E = h\,\nu = h\,c/\lambda$ ergibt sich für die zugehörige Wellenlänge

$$\lambda_{cyanine} = \frac{8\,m_e \cdot c}{h} \cdot \frac{L_{cyanine}^2}{N+1} \tag{11.137}$$

Um aus dem Grundzustand in einen der höheren Energiezustände zu gelangen, muss dem Cyanin eine definierte Energiemenge zugeführt werden. Wie man an der Gleichung erkennt, hängt der Wert von ΔE von der Länge der Kette ab. Je länger das Kettenmolekül, desto weiter verschiebt sich die Absorption zu längeren Wellenlängen, also beispielsweise von gelb nach rot. Cyanine mit einer bestimmten Kettenlänge absorbieren damit nur Licht in einem bestimmten Wellenlängenbereich. Zum Beispiel absorbieren Cyanine, als Bestandteil der Blüte von Rosen, Licht im grünen Spektralbereich. Dem Betrachter erscheint die Rose deshalb rot, weil die grün-blauen Spektralanteile fehlen.

Man kann diese Überlegungen auch auf andere Klassen von organischen Molekülen übertragen,[41] wie zum Beispiel Polyene.[42] Bei den einfachsten dieser Substanzen sind die Endgruppen Wasserstoffatome. Zu dieser Stoffgruppe gehören die in der Natur weit

[39] HOMO: highest occupied molecular orbital

[40] LUMO: lowest unoccupied molecular orbital

[41] The Nobel Prize in Chemistry 2000 was awarded jointly to Alan J. Heeger, Alan G. MacDiarmid and Hideki Shirakawa *for the discovery and development of conductive polymers*

[42] *Lexikon:* **Polyene** sind organische Verbindungen, die C-C Doppelbindungen enthalten. Die einfachsten Polyene sind Butadien und Isopren, die je zwei Doppelbindungen besitzen. Ein komplexeres Polyen ist Polyacetylen $(C_2H_2)_n$. Polyene weisen eine über das gesamte Molekül verteilte (delokalisierte) Dichte an π-Elektronen auf.

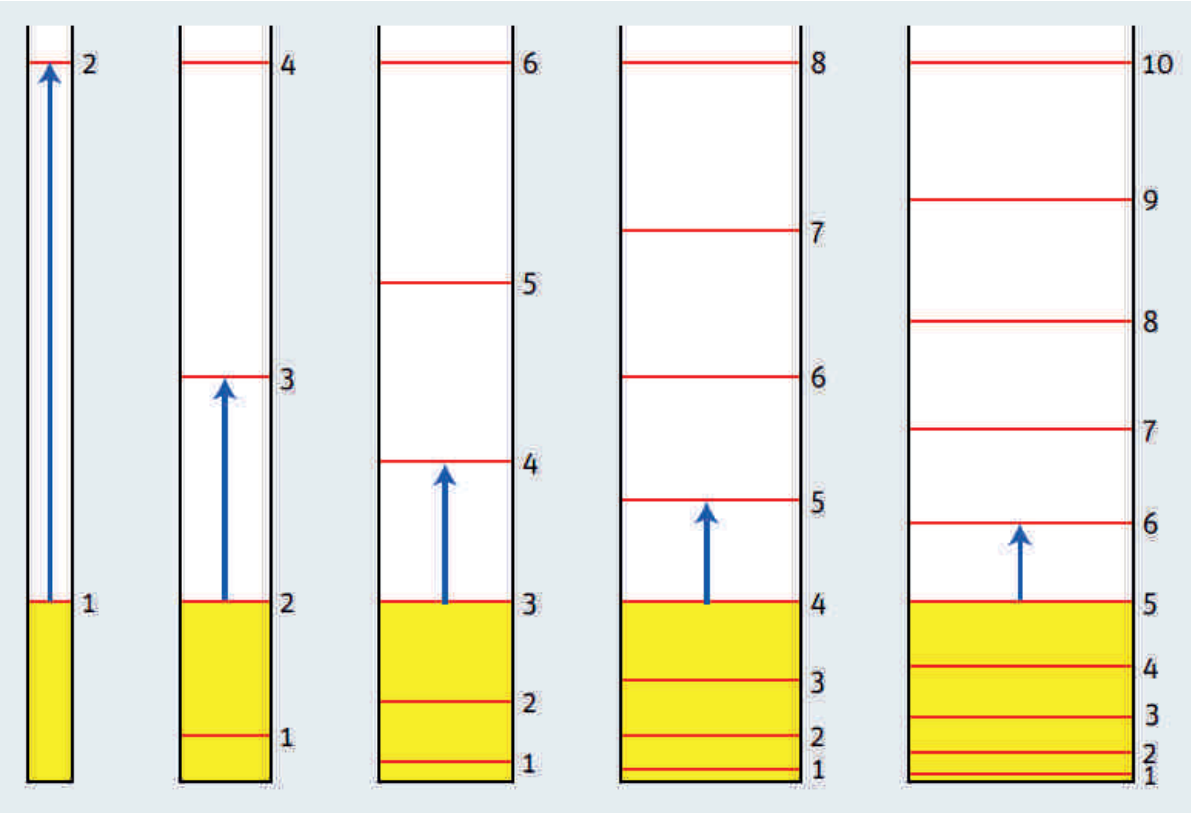


Abb. 11.48: Für ein Elektron gefangen in einer Kohlenstoffkette ist der Übergang von einem besetzten zu einem nicht besetzen Energiezustand umso geringer, je länger die Kette ist. Nach der Planckschen Gleichung ist die Energiedifferenz umgekehrt proportional zur Länge der Kette [**?**].

verbreiteten Carotinoide. Für die Berechnung geht man, wie bei den Cyaniden, von vollständig delokalisierten π-Elektronen aus. Vergleicht man berechnete und experimentelle Werte, stellt man Unterschiede fest. Tatsächlich sind die experimentellen Anregungsenergien geringer. Die Differenz gibt Auskunft darüber in wieweit eine vollständige Delokalisierung in dem betrachteten System erreicht wird. Die hier beschriebenen Beispiele zu den Kettenmolekülen werden in der Chemie als Standardbeispiele für das *particle-in-a-box* Problem verwendet [**? ? ?**].

Ein Beispiel aus der Welt der Nanokristalle

Kolloidale Nanokristalle haben größenabhängige optische Eigenschaften.[43] Beispielsweise verschiebt sich die Photolumineszenz[44] von CdSe-Nanokristallen mit zunehmendem

[43] The Nobel Prize in Chemistry 2023 was awarded to Moungi G. Bawendi, Louis E. Brus and Aleksey Yekimov *for the discovery and synthesis of quantum dots*

[44] *Lexikon:* Bei der **Photolumineszenz** an Halbleitern werden durch Anregung mit Photonen Elektronen vom Valenzband ins Leitungsband angehoben, siehe Abb. 11.49. Als Resultat ergeben sich so genannte Elektron-Loch-Paare (Exzitonen) (erzeugt, siehe Abb. 11.50. Nach einer für das Material

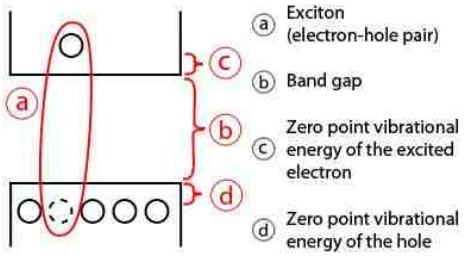


Abb. 11.49: Bildung eines Exzitons (Elektron-Loch Paar) in einem Halbleiter (Bandlücke E_{gap}).

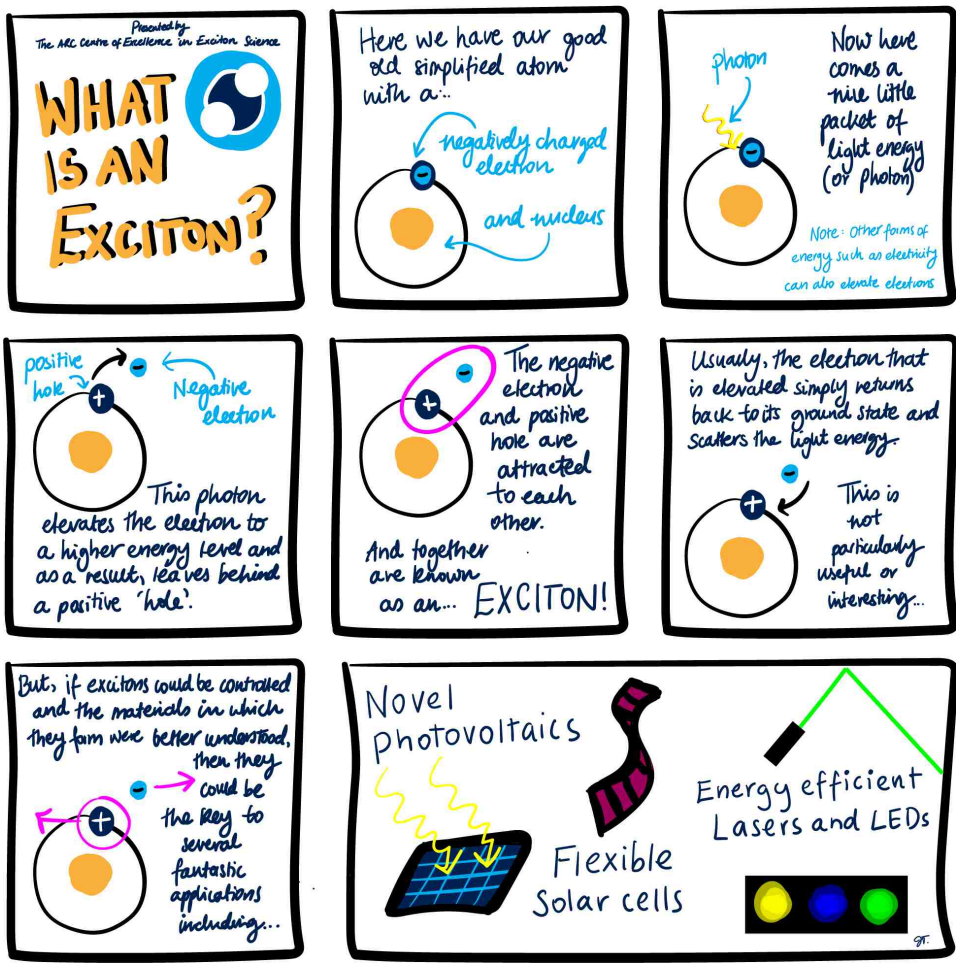


Abb. 11.50: Was versteht man unter einem Exziton [**?**]?

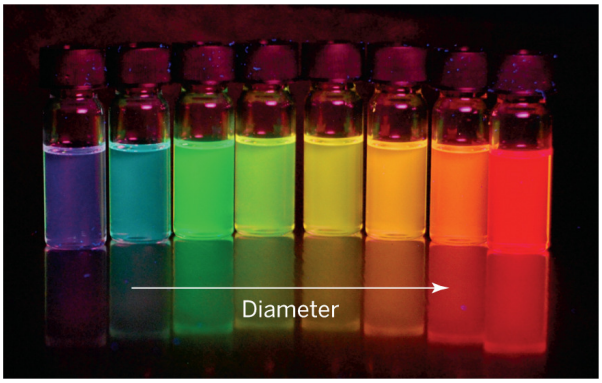
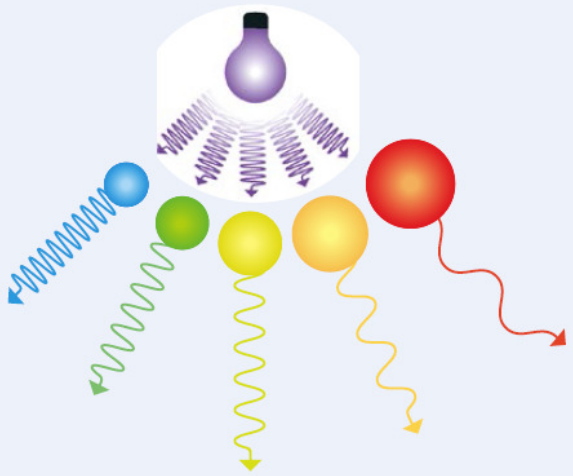
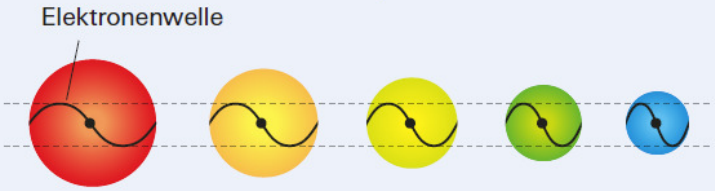


Abb. 11.51: Kolloidale Nanokristalle haben größenabhängige optische Eigenschaften. Zum Beispiel verschiebt sich die Photolumineszenz von CdSe-Nanokristallen mit zunehmendem Durchmesser von blau nach rot [**?**]. Das *particle-in-a-box* Modell ist in der Lage dieses Verhalten zu erklären.

Wie Größe Farbe macht

Wenn man Quantenpunkte mit Licht bestrahlt, leuchten sie in unterschiedlichen Farben, je nachdem, wie groß die Teilchen sind. Ladungsträger in Halbleitern können Energie aufnehmen und einen angeregten Zustand einnehmen. Wenn sie wieder in den Grundzustand zurückfallen, senden sie Licht aus, dessen Farbe vom Energieunterschied zwischen den Zuständen, der so genannten Bandlücke, bestimmt wird. Bei Halbleitern hängt Letztere normalerweise vom Material ab. Bei Quantenpunkten dagegen bestimmt die Teilchengröße diese Eigenschaft.





Ursache des Effekts ist ein quantenmechanisches Phänomen, das auf der Wellennatur von Teilchen wie Elektronen basiert. Wenn die Halbleiterkristalle immer kleiner werden, dann passen größere Wellenlängen nicht mehr in den verfügbaren Platz, so dass sie aus der Wellenfunktion der Ladungsträger verschwinden. Das verändert die Bandlücke des Materials und dadurch auch die Wellenlänge des absorbierten und des ausgesandten Lichts. Je kleiner die Teilchen, desto kürzer die Wellenlängen.

Abb. 11.52: Der Wellenlängenbereich der Emission hängt mit der Größe des Quantenpunkts zusammen. Je größer das Teilchen, desto länger ist die Wellenlänge der Fluoreszenzstrahlung [**?**].

Durchmesser von blau nach rot, siehe Abb. 11.51. Abb. 11.52 erläutert, wie sich die Größe der quantum dots auf die Farbe des Fluoreszenzlichts auswirkt. Die Grundidee zur Beschreibung der Nanokristalle ist, dass der Kristall sphärisch mit Radius R_{QD} ist und ein homogenes Medium ohne z.B. Fehlstellen darstellt. Die Elektronen sind im Innern des Nanokristalls lokalisiert. Es ergibt sich folgende Abfolge an Energiewerten:

$$E_n^{QD}(R_{QD}) = \frac{h^2}{8\,m_c \cdot R_{QD}^2} \cdot n^2 \tag{11.138}$$

Da es sich bei dem betrachteten Material um einen Halbleiterkristall handelt, rechnet man üblicherweise mit einer effektiver Elektronenmasse m_c. Wie man an der Gleichung sieht, ergibt sich eine Reduzierung in der Energie der Zustände, wenn das Teilchen größer wird. Damit verschiebt die Photolumineszenz, wie bei den Kettenmolekülen, immer stärker in den roten Spektralbereich.

Betrachtet man die Bedingungen genauer, ergibt sich die Photonenenergie des emittierten Lichts $\Delta E(R_{QD})$ als Funktion des Nanokristallradius R_{QD} aus der Bruns-Gleichung [**?**]:

$$\Delta E^{QD}(R_{QD}) = E_{\text{gap}} + \frac{h^2}{8\,R_{QD}^2}\left(\frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*}\right) \tag{11.139}$$

Die Bandlücke E_{gap}, die effektive Elektronen m_e^* und die effektive Masse des Lochs m_h^* sind dabei abhängig vom Material. For Cadmiumselenid (CdSe) verwendet man folgende Werte: E_{gap}=1.74 eV, m_e^*=0.13 m_e, m_h^*=0.45 m_e.

In der Medizin will man leuchtende Quantenpunkte nutzen, um nach Tumoren zu fahnden oder den Transport von Medikamenten im Körper zu verfolgen. In Solarzellen könnten Quantenpunkte helfen, die Lichtabsorption effektiver an das Spektrum der Sonne anzupassen. Es gibt Ideen, die Einstellbarkeit der Wellenlänge zur Datenübermittlung über mikroskopische Lichtquellen in Chips zu nutzen. Eine weitere Anwendungen ist der Einsatz in Quantencomputern.

Der Stand der Dinge

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Lösung der stationären Schrödingergleichung für die beiden einfachen eindimensionalen Modellpotenziale eine Fülle an physikalischen Problemen behandeln lassen. Was sollte man unbedingt mitnehmen:

- Die Einschränkung der Bewegungsfreiheit von Teilchen auf kleine Raumgebiete führt zur Quantisierung. Beispiele waren das Kastenpotenzial und der harmonische Oszillator. Aber auch Elektronen in einem Kristall müssen -wie man im Rahmen der Festkörperphysik sehen wird- quantenphysikalisch behandelt werden. Hier ist es das periodische Potenzial, das die Quantisierung bewirkt.

charakteristischen Zeitspanne rekombinieren das Elektron und das Loch, wobei die Energie in Form von Licht (Photon) abgegeben werden kann.

- Je nach der Form des Potenzials ergeben sich eine bestimmte Abfolge im Abstand der möglichen Energiewerte. Für das Kastenpotenzial nimmt der Energieabstand mit n^2 zu. Für den harmonischen Oszillator ergibt sich eine lineare Abhängigkeit.

- Im Einklang mit der deBroglie-Wellenlänge (Vorlesung *Materiewellen*), der Heisenbergschen Unschärferelation und dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik stellt sich heraus, dass sich in Quantenphysik alle Teilchen bewegen. Die Nullpunktsenergie belegt: Stillstand ist nicht vorgesehen!

Absoluten Stillstand gibt es nicht - nicht einmal am absoluten Nullpunkt der Temperatur, also bei minus 273.16 Grad Celsius. Die Gesetze der Quantenmechanik verlangen, dass kleinste Teilchen wie Atome und Moleküle sich selbst dann noch rühren, wenn unsere Alltagswelt längst eingefroren ist. Die Bewegungen von Atomen nahe dem absoluten Nullpunkt, die man Quantenfluktuationen nennt, haben Physiker mit einem besonders hochauflösenden Mikroskop nun erstmals direkt beobachtet. Sie haben Rubidium-Atome in einem Gitter aus Laserlicht festgesetzt und auf unter minus 273 Grad abgekühlt. Die Atome sprangen von einem Gitterplatz zum nächsten, obwohl ihre restliche thermische Energie hierzu nicht ausreichen würde [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Welche Energiezustände ergeben sich nach dem *particle-in-a box* Modells für den Atomkern Ca-40?

Kalzium steht im Periodensystem an Position 20, hat also 20 Protonen. Demnach hat ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$ zwanzig Neutronen. In Kapitel *Kerne* wird man lernen, dass aus der Anzahl der Nukleonen N die Größe des Kerns bestimmen kann:

$$R(N) = r_0 \cdot N^{1/3}$$

Der Wert für r_0 beträgt $1.2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$. Für Ca-40 ergibt sich ein Radius von:

$$R({}^{40}_{20}\mathrm{Ca}) = 4.1 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

Damit ergibt sich für die Breite des Potenzialtopfes $a_{nucleus} = 2\,R = 8.2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$. Die zugehörigen Energiezustände sind:

$$\begin{aligned} E_n^{Ca40} &= \frac{h^2}{8\,m_p \cdot e}\left(\frac{n^2}{a_{Ca40}^2}\right) \\ E_n^{Ca40} &= (2.06 \cdot 10^{22})\left(\frac{n^2}{a_{Ca40}^2}\right)\,[\mathrm{eV}] \\ E_n^{Ca40} &= (2.06 \cdot 10^{22})\left(\frac{n^2}{(8.2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m})^2}\right)\,[\mathrm{eV}] \end{aligned}$$

wobei wir die Werte in der Energieeinheit eV angeben. Für die ersten drei Energiezustände ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_1^{Ca40} &= 3.06 \cdot 10^6\,\mathrm{eV} = 3.06\,\mathrm{MeV} \\ E_2^{Ca40} &= 12.24 \cdot 10^6\,\mathrm{eV} = 12.24\,\mathrm{MeV} \\ E_3^{Ca40} &= 27.54 \cdot 10^6\,\mathrm{eV} = 27.54\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Die Bindungsenergie pro Nukleon beträgt in Kernen etwa 10 MeV. Die Abschätzung über das Kastenpotenzial liefert also recht vernünftige Werte.

Aufgabe 3.2: Angenommen, ein Elektron ist im Kern (r=3 fm) eingeschlossen. Wie hoch ist die Kinetische Energie im Grundzustand?

Man nähert sich dem Problem, indem man vereinfachend annehmen, dass es sich um eine Kasten mit Kantenlänge a=6 fm handelt. Da das Elektron eine geringe Ruhemasse ($511\,\mathrm{keV}/c^2$) hat, kann man davon ausgehen, dass man das Elektron relativistisch behandeln muss. Damit gilt für die Gesamtenergie

$$E_{ges} = \sqrt{(p \cdot c)^2 + (m \cdot c^2)^2}$$

Wir suchen den minimalen Wert von p in dieser Box. Die Bedingung, dass die Wellenfunktion an den Systemgrenzen auf NULL abfallen muss, führt auf die Quantisierungsbedingung

$$\begin{aligned} p_x &= \hbar k_x = \frac{h}{2\,a} \\ p_y &= \hbar k_y = \frac{h}{2\,a} \\ p_z &= \hbar k_z = \frac{h}{2\,a} \end{aligned}$$

Man nutzt aus, dass die Grundzustands deBroglie-Wellenlänge $\lambda = 2\,a$ ist. Damit ergibt sich der Impuls mit

$$\begin{aligned} p^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ p^2 &= \frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{4\,a^2} \\ (p\cdot c)^2 &= \frac{3}{4}\frac{(h\cdot c)^2}{4\,a^2} \\ (p\cdot c)^2 &= \frac{3}{4}\frac{(1240\,\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm})^2}{4\,(6\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m})^2} \\ (p\cdot c)^2 &= 3.2\cdot 10^4\,(\mathrm{MeV})^2 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setzen wir in den Energie-Impulssatz ein:

$$E_{ges} = \sqrt{(3\cdot 10^4)^2 + (0.25)^2}\,\mathrm{MeV} = 180\,\mathrm{MeV}$$

Als Resultat ergibt sich ein Wert, der deutlich höher ist als die Ruheenergie des Elektrons. Die relativistische Betrachtung ist also gerechtfertigt und die Kinetische Energie ergibt, da man die Ruheenergie vernachlässigen kann, mit etwa 180 MeV. Das ist ein extrem hoher Wert und es gibt keine Kraft, die in der Lage wäre, Elektronen solch hoher Energie zu binden.

Aufgabe 3.3: Ein Luftkissenschlitten (m=2 kg) pendelt reibungsfrei und unter der Annahme elastischer Stöße zwischen zwei Puffern im Abstand von L=1 m mit einer Geschwindigkeit von v=1 m/s hin und her. Welche Quantenzahl n ergibt sich aufgrund der kinetischen Energie E_{kin} für das betrachtete System?.

Die Kinetische Energie ist:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}\,m\cdot v^2 \\ E_{kin} &= \frac{1}{2}\,(2.0\,\mathrm{kg})\cdot(1.0\,\mathrm{m/s})^2 \\ E_{kin} &= 1.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Der Grundzustand des Teilchens E_1 im Rahmen der Quantenphysik ergibt sich mit

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\pi^2 \cdot h^2}{2\,m \cdot L^2} \\ E_1 &= \frac{\pi^2 \cdot (6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})^2}{2\,(1.0\,\mathrm{kg}) \cdot (1.0\,\mathrm{m})^2} \\ E_1 &= 2.72 \cdot 10^{-68}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Da die Energieniveaus mit n^2 skalieren, ergibt sich:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{E_{kin}}{E_1}} \\ n &= \sqrt{\frac{1.0\,\mathrm{J}}{2.72 \cdot 10^{-68}\,\mathrm{J}}} \\ n &= 6.1 \cdot 10^{31} \end{aligned}$$

Klassische Systeme sind also charakterisiert durch extrem hohe Quantenzahlen. Eine quantenphysikalische Rechnung würde sich nicht von einer im Rahmen der klassischen Physik unterscheiden. Der Aufwand wäre allerdings im letzteren Fall deutlich geringer.

Aufgabe 3.4: Ein F_2-Molekül ($m_{F_2} = 6.3 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$) ist in einem Potenzialtopf der Breite L=3 cm eingesperrt.

(a) Was ist der Energieunterschied zwischen n=4 und n=5?

(b) Bei welcher Quantenzahl erreicht das Molekül den Energiewert $k_b \cdot T_K$, wobei T_K=300 K?

(a) Die Energiezustände ergeben sich aus

$$E_n = \frac{h^2}{8\,m_{F_2} \cdot L^2} \cdot n^2$$

Für die Energiedifferenz ΔE zwischen n=4 und 5 ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_5 - E_4 \\ \Delta E &= \frac{h^2}{8\,m_{F_2} \cdot L^2} \cdot (5^2 - 4^2) \\ \Delta E &= \frac{9}{8} \cdot \frac{h^2}{m_{F_2} \cdot L^2} \\ \Delta E &= \frac{9}{8} \cdot \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})^2}{(6.3 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}) \cdot (3.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \\ \Delta E &= 8.71 \cdot 10^{-39}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

(b) Um die Quantenzahl n zu berechnen, die zu einem Energiewert führt, der in etwa Raumtemperatur entspricht, rechnet man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\frac{h^2}{8\,m_{F_2}\cdot L^2}\cdot n^2 &= k_B\cdot T_K \\
n &= \sqrt{\frac{8\,m_{F_2}\cdot L^2\cdot k_B\cdot T_K}{h^2}} \\
n &= \sqrt{\frac{8\,(6.3\cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg})\cdot(3.0\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2\cdot(1.38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}})\cdot(300\,\mathrm{K})}{(6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})^2}} \\
n &= 2.09\cdot 10^9
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.5: Welche Geschwindigkeit hat das Charm-Quark im Psion?

Das Psion ist ein gebundener Zustand aus einem Charm- und einem Anticharm-Quark. Die Masse dieser Quarks beträgt 1.27 GeV/c^2. Die Bindung erfolgt aufgrund der Starken Wechselwirkung. Man kann das System analog zum Wasserstoffatom behandeln. Allerdings sind die beiden Quarks gleich schwer und die Teilchen bewegen sich relativistisch.

Die Quarks bewegen sich in einem Kasten der Breite 1 fm=10^{-15} m. Die minimale deBoglie-Wellenlänge ist $\lambda/2$=1 fm und der relativistische Impuls damit

$$p\cdot c = \frac{h\cdot c}{\lambda} = \frac{(6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})\cdot(2.998\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{2\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}} = 0.6\,\mathrm{GeV}$$

Die Gesamtenergie ist nach dem Relativistischen Energie-Impulssatz

$$E_{ges} = \sqrt{(m_0\cdot c^2)^2 + (p\cdot c)^2}$$

Die Geschwindigkeit der Quarks ist

$$\begin{aligned}
\frac{v}{c} &= \frac{p\cdot c}{E_{ges}} \\
\frac{v}{c} &= \frac{p\cdot c}{\sqrt{(m_0\cdot c^2)^2 + (p\cdot c)^2}} \\
\frac{v}{c} &= \frac{0.6\,\mathrm{GeV}}{\sqrt{(1.27\,\mathrm{GeV})^2 + (0.6\,\mathrm{GeV})^2}} \\
\frac{v}{c} &= 0.3
\end{aligned}$$

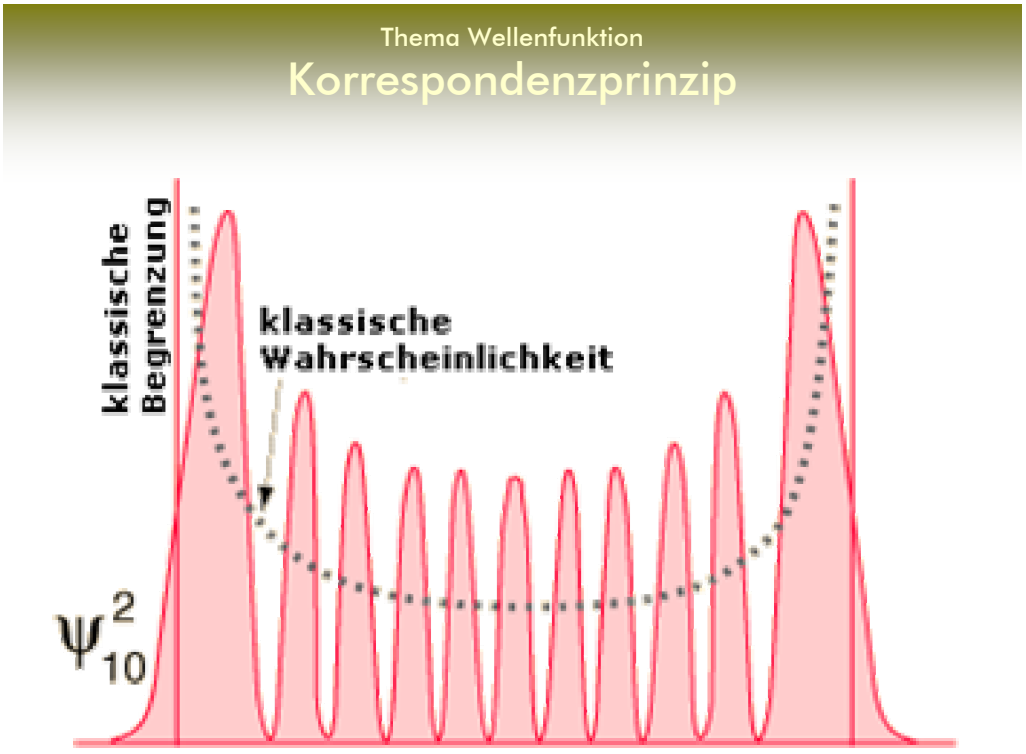
Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche quantenphysikalischen Systeme kann man mit dem Konzept des Kastenpotenzials beschreiben?

2. Welche quantenphysikalischen Systeme kann man mit dem Konzept des harmonischen Oszillators beschreiben?

3. Bei einem Teilchen in einem Potenzialtopf ist die Kinetische Energie im ersten angeregten Zustand vierfach höher im Vergleich zum Grundzustand. Im Wasserstoffatom ist das genau anders herum. Woran könnte das liegen?

11.4 Korrespondenzprinzip



Von Leitern und Rampen

In der Geschichte der Physik gab es selten eine umfassende Theorie, die einem Prinzip so viel verdankte wie der Quantenmechanik Bohrs Korrespondenzprinzip [**?**].

Ohne der Messung einer Observablen ist ein quantenphysikalisches System in einem Zustand, den man als Superposition vieler möglicher Zustände ansehen kann. Dies wird ausgedrückt durch die Wahrscheinlichkeitsdichte. Wird an einem solchen quantenmechanischen System eine Messung durchgeführt, so geht das System dadurch in einen Zustand über, in dem die gemessene Größe einen definierten Wert hat. Man nennt dies den Kollaps der Wellenfunktion.

Abschließend soll noch der Bezug der Quantenphysik zur klassischen Physik deutlich gemacht werden. Die Quantenphysik ist so aufgebaut, dass beim Übergang zu immer größeren Systemen, die quantenphysikalische Beschreibung nahtlos in die klassische Physik übergeht. Dieser Vorgang ist als Bohrsches Korrespondenzprinzip bekannt geworden.

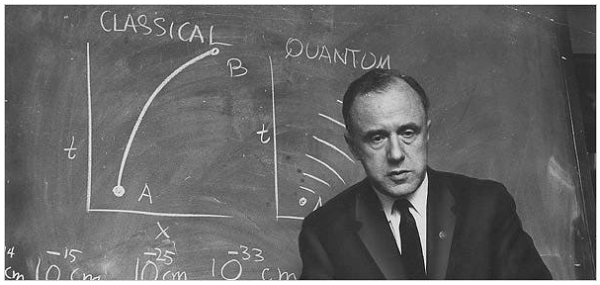


Abb. 11.53: John Wheeler, who termed the name Back Hole.



Abb. 11.54: Analogie, die den Unterschied zwischen Klassischer Physik und Quantenphysik in Bezug auf Energieänderungen illustriert. Die Potenzielle Energie einer Person, die eine *links:* Treppe hinaufsteigt, erhöht sich in einer quantisierten Weise. *rechts:* Rampe hinaufsteigt, erhöht sich kontinuierlich.

In der klassischen Physik kann ein System beliebige Energiewerte annehmen. Für mikroskopische Systeme ergeben sich diskrete Energiewerte. In Abb. 11.53 sieht man John Wheeler vor einer Tafel, wo er eine Skizze gemacht hat, die den Unterschied zwischen Klassischer Physik und Quantenphysik illustrieren soll. Abb. 11.54 stellt den Unterschied am Beispiel des Heraufklettern mit Hilfe einer Rampe und einer Treppe.[45] Man mag Treppensteigen als erhebliche Einschränkung der experimentellen Möglichkeiten ansehen. Wie wir gesehen haben, ist genau das Gegenteil der Fall. Ohne die Quantisierung wären viele physikalisch-chemisch-technische Entwicklungen nicht realisierbar gewesen: LASER[46] und das unter anderem in der Medizin eingesetzte MRT[47] sind nur zwei prominente Beispiele. Abb. 11.55 zeigt, wie man mit Hilfe einer starken Magnetfelds Kernspins ausgewählter Atome ausrichtet. Mit Mikrowellen werden die quantisierten Kernzustände mit hoher räumlicher und chemischer Auflösung abgetastet.

[45] If we talk about the population of a city, it is evident that it can flucuate only by a whole number od people. The least the population of a city can increase or decrease is by one person. It cannot increase by 0.7 of a person. It can increase or decrease by fifteen people, but not by 15.27 people. In the dialet of physics, a population can change only in discrete increments, or discontinuously. It can get larger or smaller only in jumps, and the the smallest jump that it can make is a whole person, In general, this is what Planck discovered about the processes of nature [**?**].

[46] LASER: *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*

[47] MRT: *Magnetic Resonance Tomography* (Kernspintomographie)

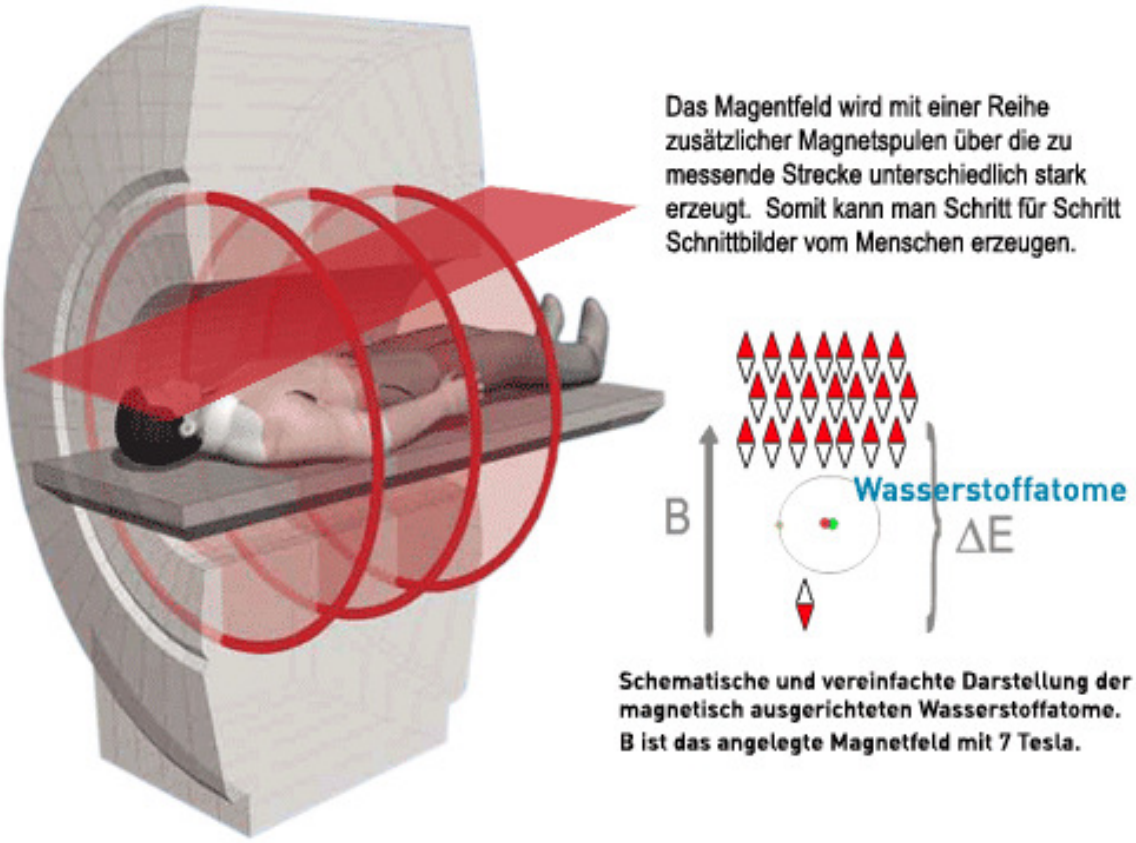


Abb. 11.55: Prinzip der Kernspintomographie. Für die Bildgebung wird genutzt, dass die Energiezustände im Kern quantisiert und die Energiezustände sich aufgrund der chemischen Umgebung leicht verschieben. Durch den Einsatz von starken Magnetfeldern, der Einstrahlung von Mikrowellen und einem Magnetfeldgradienten erreicht man eine tomographische Abbildung.

Stroboskopie

How big does something have to be before it stops acting in a quantum way?

Was beobachtet man, wenn man ein dynamisch agierendes System, wie in Abb. 11.56 gezeigt, mit hoher Zeitauflösung beobachtet? Die obige Abbildung zeigt Momentaufnahmen der Bewegung einer Übung am Barren, aufgenommen mit Hilfe eines Stroboskops. Wertet man die einzelnen Aufnahmen aus, lässt sich feststellen, wie lange ein bestimmter Bewegungsablauf dauert. Beispielsweise sieht man am Abstand der einzelnen Aufnahmen der Fußspitzen, wo der Turner sich langsamer bewegt. Physikalisch gesehen ist dies ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Dieses Verfahren wenden wir nun auf z.B. ein quantenphysikalisches Pendel an und vergleichen das Resultat mit einem klassischen Pendel. Bevor Sie weiterblättern eine kleine Aufgabe! Können Sie das klassische Resultat in einer Grafik darstellen? Gefragt ist nach der Aufenthaltswahrscheinlichkeit



Abb. 11.56: Stroboskopaufnahme beim explposiven Entkorken eines Sektkorkens.

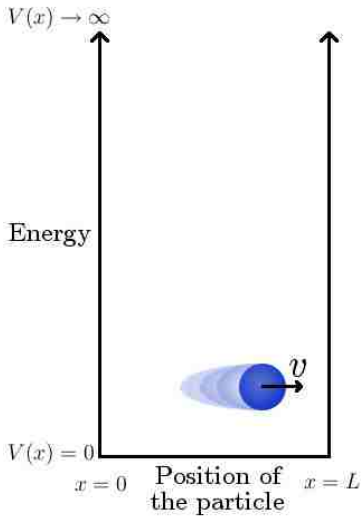


Abb. 11.57: Bewegung eines klassischen Teilchens (Flummi) in einem Kastenpotenzial.

als Funktion der Zeit. Die Lösung finden Sie am Ende des Kapitels, siehe Abb 11.61.

Bevor das quantenphysikalische Resultat vorgestellt wird, überlegen wir, wie das Ergebnis für ein Teilchen im Kastenpotenzial aussehen würde. Abb. 11.57 verdeutlicht das Szenario. Wir berechnen, wie hoch -klassisch betrachtet- die Wahrscheinlichkeit ist, ein *particle-in-a-box* an einem bestimmten Ort zu entdecken. Dazu überlegen wir uns einen experimentellen Aufbau, bei dem eine Klappe zu willkürlich gewählten Zeiten für eine Zeitspanne dt öffnet und den Blick am Ort x auf einen kleinen Abschnitt dx der Box gestattet. Die Wahrscheinlichkeit W_x^{dx}, das Teilchen vor der Klappe zu entdecken, ist abhängig von der Zeit, die das Teilchen vor der Klappe verbringt. Bewegt sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit $v(x)$ zwischen den zwei Umkehrpunkten x=0 und x=L, braucht es eine Zeitspanne $T/2$ um die Box von einem Ende zum anderen zu durchqueren. Damit ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit

$$W_x^{dx} = \frac{dt}{T/2} \tag{11.140}$$

das Teilchen am Ort $x \pm dx/2$ zu entdecken. Die Zeit dt, die das Teilchen braucht, um an der Klappe vorbei zu fliegen ist

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \tag{11.141}$$

Aus der Wahrscheinlichkeit

$$W_x^{dx} = \frac{2}{T \cdot v(x)}\, dx \tag{11.142}$$

ergibt sich, da für die Wahrscheinlichkeitsdichte $P_{klassisch}(x)$

$$W_x^{dx} = P_{klassisch}\, dx \tag{11.143}$$

gilt, die Gleichung

$$P_{klassisch}(x) = \frac{2}{T \cdot v(x)} \tag{11.144}$$

Es ist also umso wahrscheinlicher ein Teilchen zu entdecken, je langsamer es sich bewegt. Die Periode der Bewegung, also die Entfernung $2 \cdot L$ ist bei konstanter Geschwindigkeit v_0 gleich

$$T = 2\, L/v_0 \tag{11.145}$$

Die daraus resultierende Wahrscheinlichkeitsdichte ist nicht abhängig vom Ort

$$P_{klassisch}(x) = \frac{2}{(2L/v_0) \cdot v_0} = \frac{1}{L} \tag{11.146}$$

was bedeutet, dass ein klassisches Teilchen mit gleicher Wahrscheinlich vor jeder beliebig angebrachten Klappe in der Box gefunden werden kann. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die Kugel ist also überall im Kasten dieselbe. Eine stroboskopische Aufnahme würde das nachweisen.

Quantum goes Macro

Die Quantenphysik liefert für kleine n ein gänzlich anderes Ergebnis. Der wahrscheinlichste Ort eines quantenphysikalischen harmonischen Oszillators für die unteren Zustände unterscheidet sich stark vom klassischen harmonischen Oszillator, der an den Umkehrpunkten seiner Bewegung mehr Zeit verbringt. Es gibt Bereiche, an dem sich das Teilchen nie aufhält. Abb. 11.58 zeigt dieses Verhalten. Wie man sieht ist, abhängig vom Quantenzustand die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an bestimmten Orten NULL. Beispielsweise ist $|\Psi_1(x = 0)|^2$=0 und $|\Psi_3(x = 0)|^2$=0. Dieses Verhalten ist Ausdruck destruktiver quantenphysikalischer Interferenz. In anderen Gebieten ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit deutlich erhöht. Betrachtet man Energiezustände mit höherem n, nähert sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit dem klassischen Ergebnis an, siehe Abb. 11.59. Diese Tendenz, sich dem klassischen Verhalten bei hohen Quantenzahlen anzupassen, wird

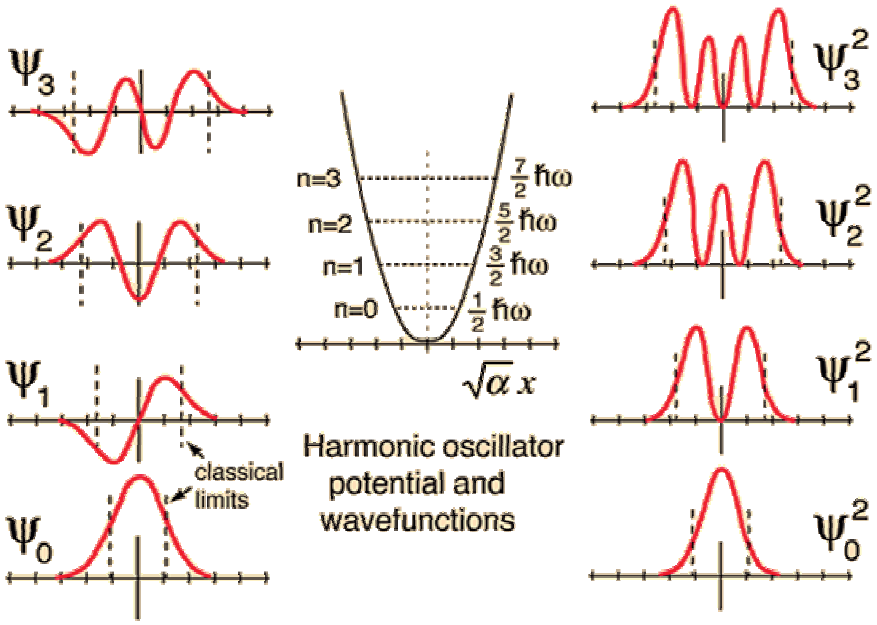


Abb. 11.58: *links:* Wellenfunktionen für die niedrigsten Energiezustände im Harmonischen Oszillator. *rechts:* Zugehörige Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die angegebenen Energiezustände [**?**].

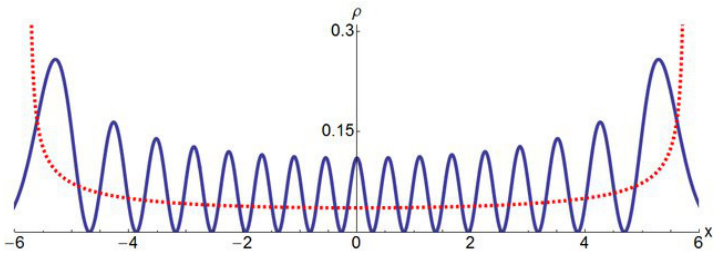


Abb. 11.59: Korrespondenzprinzip für den Harmonischen Oszillator. In der Abbildung sind die Wahrscheinlichkeitsdichte für ein Quantenteilchen (durchgezogene Kurve) und die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte für ein klassisches Teilchen gleicher Energie (gepunktete Kurve) gezeigt. Im parabolischen Potentialtopf oszilliert die Aufenthaltswahrscheinlichkeit um den klassischen Wert. An den klassischen Wendepunkten divergiert das klassische Ergebnis. Warum? Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit nimmt in der klassisch verbotenen Region exponentiell ab. Die klassische Dichte wird hier normalerweise als verschwindend angenommen [**?**].

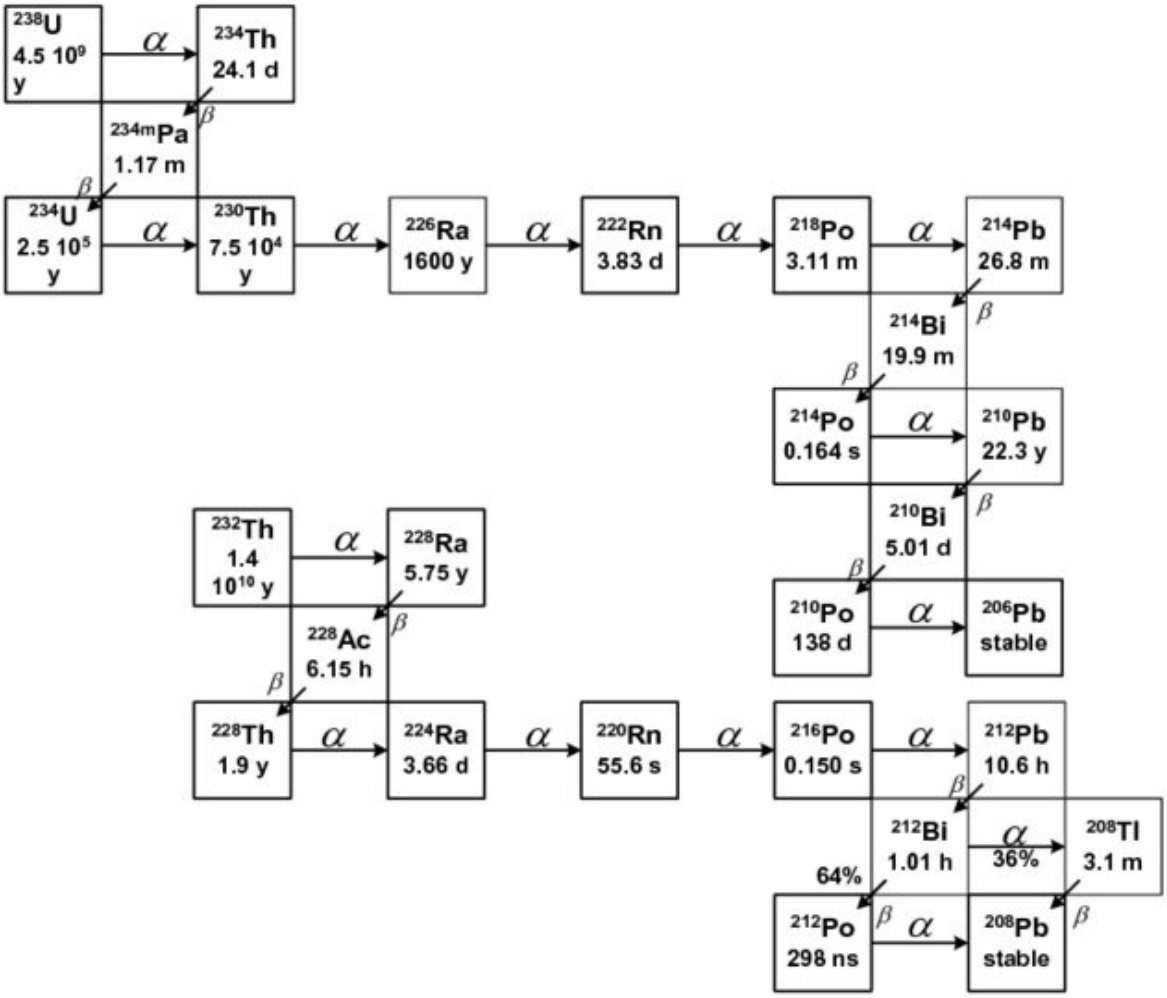


Abb. 11.60: Zerfallsreihen von ^{238}U (a) und ^{232}Th (b) mit Halbwertszeiten in Jahren (y), Monaten (m), Tagen (d), Stunden (h) und Sekunden (s). Die relevanten α- und β-Strahlenemitter sind mit einem fetten Kästchen gekennzeichnet [**?**].

als Bohrsches Korrespondenzprinzip bezeichnet. Der Abstand der Energiewerte bei ganz hohen Quantenzahlen wird so gering, dass man sie als kontinuierlich ansehen kann. Für große n lässt sich kein Unterschied zwischen quantenphysikalischer und klassischer Welt mehr feststellen. Die quantenphysikalische Beschreibung geht also nahtlos in die klassische Beschreibung der Natur über.

Zwei Formulierungen sind gleichberechtigt:

Die Quantentheorie muss mit der klassischen Theorie im Grenzbereich übereinstimmen, in dem die klassische Theorie mit dem Experiment übereinstimmt.

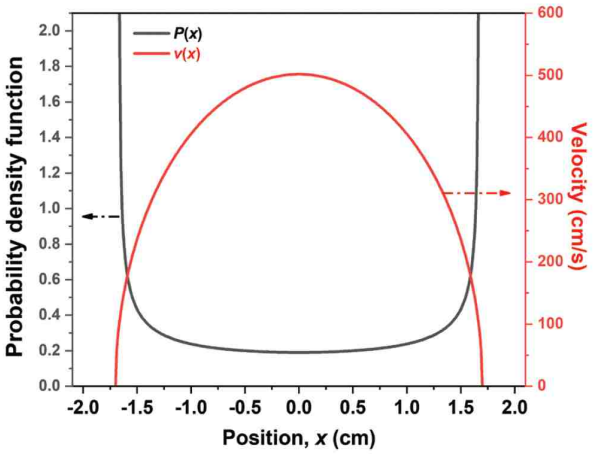


Abb. 11.61: Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines klassischen harmonischen Oszillators mit einer Frequenz von $47\,\mathrm{s}^{-1}$ und einer maximalen Amplitude von 1.7 cm [**?**].

Die Quantenphysik muss im Grenzbereich großer Quantenzahlen mit der klassischen Theorie übereinstimmen.

Approaching the motional ground state of a 10-kg object [**?**]**:** The motion of a mechanical object, even a human-sized object, should be governed by the rules of quantum mechanics. Coaxing them into a quantum state is, however, difficult because the thermal environment masks any quantum signature of the object's motion. The thermal environment also masks the effects of proposed modifications of quantum mechanics at large mass scales. We prepared the center-of-mass motion of a 10-kilogram mechanical oscillator in a state with an average phonon occupation of 10.8. The reduction in temperature, from room temperature to 77 nanokelvin, is commensurate with an 11 orders-of-magnitude suppression of quantum back-action by feedback and a 13 orders-of-magnitude increase in the mass of an object prepared close to its motional ground state. Our approach will enable the possibility of probing gravity on massive quantum systems.

Die Wahrscheinlichkeitsaussage im Rahmen der Auswertung der Wellenfunktion trifft auch auf dynamische Prozesse zu. Bei zwei Wasserstoffatomen im selben angeregten Zustand wird man feststellen, dass eines der Atome früher in den Grundzustand zurückkehrt. Man kann nur messen, wie viele Photonen pro Zeiteinheit von einer angeregten Wasserstoffwolke emittiert werden. Gleiches gilt auch für den radioaktiven Zerfall (Kapitel *Zerfall des Myons*). Ein Ensemble von gleichen radioaktiven Kernen zerfällt, aber man weder vorhersagen, welcher der Kerne zerfällt, wann er zerfällt und manchmal auch nicht über welchen Zerfallsprozess. Abb. 11.60 illustriert dies am Beispiel der Uran-238 Zerfallsreihe, siehe Kapitel *Ionisierende Strahlung*. Der stabile Pb-208 Kern am Ende der Zerfallskette wird über unterschiedliche Zerfallsreaktionen erreicht.

Quantum superposition of distinct macroscopic states [**?**]**:** In 1935, Schrödinger attempted to demonstrate the limitations of quantum mechanics using a thought experiment in which a cat is put in a quantum superposition of alive and dead states. The idea remained an academic curiosity until the 1980s when it was proposed that, un-

der suitable conditions, a macroscopic object with many microscopic degrees of freedom could behave quantum mechanically, provided that it was sufficiently decoupled from its environment. Although much progress has been made in demonstrating the macroscopic quantum behaviour of various systems such as superconductors, nanoscale magnets, laser-cooled trapped ions, photons in a microwave cavity and C_{60} molecules, there has been no experimental demonstration of a quantum superposition of truly macroscopically distinct states. Here we present experimental evidence that a superconducting quantum interference device (SQUID) can be put into a superposition of two magnetic-flux states: one corresponding to a few microamperes of current flowing clockwise, the other corresponding to the same amount of current flowing anticlockwise.

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Für ein klassisches System gilt, dass die Wahrscheinlichkeit P_b, ein Teilchen in einem eindimensionalen Kastenpotenzials (Breite ℓ) im Bereich $B \leq x \leq B + b$ zu finden, b/ℓ ist. Man zeige, dass sich ein Quantensystem für große Quantenzahlen n dem klassischen System annähert.

$$
\begin{aligned}
P_b &= \frac{2}{\ell} \int_B^{B+b} \sin^2 \left(\frac{\pi\, n}{\ell} \cdot x \right) dx \\
P_b &= \frac{b}{\ell} - \frac{1}{2\pi \cdot n} \left(\sin \frac{2\pi \cdot n \cdot x}{\ell} \right) |_B^{B+b} \\
P_b &\to \frac{b}{\ell} \quad \text{für} \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter dem Kollaps der Wellenfunktion?

2. Ein klassischer harmonischer Oszillator kann bewegungslos sein. Gilt dies auch für den quantenmechanische harmonischen Oszillator? Ist das Bohrsche Korrespondenzprinzip verletzt?

3. Ist das Korrespondenzprinzip ein notwendiger Bestandteil der Quantenphysik oder lediglich eher zufällig? Wo ziehen man die Grenze zwischen Welt der Quanten und der Klassischen Physik?

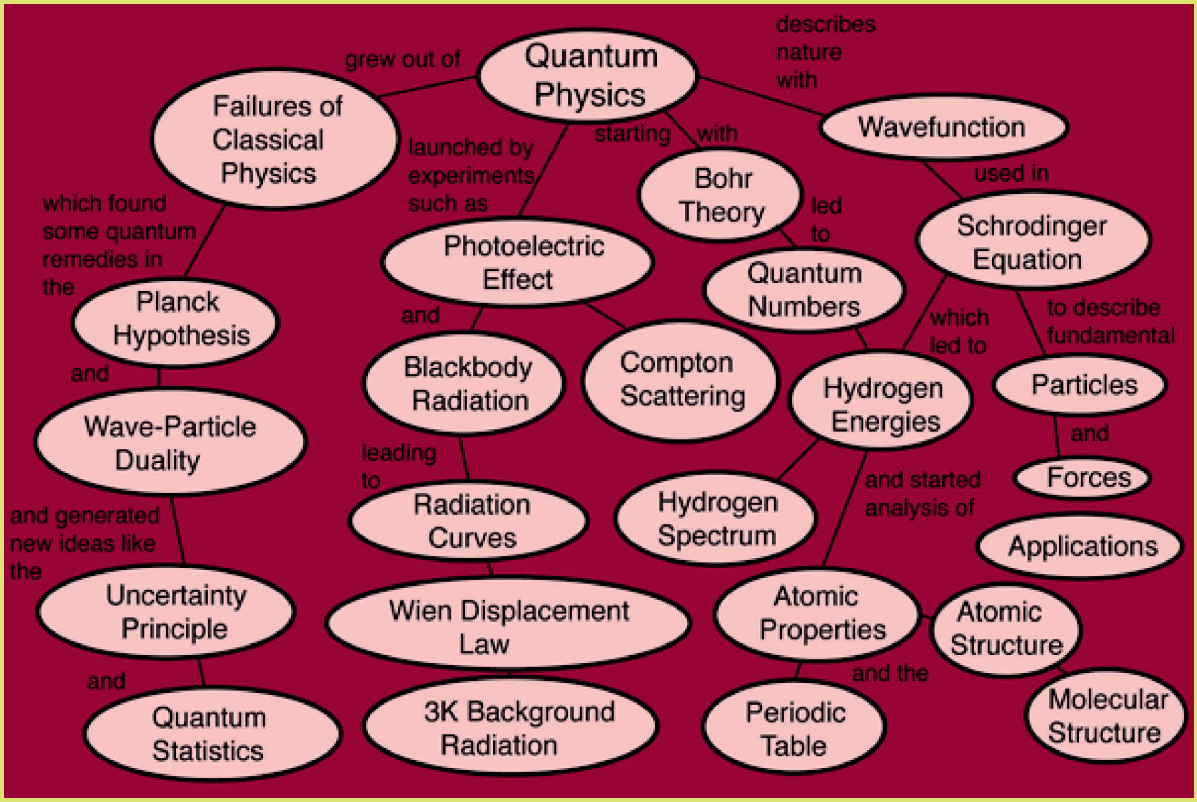


Abb. 11.62: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

- Eigenschaften der Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t)$
- Teilchen in harmonischen Potenzial
  - Hooksches Gesetz, harmonisches Potenzial (Gl. 11.84)

$$U_{SHM}(x) = \frac{1}{2} k_H \cdot x^2$$

  - Grundzustand und Nullpunktsenergie (Gl. 11.88)

$$E_{\min} = \frac{1}{2} \hbar \cdot \omega_{SHM}$$

  - Energiewerte (Gl. 11.89)

$$E_n^{SHM} = \left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot \hbar \cdot \omega_{SHM}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- Teilchen in einem eindimensionalen Kastenpotenzial der Breite a

    - Energiewerte (Gl. 11.97)

$$E_n = \frac{h^2}{8\,m \cdot a^2} \cdot n^2$$

    - Aufenthaltswahrscheinlichkeit (Gl. 11.106)

- Anwendung des Konzepts Kastenpotenzial
- Korrespondenzprinzip

12 Tunneleffekt



Tunneleffekt

[1]In der klassischen Physik lernt man, dass der Energieerhaltungssatz stets erfüllt ist. Dazu ein Beispiel aus der klassischen Physik: Man kann aus der kinetischen Energie eines Stabhochspringers berechnen, welche Höhe er überspringen kann. Dabei nutzt man die Umwandlung von Energieformen aus. Nimmt man den Sprinter Armin Harry (100 m in 10 s (Weltrekord 1958)) als Maßstab für die kinetische Energie beim Anlauf, ergibt sich aus der potenziellen Energie eine Höhe von knapp über 5 m. Prüfen Sie es nach! Tatsächlich übersprang Armand Duplantis gerade 6.15 m (21.9.2021), obwohl er beim Laufen noch den Stab tragen musste. Wissen Sie, in welche Trickkiste Stabhochspringer greifen, ohne den Energieerhaltungssatz zu verletzen?

Weitere Überlegungen zur Energieerhaltung: In der Vorlesung *Einsteingleichung* wurde die Äquivalenz von Energie und Masse eingeführt ($E = m_0c^2$). Damit wurde gezeigt,

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

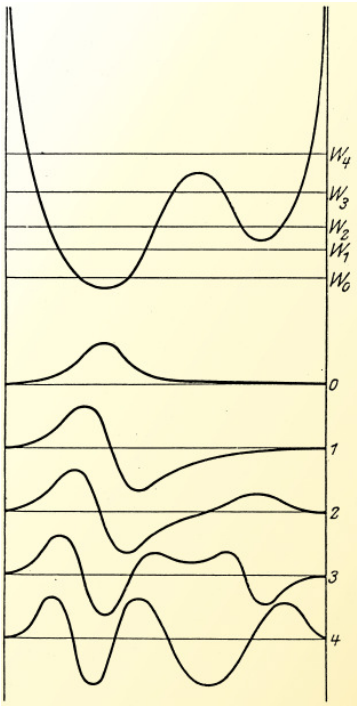


Abb. 12.1: Eindimensionales Doppelpotenzial als Modell zur Analyse von Molekülspektren. Asymmetrischer Doppelpotentialtopf mit den fünf niedrigsten Energieniveaus $(W_0 - W_4)$ (*oben*) und denn dazugehörigen Wellenfunktionen (*unten*). Die Quantenzustände (0) und (1) entsprechen Wellenfunktionen im tiefer gebundenen Bereich des Potenzials. Dagegen können Elektronen in den Energieniveaus (2) und (3) über den Tunnelprozess beide Potenzialmulden erreichen. Im Energieniveau (4) kann das Elektron ohne Einschränkung beide Mulde erkunden [**?**].

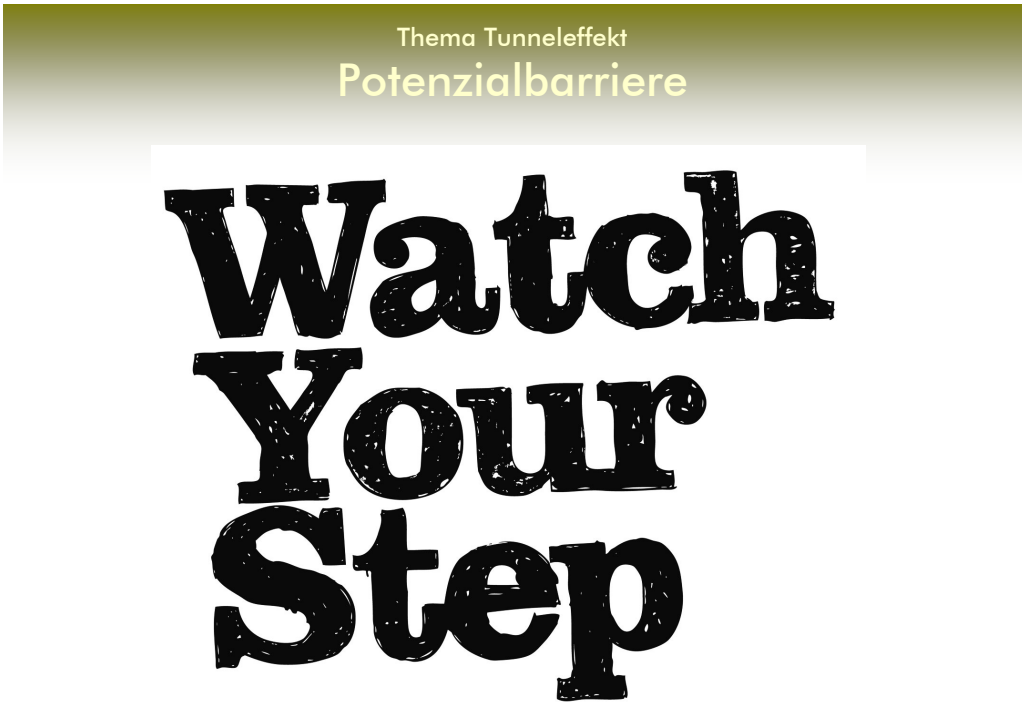
dass sich Masse in Energie und Energie vollständig in Masse umwandeln lässt. Eine kurzzeitig erlaubte Verletzung des Energiesatzes ($\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$) wurde in der Vorlesung *Heisenbergsche Unschärferelation* genutzt, um die Existenz von virtuellen Teilchen als Träger der fundamentalen Wechselprozesse zu motivieren. In dieser Vorlesung lernen wir ein anderes Beispiel für eine scheinbare Verletzung des Energieerhaltungssatzes kennen. Teilchen mit einer kinetischen Energie E_{kin} überwinden eine Potenzialbarriere der Höhe E_{pot}, obwohl $(E_{kin} < E_{pot})$. In der klassischen Physik ist ein solcher Vorgang nicht möglich (auch für den Stabhochspringer nicht), aber in der Quantenphysik scheint manches möglich.[2] Die Grundlagen wurde Mitte der 1920 Jahre von Friedrich Hund am

[2] *Zum Titelblatt:* Quantum Man (2006) by Julian Voss-Andreae. The 2.5-meter sculpture is made of 115 thin steel slabs connected and spaced apart by 1000 short steel rods. Seen from the front, the figure looks dark and solid. But from the side the quantum walker nearly disappears, as light shines through the spaces between the slabs. *It shows that when you look at things from a different perspective, they can look extremely different,* says Anton Zeilinger, a physicist at the University of Vienna and Voss-Andreae's former group leader. *That's part of the quantum message.*

Beispiel chemischer Reaktionen und von George Gamow zur Erklärung des radioaktiven Zerfalls erarbeitet. Abb. 12.1 zeigt die von Hund berechneten Wellenfunktionen (unten) für einen Doppel-Potenzialtopf eines zweiatomigen Moleküls (oben) [**?**]. Die Entwicklung der Wellenfunktion zeigt, dass die höheren Energiezustände (W_2, W_3) eine erhöhte Amplitude in beiden Bereichen des Potenzials aufweisen, obwohl es zwischen den Mulden eine eigentlich zu hohe Potenzialbarriere gibt. Das ist das Indiz, dass sich das Elektron in beiden Bereichen des Potenzials aufhalten kann. Klassisch könnten sich ein Elektron mit dieser kinetischen Energie nur in der einen oder der anderen Mulde aufhalten. Dies würde zu zwei Wellenfunktionen führen, die jeweils ein Elektron beschreiben. Tatsächlich erkennt man am Verlauf der Wellenfunktion, dass eine Wellenfunktion diesen Energiezustand beschreibt. Kurios! Den gerade beschriebenen Vorgang nennt man Tunneln und er spielt eine wichtige Rolle beispielsweise beim radioaktiven Zerfall von schweren Kernen, siehe auch das Kapitel *Kernphysik* (Stichwort α-Zerfall). Wir werden feststellen, dass dieser quantenphysikalische Effekt auch relevant ist für Prozesse in der Chemie, den *life sciences* und erhebliche technologische Bedeutung hat. Wenn die Firma Sony seine Entwicklungsarbeit fortgeführt hätte, säßen Sie heute möglicherweise vor einem Bildschirm, der auf der Grundlage des Tunneleffekts arbeitet.


Inhaltsverzeichnis
Tunneleffekt
- Teilchen entkommen aus einem Potenzialtopf
- Kopenhagener Interpretation der Quantenphysik
- Schrödingers Katze lebt. Vielleicht auch nicht!
- Verschränkung erlaubt überlichtschnellen Informationsaustausch
Kapitel 1
Potenzialstufe
mechanics
optics
Kapitel 2
Konzept Tunneln anwenden
electro
chemistry
technology
life sciences
medicine
Kapitel 3
Tunnelspektroskopie
electro
Kapitel 4
Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon
optics
chemistry

12.1 Potenzialbarriere



Vorsicht Stufe! Was passiert, wenn ein Körper mit einer gewissen kinetischen Energie auf ein Hindernis, wie zum Beispiel eine Stufe trifft?

Klassisch lautet die Antwort: Entweder der Körper prallt zurück oder er schafft es auf die Treppenstufe. In der Quantenphysik passiert beides, ohne dass das Teilchen sich aufspaltet. Betrachten wir einen anderen Vorgang. Wellenphänomene, wie die Reflexion von Schall treten beim Übergang zwischen unterschiedlichen Medien zu Tage und ergeben beispielsweise ein Ultraschallbild. Auch hier wird ein Teil der einlaufenden Welle reflektiert, während die verbleibende Schallenergie sich weiter im anderen Medium ausbreitet. In der Quantenphysik treffen nun beide Konzepte aufeinander: Ein massives Teilchen trifft auf eine Potenzialstufe und es kommt gleichzeitig zur Reflexion und Transmission der Materiewelle. Im Folgenden werden wir in der Betrachtung klassische Analoga ansprechen, da hier vergleichbare Effekte auftreten. Die sind die Ausbreitung von Seilwellen und der Eintritt von Licht in ein anderes Medium. Das Phänomen nennt sich Optisches Tunneln

7. *Untersuchungen über die Totalreflexion;* *von Clemens Schaefer und Gustav Gross.*

§ 1.

Das Interesse, das man der Totalreflexion stets entgegengebracht hat, beruht wesentlich auf dem Umstande, daß einerseits im reflektierten Strahl sich die gesamte Energie des einfallenden wiederfindet, und andererseits dennoch *auch im zweiten Medium ein Strahlungsvorgang stattfindet.* Dies folgt aus sämtlichen Lichttheorien in übereinstimmender Weise. Es ist daher begreiflich, daß man versucht hat, diesen im zweiten Medium verlaufenden Strahlungsprozeß experimentell zu untersuchen.

Lange Zeit hindurch hat man auf die Existenz dieses Strahles auf folgendem indirektem Wege geschlossen: Es werde die Totalreflexion an der Grenze Glas–Luft dadurch erzeugt, daß man Licht unter 45^0 an der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Glasprismas reflektieren läßt. Nähert man von hinten die Hypotenusenfläche eines zweiten kongruenten Prismas parallel an die des ersten an, so sollte dies — wenn im zweiten Medium *gar nichts* vor sich geht — so lange nichts ausmachen, als nicht *vollständige Berührung* der beiden Hypotenusenflächen eingetreten ist, d. h. sich ein homogener Glaswürfel gebildet hat. Dann muß ja das Licht, ohne eine Reflexion zu erleiden, einfach hindurchtreten. In Wirklichkeit beobachtet man jedoch auch schon bei Entfernungen der beiden Hypotenusenflächen von der Größenordnung einer Wellenlänge, *daß nicht mehr alles Licht reflektiert, sondern ein Teil hindurchgelassen wird.* Daraus folgt in der Tat, daß auch im zweiten Medium ein für das Zustandekommen der Totalreflexion wesentlicher Prozeß vor sich geht, der durch das Hervorbringen der zweiten Fläche gestört wird. Dieser Versuch rührt im Prinzip schon von

Abb. 12.2: Auszug aus [?]

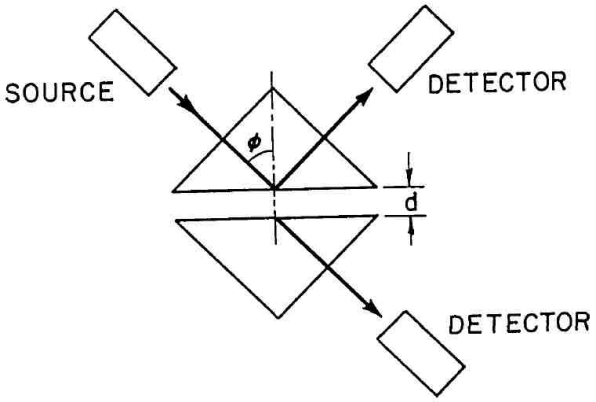


Abb. 12.3: Experiment zum Nachweis des Optischen Tunnels über einen Luftspalt zwischen zwei Prismen [?].

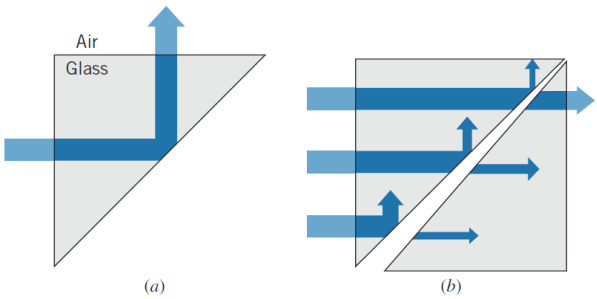


Abb. 12.4: (a) Totalreflexion von Lichtwellen an der Grenzfläche Glas-zu-Luft. (b) Frustrierte Totalreflexion. Je dicker der Luftspalt Luftspalt, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lichtwelle den Spalt durchdringt [?].

Optisches Tunneln[4LP]

In diesem Zusammenhang ist es sinnvoll, zunächst ein Experiment aus der Optik zu betrachten, wo man ein Phänomen beobachtet, das man Optisches Tunneln nennt. Es handelt sich um Untersuchungen zur Totalreflexion [?],[3] siehe Abb. 12.2. In der Strahlenoptik lernt man, dass Licht beim Übergang vom optisch dichteren zum dünneren Medium vollständig reflektiert wird, wenn ein bestimmter Grenzwinkel Θ_c überschritten wird.

Link to Lecture Demo

Tatsächlich stimmt diese Betrachtung nicht, wie die Maxwellsche Theorie zeigt. Erstaunliches ergibt sich in einem Experiment zur Totalreflexion an einem Prisma (Abb, 12.3, das man zum Beispiel auch mit Mikrowellen durchführen kann. Ein Teil des Mikrowellenlicht durchquert den Luftspalt, den man mit einem zweiten Prisma herstellt. Die Ursache ist eine evaneszente Welle,[4] d.h. die Amplitude der Schwingung des elektrischen Feldes

[3] *Lexikon:* Die **Grenzwinkel der Totalreflexion** an der Grenzfläche zweier Medien, berechnet sich als Funktion der beiden Brechungsindizes n_{thin}, n_{thick} folgendermaßen:

$$\Theta_c = \arcsin\left(\frac{n_{thin}}{n_{thick}}\right) \tag{12.1}$$

[4] *Lexikon:* **Evaneszente Wellen** treten in Bereichen hinter Reflektoren auf und ergeben sich als Lösungen der Maxwell-Gleichungen. Da ein Feld an einer Grenzfläche nicht sofort auf NULL ab-

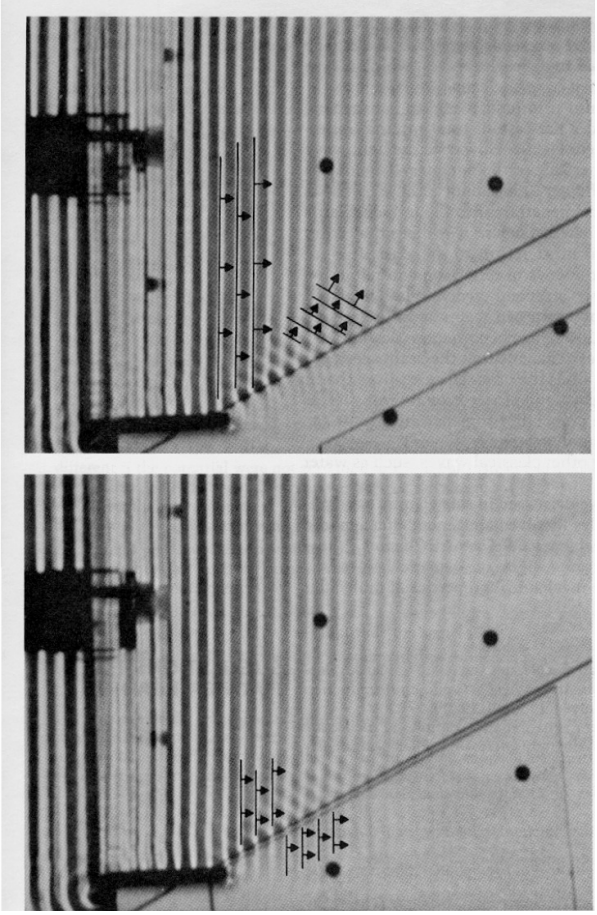


Abb. 12.5: Tunneleffekt in einem Wellentank. Oben werden die Wellen an einer breiten Spalte mit tieferem Wasser total reflektiert. Unten wird die Spalte verengt und Wellen breiten sich hinter der Spalte aufgrund des Tunneleffekts aus.

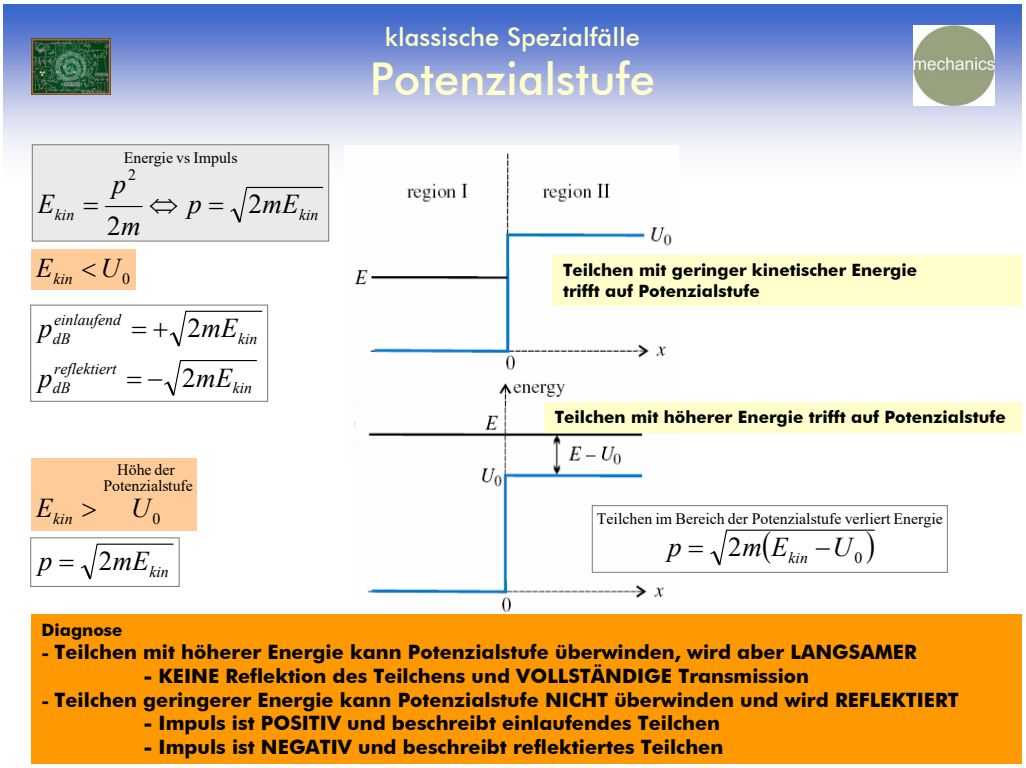
fällt im Luftspalt exponentiell ab. Für Wellen beobachtet man also ein Phänomen, das man im Rahmen der klassischen Optik nicht unbedingt erwarten würde. Bringt man die beiden Prismen nahe zusammen, wobei es immer noch einen Luftspalt gibt, stellt man fest, dass sich die Mikrowelle im anderen Prisma ausbreitet. Die Lichtwelle ist über die Lücke gesprungen. Man nennt dieses PhänomenTunneln [**?**]. Abb. 12.4 illustriert, wie die Intensität der evaneszenten Welle von der Breite des Luftspalts abhängt.

`Link to Lecture Demo`

Das Phänomen ist nicht auf die Optik beschränkt, sondern man findet es auch in Versuchen mit Wasserwellen. Wasserwellen werden an einem Bereich, in dem die Wassertiefe

sinken kann, ergibt sich ein exponentieller Abfall hinter dem Reflektor (verbotener Bereich). Da keine Energie transportiert wird, gibt es evaneszente Wellen auch bei vollständiger Reflexion und Totalreflexion an Grenzflächen transparenter Materialien. Als Anwendung evaneszenter Wellen sei die optische Nahfeld-Mikroskopie genannt [**? ?**].

größer ist, vollkommen reflektiert (Abb. 12.5, oben). Verkleinert man die Breite dieses Hindernisses, können die Wellen in den dahinter liegenden Bereich eindringen und die Wellen pflanzen sich auf der anderen Seite des Spalts fort (Abb. 12.5, unten).



Potenzialstufe

Wie verhalten sich klassische Teilchen, die mit einem Hindernis (gemeint ist eine Potenzialstufe) in Wechselwirkung treten? Bevor wir mikroskopische Teilchen untersuchen, betrachten wir zunächst den einfacheren Fall einer Potenzialstufe. Abb. 12.6 zeigt einer Minigolfbahn, die in der klassischen Mechanik eine Potenzialstufe darstellt. Hat der Minigolfball eine gewisse Geschwindigkeit, reicht die Kinetische Energie des Balls aus, um das Hindernis (den Potenzialberg) zu überwinden. In der Mikrophysik spricht man bei der Wechselwirkung eines Teilchens mit einem externen Potenzial von einem Streuprozess. Nur wenn E_{kin} größer als E_{pot} ist ($v = \sqrt{2\,g \cdot h}$, Energieerhaltung), kann das Partikel das Hindernis überwinden. Das Teilchen bewegt sich in dieselbe Richtung weiter, wird allerdings nach Überqueren der Stufe langsamer. Anhand des resultierenden Impulses bestimmt man die Bewegungsrichtung des Teilchen nach dem Streuprozess.

Was erwartet man für Wellen in der klassischen Physik, wenn ein solcher Streuprozess eintritt? Bei der Reflexion einer Welle an einem Hindernis kommt es zur Interferenz zwischen einlaufender und reflektierter Welle. Weiter ändert die Welle ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit. Ähnliches beobachtet man nun für Materiewellen. Zum Beispiel kommt es, wenn die kinetische Energie des Teilchens E_{kin} geringer ist als die Höhe der Potenzialbarriere U_{pot}, zur Interferenz (Abb. 12.7). Ist E_{kin} größer als U_{pot}, kann sich die



Abb. 12.6: Eine Minigolfbahn als mechanisches Modellsystem für die Bewegung von Körpern an einer Potenzialstufe.

Welle weiter in seiner ursprünglichen Ausbreitungsrichtung ausbreiten (Transmission), siehe Abb. 12.8. Beim Übergang in den anderen Bereich wird jedoch ein Teil der Welle reflektiert, ein anderer propagiert weiter in Ausbreitungsrichtung. Für eine Welle ist dieses Phänomen bekannt und man kann das Verhalten anhand einer Energiebetrachtung erläutern. Die reflektierte Welle enthält einen Teil der in der Welle gespeicherten Energie. Der andere Teil sorgt für die Ausbreitung der Welle in Vorwärtsrichtung. Eine Frage stellt sich: Wie kann man dieses Verhalten mit den Eigenschaften eines massiven Teilchens in Einklang bringen? Schließlich kann sich das Teilchen doch nicht spalten!

`Link to Lecture Demo`

Abbildung 12.9 zeigt die Streuung einer Materiewelle an einer stufenförmigen Barriere im Detail. Bei genauerem Hinschauen erkennt man, dass es eine gewisse Wahrscheinlichkeit gibt, das Teilchen in der Barriere aufzufinden, beispielsweise zur Zeit $t = 9 \cdot (\Delta t)$. Das Teilchen dringt also in einen Bereich der Barriere ein, der klassisch verboten ist. Interessant!

Die Heisenbergsche Unschärferelation liefert eine Erklärung.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar / 2 \tag{12.2}$$

Die Unbestimmtheit in der Ortsposition (Δx) erlaubt es dem Teilchen, sich im Bereich der Barriere aufzuhalten. Da das Teilchen Welleneigenschaften hat, kann die Wellenfunktion nicht abrupt NULL werden. Statt dessen klingt die Amplitude der Materiewelle über einen bestimmten Raumbereich exponentiell ab. Das Teilchen verhält sich also genauso wie die evaneszente Welle beim optischen Tunneln. Im Fall der Materiewellen bedeutet das nicht, dass man das Teilchen im Bereich (II) experimentell beobachten kann. Man erkennt das daran, dass die Amplitude der Welle rein exponentiell ist und keine Oszillation aufweist.

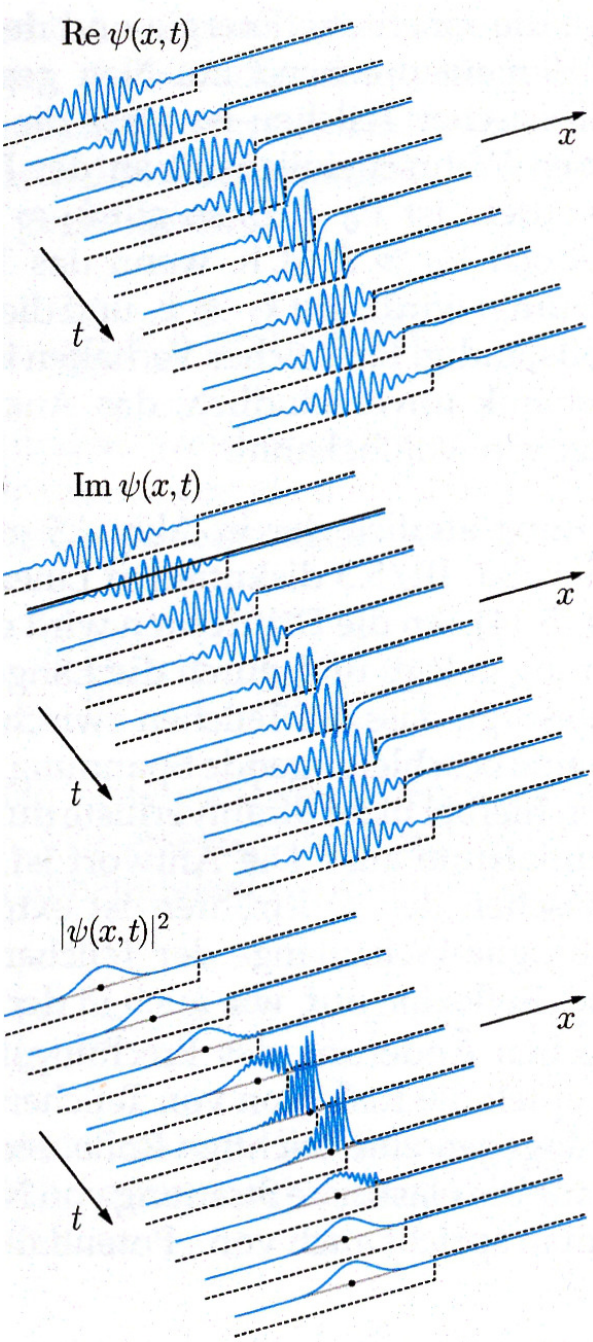


Abb. 12.7: Vollständige Reflektion einer Wellenpaket an einer Potenzialstufe, wobei $E_{kin} < E_{pot}$ [**?**].

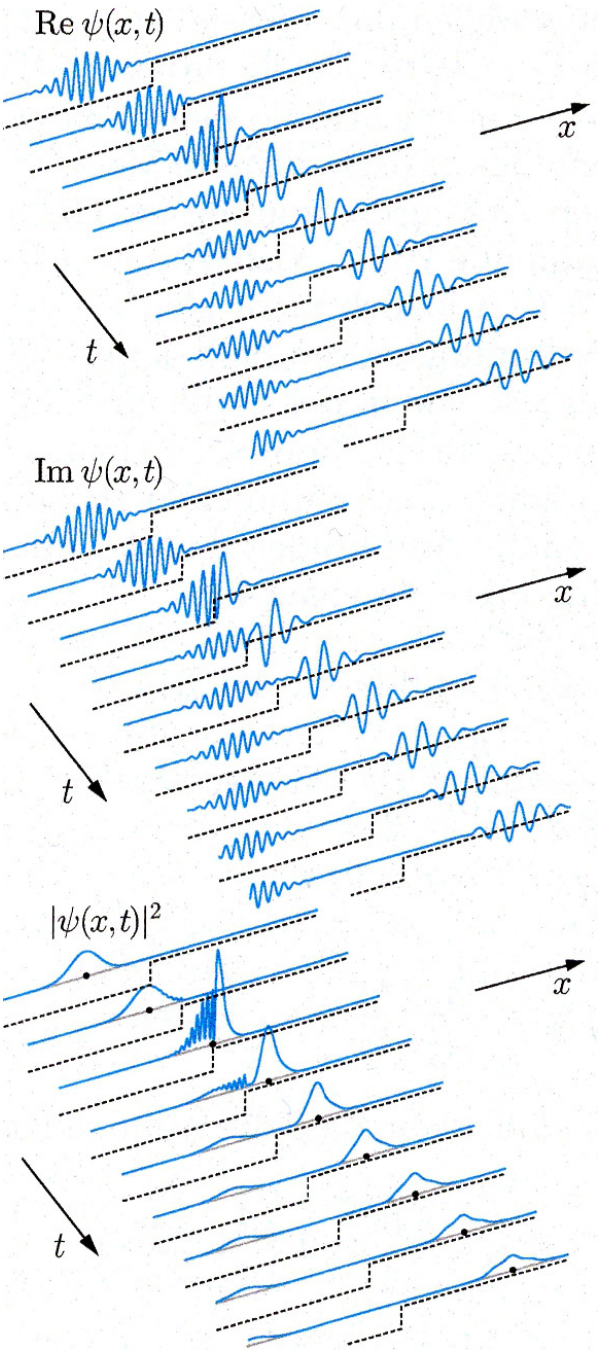


Abb. 12.8: Wie Abb. 12.7, hier gezeigt für den Fall $E_{kin} > E_{pot}$ [**?**].

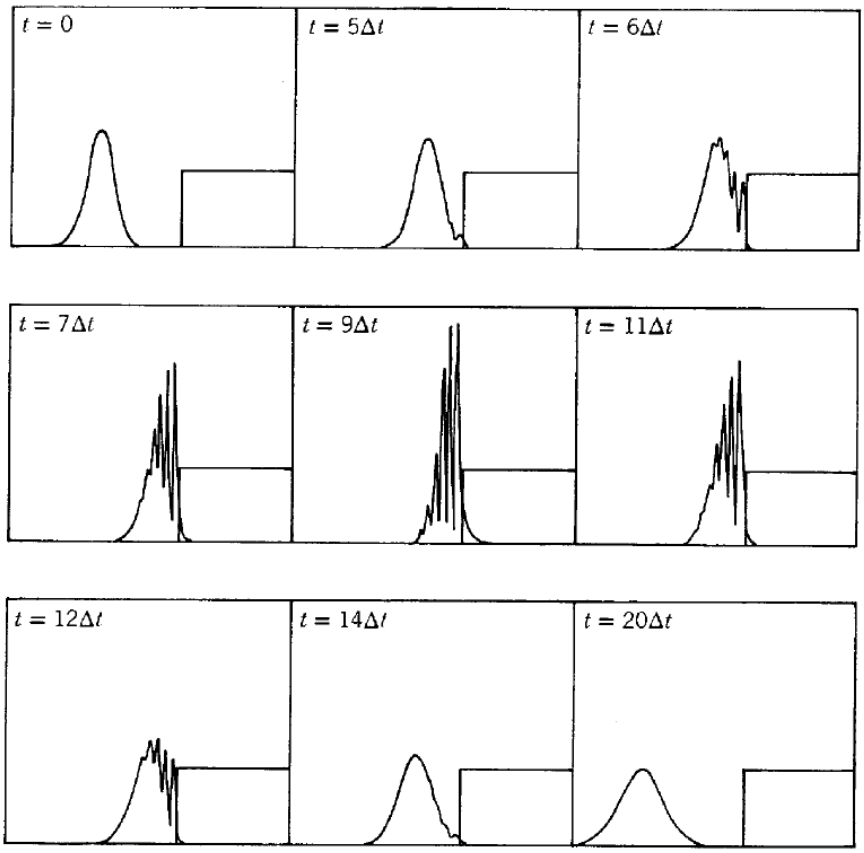


Abb. 12.9: Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte bei der Streuung einer Materiewelle an einer Potentialstufe. Die Gesamtenergie des einfallenden Teilchens ist geringer kleiner als die Stufenhöhe. Man erkennt anhand der Wellenfunktion, dass das Teilchen vollständig reflektiert wird, aber überraschenderweise in den klassisch verbotenen Bereich der Stufe eindringt [**?**].

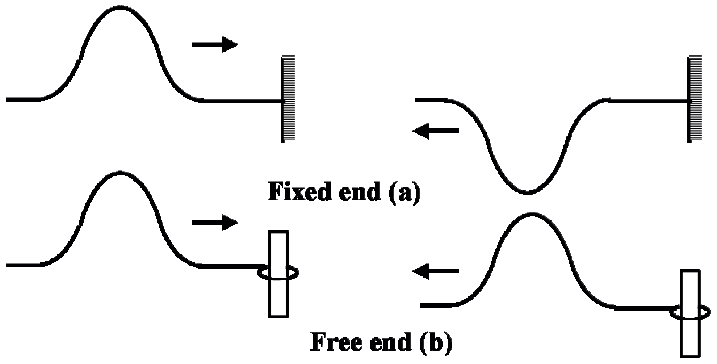


Fig.(14.13) (a) A pulse reflected from a fixed end.
(b) A pulse reflected from a free end.

Abb. 12.10: Reflexion einer Seilwelle an einem Hindernis. Man beachte, dass die Phasenverschiebung davon abhängt, ob das Seilende locker oder fest mit dem Stab/der Wand verbunden ist.

Ramsauer-Effekt^{4LP}

Die Streuung einer deBroglie Welle an einer Potenzialkuhle führt zu einem interessanten quantenphysikalischen Vorgang. Die Analyse führt auf den 1920 entdeckten Ramsauer-Effekt.[5] Es sei schon mal vermerkt, dass dieser Prozess den ersten Nachweis erbracht hat, dass auch freie Elektronen durch den deBroglie Ansatz beschrieben werden müssen.

Vorbetrachtung 1: Zum Verständnis ist es hilfreich, sich nochmal zu gegenwärtigen, was passiert, wenn eine Seilwelle an einem Hindernis reflektiert wird. Dazu betrachtet man den Falle einer festen (Abb. 12.10, oben) und eines losen Endes (Abb. 12.10, unten). Man erkennt deutlich die Unterschiede. An einem festen Ende reflektiert die Welle und der zurücklaufende Pulse ist invertiert. Es kommt dagegen zu keiner Umkehrung der Amplitude, wenn es sich um ein loses Seilende handelt. Den letzteren Fall beispielsweise kann man sich klarmachen, wenn man sich überlegt, dass die in der Seilwelle gespeicherte Energie einen massiven Ring anhebt. Beim Herabfallen des Rings wird eine Welle ausgelöst deren Amplitude dasselbe Vorzeichen hat. Mathematisch kann man auch davon sprechen, dass es zu einem Phasensprung von 180^o oder π kommt. Beim festen Ende tritt dagegen kein Phasensprung auf. Allgemein ergibt jede Reflexion einer Welle an einem Medium mit einem höheren Wellenwiderstand einen Phasensprung um π. Ähnliches ergibt sich bei Reflexion von Lichtwellen beim Übergang in ein optisch dichteres Medium. Konzeptionell passiert etwas ähnliches, wenn die Seile sich in ihrer Massendichte unterscheiden, siehe Abb. 12.11. Diese Situation kann sich, wie wir jetzt sehen werden, auch für Teilchen ergeben. Das Konzept der klassischen Wellenausbreitung wird deshalb jetzt auf die Streuung einer Materiewelle an einer Potenzialmulde angewendet. Im Folgenden wird die Physik des Ramsauer-Effekts hergeleitet. Sind Sie an den mathematischen Details nicht interessiert, überspringen Sie diese Abschnitte!

[5] Manchmal auch Ramsauer-Townsend-Effekt genannt

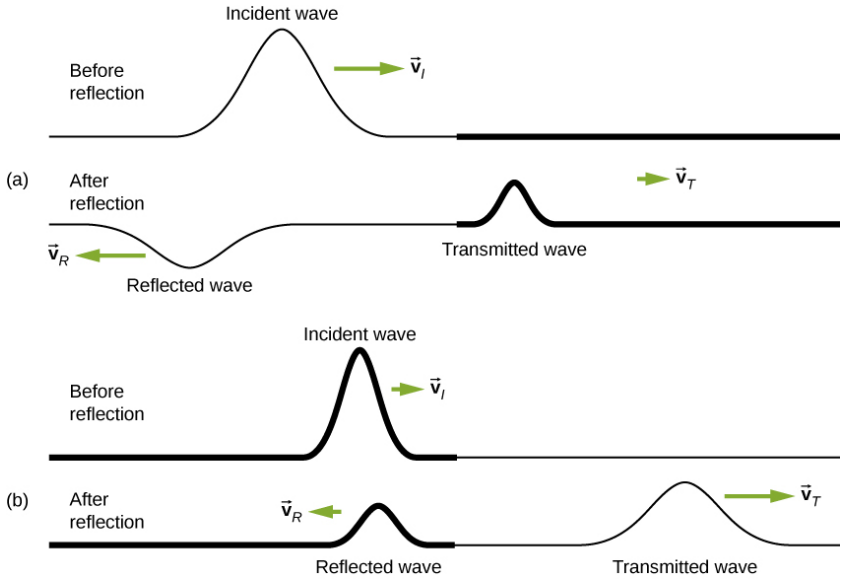


Abb. 12.11: Verhalten einer Seilwelle bei einem Wechsel des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet.

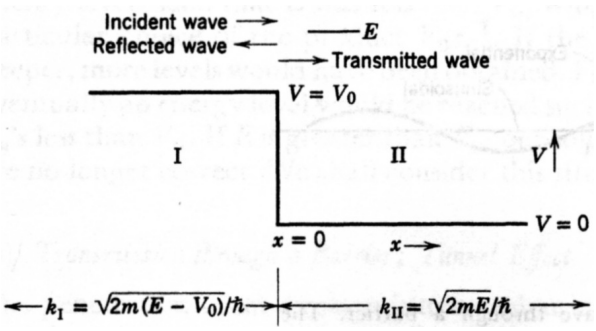


Abb. 12.12: Partielle Reflexion einer Elektronenwelle an einer Potenzialstufe der Höhe V_0 [**?**].

Vorbetrachtung 2: Im Folgenden betrachten wir als vorbereitenden Schritt die Streuung einer Materiewelle mit kinetischer Energie E_{kin} an einer Potenzialstufe der Höhe V_0 bei $x = 0$, siehe Abb. 12.12. Im Bereich (I) sei die Bewegungsenergie geringer und beträgt $E = E_{kin} - V_0$. In (II) ist das Teilchen schneller $(E = E_{kin})$. Gegeben sei eine einfallende ebene Welle der Form

$$\Psi_i(x,\, t) = A \cdot \exp(-i(\omega \cdot t - k_I \cdot x)) \tag{12.3}$$

wobei der Wellenvektor $\vec{k}_I$ ($\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$, $E - V = p^2/(2 \cdot m)$) im Bereich I gegeben ist durch

$$k_I^2 = \frac{2\, m \cdot (E_{kin} - V_0)}{\hbar^2} \tag{12.4}$$

Als Folge der Streuung ergibt sowohl eine reflektierte Welle Ψ_r im Bereich I

$$\Psi_r(x,\, t) = B \cdot \exp(-i(\omega \cdot t + k_I \cdot x)) \tag{12.5}$$

$$k_I^2 = \frac{2\, m \cdot (E_{kin} - V_0)}{\hbar^2} \tag{12.6}$$

als auch eine transmittierte Welle Ψ_t im Bereich II

$$\Psi_r(x,\,t) = C \cdot \exp(-i(\omega \cdot t - k_{II} \cdot x)) \tag{12.7}$$

$$k_{II}^2 = \frac{2\,m \cdot E_{kin}}{\hbar^2} \tag{12.8}$$

wobei A, B, C die zugehörigen Amplituden der Wellenfunktionen sind. Achten Sie in Bezug auf den k-Vektor auf die Vorzeichen in den vorangegangenen Gleichungen. Sie geben Auskunft über die Ausbreitungsrichtung. Man erkennt, dass sich nach der Stufe die Geschwindigkeit des Teilchen erhöht. Dies drückt sich in der Änderung von k aus. Eine Bedingung an eine physikalisch sinnvolle Wellenfunktion ist, dass die resultierenden Wellenzüge Ψ und ihre Ableitungen $d\Psi/dx$ an der Stufe stetig sein müssen. Da führt zu folgender Aussagen in Bezug auf die zugehörigen Amplituden:

$$A + B = C \tag{12.9}$$

$$k_{II} \cdot (A - B) = k_{II} \cdot C$$

$$k_{II} \cdot A - k_{II} \cdot B = k_{II} \cdot C \tag{12.10}$$

Für die Ableitungen ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_i = -i \cdot k_I \cdot \Psi_i \tag{12.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_r = i \cdot k_I \cdot \Psi_r \tag{12.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_t = -i \cdot k_{II} \cdot \Psi_t \tag{12.13}$$

$$-i \cdot k_I \cdot A + i \cdot k_I \cdot B = -i \cdot k_{II} \cdot C$$

$$k_I \cdot A - k_I \cdot B = k_{II} \cdot C \tag{12.14}$$

Fasst man die Ergebnisse der beiden Stetigkeitsbetrachtungen (Gl. 12.10, Gl. 12.14) zusammen, ergibt sich:

$$k_{II} \cdot A - k_{II} \cdot B = k_I \cdot A - k_I \cdot B \tag{12.15}$$

$$A \cdot (k_I - k_{II}) = B \cdot (k_I + k_{II}) \tag{12.16}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} \tag{12.17}$$

Mit diesen Informationen kann man den Reflexionskoeffizienten[6] ($\mathcal{R}$) berechnen, der das Verhältnis von reflektierter zu transmittierter Materiewelle wiedergibt. Das Ergebnis liefert die Wahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$, auf welcher Seite der Stufe man das Teilchen

[6] *Lexikon:* Der **Reflexionskoeffizient** bezeichnet in der Physik das Verhältnis der Amplituden von reflektierter und einfallender Welle beim Übergang in ein anderes Ausbreitungsmedium.

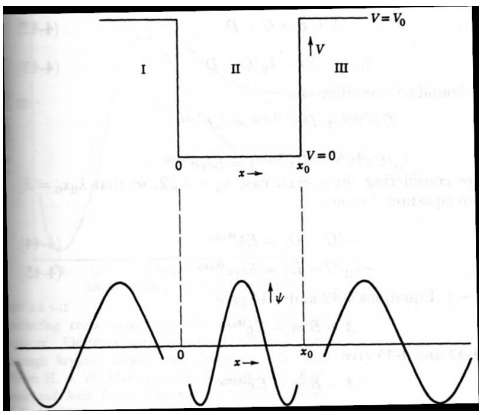


Abb. 12.13: Entwicklung der deBroglie Wellenlänge eines Elektrons beim Durchqueren einer Potenzialmulde. Die Wellenlänge der Materiewelle im Bereich (II) ist geringer als in (I, III), weil die Geschwindigkeit des Teilchens in der Mulde zunimmt. Für die Stetigkeit des Wellenfunktion müssen die Amplituden noch angepasst werden, wobei unter anderem auch Reflexionen berücksichtigt werden müssen [**?**].

möglicherweise in einer Messung findet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \frac{|\Psi_r|^2}{|\Psi_i|^2} \\
\mathcal{R} &= \frac{|B|^2}{|A|^2} \\
\mathcal{R} &= \frac{(k_i - k_{II})^2}{(k_i + k_{II})^2} \\
\mathcal{R} &= \left(\frac{\sqrt{E - V_0} - \sqrt{E}}{\sqrt{E - V_0} - \sqrt{E}} \right)^2 \\
\mathcal{R} &= \left(\frac{\sqrt{1 - V_0/E} - 1}{\sqrt{1 - V_0/E} + 1} \right)^2
\end{aligned} \tag{12.18}$$

Was passiert im Hinblick auf einen Phasensprung, wenn das Teilchen nicht von links, sondern von rechts kommt? Der Wert des Reflexionskoeffizienten würde dadurch keine Änderung erfahren. Allerdings ergibt sich in diesem Fall ein Phasensprung von π. Für die am Hindernis reflektierte Welle macht es also einen Unterschied, ob ein Quantenteilchen in eine Kuhle herein fällt oder aus einer Kuhle heraus kommt.

Nun betrachtet man die Annäherung einer Materiewelle an einen Potenzialtopf, siehe Abb. 12.13. Die Analyse liefert eine Erklärung für den Ramsauer-Effekt. Machen Sie sich klar, dass sich beim Einfall in die Potenzialmulde die deBroglie Wellenlänge des Teilchens ändert. Beim Sturz in den Potenzialtopf erhöht sich die Geschwindigkeit und λ verringert sich. Die Anfangsenergie und die Potenzialtiefe bestimmen also den Wert von λ_{dB}. Weiter

kommt es, wie ausgeführt, bei jeder Änderung der potenziellen Energie zu einer partiellen Reflexion der Materiewelle. Da der Gradient des Potenzials unterschiedliches Vorzeichen hat, ergibt sich beim Übergang ($I \rightarrow II$) kein Phasensprung, wohl aber bei ($II \rightarrow III$). Hier ergibt sich ein Phasensprung von π. Die Materiewelle bewegt sich weiter und überlagert sich mit den an den Potenzialstufen reflektierten Wellen. Unter diesen Bedingungen sollte es deshalb durch Superposition zu konstruktiver und destruktiver Interferenz kommen. Wovon könnte es abhängen, dass es zu destruktiver Interferenz kommt? Der Grad der Interferenz hängt von der Breite und der Tiefe des Potenzials ab. Weiter spielt die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens eine Rolle. Ein interessantes Modellsystem also, dass viele Aspekte eines Materiewellen-Streuprozesses beinhaltet und exemplarisch darstellt, wie man solche Probleme angeht. Wir wollen eine speziellen Fall betrachten, nämlich dass die Ruflektionen bei $x = 0$ und $x = x_0$ gleiche Amplitude haben und um 180^o phasenverschoben sind. Das kann erfüllt werden, wenn für die Wellenlänge der Materiewelle im Bereich II gilt:;

$$x_0 = \lambda_{II}/2 \tag{12.19}$$
$$k_{II} \cdot x_0 = \pi \tag{12.20}$$

Die Zeit, die die Materiewelle braucht, um von $x = 0$ nach $x = x_0$ und von $x = x_0$ nach $x = 0$ zu gelangen, entspricht dann einer Wellenlänge der deBroglie Materiewelle. Da die beiden Wellen um π phasenverschoben sind, addieren sich die Amplituden zu NULL.

Herleitung: Insgesamt haben wir es mit fünf unterschiedlichen Materiewellen zu tun. Im Bereich I gibt es die von links einfallende (Ausbreitungsrichtung $+k_I$) und die an der Kante reflektierte, also zurücklaufende (Ausbreitungsrichtung $-k_I$) Materiewelle. Die Amplituden bezeichnen wir mit A, B:

$$\Psi_A = A \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x) \tag{12.21}$$
$$\Psi_B = B \cdot \exp(-i \cdot k_I \cdot x) \tag{12.22}$$

Im Bereich des Potenzials (Bereich II) ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit (k_{II}). Weiter gibt es wieder die nach rechts weiterlaufende Materiewelle und die an der anderen Kante reflektierte Welle.[7]

$$\Psi_C = C \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot x) \tag{12.23}$$
$$\Psi_D = D \cdot \exp(-i \cdot k_{II} \cdot x) \tag{12.24}$$

Im Bereich III schließlich gibt es nur noch eine nach rechts auslaufende Materiewelle, die im übrigen wieder dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit hat wie im Bereich (I). Also gilt $k_I = k_{III}$. Da vereinfacht den Sachverhalt!

$$\Psi_E = E \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x) \tag{12.25}$$

[7] An dieser Stelle machen wir uns das Leben einfach. Wir ignorieren, dass es an der linken Stufe beispielsweise auch wieder zu einem Streuprozess kommt.



Abb. 12.14: Photo aus der Ausstellung *Mathematica* des Technischen Museums in Berlin im Jahr 2010.

Aus Gründen der Kontinuität müssen sowohl Ψ als auch $\partial/\partial x$ am Ort x=0 stetig sein. Damit ergeben sich folgende Bedingungen für die Amplituden:

$$\begin{aligned} A \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot 0) + B \cdot \exp(-i \cdot k_I \cdot 0) &= C \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot 0) + D \cdot \exp(-i \cdot k_{II} \cdot 0) \\ A + B &= C + D \qquad (12.26) \\ i \cdot k_I \cdot A \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot 0) & \\ -i \cdot k_I \cdot B \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot 0) &= i \cdot k_{II} \cdot C \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot 0) \\ & \quad -i \cdot k_{II} \cdot D \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot 0) \\ k_I(A - B) &= k_{II}(C - D) \qquad (12.27) \end{aligned}$$

Man beachte die Fußnote.[8] Am Ort x_0 ergibt sich entsprechend:

$$\begin{aligned} C \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot x_0) + D \cdot \exp(-i \cdot k_{II} \cdot x_0) &= E \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x_0) \\ i \cdot k_{II} \cdot C \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot x_0) - i \cdot k_{II} \cdot D \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot x_0) &= i \cdot k_I \cdot E \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x_0) \\ k_{II} \cdot (C \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot x_0) - D \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot x_0)) &= E \cdot k_I \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x_0) \end{aligned}$$

Wegen Gl. 12.19 ($x_0 = \lambda_{II}/2$) und 12.20 ($k_{II} \cdot x_0 = \pi$) und[9] $\exp(i \cdot \pi) = -1$ (Abb. 12.14) ergibt sich:

$$\begin{aligned} -(C + D) &= E \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x_0) \qquad (12.28) \\ -k_{II}(C - D) &= E \cdot k_I \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x_0) \qquad (12.29) \end{aligned}$$

Nun nutzen wir die Ergebnisse aus Gl. 12.26 und 12.28 sowie Gl. 12.27 und 12.29 aus und finden:

$$\begin{aligned} (A + B) &= -E \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x_0) \qquad (12.30) \\ A - B &= -E \cdot k_I \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x_0) \qquad (12.31) \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen lassen sich nur erfüllen, wenn die Amplitude B gleich NULL ist! Damit ergibt sich, dass für die Amplitude A gilt:

$$A = -E \cdot k_I \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot x_0) \qquad (12.32)$$

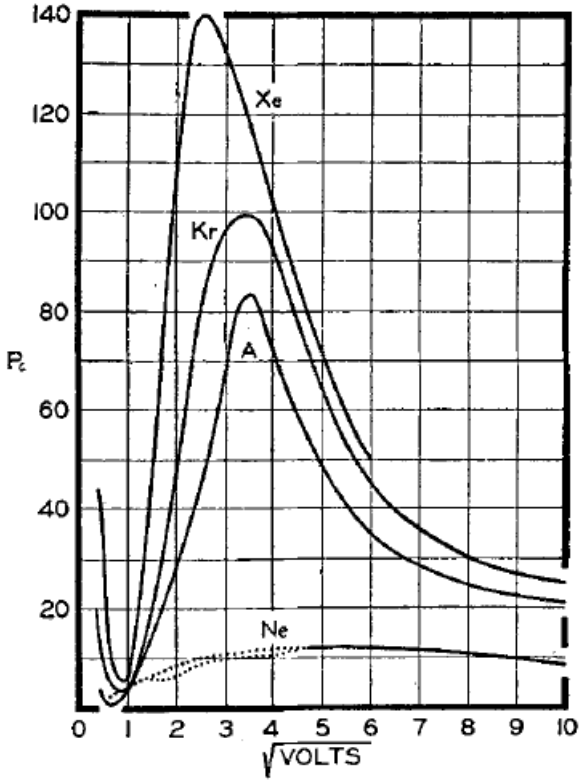


Abb. 12.15: Wahrscheinlichkeit für Stöße als Funktion der Elektronenenergie für verschiedene Edelgase [**?**]. Das Ramsauer-Minimum bei etwa $1.0\,\sqrt{\text{Volt}}$ ist in Ar, Kr, und Xe klar zu erkennen [**?**].

Die Auswertung ergibt für ein bestimmtes E_{kin}, und eine spezielle Potenzialtiefe und -breite, dass sich die einfallende und die an der Kanten bei $x = x_0$ reflektierte Welle destruktiv überlagern, sodass sich die Amplituden gegenseitig auslöschen. Das bedeutet, dass es keine reflektierte Materiewellen gibt, die Transmission EINS ist und die Welle propagiert somit unbeeinflusst weiter. Grob gesprochen merkt das Teilchen gar nicht, dass es diese Potenzialkuhle überhaupt gibt. Auf reale Systeme angewendet heißt das, dass es nicht zu einer Wechselwirkung kommt.

Tatsächlich konnte ein solches Verhalten in der Wechselwirkung langsamer Elektronen mit Edelgasatomen nachgewiesen werden [**?**]. Die Messung von Ramsauer aus dem Jahr 1921 war der erste experimentelle Hinweis darauf, dass man Verhalten freier Elektronen nicht mit den Mitteln der klassischen Mechanik beschreiben kann. Abb. 12.15 zeigt Ergebnisse gemessen an Edelgasen. Der Ramsauer-Effekt äußert sich im Minimum bei Elektronenenergien von etwa $\sqrt{1\,\text{eV}}$. Nach der klassischen Physik sollte der Wirkungsquerschnitt bei geringen Geschwindigkeiten hoch sein und sich stetig verringern, wenn man die kinetische Energie der Elektronen erhöht, da langsame Elektronen durch das elektrische Feld der Atome stärker beeinflusst werden. In der Messung zeigte sich jedoch, dass bei einer kinetischen Energie der Elektronen von etwa einem Elektronenvolt die Wechselwirkung minimal ist und danach wieder stark ansteigt. Erst durch die Analy-

[8] $i \cdot k_I \cdot A \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot 0) - i \cdot k_I \cdot B \cdot \exp(i \cdot k_I \cdot 0) = i \cdot k_{II} \cdot C \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot 0) - i \cdot k_{II} \cdot D \cdot \exp(i \cdot k_{II} \cdot 0)$

[9] Es gilt: $\exp x = \cos x + i \cdot \sin x$; $\cos \pi = -1$; $\sin i \cdot \pi = 0$

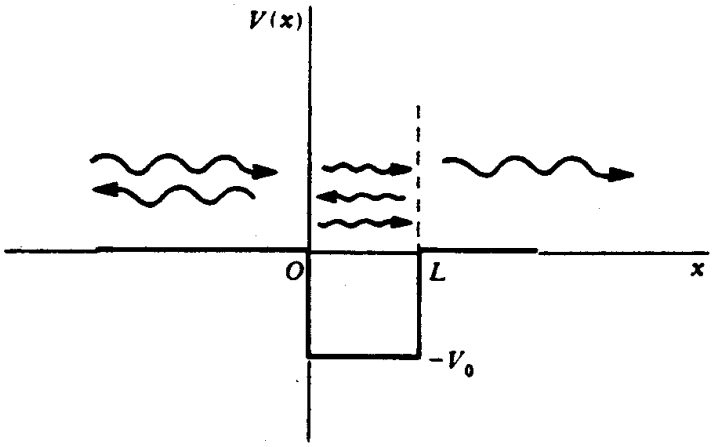


Abb. 12.16: Illustration des Ramsauer-Effekts. Die Reflexion der Elektronenwelle an den Potenzialgrenzen und die Phasenverschiebung führen zu einem interessanten physikalischen Phänomen.

se unter Berücksichtigung der Welleneigenschaften der Materie konnte man die Messung schlüssig erklären, siehe die Illustration des Effekts in Abb. 12.16.

Endlich hoher Potenzialwall

Im Kapitel *Wellenfunktion* wurde ein unendlich hohes Kastenpotential betrachtet. Als Lösung für die Wellenfunktion eines Teilchens ergaben sich sinusförmige Funktionen mit gewissen Randbedingungen. Die halbe Wellenlänge war genau ein Vielfaches der Topfbreite. In Kastenpotenzialen mit endlicher Potenzialtiefe dagegen, kann die Materiewellen in den klassisch verbotenen Bereich eindringen, siehe dazu auch [**?**]. Damit ändern sich die Lösungsfunktionen, die Wellenlänge der Materiewelle wird größer, wie Abb. 12.18 demonstriert. Dadurch verschieben sich die Energiewerte für ein Teilchen in einem endlichen Potenzialtopf, siehe Abb. 12.19. Das bedeutet, dass selbst ein Teilchen am Boden eines tiefen Potenzialtopfes merken würde, wenn sich weit oberhalb der Topfrand energetisch verschiebt.

Es lohnt sich, den Einfluss von Kastenpotenzial und Harmonischen Oszillator auf die Wellenfunktion und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit zu vergleichen. Abb. 12.17 zeigt, wie die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in den Energiezuständen E_2 und E_3. Vergleichen Sie!

Was passiert, wenn ein Teichen mit ausreichender Kinetischer Energie E_{kin} an einer Potenzialstufe ($U_0 < E_{kin}$) streut?. Es kommt zu Reflexion und Transmission der Ma-

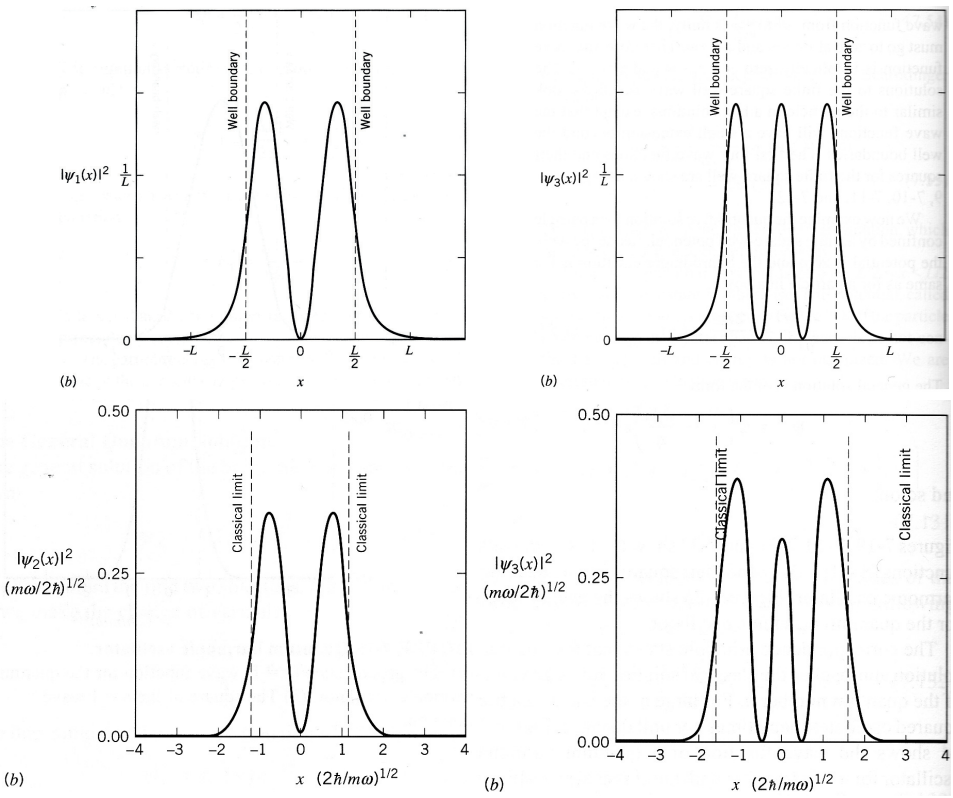


Abb. 12.17: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Quantenzustand n=2, 3: Kastenpotenzial (oben); Harmonischer Oszillator (unten) [**?**].

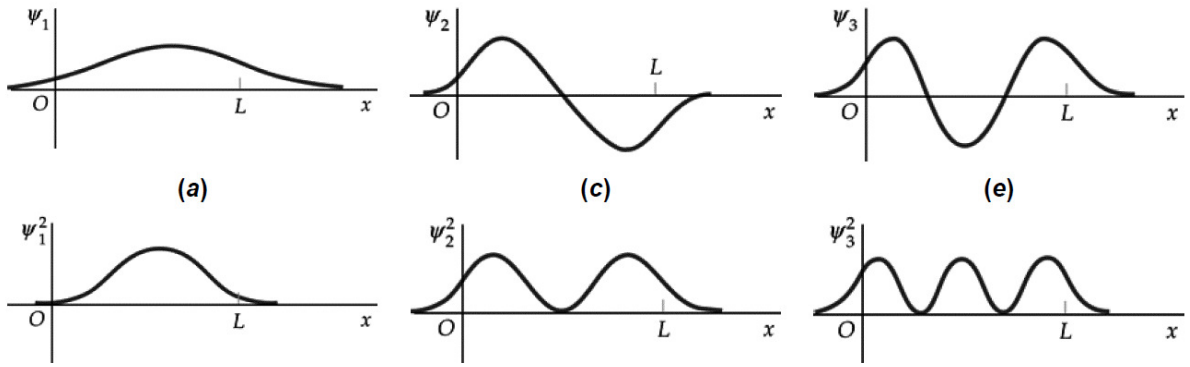


Abb. 12.18: Graphen der Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ und Wahrscheinlichkeitsverteilungen $|\Psi_n(x)|^2$ für n=1, 2, 3 für die endliche Potenzialtiefe. Im Vergleich zu einem unendlich tiefen Potenzialtopf sind die Wellenlängen geringfügig länger, die zugehörigen Energien dadurch kleiner.

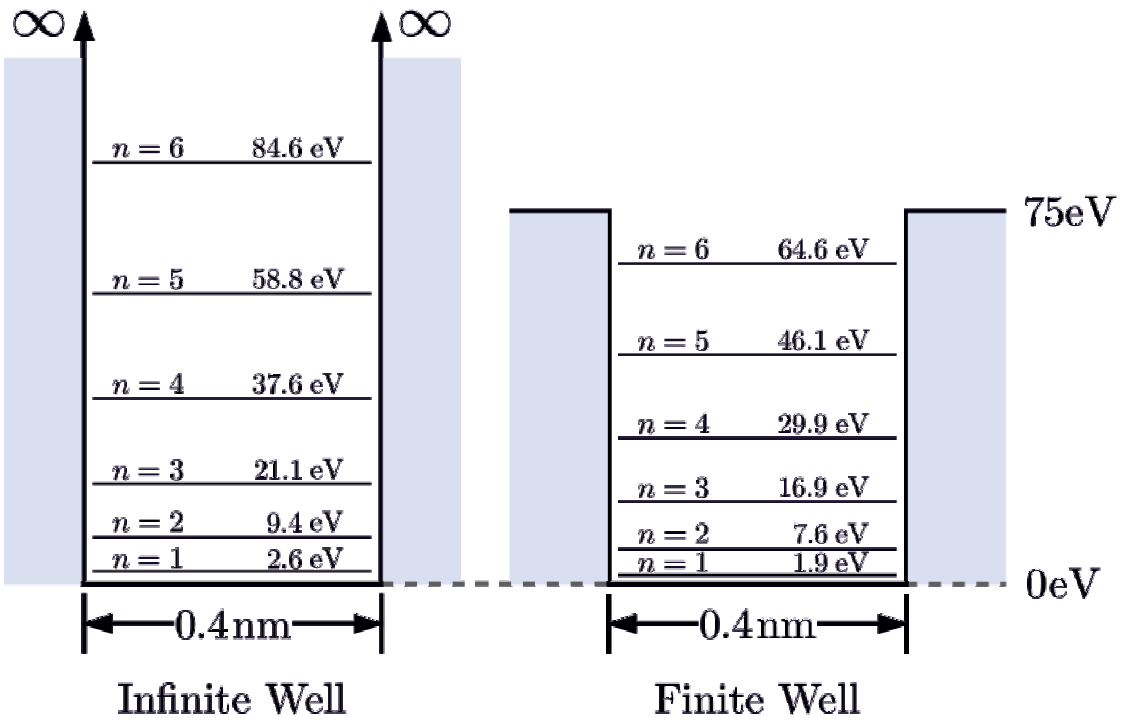


Abb. 12.19: Diagramm, das die Differenz der Energieniveaus zwischen einem endlichen (Topftiefe 75 eV, *rechts*) und einem unendlich tiefen Potenzialtopf (*links*) der Breite 0.4 nm zeigt.

teriewelle an der Barriere. Diese kann man mit Hilfe des $\vec{k}$-Vektors und seines Betrages $|\vec{k}| = k = 2\,\pi/\lambda$ folgendermaßen beschreiben. Die Geschwindigkeit v eines deBroglie Teilchens mit Masse m ist:

$$v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar \cdot k}{m} \tag{12.33}$$

Für den Betrag des $\vec{k}$-Vektors k ergibt sich vor (1) und hinter (2) einer Potenzialstufe der Höhe U_0:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2\,m \cdot E}{\hbar^2}} \tag{12.34}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2\,m \cdot (E - U_0)}{\hbar^2}} \tag{12.35}$$

Für Transmission $\mathcal{T}$ und Reflexion $\mathcal{R}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{4}{(1+k_2/k_1)^2} \cdot \frac{k_2}{k_1} \\
\mathcal{T} &= \frac{4\,k_1 \cdot k_2}{(k_1+k_2)^2} && (12.36) \\
\mathcal{R} &= \frac{(1-k_2/k_1)^2}{(1+k_2/k_1)^2} \\
\mathcal{R} &= \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} && (12.37) \\
1 &= \mathcal{T}+\mathcal{R} && (12.38)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung drückt die Energieerhaltung aus. Eigentlich ist alles so wie in der Optik, nur mit dem Unterschied, dass es sich hier nicht um Lichtwellen handelt, sondern um massive Teilchen.

Potenzialbarriere

Betrachten wir nun einen Fall eines schmalen Potenzialwalls mit endlicher Höhe U_0 unter der Bedingung, dass $E_{kin} < U_0$. Man unterscheidet drei Gebiete:

I Aus diesem Bereich nähert sich die Materiewelle der Barriere mit einer kinetischen Energie E_{kin}

II Der Bereich der endlich breiten Potenzialstufe mit Höhe U_0.

III Diesen Bereich kann ein klassisches Teilchen nie erreichen, da $E_{kin} < U_0$.

Die Quantenphysik sagt voraus, dass die Wellenfunktion der Materiewelle innerhalb der Barriere (Bereich II) exponentiell abklingt. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude ist daher auf der anderen Seite der Barriere (Bereich III) ungleich NULL ($\exp(-x) \to 0$ erst für $x \to \infty$). Es gibt also eine gewisse Wahrscheinlichkeit (möglicherweise ist diese äußerst gering), das Teilchen auf dieser Seite des Potenzialwalls zu finden. Dieses Phänomen kann die klassische Physik nicht erklären. Den Vorgang nennt man Tunneln. Es sei angemerkt, dass der Vorgang nicht mit einem Verlust an Energie verbunden ist. Das drückt sich so aus, dass sich die deBroglie-Wellenlänge des Teilchen nach dem Tunneln nicht ändert. Das Teilchen hat also keine Kinetische Energie eingebüßt. Makroskopisch könnte man es sich so vorstellen, als wenn ein Mensch durch eine Wand treten könnte, wie es in der Skulpturen von Matteo Pugliese angedeutet wird (Abb. 12.20) oder im Film *Ein Mann geht durch die Wand* mit Heinz Rühmann (1959) (Abb. 12.21).

`Link to Lecture Video`

Die genaue Analyse sagt Abhängigkeiten für das Tunneln eines Teilchen durch eine Barriere voraus:



Abb. 12.20: Skulptur von Matteo Pugliese (1969-)

- Je höher die Barriere U_0 im Vergleich zur kinetischen Energie des Teilchen E_{kin} ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit des Tunnelns. Werden Kinetische Energie und Höhe der Potenzialbarriere vergleichbar, erhöht sich die Tunnnelwahrscheinlichkeit merklich. Man erkennt dies an der Änderung der Amplitude der Wellenfunktion Ψ:

$$\Psi \approx \exp(-(U_0 - E)) \tag{12.39}$$

- Je breiter die Barriere (Breite s) ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit des Tunnelns, siehe Abb. 12.22.

$$\Psi \approx \exp(-d) \tag{12.40}$$

- Je schwerer das Teilchen (Masse m) ist, umso mehr verringert ist die Tunnelwahrscheinlichkeit.

$$\Psi \approx \exp(-m) \tag{12.41}$$

- Die Tunnelwahrscheinlichkeit P_{tunnel} hängt exponentiell von $(U_0 - E_{kin})$, d und m ab.

- Der Tunnelprozess beeinflusst die Amplitude der Wellenfunktion, die Kinetische Energie des Teilchens wird dagegen nicht beeinflusst!

Bevor wir uns nun mit der Anwendung des Tunneleffekts beschäftigen, fasst Tabelle in Abb. 12.24 die Effekte der Wechselwirkung von deBroglie Materiewellen mit den unterschiedlichsten Potenzialen nochmal zusammen. Für eine endliche Potenzialmulde der Tiefe U_0 ergibt sich bei mikroskopischen Verhältnissen folgendes Bild:



Abb. 12.21: Photo aus dem Film *Ein Mann geht durch die Wand* (1959) mit Heinz Rühmann.

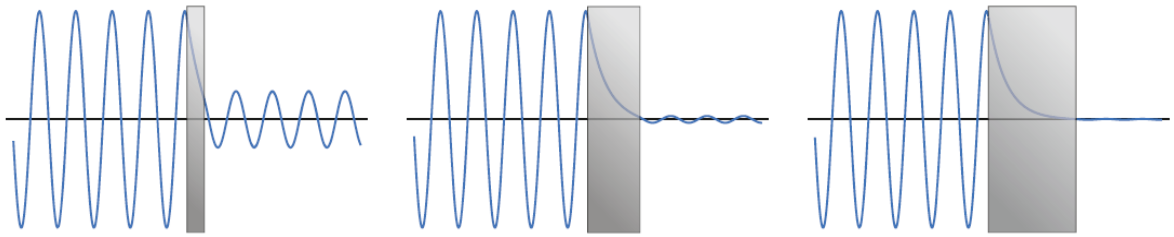


Abb. 12.22: Je breiter eine Potentialbarriere ist, desto geringer ist der Anteil der Wellenfunktion, der hindurch tunnelt.

- Die Energiewerte der Teilchen sind quantisiert. Das Teilchen müssen stationäre Energiezustände mit der Quantenzahl n=1, 2, 3,... besetzen.

- Die Anzahl der gebundenen Energiezustände ist endlich. Es gibt keine gebundenen Zustände, wenn $E_n > U_0$.

- Im Vergleich zu einem unendlich tiefen Potenzialtopf sind die Energiewerte ähnlich, liegen aber energetisch leicht tiefer. Die Ursache ist die etwas breitere Wellenfunktion, die in den klassisch verbotenen Bereich hereinragen kann. Die größere deBroglie Wellenlänge ergibt eine geringere kinetische Energie.

Wie sieht es mit der Tunnelwahrscheinlichkeit aus? Die Wellenfunktion $\Psi(x)$ fällt innerhalb der Barriere (Höhe U_0, Breite d) exponentiell ab, siehe Abb. 12.23.

$$\Psi(x = 0) = A_L \cdot \exp(-x/\delta_t) \tag{12.42}$$

wobei A_L die Amplitude der Welle bei Eintritt in die Barriere ist und $(0 \leq x \leq d)$. δ_t definiert die Eindringtiefe. Das ist der Wert, an dem die Amplitude der Funktion auf

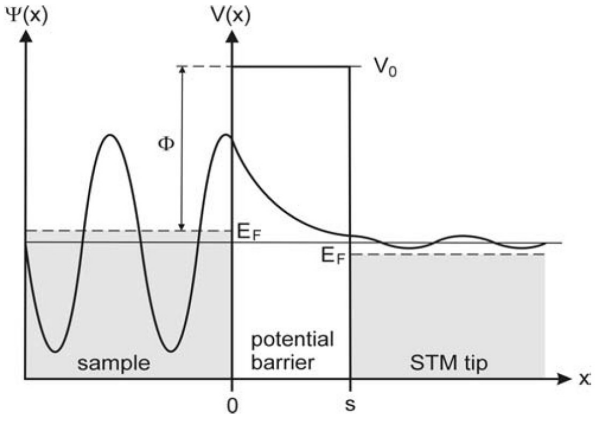


Abb. 12.23: Exponentielle Abnahme der Amplitude der Wellenfunktion eines Teilchens innerhalb einer eindimensionalen Potentialbarriere [**?**].

$1/e$ abgefallen ist [**?**]:

$$\delta_t = \frac{\hbar}{\sqrt{2\,m \cdot (U_0 - E)}} \tag{12.43}$$

Am Ende der Barriere hat die Wellenfunktion den Wert A_R:

$$\Psi(x = d) = A_R = A_L \cdot \exp(-d/\delta_t) \tag{12.44}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen vor der Barriere zu finden, ist proportional zu $|A_L|^2$, rechts der Barriere $|A_R|^2$. Die Wahrscheinlichkeit T_t, dass das Teilchen die Barriere durchquert, ist dann:

$$T_t = \frac{|A_R|^2}{|A_L|^2} = [exp(-d/\delta_t)]^2 = \exp(-2\,d/\delta_t) \tag{12.45}$$

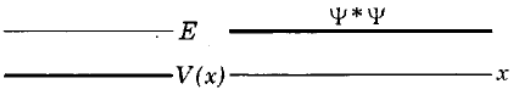
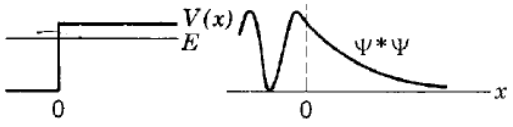
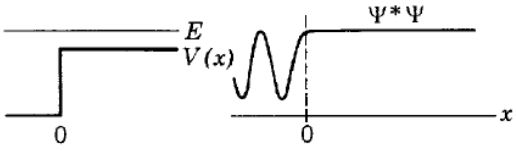
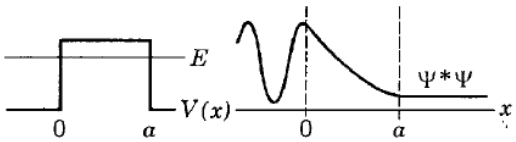
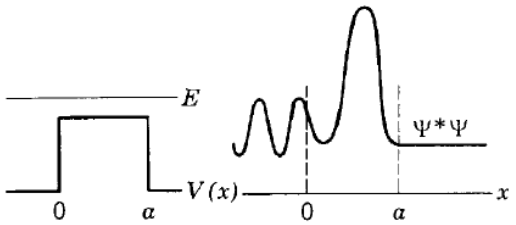
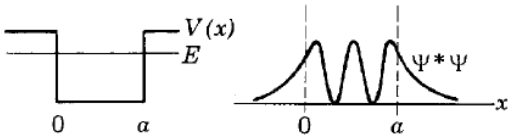
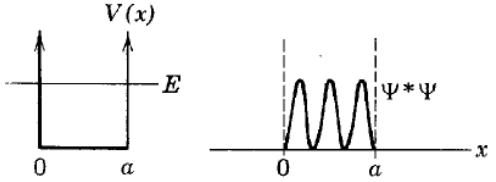
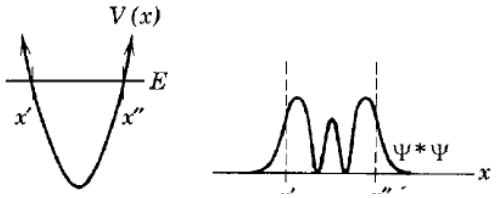
Name of System	Physical Example	Potential and Total Energies	Probability Density	Significant Feature
Zero potential	Proton in beam from cyclotron			Results used for other systems
Step potential (energy below top)	Conduction electron near surface of metal			Penetration of excluded region
Step potential (energy above top)	Neutron trying to escape nucleus			Partial reflection at potential discontinuity
Barrier potential (energy below top)	α particle trying to escape Coloumb barrier			Tunneling
Barrier potential (energy above top)	Electron scattering from negatively ionized atom			No reflection at certain energies
Finite square well potential	Neutron bound in nucleus			Energy quantization
Infinite square well potential	Molecule strictly confined to box			Approximation to finite square well
Simple harmonic oscillator potential	Atom of vibrating diatomic molecule			Zero-point energy

Abb. 12.24: Tabelle, die die Phänomene im Zusammenhang mit Elektronenwellen und Potenzialbarrieren zusammenfasst [?].

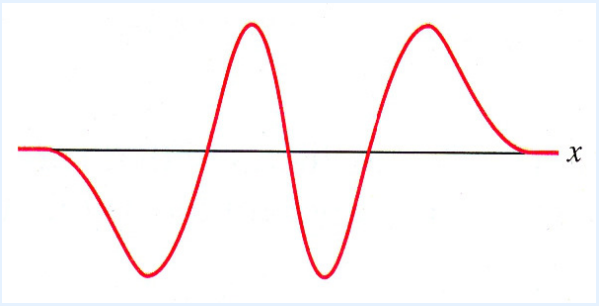


Abb. 12.25:

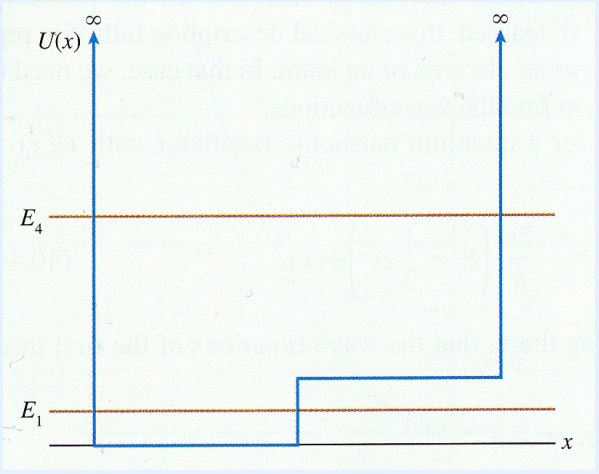


Abb. 12.26:

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
☐ geraten; ☐ unsicher; ☐ unentschieden; ☐ sicherlich richtig; ☐ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Abb. 12.25 zeigt die Wellenfunktion für ein Teilchen in einem endlichen Potenzialwall. Wie hoch ist Quantenzahl n?[10]

Aufgabe 1.2: Abb 12.26 zeigt zwei Energiezustände eines Elektrons in einer stufenförmigen Potenzialmulde. Skizzieren Sie qualitativ die zugehörigen Wellenfunktionen!

Abb. 12.27 liefert die Lösung. Im Energiezustand E_1 ist die Energie so gering, dass das Elektron klassisch nicht die Potenzialstufe erklimmen kann. Darum ist die Wellenfunktion im Wesentlichen auf den tieferen Bereich des Potenzials konzentriert. Die quantenphysikalische Wellenfunktion zeigt jedoch eine gewisse Aufenthaltswahrscheinlichkeit im energetisch höher gelegenen Energiebereich. Die zu E_2 gehörende Wellenfunktion kann den gesamten Bereich des Potenzials erkunden. Aufgrund der Potenzialstufe ändert sich allerdings die kinetische Energie des Elektrons und damit die deBroglie Wellenlänge.

[10] Antwort: Vier

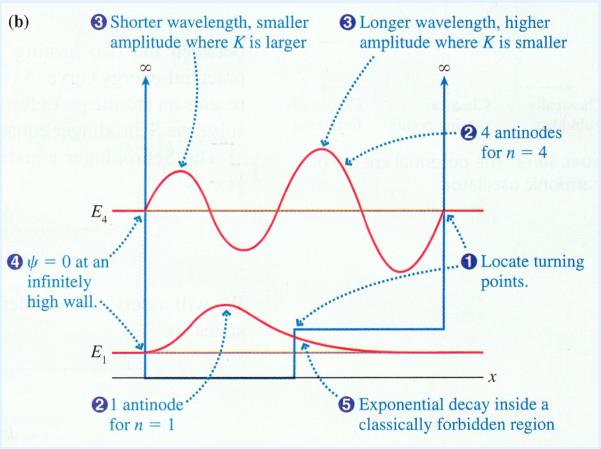


Abb. 12.27:

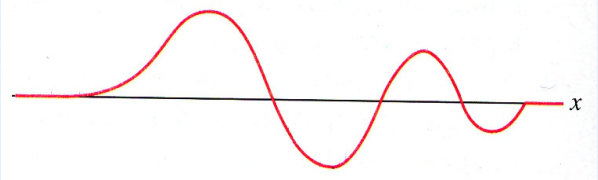


Abb. 12.28:

Aufgabe 1.3: Für welches der in Abb. 12.29 gezeigten Potenziale ergibt sich die in Abb. 12.28 gezeigte Wellenfunktion?[11]

Aufgabe 1.4: Ein Elektronen ist in einem U_0=1 eV tiefen und a=2 nm breiten eindimensionalen Potenzialtopf eingesperrt. Wie groß ist die Eindringtiefe im Quantenzustand n=1 und 4?

[11] Antwort (d). Woran erkennt man das? Die Wellenfunktion endet abrupt am rechten Rand. Das deutet auf ein unendlich hohes Potenzial an dieser Seite hin. Die linke Seite ist offensichtlich nicht unendlich hoch. Der Knotenabstand und die Amplitude nimmt langsam von links nach rechts ab, woraus man schließen kann, dass die kinetische Energie abnimmt und deshalb das Potenzial nach links hin ansteigt.

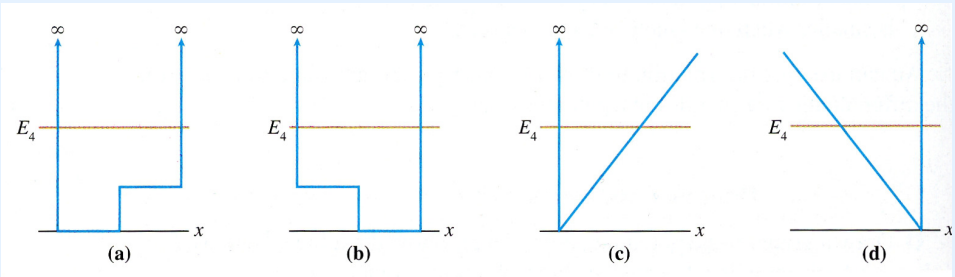


Abb. 12.29:

Die Lage der Energieniveau ergibt sich aus den Überlegungen im Kapitel *Wellenfunktion*.

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{h^2 \cdot n^2}{8\, m_e \cdot a_{PT}^2} \\
E_1 &= \frac{h^2 \cdot 1^2}{8\, m_e \cdot a_{PT}^2} \\
E_1 &= \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})^2}{8\,(9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (2.0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})^2} \\
E_1 &= 1.51 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J} = 0.094\,\mathrm{eV} \\
E_4 &= \frac{h^2 \cdot 4^2}{8\, m_e \cdot a_{PT}^2} \\
E_4 &= \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})^2 \cdot 16}{8\,(9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (2.0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})^2} \\
E_4 &= 1.36 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 0.85\,\mathrm{eV}
\end{aligned}$$

Die Eindringtiefe δ_t eines Teilchens in den klassisch verbotenen Bereich ist gegeben durch Gl. 12.43:

$$\delta_t = \frac{\hbar}{\sqrt{2\, m \cdot (U_0 - E)}}$$

Mit $U_0 - E_1$=0.906 eV und $U_0 - E_2$=0.15 eV findet man:

$$\begin{aligned}
\delta_t^{E_1} &= \frac{1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{\sqrt{2\,(9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (1.45 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J})}} \\
\delta_t^{E_1} &= 0.2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = 0.2\,\mathrm{nm} \\
\delta_t^{E_4} &= \frac{1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{\sqrt{2\,(9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (4.97 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J})}} \\
\delta_t^{E_4} &= 0.5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = 0.5\,\mathrm{nm}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.5: Ein Elektron nähert sich mit einer Kinetischen Energie von E_{kin}^1=4 eV einer V=3 eV hohen Potenzialstufe. Berechnen Sie den Transmissions- und Reflexionskoeffizienten!

Für die Kinetischen Energien ergibt sich in SI-Einheiten:

$$\begin{aligned}
E_{kin}^1 &= (4.0\,\mathrm{eV}) \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) = 6.408 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \\
E_{kin}^2 &= E_{kin}^1 - V \\
E_{kin}^2 &= ((4.0 - 3.0)\,\mathrm{eV}) \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Daraus lassen sich k_1 und k_2 berechnen:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\frac{2\,m_e \cdot E^1_{kin}}{\hbar^2}} \\
k_1 &= \sqrt{\frac{2 \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (6.408 \cdot 10{-}19\,\mathrm{J})}{(1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})^2}} \\
k_1 &= 1.03 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1} \\
\lambda_1 &= \frac{2\,\pi}{k_1} = 6.13 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \\
k_2 &= \sqrt{\frac{2\,m_e \cdot (E^1_{kin} - V)}{\hbar^2}} \\
k_2 &= \sqrt{\frac{2 \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (1.602 \cdot 10{-}19\,\mathrm{J})}{(1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})^2}} \\
k_2 &= 5.12 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1} \\
\lambda_2 &= \frac{2\,\pi}{k_2} = 1.23 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass die deBroglie-Wellenlänge größer wird, wenn sich das Elektron auf der Potenzialstufe befindet. Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten ergeben sich mit Hilfe der Gl. 12.36 und 12.37:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{4\,k_1 \cdot k_2}{(k_1 + k_2)^2} \\
\mathcal{T} &= \frac{4 \cdot (1.03 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}) \cdot (5.12 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1})}{((1.03 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}) + (5.12 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}))^2} \\
\mathcal{T} &= 0.89 \\
\mathcal{R} &= \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} \\
\mathcal{R} &= \frac{((1.03 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}) - (5.12 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}))^2}{((1.03 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}) + (5.12 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}))^2} \\
\mathcal{R} &= 0.11
\end{aligned}$$

Wie erwartet ist $\mathcal{T}$+R gleich EINS.

Aufgabe 1.6: [12] Ein Teilchen mit einer Kinetischen Energie E_{kin} nähert sich einer Barriere endlicher Breite b und endlicher Höhe $V_0 > E_{kin}$. Wenn man die Breite b erhöht, ist die Kinetische des Teilchens nach dem Tunneln

(a) kleiner.

(b) größer.

(c) unverändert.

[12] Antwort: (c)

Aufgabe 1.7: [13] Ein Teilchen mit einer Kinetischen Energie E_{kin} nähert sich einer Barriere endlicher Breite b und endlicher Höhe $V_0 > E_{kin}$. Wenn man V_0 erhöht, ist die Kinetische des Teilchens nach dem Tunneln

(a) kleiner.

(b) größer.

(c) unverändert.

[13] Antwort: (c)

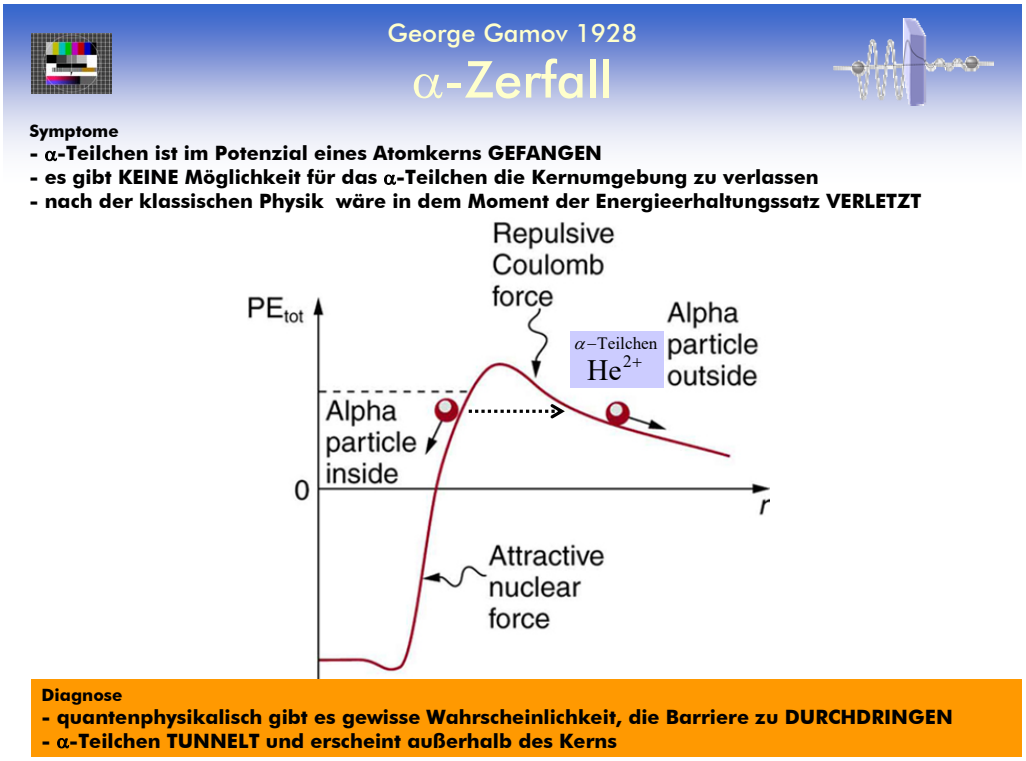
Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter Optischem Tunneln?
2. Kann man ein Experiment zum Akustischen Tunneln durchführen? Welche Dicke würden man für die Barriere wählen?
3. In welcher Weise ändert sich die deBroglie Wellenlänge eines Teilchens, wenn es auf eine Potenzialstufe trifft?
4. Skizzieren Sie die Wellenfunktion eines Teilchens, dass auf eine Potenzialstufe trifft!
5. Was ist der Ramsauer-Effekt?
6. Warum hat ein Teilchen in einem endlichen Kastenpotenzial nur eine begrenzte Anzahl an Energiezuständen?
7. In welche Richtung verschieben sich die Energiezustände, wenn man Teilchen statt in einen unendlich hohen Potenzialtopf, sondern in einen Topf ein einsperrt, der endlich hohe Wände hat?
8. Ist es für ein Elektron oder ein Proton einfacher, bei gleicher Energie, durch eine Tunnelbarriere zu gelangen?
9. In der Physik zählen nur Energieunterschiede. Wie äußert sich dies beim Tunneleffekt?
10. Wie ist die Eindringtiefe beim Tunneln definiert?
11. Kann ein Basketball durch eine Klarsichtfolie tunneln?
12. Wenn Aluminium der Luft aussetzt wird, bildet sich eine hauchdünne Isolatorschicht. Wenn man die oxidierte Oberflächen in Kontakt mit einem Metall bringt bringt, ist es möglich, bei Anlegen einer Spannung, einen elektrischen Strom zu messen. Warum?
13. Verliert das Elektron durch den Tunnelprozess an Kinetischer Energie?

12.2 Tunneln in Natur und Technik



Nachdem wir in letzten Kapitel die Grundzüge des quantenphysikalischen Tunnels kennen gelernt haben, beschäftigen wir uns im Folgenden mit den weitreichenden Auswirkungen. Zunächst betrachten wir -auch aus historischen Gründen- einen Prozess aus der Kernphysik. Es geht um die Emission von Heliumkernen aus einem radioaktivem Kern. In der Vorlesung *Zerfall des Myons* wurde die mittlere Lebensdauer des Myons durch das Zerfallsgesetz beschrieben. Das Gesetz gilt auch für radioaktive Kerne. Wie damals schon erwähnt, berücksichtigt das Zerfallsgesetz den statistischen Charakter der Prozesse. Bei einer großen Anzahl an Teilchen, z.B. ein Mol eines Stoffes, kann man nahezu exakt vorhersagen, wann sich die anfängliche Menge halbiert hat. Dies ergab die so genannte Halbwertszeit. Allerdings ist es unmöglich vorherzusagen, wann ein einzelner Kern zerfällt. Wie sich herausstellt, ist der Tunneleffekt für den α-Zerfall in Kernen verantwortlich. In der Vorlesung *Kernphysik* wird man weiter feststellen, dass die mittlere Lebensdauer der Kerne eng verknüpft ist mit der kinetischen Energie der Teilchen. Hier drückt sich die Höhe der zu überwindenden Tunnelbarriere aus. Weiter bestimmt Tunneln die Fusionsprozesse in der Sonne und nimmt auf vielen Ebenen über die Chemie bis hin zu Mutationen Einfluss auf unser Leben. Auch moderne technische Entwicklungen basieren auf tunnelden Elektronen.



Alpha-Zerfall

Der α-Zerfall ist ein radioaktiver Zerfallsprozess, bei dem ein instabiler Kern spontan Energie freisetzt, indem es ein α-Teilchen ausstößt. Das α-Teilchen ist ein zweifach positiv geladener Heliumkern ($^4_2\mathrm{He}^{2+}$). Das α-Teilchen bildet sich im Kern spontan aus zwei Protonen und zwei Neutronen, ist aber durch die starke Wechselwirkung an den Kern gebunden und kann klassisch nicht entweichen. Warum gerade das α-Teilchen? Es hat mit 7.8 MeV pro Nukleon eine außergewöhnlich hohe Bindungsenergie. Erstaunlich ist, dass die Kinetische Energie E_α der α-Teilchen in einem engen Bereich zwischen 4 und 9 MeV liegt. Die Lebensdauern der Kerne unterscheiden sich dagegen drastisch. Die Werte zeichnen von 10^{-7} Sekunden bis 10^{10} Jahren. Beispielsweise ergibt sich den α-Zerfall

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{234}_{90}\mathrm{Th} + \alpha$$

ein E_α=4.18 MeV und eine Halbwertszeit von $4.5 \cdot 10^9$ Jahren. Beim Zerfall

$$^{212}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow ^{208}_{82}\mathrm{Pb} + \alpha$$

dagegen E_α=8.78 MeV und eine Halbwertszeit von 0.3μs. Als Ursache wurde das Tunneln des Heliumkerns durch die Coulombbarriere des Kerns[14] identifiziert [**? ?**]. In der Abbil-

[14] *Lexikon:* Die **Coulombbarriere** ist das Potenzial, gegen das ein Proton anlaufen muss, um in den stark positiv geladenen Bereichs des Atomkerns zu gelangen.

dung erkennt man auch, wie die Abhängigkeit der Rückstoßenergie von der Lebensdauer zustande kommt. Bei einer kurzen Halbwertszeit ist auch die Bindungsenergie gering und das α-Teilchen erscheint nahe der Coulomb-Barriere. Dabei gewinnt es eine hohe kinetische Energie. Wie Abb. 12.30 zeigt, spiegeln die experimentelle Ergebnisse dieses Verhalten wieder. Der enge Zusammenhang von Halbwertszeit der radioaktiven Kernen und der kinetischen Energie der α-Teilchen wurde schon früh erkannt und ist als empirische Geiger-Nuttall Regel bekannt [**?**].[15] Die Erklärung dieses Phänomens über einen Tunnelprozesses untermauerte, dass die Quantenphysik für Prozesse im Kern relevant ist. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass ein α-Teilchen und kein Proton (p) oder Neutron (n) den Kern verlässt. Diese Prozesse sind prinzipiell möglich, aber treten nur äußerst selten auf. Beispiele für n-Zerfälle sind Be-13, He-5 und Lu-151, Tm-147 für p-Zerfälle.

Kernfusion und Leben^{4LP}

Bei Temperaturen von $T_K = 10^7\,\mathrm{K}$ laufen im Kern der Sonne verschiedene Fusionsreaktionen ab. Der am häufigsten stattfindende Prozess ist dabei die Proton-Proton Reaktion, der so genannte Wasserstoffzyklus. Wasserstoff- und Deuteriumkerne[16] verschmelzen dabei in einem mehrstufigen Prozess zu Helium. Der erste Schritt[17] ist dabei die Erzeugung von Deuterium im Stoß zweier Protonen ($p + p$).

$$^1\mathrm{H} +^1 \mathrm{H} \rightarrow^2 \mathrm{H} + e^+ + \nu_e + 0.42\,\mathrm{MeV} \tag{12.46}$$

Berechnet man die kinetische Energie der Protonen aus den vorherrschenden Temperaturen ($E_{kin} = k_B T_K$, k_B: Boltzmann-Konstante) stellt sich heraus, dass die Ionen die Coulombabstoßung (q^2/r) nicht überwinden können, die zur Bildung von Helium notwendig ist. Verantwortlich für die Fusion ist die Starke Wechselwirkung. Die starke Kraft wirkt allerdings nur über $10^{-15}\,\mathrm{m}$ (Kapitel *Heisenberg*). Überraschend ist, dass bei der im Kern der Sonne herrschenden Temperatur von $1.5 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$, die Kinetische Energie nur eine Annäherung der Protonen erlaubt bis zu einem Abstabd von $10^{-12}\,\mathrm{m}$. Die elektrostatische Abstoßung bildet eine Barriere die die Protonen nicht überwinden können. Erst quantenmechanisches Tunneln durch die Coulombbarriere ermöglicht den Fusionsprozess. Abb. 12.31 zeigt, wie dieser Prozess in Kern-Kern Stößen abläuft.

[15] *Lexikon:* Die Emission von α-Teilchen tritt verstärkt in schweren Atomkernen auf. Alle Kerne, die schwerer sind als Pb, zerfallen über diesen Prozess. Geiger und Nuttall fanden im Jahr 1911 eine empirische Beziehung (**Geiger-Nuttall Regel**) zwischen der Halbwertszeit des α-Zerfalls und der Energie der emittierten α-Teilchen.

[16] *Lexikon:* Als **Deuteron** wird der Atomkern des schweren Wasserstoff-Isotops Deuterium ${}^2_1\mathrm{H}$ bezeichnet. Das Deuteron besteht aus einem Neutron und einem Proton.

[17] The Nobel Prize in Physics 1967 was awarded to Hans Bethe *for his contributions to the theory of nuclear reactions, especially his discoveries concerning the energy production in stars.*

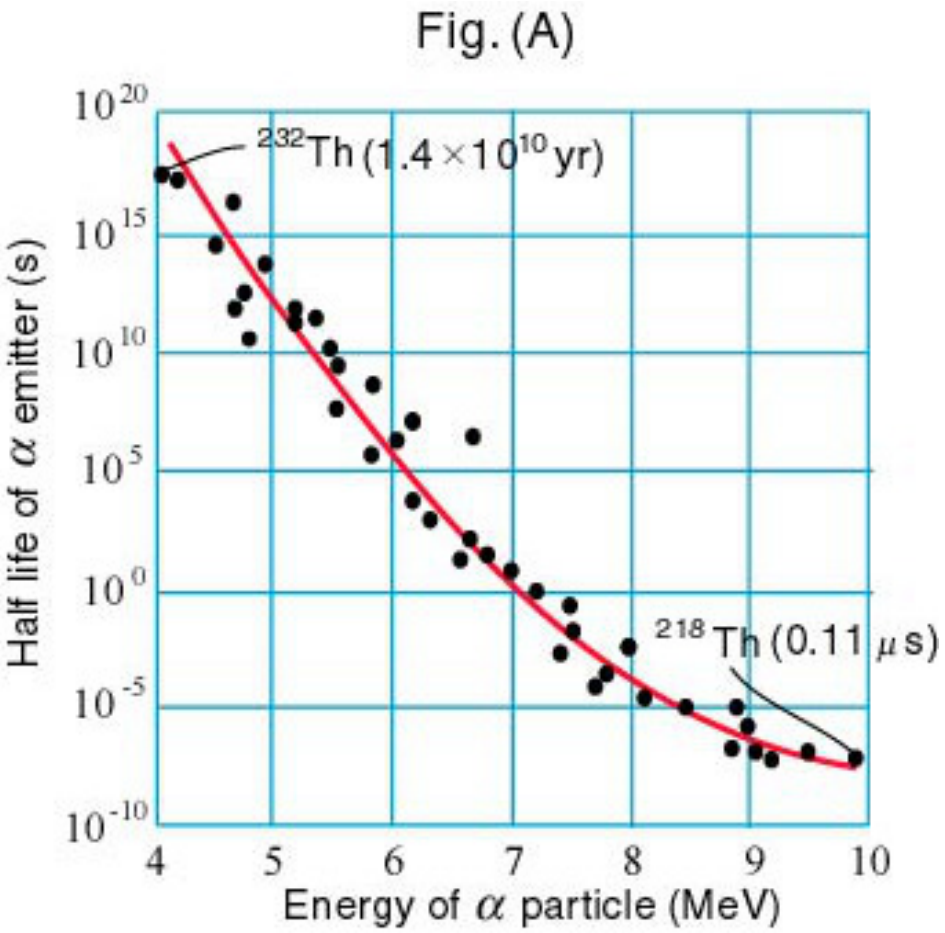


Abb. 12.30: Halbwertszeiten von α-Zerfällen. Die schwarzen Punkte sind die experimentellen Resultate. Die durchgezogene Kurve gibt das Ergebnis der Geiger-Nuttall Regel wieder.

Ein Beispiel aus der Astrobiologie

Wie im Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt* gezeigt, kann Leben auf Planeten nur in der so genannten habitablen Zone entstehen.[18] Weitere Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit sich im Laufe der Evolution Pflanzen und Tiere auf der Erde etablieren konnten. Im Folgenden werden Prozesse vorgestellt, die belegen, dass der Tunneleffekt bei der Entwicklung von Leben eine wichtige Rolle spielt [**?**].

Nochmal zurück zum Wasserstoffzyklus. Der Proton-Proton Zyklus fusioniert in einem mehrstufigen Prozess Helium. Die Barriere für diese Reaktion ist allerdings enorm hoch und in der Sonne müssten deutlich höhere Temperaturen herrschen, um den Prozess zu

[18] *Lexikon:* Die **Astrobiologie** ist eine interdisziplinäre Forschungsrichtung (Physik, Astronomie, Chemie und Biologie), die sich damit beschäftigt, wie sich biologisch relevante Moleküle im Kosmos bilden, wie die Entstehung von einfachen chemischen Komplexen abläuft und wie die Voraussetzungen für die Entstehung von Leben sind.



ermöglichen. Der Tunnelprozess ermöglicht dabei die Reaktion unter den vergleichsweise niedrigen Temperaturbedingungen im Kern der Sonne (T_{sun}^{core}=15.6 $\cdot$ 10^6 K). Die Wahrscheinlichkeit für den Prozess ist allerdings so gering, so dass nur ein winziger Teil der Proton-Proton Stöße ($1 : 10^{-11}$) zur Fusion führen. Allgemein hängt die Fusionsrate von den Kernladungen (Z_1, Z_2) und der Geschwindigkeit (v) der Stoßpartner ab

$$P_{fusion} \propto \exp\left(-\frac{Z_1 \cdot Z_2}{v}\right) \tag{12.47}$$

Was zunächst wie ein großer Nachteil aussieht, ist für die Evolution von Leben vorteilhaft. Die chemischen und biologischen Entwicklungsprozesse erfordern einen lang anhaltenden und stetigen Eintrag an Energie, beispielsweise durch Sonnenlicht, das über die Photosynthese den Sauerstoffanteil in der Atmosphäre erhöht und so die Entwicklung komplexen Lebens auf der Erde ermöglicht. Es dauerte Milliarden Jahre, um entscheidende Schritte zur Entstehung und Entwicklung von Lebens auf der Erde auszulösen. Nach geologischen und paläontologischen Untersuchungen entstand die Erde vor etwa 4.5 Milliarden Jahren (4.5 Ga). Die ersten Hinweise auf Bakterien stammen aus der Zeit vor 3.4 Ga, Mikrofossilien 1.8 Ga, Metazoen-Fossilien 0.63 Ga und der Homo sapiens 0.00016 Ga. Der konstante Energiefluss der Sonne war daher eine Grundvoraussetzung für die biologische Entwicklung.

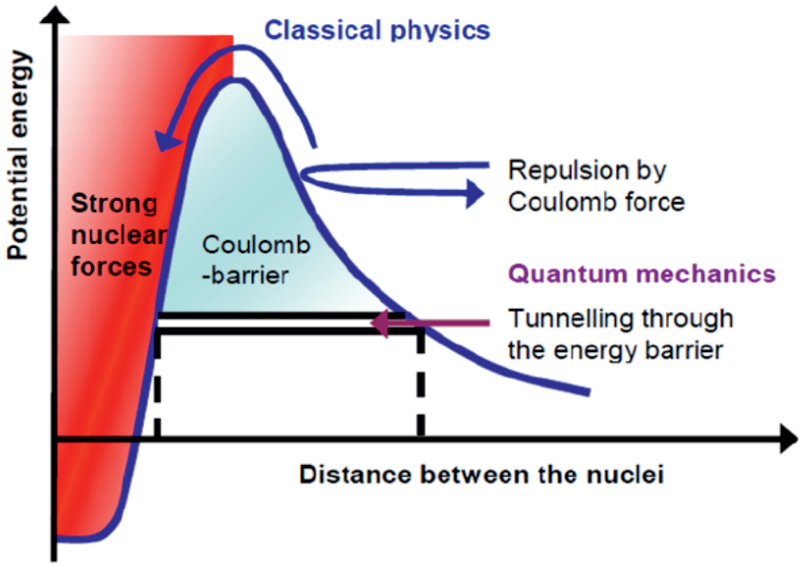


Abb. 12.31: Schematische Darstellung der Potenzialverhältnisse im Atomkern. Im Gegensatz zur Klassischen Physik können α-Teilchen mit Hilfe des quantenphysikalischen Tunnelprozesses die Coulombbarriere durchqueren.

Eines muss man in Zusammenhang mit den Fusionprozessen über Tunneln berücksichtigen: Die Tunnelwahrscheinlichkeit spiegelt sich nicht unmittelbar in der tatsächliche Reaktionsrate wieder. Hier spielen noch der andere Faktoren eine Rolle, beispielsweise die Umwandlung von Protonen in Neutronen über den β^+-Zerfall. Die Reaktionsrate ergibt sich aus dem nuklearen Reaktionsquerschnitt $\sigma(E)$ und der Geschwindigkeitsverteilung der Nukleonen:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp(-2\,G) \tag{12.48}$$

wobei G der Gamov-Faktor[19] und $S(E)$ der astrophysikalische S-Faktor[20] ist, wobei $S(E)$ nur wenig von der Energie abhängt. Auf der anderen Seite liefert der Eintrag $\exp(-2\,G)$ eine starke Energieabhängigkeit, denn hier spiegelt sich die Tunnelwahrscheinlichkeit mit seiner starken Temperaturabhängigkeit wieder. Das hat erhebliche Konsequenzen für Sterne wie unsere Sonne, in denen die Fusionsprozesse im wesentlichen über *pp*-Reaktionen ablaufen. Hier sind die Reaktionsraten im Vergleich zu Sonnen größerer Masse erheblich geringer.

Zusammenfassend kann man festhalten: Innerhalb der Kerns massearmer Sterne führen die starke Energieabhängigkeit der Tunnelwahrscheinlichkeit und die geringen Reaktionsgeschwindigkeiten zu einen gemächlichen Wasserstoffbrennen über Milliarden von

[19]Der Gamow-Faktor gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass stoßende Kerne die Coulomb-Barriere überwinden und eine Fusion stattfindet.

[20]Der astrophysikalische S-Faktor $S(E)$ skaliert den Gesamtwirkungsquerschnitts einer Kernreaktion unter Berücksichtigung der Coulomb-Abstoßung.

Jahren. Das ist für die Evolution eine notwendige Zeitspanne, die der Natur Zeit gibt, komplexes Lebens zu entwickeln.

- Ohne quantenphysikalische Tunneln würden thermonukleare Reaktionen nicht auftreten und es gäbe keine Sonneneinstrahlung auf potenziell bewohnbare Planeten.
- Die geringe Tunnelwahrscheinlichkeit in Sternen geringer Masse sorgen für eine über einen langen Zeitraum konstante Einstrahlung von Sonnenlicht Diese ist für die Evolution komplexer Vielzeller erforderlich.
- Ähnlich Randbedingungen gelten wahrscheinlich auch für andere Exoplaneten in Habitable Zonen.

Eine Grundvoraussetzung für Leben auf Planeten sind einfache organische Moleküle, aus denen sich im Folgenden komplexe Biomoleküle bilden. Die Forschung geht davon aus, dass sich diese Moleküle im interstellaren Raum bilden und über Meteoriteneinschläge auf die Erde gelangten. Der Forschungszweig, der sich mit diesen Problemen beschäftigt nennt sich Astrobiologie. Zur Illustration, wie Messungen zum Nachweis einfacher aber auch komplexer Moleküle im Weltraum durchgeführt werden, eine Untersuchung zur Bildung von Protosternen, bei der das Verhältnis von *ortho-* und *para*-Wasserstoff[21] ausgewertet wird und daraus auf die Dynamik der Entstehung von Frühstadien von Sternen geschlossen wird. Molekularen Wasserstoff (H_2) findet man beispielsweise in interstellaren Wolken. Für die Astronomie ist es allerdings nahezu unmöglich, die Konzentration dieses Molekül in den Wolken spektroskopisch zu bestimmen. Als Alternative bietet es sich an, die zugehörigen Ionen nachzuweisen, wie beispielsweise das dreiatomige H_2D^+. Die charakteristische Spektrallinie findet man im fernen Infrarot bei 219 μm. Da Licht in diesem Wellenlängenbereich durch die Atmosphäre der Erde stark absorbiert wird, erfolgt die Messung unter anderem über ein Radioteleskop an Bord einer Boing 747. Abb. 12.32 zeigt, wie die Infrarot-Spektren ermittelt werden [**?**]. Die Temperaturen in den interstellaren Wolken sind allerdings so gering, dass die Reaktionsraten zur Bildung von H_2 aus Wasserstoffatomen äußerst gering sind. Hier ergibt sich möglicherweise ein *bottleneck*, der die Entwicklung komplexen Lebens behindert.

Ein Beispiel aus der Chemie

Hydrogen Tunneling in Enzyme Reactions [**?**]**:** Primary and secondary protium-to-tritium (H/T) and deuterium-to-tritium (D/T) kinetic isotope effects for the catalytic oxidation of benzyl alcohol to benzaldehyde by yeast alcohol dehydrogenase at 25 degrees Celsius have been determined. Previous studies showed that this reaction is nearly or fully rate limited by the hydrogen-transfer step. Semiclassical rmass considerations

[21] *Lexikon:* **Wasserstoffmoleküle** existiert in zwei Modifikationen, als so genannter *ortho-* und *para*-Wasserstoff. Diese unterscheiden sich durch die unterschiedliche Orientierung der Spins[22] der beiden Wasserstoffkerne (siehe Vorlesung *Relativistischer Dopplereffekt*). Bei Raumtemperatur beträgt das Verhältnis *ortho*-H_2 zu *para*-H_2 (3:1) wahrend bei kyrogenen Temperaturen der Anteil an *para*-H_2 nahezu EINS ist.

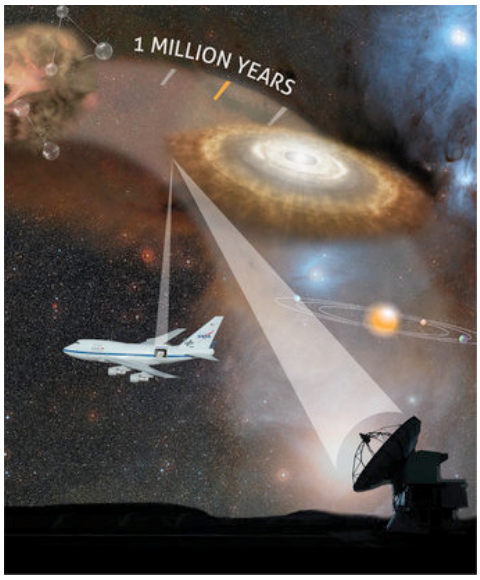


Abb. 12.32: Das Stratosphären-Observatorium für Infrarot-Astronomie (SOFIA) dient der Erforschung des Weltalls mit Hilfe der Molekülspektroskopie. Mit dem in eine modifizierte Boeing 747SP integrierten 2.7-Meter-Teleskop werden astronomische Beobachtungen im Infrarot- und Submillimeter-Wellenlängenbereich weitgehend oberhalb der störenden irdischen Lufthülle durchgeführt. Schwerpunkt der wissenschaftlichen Zielsetzung ist die Erforschung der Entwicklung von Milchstraßensystemen, sowie die Entstehung und Entwicklung von Sternen und Sonnensystemen aus interstellaren Molekül- und Staubwolken.

that do not include tunneling effects would predict that $k_H/k_T = (k_D/k_T)^{3.26}$, where k_H, k_D, and k_T are the rate constants for the reaction of protium, deuterium, and tritium derivatives, respectively. Significant deviations from this relation have now been observed for both primary and especially secondary effects, such that experimental H/T ratios are much greater than those calculated from the above expression. These deviations also hold in the temperature range from 0 to 40 degrees Celsius. Such deviations were previously predicted to result from a reaction coordinate containing a significant contribution from hydrogen tunneling.

Tatsächlich werden chemische Reaktionen im Weltraum nicht über Stöße frei fliegender Atome und Molekülen verursacht, sondern finden auf kleinen Meteoriten statt, die die Moleküle einfangen. Die Diffusion der Moleküle über die Oberfläche sorgt für eine erhöhte Reaktionsrate. Wie man schon in der *Thermodynamik* gelernt hat, hängt die Diffusion der Moleküle von der Temperatur ab und ist bei den niedrigen Umgebungstemperaturen in den interstellaren Wolken (20 K) stark eingeschränkt. Wie sich herausstellt, zeigt physisorbierter[23] Wasserstoff aufgrund eines thermisch unterstützen Tunnelns eine erhöhte

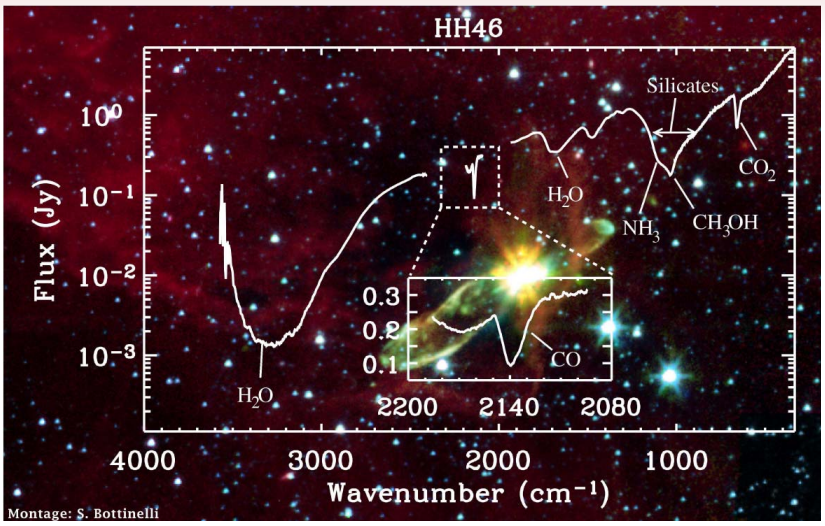
[23] *Lexikon:* **Physisorption** bezeichnet die physikalische Adsorption, d.h. die Anreicherung von Gasen

Beweglichkeit gegenüber der klassischen Erwartung. Dadurch ergibt sich eine erhöhte Reaktionsrate, die die Bildung komplexer Moleküle begünstigt.

oder Flüssigkeiten an der Oberfläche eines Festkörpers. Die adsorbierten Moleküle werden dabei durch physikalische Kräfte, wie z.B. Dipol-Dipol Wechselwirkung, auf dem Substrat gebunden. Im Gegensatz zur Physisorption werden bei der **Chemisorption** chemische Reaktionen ausgelöst.

Biologische Relevanz des Tunneleffekts

Kernfusion und Leben 5



Diagnose
- **Bildung von Formaldehyd erfolgt ebenfalls über quantenphysikalisches Tunneln**
- **Formaldehyd ist Vorläufermolekül bei der Bildung von Aminosäuren, Proteinen und Zucker**

Auch bei der Bildung von wichtigen Molekülen wie H_2 [**?**], Kohlenmonoxid (CO), Wasser (H_2O) und Formaldehyd (CH_2O) eröffnet sich durch den Tunnelprozess ein zusätzlicher Reaktionskanal. Abb. 12.33 zeigt wie die Reaktion bei CH_2O abläuft [**?**]. Kohlenmonoxid ist das zweithäufigste Molekül, das auf Staubkörnern kondensiert, während Formaldehyd zu den wichtigsten präbiotischen Molekülen[24] in stellaren Wolken gehört, die man bislang entdeckt hat [**?**]. Formaldehyd sieht man als Vorläufer für die interstellare Bildung von Aminosäuren, also als Bausteine von Proteinen und beispielsweise dem Zuckermolekül Ribose, das einer der Bausteine der DNA ist. Die Abbildung auf der Folie zeigt ein weiteres Beispiel für den spektroskopischen Nachweis größerer Moleküle. Im Hintergrund sieht man die kosmische Region aus der die Signale stammen.

NASA's Spitzer Space Telescope has lifted the cosmic veil to see an otherwise hidden newborn star, while detecting the presence of water and carbon dioxide ices, as well as organic molecules. Using near-infrared light, Spitzer pierces through an optically dark cloud to detect the embedded outflow in an object called HH 46/47. Herbig-Haro (HH) objects are bright, nebulous regions of gas and dust that are usually buried within dark dust clouds. They are formed when supersonic gas ejected from a forming protostar, or

[24] *Lexikon:* Die **präbiotische Evolution** ist die Entwicklungsgeschichte der Moleküle, die in Lebewesen von Bedeutung sind. Durch Energieeintrag in anorganischer Moleküle entstehen organische, präbiotische Moleküle dort, wo im Weltraum gemäßigte Temperaturen existieren (z. B. auf Exoplaneten).

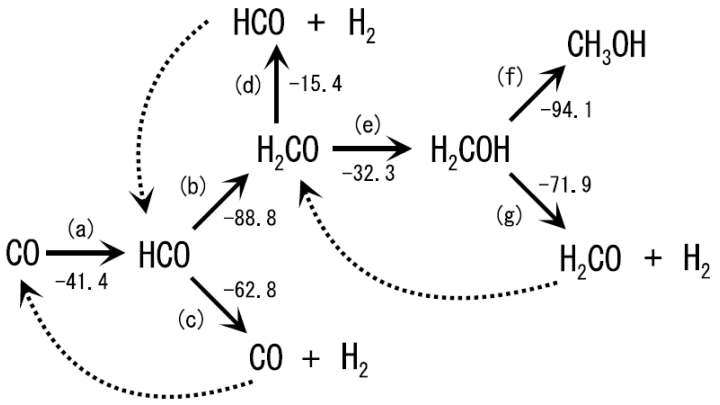


Abb. 12.33: Elementare chemische Prozesse, die zur Bildung von Formaldehyd führen. Der Pfeil deutet an, dass die Reaktion mit Wasserstoff mit dem linken Reaktanten, das rechte Produkt bildet. Die Energiewerte für die einzelnen Reaktionen sind der Einheit kcal/mol angegeben [**?**].

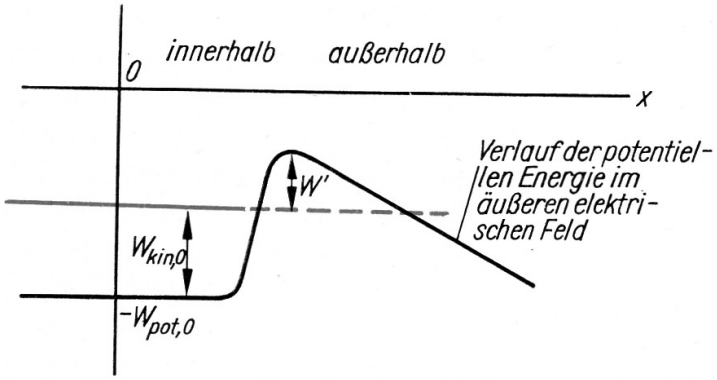


Abb. 12.34: Potenzialmulde in einem elektrischen Feld [**?**].

embryonic star, interacts with the surrounding interstellar medium [**?**].

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Festkörperphysik

Betrachten wir zunächst die Glühemission (Richardson-Effekt). Legt man ein Metall ein elektrisches Feld an, so beobachtet man einen Elektronenstrom, der das Metall verlässt. Die potenzielle Energie eines homogenen elektrischen Feldes E_e als Funktion der Ortskoordinate x ist durch $U_{pot}{=}{-}e \cdot E_e \cdot x$ gegeben (Abb. 12.34). Das externe Feld überlagert sich (Superpositionsprinzip) mit dem Bindungspotenzial der Elektronen im Festkörper. Nur Elektronen, deren kinetische Energien hoch genug sind, können das Metall verlassen. Deshalb werden in Elektronenröhren die Kathoden stark aufgeheizt, um die Glühemissionsrate zu erhöhen. Kann man die Schwelle für die Emission von Elektronen aus dem Festkörper herabsetzen?

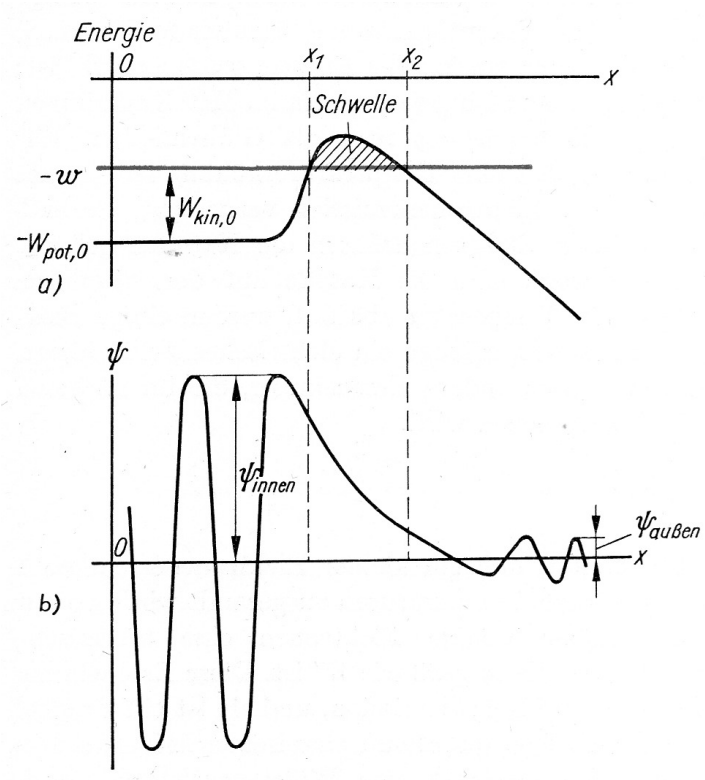


Abb. 12.35: Wellenfunktion eines Elektrons in einem Potenzialtopf. Das zugehörige Potenzial ist in Abb. 12.34 gezeigt [**?**].

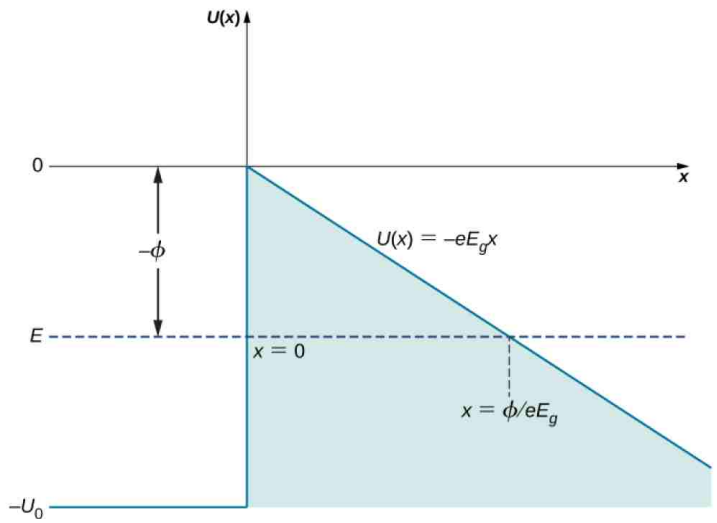


Abb. 12.36: Die potentielle Energiebarriere an der Oberfläche eines metallischen Leiters (Austrittsarbeit Φ) in Anwesenheit eines externen elektrischen Feldes senkrecht zur Oberfläche [**?**].

Tunnelbarrieren, wie sie beim α-Zerfall auftreten, können im Labor erzeugt werden. Feldemission ist der Austritt von Elektronen aus der Oberfläche eines Metalls aufgrund eines äußeren elektrischen Feldes. Man beobachtet auch bei geringen Temperaturen einen Elektronenstrom. Der Prozess wurde 1897 von Wood nachgewiesen. Die theoretische Erklärung auf der Grundlage des Tunnelprozesses (Abb. 12.35) erfolgte aber erst 1928 durch Fowler und Nordheim [**?**]. Man spricht deshalb vom Fowler-Nordheim Tunneln.

In der Festkörperphysik lernt man, dass in einem Metall die Elektronen Energiezustände bis zur Fermi-Energie besetzen. Durch ein elektrisches Feld wird die Potentialbarriere an der Oberfläche herabgesetzt. Ist die Höhe der Potentialbarriere soweit abgesunken, dass Elektronen an der Fermikante tunneln können, findet Feldemission statt. Typische elektrische Feldstärken liegen im Bereich von $10^7\,\mathrm{V/m}$. Abb. 12.36 zeigt das Potenzial eines Metalls bei Anwesenheit eines elektrischen Feldes der Stärke E_g. Bei x=0 ist die Höhe der Stufe E und auf der rechten Seite $-e \cdot E_g \cdot x$. Die Dicke der Barriere proportional zu $1/E_g$. Da bedeutet, dass die Breite der Barriere für höhere externe Felder abnimmt. Damit verbunden ist ein exponentielles Anwachsen der Tunnelereignisse. Der Tunnelstrom kann also durch die Stärke des äußeren elektrischen Feldes gesteuert werden.

Ein Beispiel aus der Atomphysik

Ein starkes elektrisches Feld E_L kann ebenfalls durch einen intensiven Laserpuls der Intensität I_L bereitgestellt werden:

$$I_L(t) \propto |E_L(t)|^2 \tag{12.49}$$

Unter bestimmten Umständen kann man die Verhältnisse als quasistatisch ansehen, so dass ein ähnliches Szenario wie beim Fowler-Northeim Tunneln auftritt. Um diesen Effekt in Atomen zu nutzen, kann man als Faustformel die Feldstärke im Wasserstoffatom heranziehen ($10^{11}\,\mathrm{V/m}$). Das Laserfeld verbiegt das Coulombpotenzial des Atoms so stark, dass Elektronen aus dem Atom heraus tunneln und im Laserfeld beschleunigt werden. Die rasante Entwicklung im Bereich der Laserphysik[25] erlaubt es solche experimentellen Bedingungen zu realisieren. Die Ausnutzung des Tunneleffekts in der Laserwechselwirkung mit Atomen [**?**] hat zur Entwicklung intensiver, kohärenter Röntgenquellen geführt.

Beispiele aus der Halbleitertechnologie

Am leichtesten lassen sich Elektronen aus aufgeladenen Metallspitzen freisetzen, da dort die Dichte der Feldlinien am höchsten ist. Denken Sie in diesem Zusammenhang an die Konzentration der elektrischen Feldlinien eines Blitzableiters bei Gewitter. Tunnelnde Elektronen benötigen, wie wir am Fowler-Nordheim Effekt gesehen haben, geringere

[25] The Nobel Prize in Physics 2018 was awarded *for groundbreaking inventions in the field of laser physics* with one half to Arthur Ashkin *for the optical tweezers and their application to biological systems*, the other half jointly to Gerard Mourou and Donna Strickland *for their method of generating high-intensity, ultra-short optical pulses.*



Abb. 12.37: Sony began experimenting with FED (field emission display) technology as early as 1998 and showcased a 13-inch prototype TV at SID 2001. It seems that FED technology is not going to be the successor of LCD and plasma. Toshiba gave up on FED, as early as January 2007. The company stopped a joint venture with Canon, which also seems to have more or less stopped development in that area.

Feldstärken, um den Festkörper zu verlassen. Über den Tunnelprozess freigesetzte Elektronen werden zur Anode hin beschleunigt (siehe oben). Die auf dem Leuchtschirm befindlichen Moleküle werden durch Stöße mit den Elektronen angeregt und senden sichtbares Licht aus. Die elektronischen Bauteile sind folgendermaßen aufgebaut. Auf dem Kathodenmaterial befinden sich pro Bildpixel etwa 1000 Emitter (Durchmesser 1 μm). Die Spitzen sind entweder Halbleiter, Metalle oder Diamanten. Die Bauhöhe des Displays beträgt nur etwa 2 mm. Das in diese Weise aufgebaute Feldemissionsdisplay (FED) könnten die veralteten[26] CRT- und neueren LCD-Bildschirme[27] ablösen. Der FED-Bildschirm ermöglicht eine brillante Auflösung bei hoher Farbbrillanz und Kontrast und großer Helligkeit. Die Technologie ermöglicht große Blickwinkel ohne Einbußen in der Bildqualität. Die Firma Sony hat die Entwicklung vorangetrieben (Abb. 12.37), dann allerdings die Arbeiten kurz vor der Einführung eingestellt.

Sony's Field Emission Technologies closing its doors FED's dead, baby-at least for Sony. The company's spin-off Field Emission Technologies, whose sole purpose was to develop the displays, is now closing its doors. Blame goes to difficulty in raising funds for manufacturing. After years of teasing and an actual demo unit just a few months ago, it's a little sad to the technology's biggest proponent shutter. Goodbye, FET, we hardly knew ye.

R. Miller (yahoo!finance), march 26, 2009

Die Tunnel- oder Ekasidiode[? ?] ist eine Halbleiterdiode mit hoch dotierten p- und n-Bereichen, wodurch die so genannte Raumladungszone[28] extrem schmal ausfällt. Der

[26] CRT: *cathode ray tube*
[27] LCD: *liquid crystal display*
[28] *Lexikon:* Die **Raumladungszone** ist in der Halbleiterphysik ein isolierender Bereich innerhalb ei-

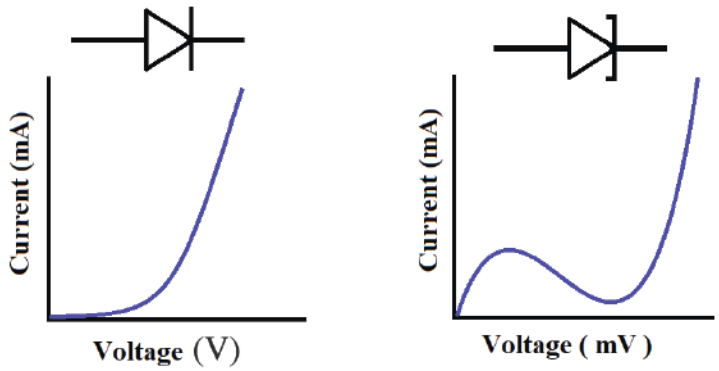


Abb. 12.38: Vergleich der Kennlinien einer konventionellen Diode (links) und einer Tunneldiode (rechts). Das entscheidende Merkmal ist der negative differentielle Widerstandsbereich in der Kurve der Tunneldiode. [**?**].

Effekt wurde 1958 von Leo Ekasi beim Stadium stark Germanium-dotierter Zenerdioden entdeckt. Manche der Dioden zeigten eine negativen Widerstandsbereich bei negativer Vorspannung [**?**]. Eine herausragende Eigenschaft der Tunneldioden ist ihre strukturelle Einfachheit. Sie besteht nur aus einem einzigen p-n Übergang! Wegen der hohen Dotierung wirkt die Sperrschicht nicht und kann durch Elektronen durchtunnelt werden. Schon bei kleiner Durchlassspannung fließt ein Strom, obwohl die Sperrschicht noch nicht abgebaut ist. Abb. 12.38 zeigt als Beispiel die Strom-Spannungskruve einer Tunneldiode (rechts) im Vergleich zu einer LED (links). Eine Tunneldiode hat keinen Sperrbereich und der Tunnelstrom steigt in Sperrrichtung kontinuierlich an. Im Durchlassbereich nimmt vor dem Erreichen der Durchbruchspannung der Tunnelstrom einen Maximalwert an. Eine weitere Erhöhung der Spannung verringert den Beitrag durch den Tunneleffekt. Im Gegensatz zum typischen nicht-ohmschen Verhalten einer LED erlaubt es eine Tunneldiode deshalb, ab einer bestimmten Spannung den Strom zu reduzieren. Dieser Strom-Spannungsbereich zeichnet sich also durch ein *negatives* Widerstandsverhalten aus.[29] In diesem Kennlinienbereich treten negative differenzielle Widerstandswerte auf, die Tunneldiode arbeitet wie ein aktives Bauteil und kann zur beispielsweise Entdämpfung von Schwingkreisen oder als schneller GHz-Schalter eingesetzt werden.

Ein Flashspeicher verwendet MOSFETs, die ein so genanntes floating-gate enthalten [**?**

nes dotierten Halbleitermaterials. Bewegliche Ladungsträger haben den Bereich verlassen, entweder aufgrund eines elektrischen Feldes oder über Diffusion. Übrig bleiben geladene Donator- oder Akzeptor-Verunreinigungen. Die Stromleitung ist stark reduziert, da keine frei beweglichen Ladungsträger mehr vorhanden sind. Die Physik der Raumladungszone hat erhebliche Bedeutung für die Halbleitertechnologie, da viele elektronische Bauteile, wie Dioden, Bipolartransistoren, und Feldeffekttransistoren, Phänomene der Raumladungszone nutzen.

[29] The Nobel Prize in Physics 1973 was divided, one half jointly to Leo Esaki and Ivar Giaever *for their experimental discoveries regarding tunneling phenomena in semiconductors and superconductors, respectively* and the other half to Brian David Josephson *for his theoretical predictions of the properties of a supercurrent through a tunnel barrier, in particular those phenomena which are generally known as the Josephson effects.*

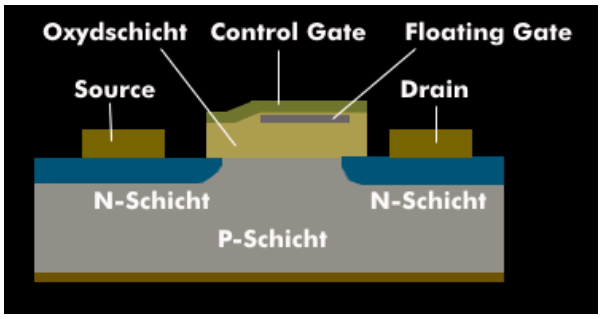


Abb. 12.39: Aufbau einer Flash-Speicherzelle mit *floating-gate*

], siehe Abb. 12.39. Das floating-gate befindet sich isoliert durch eine Oxidschicht zwischen dem control-gate und source/ drain. Es unterdrückt den Ladungstransport in die n- und p-Bereiche. Eine Ladung auf dem floating-gate erzeugt über ein elektrostatisches Feld einen leitenden Kanal zwischen drain und source. Ein floating-gate, bestehend aus Siliziumoxid generiert einen Bereich, in dem bei Anlegen einer Spannung Elektronen eingefangen werden können. Dabei ist es egal, ob eine Potentialdifferenz anliegt. Elektronen gelangen über den quantenphysikalischen Tunnelprozess in diesen Bereich. Anhand einer Schwellenspannung, die als Indikator für die Leitfähigkeit dient, kann man zwischen geladenen und ungeladenen Speicherzellen unterscheiden. Der Prozess lässt sich rückgängig machen. Durch Anlegen einer gegenpoligen Spannung werden die Elektronen aus dem Bereich des floating-gate entfernt. Für einen Flash-Speicherchip setzt man Milliarden dieser Einzelbauteile zusammen.

Ein Beispiel aus der Welt der Polymere

Nochmal zurück zu Formaldehyd und des Phänomens der Polymerisation.[30] Wie sich herausstellt, ist der polymere Zustand stabiler als eine Struktur aus Monomeren. Damit sich ein Formaldehydmolekül an eine Polymerkette anschließt, muss ein Elektron aus der doppelten CO-Bindung diese verlassen und in den Bereich zwischen den Kohlenstoff- und Sauerstoffatomen des benachbarten Moleküls gelangen. Dabei kommt es zu einer Umverteilung der Elektronendichte, wodurch sich die interatomaren Abstände verändern. Als Resultat ist die Dichte des Polymers höher als die der Monomere. An dieser Stelle kommt der Tunnelprozess in Spiel. Nach der klassischen Arrhenius-Gleichung[31] [32] (Abb. 12.40) läuft diese Reaktion auf einer Zeitskala von 10^{30} Jahren -also praktisch nie- ab. Tatsächlich ergibt sich aufgrund des Tunneleffekts eine Reaktionszeit von 10^{-2} s.

[30] *Lexikon:* Die **Polymerisation** ist eine chemische Reaktion, bei der Monomere, meist ungesättigte organische Verbindungen, unter Einfluss von Katalysatoren und unter Auflösung der Mehrfachbindung zu Polymeren (Moleküle mit langen Ketten, bestehend aus miteinander verbundenen Monomeren) reagieren. Wichtige Kunststoffe, die durch Polymerisation hergestellt werden, sind Polyethen (PE), Polyvinylchlorid (PVC) und Polystyrol (PS).

[31] The Nobel Prize in Chemistry 1903 was awarded to Svante August Arrhenius *in recognition of the extraordinary services he has rendered to the advancement of chemistry by his electrolytic theory of dissociation*

[32] *Lexikon:* Die **Arrhenius-Gleichung** beschreibt die Abhängigkeit der Geschwindigkeit einer chemischen Reaktion von der Temperatur T_K (k_A : Reaktionsgeschwindigkeitskonstante, A_ν: Frequenzfaktor, E_A : Aktivierungsenergie). Die meisten chemischen Reaktionen folgen in ihrer Temperatu-

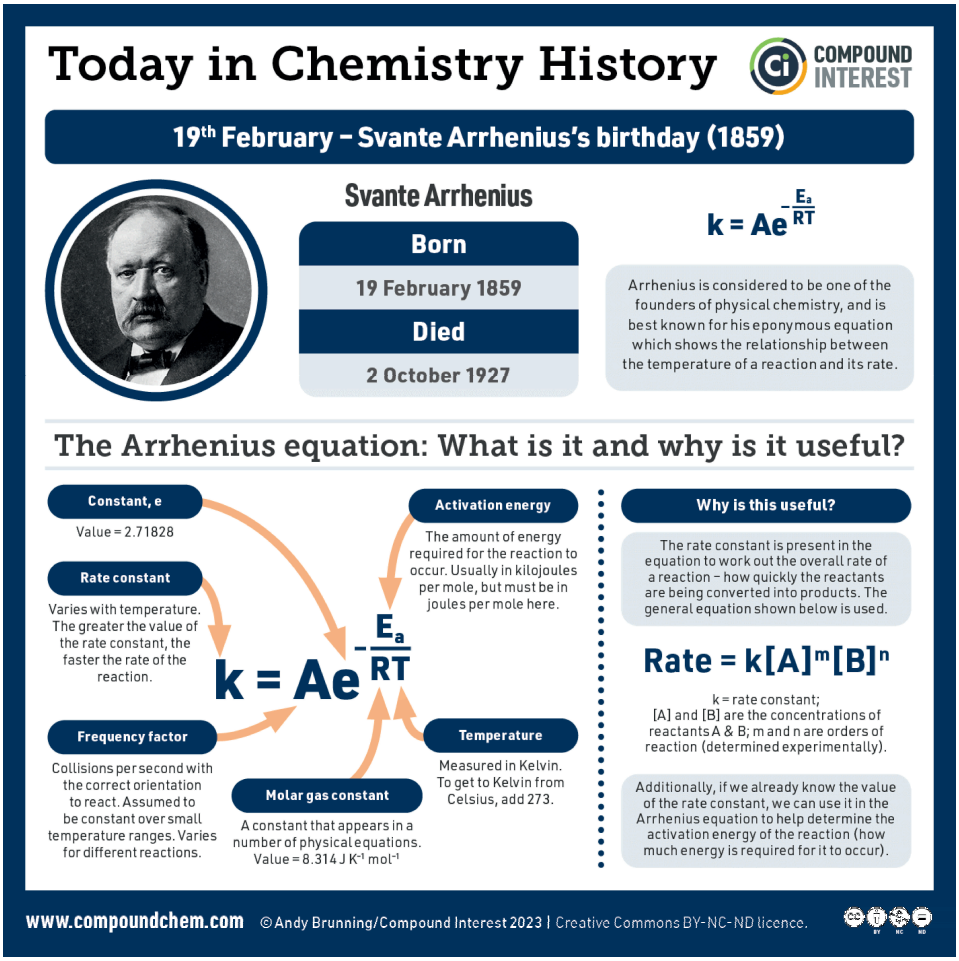


Abb. 12.40: Leben und Wirken von Svante Arrhenius.

Beispiele aus der Welt der Quantenpunkte

In Bezug auf die Miniaturisierung elektronischer Bauelemente ist es in gewisser Weise lästig, dass das Elektron die Fähigkeit besitzt, Barrieren zu durchdringen. Da Hersteller von Chips immer mehr Transistoren auf einen Chip unterbringen, sind im Laufe der Zeit die Transistoren immer kleiner geworden und die Abstände zwischen verschiedenen Transistorebenen haben sich deutlich verringert. So sind die elektronische Barrieren, die vormals dick genug waren den elektrischen Strom zu blockieren, heute so dünn, dass Elektronen durch sie tunneln können. Tunnelnde Elektronen stellen eine Einschränkung für aktuelle Transistoren dar. Tunneln könnte aber der Schlüssel für zukünftige Entwicklungen sein. Eine aktuelle Entwicklung in dieser Richtung ist der Tunnel-Feldeffekttransistor

rabhängigkeit der Arrhenius-Gleichung.

$$k_A = A_\nu \cdot \exp\left(\frac{E_A}{k_B \cdot T_K}\right) \tag{12.50}$$

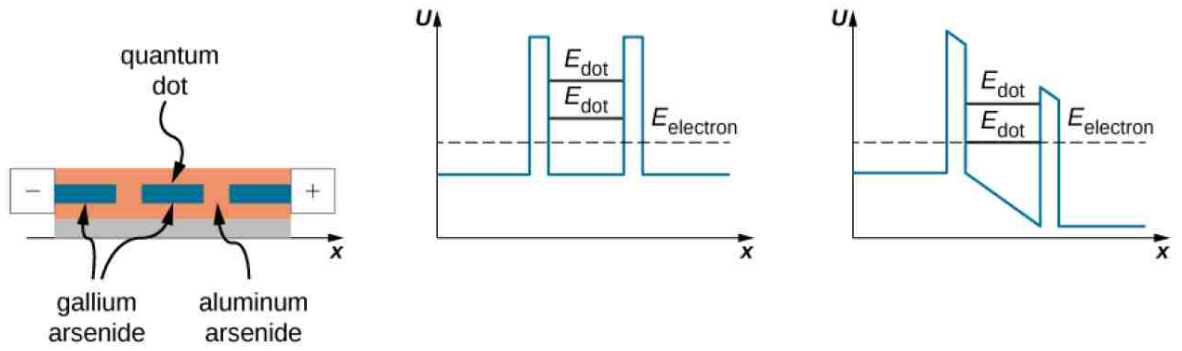


Abb. 12.41: *Links:* Quantenpunkt aus Galliumarsenid (GaAs), eingebettet in Aluminiumarsenid (AlAs); *Mitte:* Potentialtopf bestehend aus zwei Potentialbarrieren eines Quantenpunkts ohne Vorspannung. Die Elektronen in AlAs haben Energien $E_{elektron}$, die nicht mit den Energieniveaus E_{dot} im Quantenpunkt übereinstimmen. Tunneln ist deshalb nicht möglich; *Rechts:* Potential des Quantenpunkts mit Vorspannung über das Bauteil. Ein passend abgestimmte Spannungsdifferenz verzerrt den Potenzialtopf, so dass die Energieniveaus im Quantenpunkt mit den Energien der Elektronen in AlAs übereinstimmen. Diese Bedingungen ermöglichen es Elektronen durch den Quantenpunkt auf die andere Seite der Quantenpunktbarriere zu tunneln [**?**].

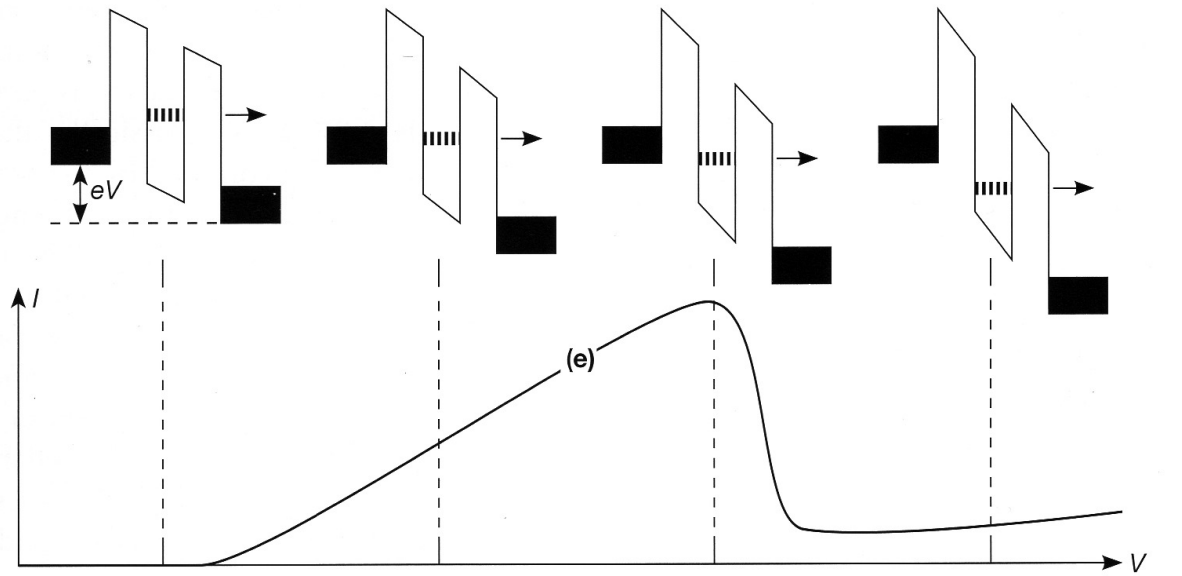


Abb. 12.42: Änderung des Stroms in einer Resonanztunneldiode als Funktion der Vorspannung [**?**].

(TFET) [? ?]. Im Gegensatz zum MOSFET, bei dem eine Energiebarriere angehoben oder abgesenkt wird, um den elektrischen Strom zu steuern, ist beim TFET die Energiebarriere stets vorhanden. Das Bauteil schaltet, indem es die Tunnelwahrscheinlichkeit ändert. Möglicherweise können durch die Verwendung von Niederspannungs-TFETs anstelle von MOSFETs in Logikschaltungen erhebliche Energieeinsparungen erzielt werden [?].

Oscillations up to 712 GHz in InAs/AlSb resonant-tunneling diodes [?]: Oscillations have been obtained at frequencies from 100 to 712 GHz in InAs/AlSb double-barrier resonant-tunneling diodes at room temperature. The measured power density at 360 GHz was 90 W cm$^{?2}$, which is 50 times that generated by GaAs/AlAs diodes at essentially the same frequency. The oscillation at 712 GHz represents the highest frequency reported to date from a solid?state electronic oscillator at room temperature.

Quantenpunkte[33] kann man ebenfalls nutzen um resonant zu tunneln. Ein Quantenpunkt ist ein kleiner Halbleiter-Nanokristall, beispielsweise aus Galliumarsenid, eingebettet in einen Aluminiumarsenid-Halbleiter (Abb. 12.41, links). Der Quantenpunktbereich fungiert als Potentialberg mit endlicher Höhe. Wie bei Teilchen im Kastenpotenzial gibt es quantisierte Zustände. Der Unterschied bestehen darin, dass die Elektronen im Quantenpunkt aus dem Bereich heraus tunneln können. In Abb. 12.41, Mitte sind die dazugehörigen Energiewerte als E_{dot} markiert. Wenn die Energie $E_{elektron}$ eines Elektrons außerhalb des Quantenpunkts nicht mit E_{dot} übereinstimmt, tunnelt das Elektron nicht in den Quantenpunkt und kein Strom fließt, da es keinen Energiezustand auf gleicher Höhe gibt. Legt man eine Vorspannung an (Abb. 12.41, rechts), passiert auch erst mal nichts. Stimmen die Energiewerte allerdings überein, fließt plötzlich ein Tunnelstrom. Erhöht man die Vorspannung versiegt der Tunnelstrom. Erst wenn die Energiewerte wieder übereinstimmen beobachtet wieder einen Tunnelstrom. Der Begriff Resonanz bedeutet, dass Tunneln nur bei einem bestimmten Energiewert auftritt, den man durch die Vorspannung einstellt. Das zugehörige elektronische Bauteil nennt sich Resonanztunneldiode, die für ultraschnelle Schaltvorgänge (THz) verwendet werden [? ? ? ? ?]. Ein weitere Merkmal des Bauteils ist der negative Widerstand beim Erhöhen der Vorspannung, siehe Abb. 12.42.

Ein Beispiel aus der Welt des Magnetismus

Die Physik lässt sich grob unterteilen in die makroskopische Welt klassischer Teilchen und die mikroskopische Welt der Quanten. Der Übergang ist allerdings fließend und man beobachtet mittlerweile immer häufiger Beispiele für quantenphysikalische Phänomene im Bereich der makroskopischen Physik, wie das Beispiel Magnetismus zeigt. Hier stellt man quantenmechanisches Tunneln der Gesamtmagnetisierung fest, die nicht, wie man es klassisch erwarten würde, von thermischen Fluktuationen angetrieben werden [?]:

[33] engl.: *quantum dots*

Macroscopic quantum tunnelling of magnetization in a single crystal of nanomagnets [?]: The precise manner in which quantum-mechanical behaviour at the microscopic level underlies classical behaviour at the macroscopic level remains unclear, despite seventy years of theoretical investigation. Experimentally, the crossover between these regimes can be explored by looking for signatures of quantum mechanical behaviour -such as tunnelling- in macroscopic systems. Magnetic systems (such as small grains, spin glasses and thin films) are often investigated in this way because transitions between different magnetic states can be closely monitored. But transitions between states can be induced by thermal fluctuations, as well as by tunnelling, and definitive identification of macroscopic tunnelling events in these complex systems is therefore difficult. Here we report the results of low-temperature experiments on a single crystal composed of superparamagnetic manganese clusters (Mn_{12}-ac), which clearly demonstrate the existence of quantum-mechanical tunnelling of the bulk magnetization. In an applied magnetic field, the magnetization shows hysteresis loops with a distinct staircase structure: the steps occur at values of the applied field where the energies of different collective spin states of the manganese clusters coincide. At these special values of the field, relaxation from one spin state to another is enhanced above the thermally activated rate by the action of resonant quantum-mechanical tunnelling.

Ein Beispiel aus der Metrologie

Elektronen können mit einer gewissen Rate zwischen Potenzialminima hin und her tunneln Die mittlere Zeitspanne T (inverser Wert der Tunnelrate), die die Elektronen für den Wechsel benötigen, ergibt im Vergleich zur Periode τ der Oszillation des Elektrons in nur einem der Potenzialtöpfe:

$$\frac{T}{\tau} = \sqrt{\frac{h \cdot \nu}{U}} \exp\left(\frac{U}{h \cdot \nu}\right) \tag{12.51}$$

bestimmt. U ist hierbei die Höhe der Barriere. Der Exponentialterm dominiert den Wert, der sich für die Periode ergibt. Setzt man typische Schwingungsperioden von $3 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{s}$ ein, stellt man fest, dass die Wechselzeiten extrem empfindlich auf die Barrierenhöhe ist, wie die Berechnungen von Hund demonstrieren, siehe Tab. 12.1. Er zeigte, dass Übergänge zwischen chiralen Isomeren biologischer Moleküle, dass sind optisch aktive links- und rechtshändige Konfigurationen, außerordentlich langsam ablaufen und damit unwahrscheinlich sind.[34] Anders verhält es sich beim Ammoniakmolekül, wo man diesen

[34] In diesem Zusammenhang sei auf den Contergan Skandal verwiesen: In den 60er Jahre wurden Kinder mit Fehlbildungen der Organe und verkürzten Gliedmaßen geboren. Wie sich herausstellte, war das Schlafmittel *Contergan* verantwortlich. Das Medikament hatte sämtliche Tests mit Zellkulturen und Tierversuchen bestanden, ohne Nebenwirkungen aufzuzeigen. Die molekulare Ursache war der im Medikament eingesetzte Wirkstoff Thalidomidin, der in zwei unterschiedlichen Strukturen auftritt. Wie bei der Milchsäure handelt sich um eine chirale Substanz. Das bedeutet, es gibt ein rechts- und ein linksdrehende Isomer. Die Moleküle verhalten sich zueinander wie Spiegelbilder. Solche so genannten Enantiomere haben identische chemische und physikalische Eigenschaften, unterscheiden sich aber in ihrer biologischen Wirkung.

$U/h \cdot \nu$	T/τ	T
10	$2.4 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^{-10}$ s
20	$3.8 \cdot 10^8$	10^{-5} s
30	$6.9 \cdot 10^{12}$	$8 \cdot 10^{-10}$ s
40	$1.3 \cdot 10^{17}$	0.2 s
50	$2.9 \cdot 10^{21}$	1 h
60	$5.2 \cdot 10^{25}$	$6 \cdot 10^4$ a
70	$1.1 \cdot 10^{30}$	10^9 a

Tab. 12.1: Exponentielle Abhängigkeit der Mulde-zu-Mulde Pendelzeit T, für ein als Überlagerung konstruiertes Wellenpaket der niedrigsten zwei Energiezustände. Die beiden Mulden sind harmonische Oszillatoren der Frequenz $\nu = 3{\cdot}10^{13}$ Hz, Periode $\tau = 1/\nu$ und Abstand der Energieniveaus $U = h{\cdot}\nu$. Das Potenzial U ist die Höhe der Barriere zwischen den Mulden. Wenn $U/(h \cdot \nu)$ um einen Faktor 7 ansteigt, ändert sich die Schwebungsperiode von Nanosekunden zu Stunden bis hin zu Millionen Jahren.

Wechsel beobachten und technisch nutzen kann.

Der Tunneleffekt spielt bei Zeitmessung eine wichtige Rolle.[35] Ein Experiment mit Ammoniakmolekülen war die Grundlage der ersten Atomuhr,[36] siehe Abb. 12.45 [**?**]. Weitere Realisierungen folgten (Abb. 12.44). Warum ist Ammoniak so gut geeignet? Das Molekül NH_3 besteht aus einer Pyramide mit einem Stickstoffatom an der Spitze und einem Wasserstoffatom an jeder Ecke der dreieckigen Basis. Wenn das Molekül angeregt wird, tunnelt das Stickstoffatom alle 20.9 μs einmal die Basis und setzt sich damit auf die gegenüberliegende Seite der Pyramide, siehe Abb. 12.43. Nach 20.9 μs kehrt es in seine ursprüngliche Position zurück. Dieser Positionswechsel erfolgt mit einer Frequenz von 23.870 Hz. Ein Gas aus Ammoniakmoleküle nimmt nur bei dieser Frequenz Energie auf. Durch die Verwendung eines Quarzoszillators zur Energiezufuhr und unter Verwendung eines geeigneten Rückkopplungsmechanismus kann man den Oszillator auf genau diese Frequenz einrasten.

The first atomic clock, developed near this site by Harold Lyons at the National Bureau of Standards, revolutionized timekeeping by using transitions of the ammonia molecule as its source of frequency. Far more accurate than previous clocks, atomic clocks quickly

[35] *Lexikon:* Die **Metrologie** befasst sich mit den wissenschaftlichen Grundlagen des Messens, sowie der Einheitlichkeit des Messens und der Messverfahren. Als messen wird der Vergleich einer bestimmten Größe mit einer festgelegten Einheit verstanden. Aufgrund gesetzlicher Regelungen ist mit der metrologischen Arbeit in Deutschland unter anderem die Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) beauftragt.

[36] The Nobel Prize in Physics 1989 was divided, one half awarded to Norman F. Ramsey *for the invention of the separated oscillatory fields method and its use in the hydrogen maser and other atomic clocks*, the other half jointly to Hans G. Dehmelt and Wolfgang Paul *for the development of the ion trap technique*

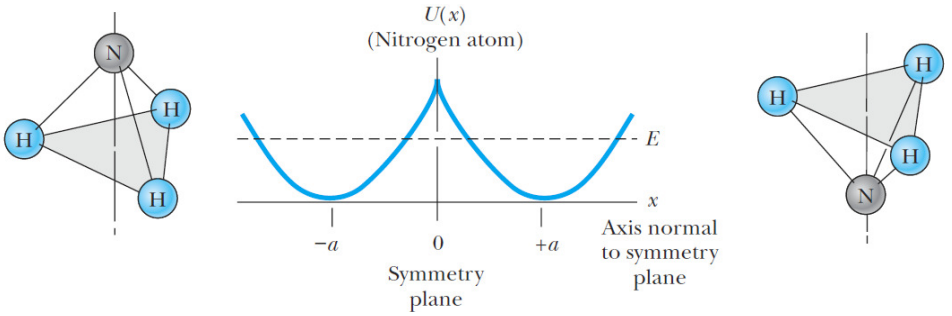


Abb. 12.43: Im Gleichgewichtszustand befindet sich das Stickstoffatom im Ammoniak (NH_3) an der Spitze einer Pyramide mit drei Wasserstoffatomen als Basis. Aufgrund der Symmetrie existiert eine zweite Gleichgewichtskonfiguration für das N-Atom auf der gegenüberliegenden Seite der von den H-Atomen gebildeten Ebene. Betrachtet man die Potentielle Energie des Stickstoffatoms entlang einer Linie, die senkrecht zur Symmetrieebene verläuft, ergibt sich ein Doppel-Oszillatorpotential, das ein Tunneln des N-Atoms ermöglicht [**?**].

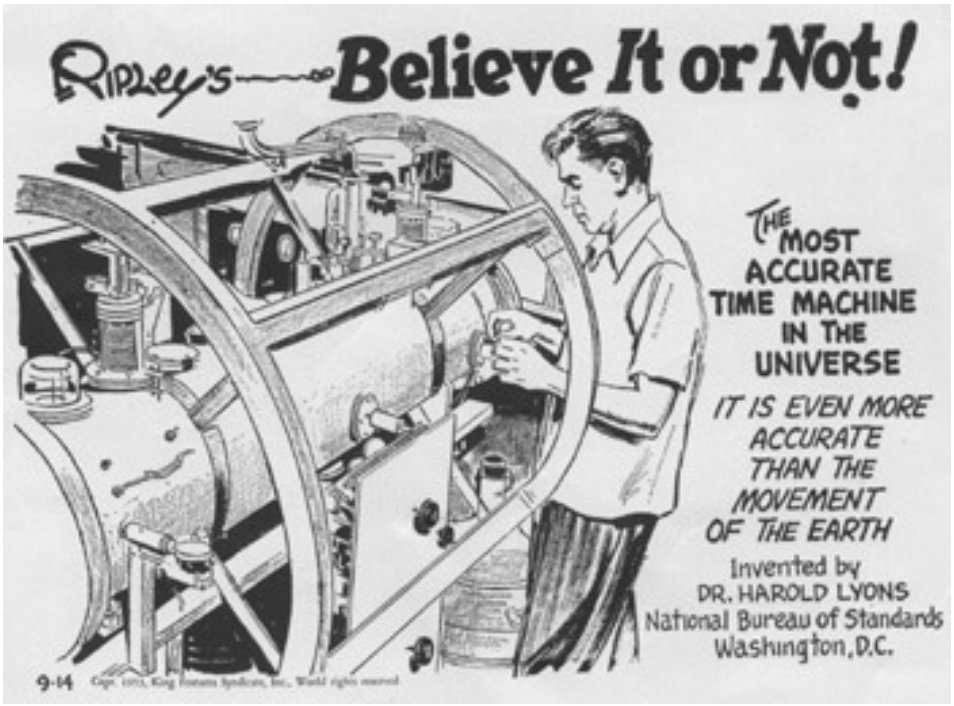


Abb. 12.44: Cartoon von 1953 mit der ersten bei der National Bureau of Standards entwickelten Cäsium-Atomuhr.



Abb. 12.45: Harold Lyons (rechts), Erfinder der Ammoniak-Atomuhr, beobachtet Edward U. Condon, den Direktor des National Bureau of Standards, der ein Modell des Ammoniakmoleküls betrachtet (1949).

replaced the Earths rotational rate as the reference for world time. Atomic clock accuracy made possible many new technologies, including the Global Positioning System (GPS). Atomic clocks also enabled astounding gains in timekeeping accuracy. For thousands of years prior to the invention of atomic clocks, the reference for world timekeeping was the Earths rotation rate, which was limited in accuracy to about one millisecond (one part in 10^8) per day. Quartz oscillators first appeared in the 1920s. The best quartz devices were eventually accurate enough to measure and record variations in the Earths rotation, but they were still limited in performance and sensitive to environmental changes. Atomic clocks provided a quantum leap in accuracy. Shortly after their invention, accuracies of parts in 10^{10} became routine (Abb. 12.46).

A microfabricated atomic clock [?]: Fabrication techniques usually applied to microelectromechanical systems are used to reduce the size and operating power of the core physics assembly of an atomic clock. With a volume of $9.5\,\mathrm{mm}^3$, a fractional frequency instability of $2.53 \cdot 10^{?10}$ at 1 s of integration, and dissipating less than 75 mW of power, the device has the potential to bring atomically precise timing to hand-held, battery-operated devices.

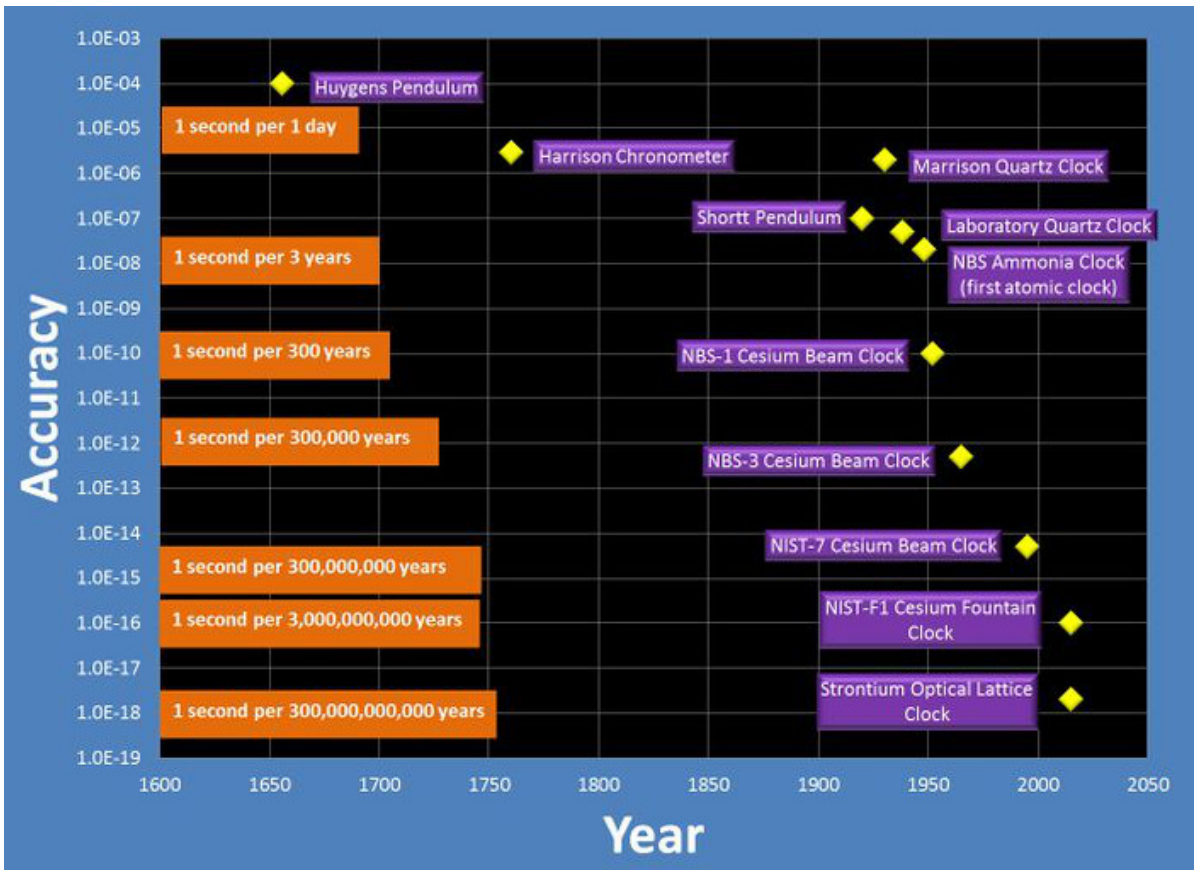


Abb. 12.46: Atomuhren sorgten für einen enormen Fortschritt in der Genauigkeit von Uhren. Kurz nach ihrer Erfindung erreichte man routinemäßig Genauigkeitswerte von 10^{10}. Die Bestwerte haben sich pro Jahrzehnt um etwa eine Größenordnung erhöht.

Ein Beispiel aus der Biologie

Ein biologisch relevantes Beispiel für das Tunneln ist der Protontransfer in Proteinen. In diesen Systemen kann der Wasserstoffkern von einem schweren Atom zu einem anderen tunneln. Bei einer für das Tunneln günstigen Proteinkonfiguration bewegt sich der Wasserstoffkern in einem symmetrischen Doppelmuldenpotential, siehe Abb. 12.48. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung für dieses System führt zu den in dieser Abbildung dargestellten Wellenfunktionen. Die Wellenfunktionen veranschaulichen, dass der Wasserstoffkern eine endliche Wahrscheinlichkeit hat, die Region der Barriere zu durchdringen. Eine Größe, die das Tunneln von Wasserstoff widerspiegelt, ist der kinetische Isotopeneffekt. Dieser ist definiert als das Verhältnis der Raten für den Wasserstoff- und den Deuteriumtransfer. Die Tunnelwahrscheinlichkeiten für den H- und D-Transfer unterscheiden sich aufgrund der unterschiedlichen Masse der Teilchen: Deuterium ist schwerer, verhält sich eher klassisch und ist deshalb räumlich stärker lokalisiert. Daraus resultiert eine geringere Tunnelrate. Protonen können in ähnlicher Weise durch

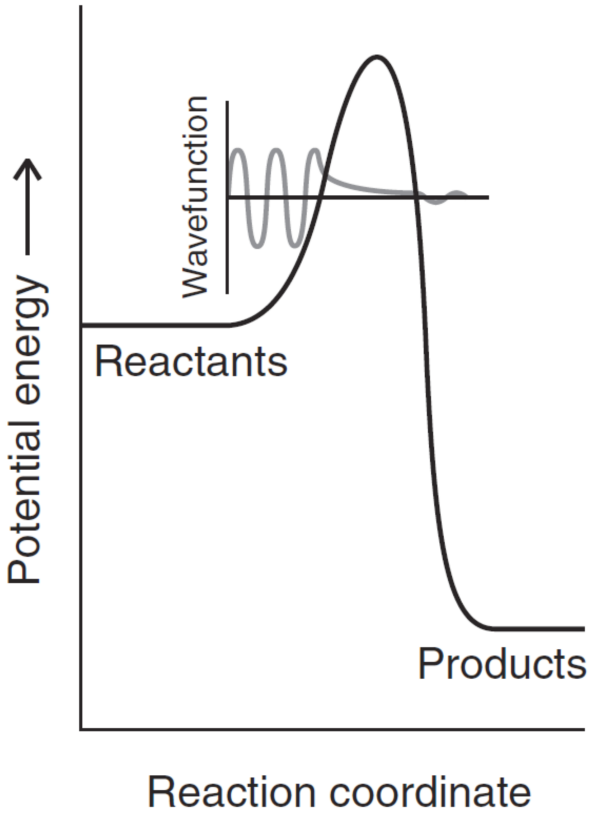


Abb. 12.47: Ein Proton kann durch eine Aktivierungsbarriere tunneln, die Reaktanten von Produkten trennt, sodass sich die effektive Höhe der Barriere verringert und die Geschwindigkeit des Protontransfers erhöht wird. Der Effekt wird dargestellt, indem die Wellenfunktion des Protons in der Nähe der Barriere gezeichnet wird. Protontunneln ist bei niedrigen Temperaturen relevant, wenn die meisten Reaktanten links von der Barriere eingefangen sind [**?**].

Aktivierungs-Energiebarrieren tunneln, so dass die effektive Höhe der Reaktionsbarriere reduziert wird. Dadurch nimmt die Rate für den Protontransfer zu. Tunneln von Protonen ist insbesondere bei niedrigen Temperaturen ein relevanter Reaktionskanal, da alle anderen Reaktionspfade praktisch *verstopft* sind.

Ein Beispiel aus der Molekülphysik

Die schnelle Equilibrierung[37] von Protonen-Transferreaktionen zeigt, dass Protonen die Fähigkeit aufweisen, Barrieren zu durchdringen. Das Tunneln von Protonen durch eine Aktivierungsbarriere (Abb. 12.47) zwischen sauren und basischen Gruppen beobachtet man beispielsweise auch bei enzymkatalytischen Reaktionen[**?**]. Tunneln kann bei niedrigen Temperaturen der dominierende Prozess bei Wasserstoffatom- oder Protontransferreaktionen sein, da nur wenige Reaktantenmoleküle die Aktivierungsenergiebarriere

[37]Mit Equilibrierung bezeichnet man in der Chemie einen Vorgang, bei dem ein System in seinen Gleichgewichtszustand wechselt.

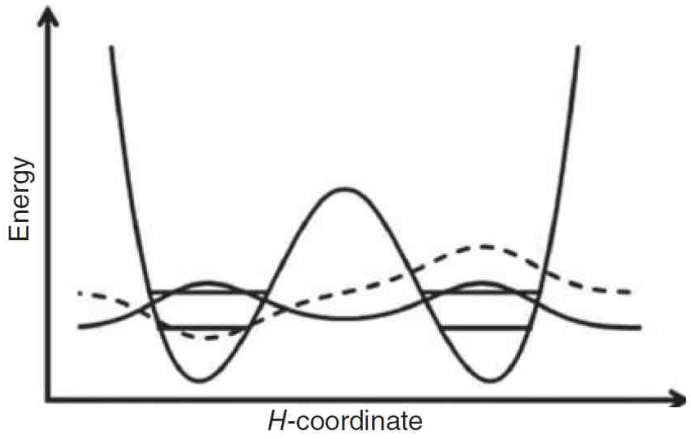


Abb. 12.48: Schematische Darstellung der Potentialenergiekurve entlang der Wasserstoffkoordinate für einen Protontransfer. Eingezeichnet sind außerdem die niedrigsten zwei Energieniveaus und die zugehörigen Wellenfunktionen, die an der Bewegung des Wasserstoffkerns beteiligt sind. Das Eindringen der Wellenfunktionen in den klassisch verbotenen Bereich der Barriere veranschaulicht das Tunneln von Wasserstoff durch die Barriere [**?**].

überwinden können. Erste Hinweise auf Tunnelprozesse bei Molekülen ergaben sich aus der rotations-induzierte Dissoziation zweiatomiger Moleküls aus einem angeregten Zustand. Die infraroten Spektrallinien zeigten eine Verbreiterung der Linien. Oscar Rice deutete dieses Verhalten als Signatur eines Tunnelprozesses [**?**].

Ein Beispiel aus der Chemie

Methylhydroxycarben zerfällt bei thermischer Anregung in Vinylalkohol. Dieser Reaktionspfad wird bei tiefen Temperaturen (11 K) abgelöst durch einen tunneldominierten Zerfall zu Acetaldehyd. Abb. 12.49 zeigt, dass dem Molekül zwei Reaktionswege offenstehen. Beide Wege weisen allerdings Reaktionsbarrieren auf. Man erkennt, dass aufgrund der geringeren Barrierenhöhe bei einer Erhöhung der Temperatur die Reaktion in Richtung Vinylalkohol abläuft. Die Analyse auf der Grundlage der Arrhenius-Gleichung liefert, das ausschließlich diese Reaktion stattfindet. Die Abbildung zeigt aber auch, dass die Breite der Barriere in Richtung der Reaktionsprodukts Acetaldehyd geringer ist. Damit steigt die Wahrscheinlichkeit, dass die Reaktion bei tiefen Temperaturen über diesen Tunnelpfad abläuft. Experimente haben diese Vermutung bestätigt [**?**].

Halogen-atom and group transfer reactivity enabled by hydrogen tunneling [?]: The generation of carbon radicals by halogen-atom and group transfer reactions is generally achieved using tin and silicon reagents that maximize the interplay of enthalpic (thermodynamic) and polar (kinetic) effects. In this work, we demonstrate a distinct reactivity mode enabled by quantum mechanical tunneling that uses the cyclohexadiene derivative g-terpinene as the abstractor under mild photochemical conditions. This

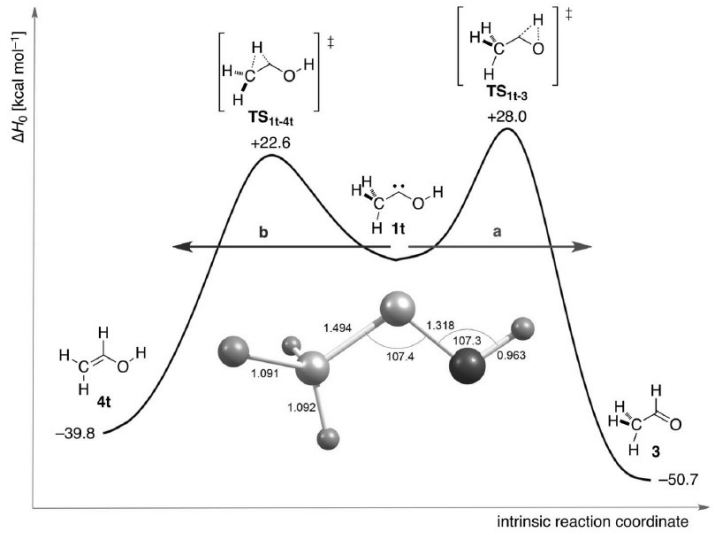


Abb. 12.49: Potenzialenergieprofile bei der Isomerisierung von trans-Methylhydroxycarben. Wichtig für uns ist ein Blick auf das Potenzial. Es zeigt sich eine höhere Wasserstoff-Tunnelwahrscheinlichkeit für die schmalere Energiebarriere (Weg a) [**?**].

protocol activates alkyl and aryl halides as well as several alcohol and thiol derivatives. Experimental and computational studies unveiled a noncanonical pathway whereby a cyclohexadienyl radical undergoes concerted aromatization and halogen-atom or group abstraction through the reactivity of an effective H atom. This activation mechanism is seemingly thermodynamically and kinetically unfavorable but is rendered feasible through quantum tunneling.

Beispiele aus der Biologie

Die rasante Entwicklung in der Diagnostik (Spektroskopie an einzelnen Molekülen, zeitaufgelöste Spektroskopie und zeitaufgelöste Mikroskopie) hat es ermöglicht, die biologische Dynamik auf immer kleineren Maßstab zu untersuchen. Solche Studien haben Hinweise auf quantenmechanische Effekte bei biologischen Prozessen wie Photosynthese, Enzymkatalyse, Magnetorezeption (Navigation von Zugvögeln), Atmung und Neurotransmission erbracht. Kohärenz und möglicherweise auch Verschränkung [**?**] spielen dabei eine Rolle. Das daraus entstandene Forschungsgebiet ist die Quantenbiologie,[38] die An-

[38] Als historischen Ursprung der Quantenbiologie wird oft das Jahr 1944 genannt. In diesem Jahr veröffentlichte Erwin Schrödinger sein Buch *What is Life?* [**?**]. Tatsächlich veröffentlichte der Physiker Pascual Jordan vor Schrödinger das Buch *Die Physik und das Geheimnis des organischen Lebens*, in dem er die Frage aufwarf: *Sind die Gesetze der Atom- und Quantenphysik von essentieller Bedeutung für das Leben?* Pascual Jordan ist einer der Gründungsväter der Quantentheorie und in Rostock kein Unbekannter. Er war von 1929-1944 am Institut für Physik Professor für Theoretische Physik. Leider geht sein Interesse für das Gebiet der Quantenbiologie auf seine ausgeprägte Sympathie für die Ideen der Nationalsozialisten zurück. Für Interessierte reicht ein Blick in seine Veröffentlichung *Die Quantenmechanik und die Grundprobleme der Biologie und Psychologie* [**?**].

wendung der Quantenphysik auf biologische Systeme.[39] Typische Fragestellungen sind [**?**]:

- Wie funktioniert unser Sehen und die Photosynthese auf molekularer Ebene und welche ultraschnellen Prozesse spielen eine Rolle?
- Wie katalysiert ein Enzym biochemische Prozesse?
- Wie verarbeitet unser Gehirn auf neuronaler Ebene (typische Längenskala nm) die Fülle an Informationen?
- Wie funktionieren die Reduplikation der DNA-Stränge?

Zum letzten Punkt: Das DNA-Mutationsmodell von Löwdin [**?**] berücksichtigt den de-Broglie-Charakter der Protonen. Die Protonen sind durch Wasserstoffbrücken zwischen komplementären Basenpaaren gebunden. Löwdins Modell basiert darauf, dass die genetische Information zeitlich stabil bleibt, d.h. dass die Protonen ihre Position in den Basenpaaren nicht ändern. Unmittelbar nach einer DNA-Replikation kann sich aber durch das Tunneln von Protonendie Position der Protonen in einer Kernbase mit geringer Wahrscheinlichkeit ändern. Die durch diesen Prozess ausgelösten Reaktionen können zu einer punktuellen Mutation der DNA führen. Kürzlich hat man festgestellt, dass das Tunneln von Protonen möglicherweise weit mehr Genmutationen verursacht als man vielleicht glauben mag. DNA-Basenpaare nehmen tautomere Formen an.[40] Dieser Vorgang ist schon lange bekannt. Dabei verlagern sich Protonen in den Wasserstoffbrückenbindungen gegenüberliegender Basen der Doppelhelix. Bei der Zellteilung reagiert der Zellapparat darauf empfindlich. Dabei kann es vorkommen, dass sich beispielsweise Cytosin nicht mit Guanin paart, sondern mit Adenin. Dadurch kommt es zur Mutation, da im DNA-Strang ein falsches Nukleotid entsteht. Rechnungen zeigen, dass über den Tunneleffekt solche tautomere Basenpaare entstehen. Bislang schätzte man diesen Prozess als biologisch unbedeutend ein. Eine neuere Analyse zeigt aber, dass die DNA-Basenpaare ziemlich schnell zwischen den Zuständen wechseln. Man geht davon aus, dass im Mittel von 5000 Basenpaaren eines als Tautomer vorliegt. Dieser Wert liegt weit über der durchschnittlichen Mutationsrate des menschlichen Genoms (25 pro Milliarde Basenpaare), was vermuten lässt, dass Tunneln eine wichtige Rolle in Bezug auf Mutationen spielt [**?**]. Weitere Hinweise auf Tunnelprozesse in biologischen Systemen sind der effiziente Elektronentransfer zwischen einem Donor und einem Akzeptor in photosynthetischen Reaktionszentren und der Atmung, wo das Elektron eine hochenergetische Proteinbarriere passieren muss [**?**] und unser Geruchssinn, wie das folgende *abstract* zeigt:

1945 wurde er aufgrund seine Nazi-Vergangenheit entlassen.

[39] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1969 was awarded jointly to Max Delbrück, Alfred D. Hershey and Salvador E. Luria *for their discoveries concerning the replication mechanism and the genetic structure of viruses.*

[40] Als Tautomere bezeichnet man Molekülisomere, die durch Verschiebung von Atomen oder Atomgruppen mit hoher Rate ineinander übergehen, so dass die Isomere in einem dynamischen chemischen Gleichgewicht miteinander stehen.

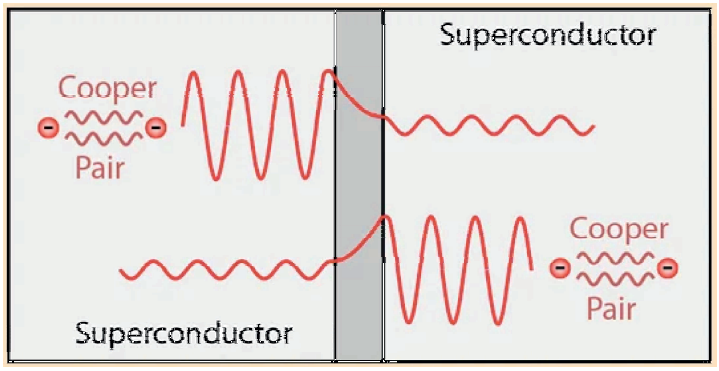


Abb. 12.50: Prinzip des Josephson-Kontakts.

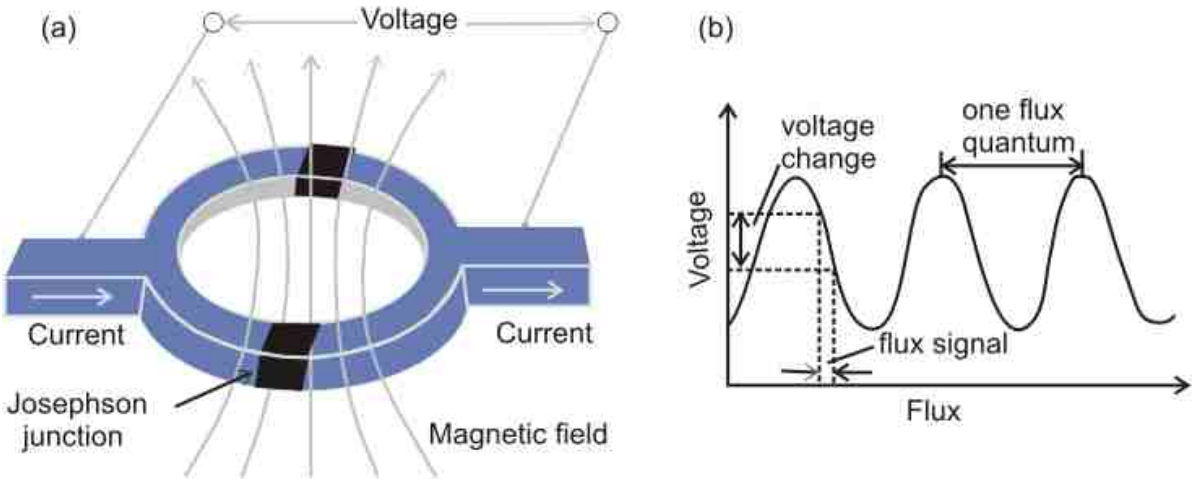


Abb. 12.51: Prinzip eines SQUID: (a) Zwei Josephson-Kontakte bilden einen supraleitenden Ring. (b) Ausgangsspannung als Funktion des angelegten magnetischen Flusses. Ein geringes Signal im magnetischen Fluss erzeugt einen entsprechenden Spannungshub über dem SQUID.

Could Humans Recognize Odor by Phonon Assisted Tunneling? [**?**] Our sense of smell relies on sensitive, selective atomic-scale processes that occur when a scent molecule meets speci?c receptors in the nose. The physical mechanisms of detection are unclear: odorant shape and size are important, but experiment shows them insuf?cient. One novel proposal suggests receptors are actuated by inelastic electron tunneling from a donor to an acceptor mediated by the odorant, and provides critical discrimination. We test the physical viability of this mechanism using a simple but general model. With parameter values appropriate for biomolecular systems, we find the proposal consistent both with the underlying physics and with observed features of smell. This mechanism suggests a distinct paradigm for selective molecular interactions at receptors (the swipe card model): recognition and actuation involve size and shape, but also exploit other processes.

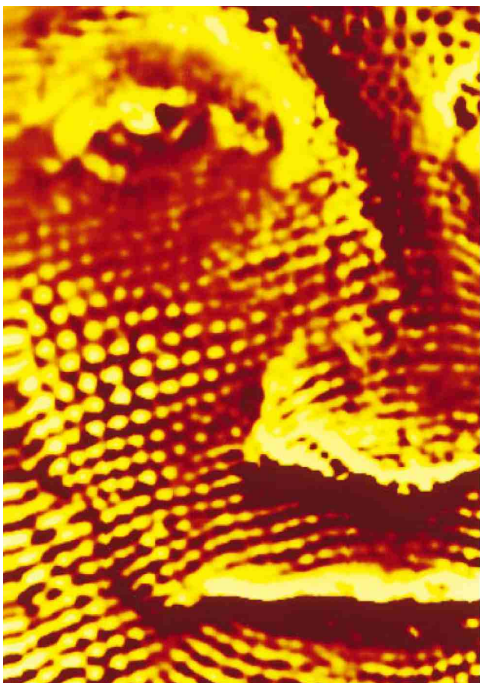


Abb. 12.52: SQUID-Aufnahme von George Washington auf dem dem amerikanischen Ein-Dollar Geldschein. Beim Scannen erkennt der SQUID die Variationen in der Stärke der lokalen Magnetfelder, das von den Tintenpartikeln auf der Banknote erzeugt wird [**?**].

Ein Beispiel aus der Welt der Supraleitung

Ein Josephson-Kontakt wird hergestellt, indem eine dünne Schicht aus einem nicht-supraleitenden Material zwischen zwei Schichten aus supraleitendem Material gelegt wird [**?**], siehe Abb. 12.50.[41] Paare supraleitender Elektronen (Cooper-Paare) können durch die nicht-supraleitende Barriere von einem Supraleiter zum anderen tunneln [**? ?**].[43] Entsprechende Experimente erfordern niedrige Temperaturen, da die Supraleitung erst unterhalb einer bestimmen, vom Material abhängigen, tiefen Temperaturen wirksam wird [**?**]. Oberhalb der kritischen Temperatur (Sprungtemperatur) ist die Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen aufgrund der Coulombwechselwirkung abstoßend. Unterhalb der Sprungtemperatur passiert etwas verrücktes: Ein Metall im supraleitenden Zustand drängt alle Magnetfelder heraus. Was geschieht, wenn ein Metall in den supraleitenden Zustand wechselt? Die beiden Elektronen ziehen sich an. Ursache ist die die Wechsel-

[41] The Nobel Prize in Physics 1973 was divided, one half jointly to Leo Esaki and Ivar Giaever *for their experimental discoveries regarding tunneling phenomena in semiconductors and superconductors, respectively* and the other half to Brian David Josephson *for his theoretical predictions of the properties of a supercurrent through a tunnel barrier, in particular those phenomena which are generally known as the Josephson effects.*[42]

[43] The Nobel Prize in Physics 1972 was awarded jointly to John Bardeen, Leon Neil Cooper and John Robert Schrieffer *for their jointly developed theory of superconductivity, usually called the BCS-theory.*

wirkung der Elektronen mit dem Ionengitter. Diese geringe Anziehungskraft lässt die Elektronen in einen niedrigeren Energiezustand fallen, wodurch sich eine Energielücke ergibt. Unter diesen Bedingungen können sich die Elektronen bewegen (ein Strom fließt), ohne von den Ionen des Gitters gestreut zu werden. Der Strom kann nicht beliebige Werte annehmen. sondern ist begrenzt (kritischer Strom. Die Bewegung erfolgt also ohne einen elektrischen Widerstand und es kommt zu keinem Energieverlust. Die Barriere beim Josephson-Kontakt ist etwa 30Å dick. Wenn der kritische Strom überschritten wird, bildet sich eine Wechselspannung an der Brücke aus. Die Frequenz dieser Wechselspannung beträgt etwa 500 GHz/mV an der Verbindungsstelle. Josephson-Kontakte können auch zu Schaltkreisen geformt werden [**?**], die man SQUIDs[44] nennt [**?**]. Diese Geräte dienen als empfindlicher Magnetometer und Voltmeter. Ein SQUID besteht aus einer Schleife mit zwei Josephson-Kontakten, die die Schleife unterbrechen, siehe Abb. 12.51. Ein SQUID reagiert extrem empfindlich auf Magnetfelder, die den Bereich der Schleife durchdringen. Da ein Gehirn elektrische Signale aussendet, kann man, durch eine Messung der durch die neurologischen Ströme erzeugten Magnetfelder, die Aktivität des Gehirns überwachen (Biomagnetismus) [**?**]. Typische Magnetfelder für das Herz sind 100 pT und 100 fT für das Gehirn. Abb. 12.52 zeigt als Beispiel für die Empfindlichkeit des Instruments eine Magnetfeldaufnahme eines 1-Dollar Geldscheins [**?**]. Weitere Anwendungen sind

- Nachweis kleinster Fluktuationen des Erdmagnetfelds zur Lokalisierung geothermischer Quellen [**?**].

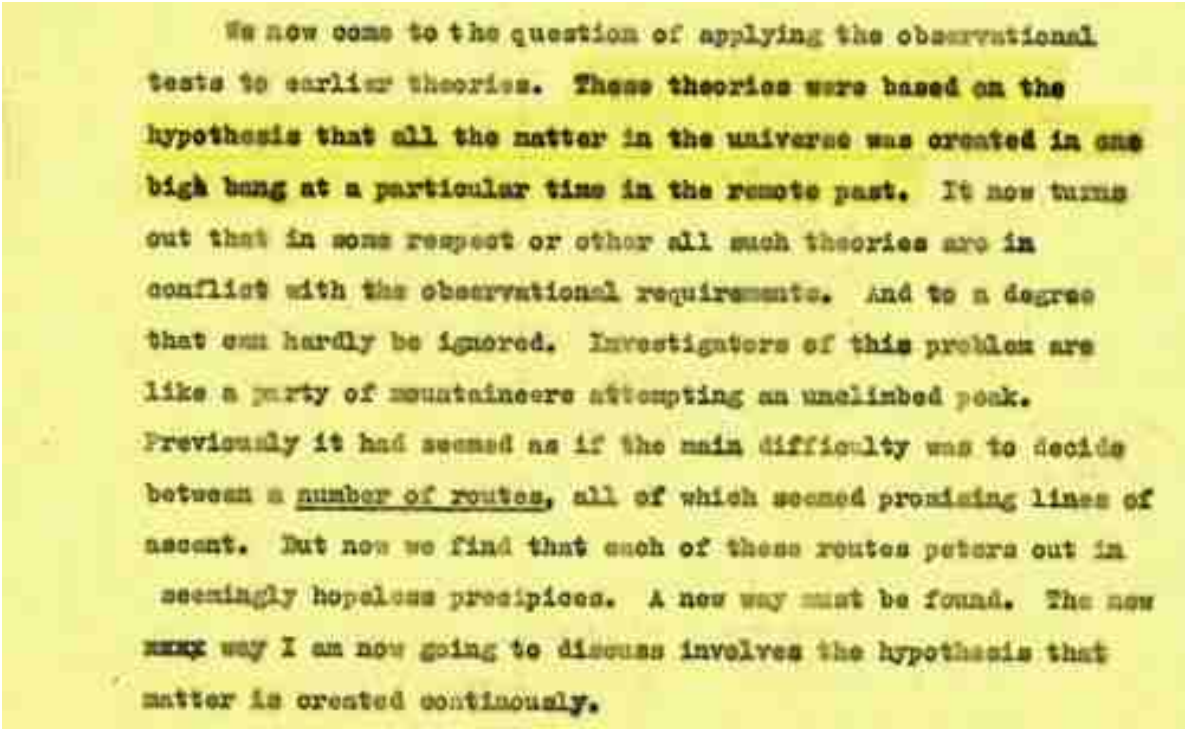
- Rauscharme Verstärker zur Detektion von fluktuierenden Spineinstellungen in Kernen [**?**].

- Nachweis von Gravitationswellen in einem 4.8 Tonnen schweren Aluminiumblock, der auf einer Temperatur von 4.2. K gehalten wird (Kapitel *Allgemeine Relativitätstheorie*)

Ein Beispiel aus der Planetenforschung

Enceladus ist einer der Eismonde des Saturn [**?**]. Trotz seiner geringen Größe (Durchmesser 504 km) weist er hohe geodynamische Aktivität auf. Man beobachtet Eispartikel und Wasserdampf, die aus der Oberfläche entweichen, was auf flüssiges Wassers unterhalb der Oberfläche hindeutet [**?**]. Diese geologische Aktivität kann nicht durch die Gravitation (Stichwort: Gezeitenheizung) verursacht werden, wie das Beispiel des etwa gleichgroßen Nachbarmondes Mimas beweist. Im Gegensatz zu Mimas besteht Enceladus zum größten Teil aus Gestein (Mimas 20%, Enceladus 60%). Aus dieser Information kann man die Ursache für die starke geologische Aktivität ableiten [**?**]. Verursacher sind langlebige radioaktive Isotope (Th-232, U-235, U-238), die durch einen α-Zerfall relaxieren. Die langen Halbwertszeiten und die Gezeitenreibung sorgen auf dem Mond für Temperaturen oberhalb des Gefrierpunkts.

[44] SQUID: *superconducting quantum interference device.*



We now come to the question of applying the observational tests to earlier theories. These theories were based on the hypothesis that all the matter in the universe was created in one bigh bang at a particular time in the remote past. It now turns out that in some respect or other all such theories are in conflict with the observational requirements. And to a degree that can hardly be ignored. Investigators of this problem are like a party of mountaineers attempting an unclimbed peak. Previously it had seemed as if the main difficulty was to decide between a number of routes, all of which seemed promising lines of ascent. But now we find that each of these routes peters out in seemingly hopeless precipices. A new way must be found. The new xxxx way I am now going to discuss involves the hypothesis that matter is created continously.

Abb. 12.53: Fred Hoyle nennt in einer BBC Radiosendung 1948 erstmals den Begriff Big Bang.

Ein Beispiel aus der Welt der Schwarzen Löcher

Hinter dem Ereignishorizont kann NICHTS, weder Teilchen noch Licht, der Gravitationskraft eines Schwarzen Lochs entkommen. Stimmt das? Tatsächlich können Teilchen über den Tunnelprozess die das Schwarze Loch umgebende Gravitationspotentialbarriere durchdringen. Die Barriere hat in etwa die Breite des Schwarzen Lochs, sodass es unwahrscheinlich aber nicht ausgeschlossen ist, dass Tunnelereignisses auftreten. Wenn das Schwarze Loch Teilchen emittiert, nehmen seine Masse und Größe stetig ab, wodurch die Wahrscheinlichkeit zunimmt, das weitere Teilchen tunneln. Ein selbstverstärkender Prozess also, dessen Geschwindigkeit sich steig erhöht und das Schwarze Loch schließlich explodiert! Ein Schwarzes Loch von der Größe der Sonne wäre etwa 10^{66} Jahre stabil. Reale Schwarze Löcher haben eine deutlich höhere Masse und die Verdampfungsrate wäre merklich höher. Rechnungen zeigen, dass die emittierten Teilchen ein thermisches Spektrum aufweisen, das einer Temperatur entspricht, die mit abnehmender Masse des Schwarzen Lochs schnell ansteigt [**?**]. Bei einem Schwarzen Loch mit der Masse der Sonne liegt die Temperatur nur etwa ein $10^{-7}\,\mathrm{K}$ über dem absoluten Nullpunkt. Ein Schwarzes Loch mit einer Masse von nur einer $10^{12}\,\mathrm{kg}$ dagegen hat eine Temperatur von etwa $120 \cdot 10^{9}\,\mathrm{K}$ und würde eine Leistung von 6 GW ausstrahlen. Ein experimenteller Nachweis dieses Vorgangs steht allerdings noch aus. Siehe zu dieser Thematik auch den populärwissenschaftlichen Artikel in *Forbes* [**?**].

Ein Negativbeispiel aus der Welt des Big Bang

Im Jahr 1927 stellte Lemaitre den Vorschlag in den Raum, dass unser Universum expandiert [**?**]. Seine Idee nach gab es ein *Uratom*, in dem das sichtbare Universum auf eine winzige Größe komprimiert war. Heute nennen man seine Idee den Big Bang.[45] Die Theorie des Big Bang ist allgemein anerkannt. Allerdings haben die Kosmologen erkannt, dass es eine Phase einer rapiden Expansion gegeben haben muss. Nur so kann man die astronomischen Beobachtungen erklären. Die Theorie des Inflationären Universums geht zurück auf Alan Guth [**?**]. Als das Universum expandierte, fiel es in einen metastabilen Energiezustand, der die Inflation (superluminale Expansion) auslöste. Die Grundidee ist, dass das Universum zu Beginn seine Größe alle 10^{-36} Sekunden verdoppelt. Nach etwa 100 Zyklen tunnelt das Universum in einen stabilen Zustand und die superluminale Expansion stoppte. Heute geht man davon aus, dass der Übergang so abläuft, aber ohne Tunneln stattfindet [**? ?**].

[45] Der Begriff wurde 1949 vom Astronomen Fred Hoyle in einer BBC-Radiosendung 1948 geprägt, siehe Abb. 12.53.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Ein Proton mit einer Kinetischen Energie E_{kin} trifft auf eine Potentialbarriere der Höhe U_0. Angenommen, das Proton soll die gleiche Tunnelwahrscheinlichkeit haben, wie ein Elektron gleicher Kinetischer Energie. Wie breit ist die Barriere im Verhältnis zur Barriere des Elektrons?

$$\begin{aligned}
\frac{d_{proton}}{d_{electron}} &= \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \\
\frac{d_{proton}}{d_{electron}} &= \sqrt{\frac{9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}{1.673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}} \\
\frac{d_{proton}}{d_{electron}} &= 0.023
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2: Ein Teilchen mit kinetischer Energie E_{kin} trifft auf einen Barriere der Höhe $U_0 > E_{kin}$. Wenn man die Höhe der Barriere langsam reduziert, wie ändert sich Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen reflektiert wird?[46]

(a) Die Wahrscheinlichkeit nimmt zu!

(b) Die Wahrscheinlichkeit nimmt ab!

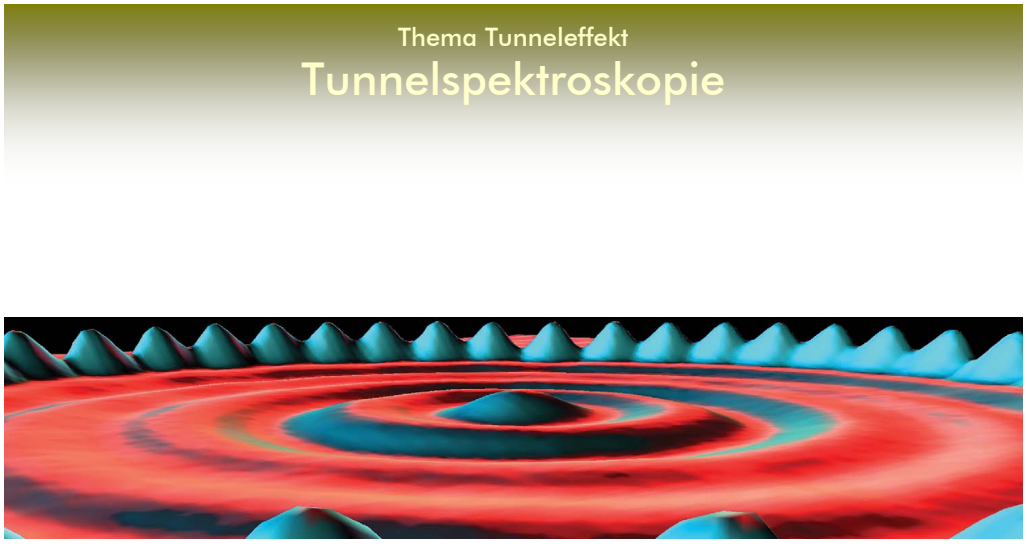
(c) Es ändert sich nichts.

[46] Antwort: (a)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Ein Elektron und ein Proton erreichen mit gleicher kinetischer Energie eine Potentialbarriere. Welches Teilchen tunnelt einfacher durch die Barriere?
2. Was verringert die Tunnelwahrscheinlichkeit am meisten: Verdoppelung der Breite der Barriere oder die Halbierung der kinetischen Energie des einfallenden Teilchens?
3. Was sagt die Geiger-Nuttall Regel aus?
4. Wie würde es sich auf den α-Zerfall auswirken, wenn der Atomkern kleiner wäre?
5. Welche Bedeutung hat der Tunneleffekt
   - in der Sonnenphysik?
   - in der Astrobiologie?
   - in der Halbleiterphysik?
6. Kann man den Tunneleffek nutzen, um eine hoch genaue Uhr zu realisieren?
7. Was ist ein Josephson-Kontakt?
8. Für welche Untersuchungen sind SQUIDs geeignet?
9. Warum gibt es auf dem Saturnmond Enceladus flüssiges Wasser?

12.3 Rastertunnel-Mikroskop



There's Plenty of Room at the Bottom: An Invitation to Enter a New Field of Physics [?] But I am not afraid to consider the final question as to whether, ultimately - in the great future - we can arrange the atoms the way we want; the very atoms, all the way down! What would happen if we could arrange the atoms one by one the way we want them. . . . When we get to the very, very, small world - say circuits of seven atoms - we have a lot of new things that would happen that represent completely new opportunities for design. Atoms on a small scale behave like nothing on a large scale, for they satisfy the laws of quantum mechanics. So, as we go down and fiddle around with the atoms down there, we are working with different laws, and we can expect to do different things. We can manufacture in different ways. We can use, not just circuits, but some system involving the quantized energy levels, or the interactions of quantized spins, etc.[47]

Richard Feynman, 1959

[47] Richard Feynman betrachtet in seinem Vortrag Möglichkeiten der direkten Manipulation einzelner Atome als neue Form der Synthese in der Chemie. Sein Vortrag blieb er weitestgehend unbemerkt, wird aber seid den Achtziger Jahren immer wieder gerne zitiert.

John Aloysius O'Keefe hatte eine Idee: Licht dringt durch ein kleines Loch auf ein Objekt direkt vor einem Schirm. Das transmittierte und reflektierte Licht wird aufgezeichnet, wobei das Licht über die Probe gescannt wird [?]. Der Forscher erkannte, dass die Auflösung eines solchen Rasternahfeld-Mikroskops nur durch Lochgröße und nicht nicht durch die Wellenlänge des Lichts begrenzt ist. Im Jahr 1956 war die Positioniertechnik noch nicht so weit entwickelt, dass man daran denken konnte ein solches Instrument aufzubauen. Im Jahr 1972 gelang es, mit 3cm-Mikrowellenstrahlung, unter Ausnutzung der O'Keefe-Idee, die Abbe-Grenze zu umgehen und Bilder mit einer Auflösung von 150 μm aufzunehmen [?].

The following is presented as a concept illustrating a method by which it might conceivably be possible to go beyond the resolving power of visible light.

John Aloysius O'Keefe, 1956

Ein interessantes Beispiel für die Anwendung des Tunneleffekts in Grundlagenforschung und Anwendung wollen wir genauer besprechen. Hier spielt die Fähigkeit der Positionierung ebenfalls eine entscheidende Rolle. Das Thema ist eng verwandt mit der Entwicklung hochauflösender Elektronenmikroskope (Vorlesung *Materiewellen*). Hier nutzte man die Welleneigenschaften von Elektronen, um die Rayleigh-Auflösungsgrenze in den sub-nm Bereich zu treiben. Die Tunnelspektroskopie unter Verwendung eines STM[48] verwendet ein anderes Verfahren, um ähnlich hohe räumliche Auflösung zu erreichen. Die Methode stellt höchste technische Anforderung an die Positionierbarkeit von Nanospitzen. Man erreicht durch ein einzelnes Atom am Ende der Spitze die Abbildung atomar aufgelöster Strukturen.[49] Diese Entwicklung, die im übrigen bei IBM Research in Zürich in ihren Anfang hatte, hat das Forschungsfeld *atomic engineering* aus der Taufe gehoben [? ?]. Abb. 12.54 zeigt erste Versuche [?]. Im Laufe der Zeit wurde die Methode erweitert und mittlerweile gibt es weitere Rasterverfahren (Rasterkraft-Mikroskopie [?],[50] Rastermagnetkraft-Mikroskopie) [?],[51] Rasterthermo-Mikroskopie [?],[52] Optische Nahfeld-Mikroskopie [? ?]),[53] die mit Nanometerauflösung Strukturen und deren Eigenschaften

[48] STM: *scanning tunneling microscope*, Rastertunnel-Mikroskop

[49] The Nobel Prize in Physics 1986 was divided, one half awarded to Ernst Ruska *for his fundamental work in electron optics, and for the design of the first electron microscope*, the other half jointly to Gerd Binnig and Heinrich Rohrer *for their design of the scanning tunneling microscope.*

[50] AFM (*atomic force microscope*): Eine Oberfläche wird mit einer mechanischen Sonde abgerastert. Bei der Messung werden die Kräfte zwischen Sonde und Probe als Funktion des Abstands bestimmt. Dies liefert Informationen über die mechanischen Eigenschaften der Probe, z.B. das Elastizitätsmodul.

[51] MFM, (*magnetic force microscope*): Eine magnetisierte Sonde tastet die magnetische Wechselwirkung zwischen Spitze und Probe ab und dient zur Rekonstruktion der magnetischen Struktur der Probenoberfläche.

[52] SThM (*scanning thermal microscope*): Diese Methode rastert die lokale Temperatur und Wärmeleitfähigkeit einer Probe ab und stellt ein Thermometer dar, dass Temperaturverhältnisse auf der Nanometerskala bestimmen kann.

[53] SNOM (*near-field scanning optical microscope*): Die Nahfeld-Mikroskopie nutzt die Eigenschaften evaneszenter Wellen, um Nanostrukturen abzubilden. Licht einer Wellenlänge λ wird durch eine Öffnung Durchmesser $d < \lambda$ geführt. Die Probe wird in geringem Abstand abgetastet. Dabei ist die optische Auflösung (wenige nm) nur durch den Durchmesser der Öffnung begrenzt.

auflösen können.

Im Folgenden ein Auszug aus der *New National Nanotechnology Initiative*, die Bill Clinton[54] im Jahr 2000 ausrief und dabei auf Feynmans Essay [**?**], das wir zu Beginn dieses Kapitels vorgestellt haben, Bezug nimmt:

There are several reasons why the nanoscale is so interesting and important:

- Electronic and atomic interactions inside matter are influenced by variations at the nanometer scale. Patterning matter at a nanometer length scale will make it possible to control the fundamental properties of materials (such as magnetization, charge capacity, catalytic activity) without having to change their chemical composition. For instance, nanoparticles of different sizes emit light at different frequencies so they can be used for different color, and nanoparticle are of the size of single magnetic domains so vastly improved magnetic devices can be made.

- Because systematic organization of matter at nanoscale is a key feature of biological systems, nanoscience and technology will allow us to place artificial components and assemblies inside cells and to make new structurally organized materials by mimicking the self-assembly methods of nature. These materials and components will be more biocompatible.

- Nanoscale components have very high surface areas, making them ideal for use as catalysts and other reacting systems, adsorbents, drug delivery, energy storage, and even cosmetics.

- Many nanostructured materials can be harder, yet less brittle than comparable bulk materials with the same composition because of certain interface and confinement effects. Nanoparticles are too small to have defects and are harder because of the surface energy so they can be used to make very strong composite materials.

- The speed of interacting nanostructures is much faster than that of microstructures because the dimensions involved are orders of magnitude smaller. Much faster and energy efficient systems are envisioned.

The surface was invented by the devil.

Wolfgang Pauli

Arbeitsweise eines STM

Wir stoßen spürend an etwas an. Zuerst durch Tasten, durch diesen merkwürdigen Sinn. Er steckt halb im Gefühl des eigenen Leibs, halb greift er, auf besondere Weise, das uns Fremde. Das Glatte, Rauhe, Kantige ist ebenso an der Spitze des tastenden Fingers wie,

[54] 42. Präsident der Vereinigten Staaten (1993-2001)

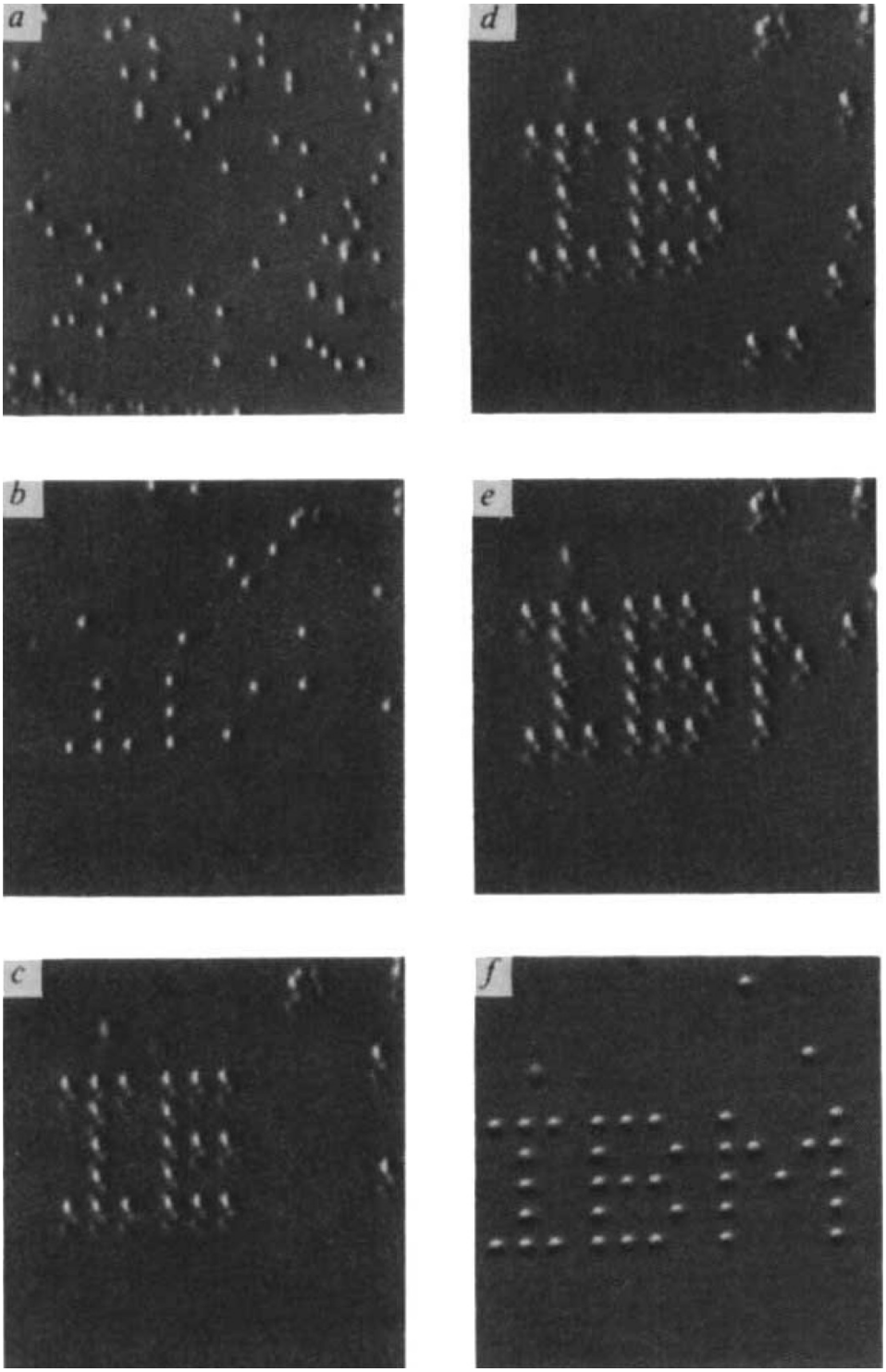


Abb. 12.54: Eine Folge von STM-Bildern, die während der Konstruktion einer gemusterten Anordnung von Xenonatomen auf einer Nickel (110)-Oberfläche aufgenommen wurden. Jeder Buchstabe ist 5 nm hoch [**?**].

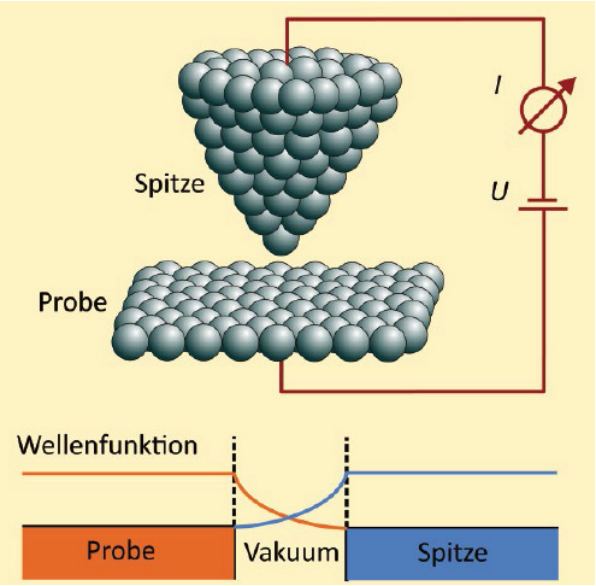


Abb. 12.55: Schema eines Tunnelkontaktes mit Spitze und Probe. Der Überlapp der Wellenfunktionen in Spitze und Probe ermöglicht das Tunneln der Elektronen [?].

unverkennbar, an dem Berührten selbst. Der Tastsinn ist dumpf und scharf, inwendig und auswendig zugleich, er hat das Leibhaftige sozusagen nach zwei Seiten. Mit dem eigenen Leib merkt er den fremden, und zwar immer am eigenen Leib entlang; das zeigt alles Getastete als nahe, doch auch als eng [?].

Ernst Bloch, 1978

Der experimentelle Aufbau besteht aus einer nadelfeinen Spitze, die mit Hilfe von Piezoelementen[55] engmaschig über eine Oberfläche geführt wird, siehe Abb. 12.55. Der charakteristische Längenmaßstab δ_T für das Tunneln wird durch die Potenzialdifferenz zwischen Austrittsarbeit und Elektronen-Energiezustand $(W_F - E)$ festgelegt. Für typische Werte von 4 eV ergibt sich:

$$\delta = \frac{\hbar}{2\,m_e \cdot (W_F - E)} \approx 1\,\text{Å} \tag{12.52}$$

Durch den geringen Abstand von Oberfläche und Spitze (wenige nm) können Elektronen durch die Vakuumbarriere tunneln. Durch Anlegen einer Potenzialdifferenz (Spannung) erreicht man, dass der Strom tunnelnder Elektronen hauptsächlich in einer Richtung fließt, siehe Abb. 12.56. Den sich ergebenden so genannten Tunnelstrom im pA-Bereich kann man mit empfindlichen Messgeräten bestimmen. Der Tunnelstrom I_{STM} hängt exponentiell vom Abstand d zwischen Spitze und Probe ab,

$$I_{STM} \approx \exp\left(-2\,d \cdot \sqrt{\frac{2\,m_e \cdot W_F}{\hbar^2}}\right) \tag{12.53}$$

[55] *Lexikon:* Der piezoelektrische Effekt, entdeckt 1880 durch Pierre Curie,[56] entsteht beim Zusammendrücken bestimmter Kristalle (z.B. Quarz). Als Resultat ergeben sich entgegengesetzte Ladungen an den Seitenflächen. Für das STM ist der umgekehrte Prozess relevant. Durch Anlegen einer elektrischen Spannung dehnt oder komprimiert sich ein piezoelektrischer Kristall. Eine Piezokeramik der Länge von 1 cm verkürzt sich um 10 nm wenn man Spannung zwischen den Enden von 1 V anlegt. Bei 2 V verkürzt er sich um 20 nm. Wechselt man die Polung, dehnt sich der Kristall um 20 nm aus.

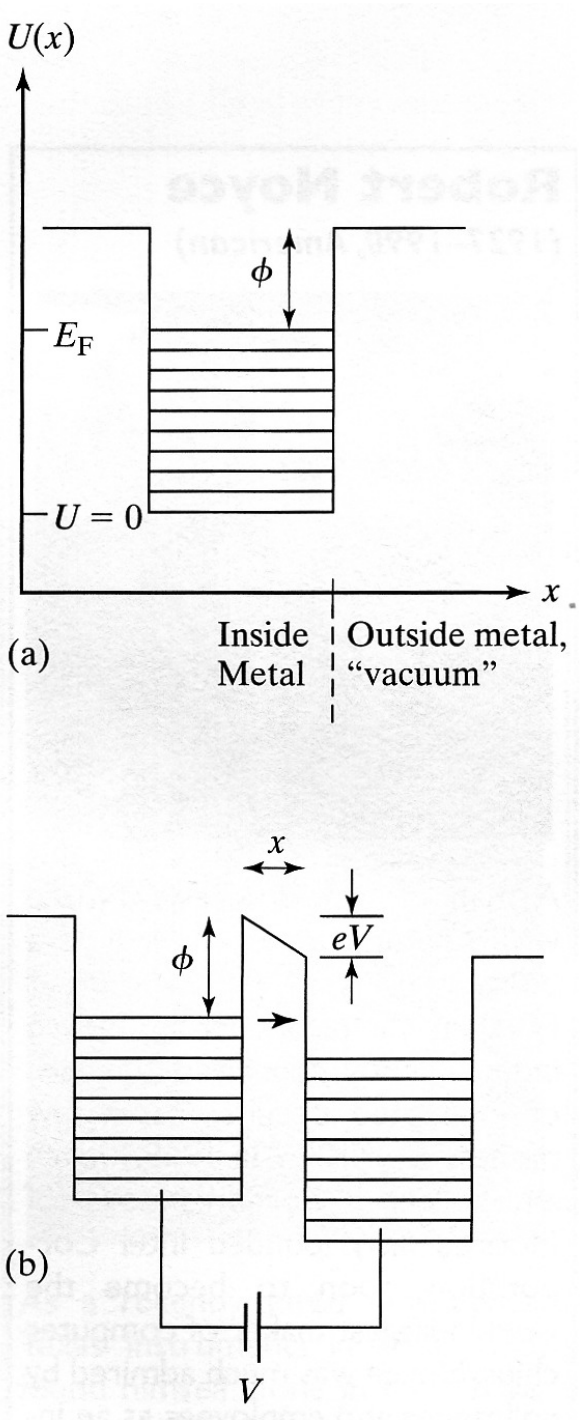


Abb. 12.56: Oben: Energieniveau-Diagramm für Elektronen in einem Metall. Die Elektronen füllen die Energiezustände bis zur Fermi-Energie auf. Für Metalle ist dies identisch mit dem Energieabstand zum Vakuumniveau, genannt die Austrittsarbeit ϕ. Unten: Elektronen können gerichtet zwischen zwei Metallen tunneln (hier von links nach rechts), die durch eine Barriere der Breite x getrennt sind, wenn es eine Spannungsdifferenz ΔV gibt [**?**].

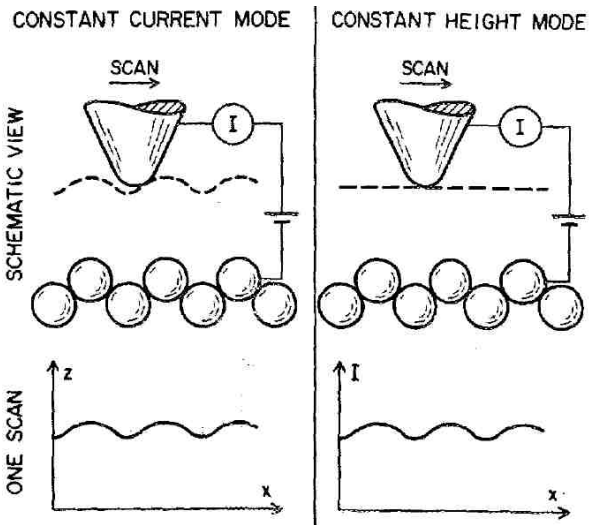


Abb. 12.57: Rastertunnelmikroskope können entweder im *constant current* oder im *constant height* Modus betrieben werden, um die Struktur von Oberflächen abzubilden [**?**].

wobei W_F die Austrittsarbeit aus der Probe ist. Man erkennt, dass das STM empfindlich auf den Abstand zwischen Spitze und Oberfläche reagiert. Die Ursache ist die exponentielle Abhängigkeit des Tunnelstroms Stroms von Abstand. Eine Abstandserhöhung um nur 0.01Åführt zu einer messtechnisch auflösbaren Reduzierung des Tunnelstroms um 2%. Bei größeren Abständen versiegt der Tunnelstrom. Es ist das Ziel, dass sich möglichst nur ein einzelnes Atom an der Spitze befindet. Damit erreicht man eine räumliche Auflösung, die es erlaubt, die atomare Struktur der Oberfläche abzubilden. Für den Betrieb eines STM sind Rückkopplungsmechanismen notwendig.[57] Interessant ist, dass man aus einer Analyse des Tunnelstroms weitere Informationen extrahieren kann. Das STM kann genutzt werden, um die elektronische Zustandsdichte[58] des Festkörpers (Kapitel *Festkörperphysik*) abzutasten. Dabei erhält man, je nach Richtung des Tunnelstroms, Informationen über entweder besetzte oder unbesetzte Zustände der Probe. In der Messung pegelt man den Abstand der Spitze zur Probe auf einen festen Wert ein und misst den Tunnelstrom bei Variation der angelegten Spannung (dI_{STM}/dV). Da der Tunnelstrom proportional zum Integral der Zustandsdichte im Bereich Fermi-Energie bis zum Spannungswert V_i ist, ergibt eine numerische Ableitung die Zustandsdichte der Probe bei einer vorgegebenen Energie. Diese Messmethode nennt sich constant current. Alternativ kann man auch den Abstand zur Probe fest halten und die Änderungen im Tunnelstrom detektieren (constant height Modus), siehe Abb. 12.57.

[57] Durch den Einsatz elektronischer Bauelemente wird der Tunnelstrom gemessen, die Spitze bewegt und anhand der Spannungs- und Ortsinformation ein Abbild der Oberfläche generiert. Eine Rückkopplungsschleife überwacht den Tunnelstrom und nimmt Anpassungen an der Spitzenposition vor, um beispielsweise einen konstanten Tunnelstrom aufrechtzuerhalten.

[58] *Lexikon:* Die **Zustandsdichte** ist die Anzahl der unterschiedlichen Zustände, die Elektronen bei einer bestimmten Bindungsenergie einnehmen. Sie bezeichnet die Anzahl der Elektronenzustände pro Volumeneinheit und pro Energieeinheit. Von der Zustandsdichte hängen die spezifischen Eigenschaften eines Festkörpers wie spezifische Wärme oder elektrische Leitfähigkeit ab. Rechnungen zur Zustandsdichte ermöglichen allgemeine Aussagen zur Zustandsverteilung der Elektronen als Funktion der Energie und zum Abstand zwischen Energiebändern in beispielsweise Halbleitern.

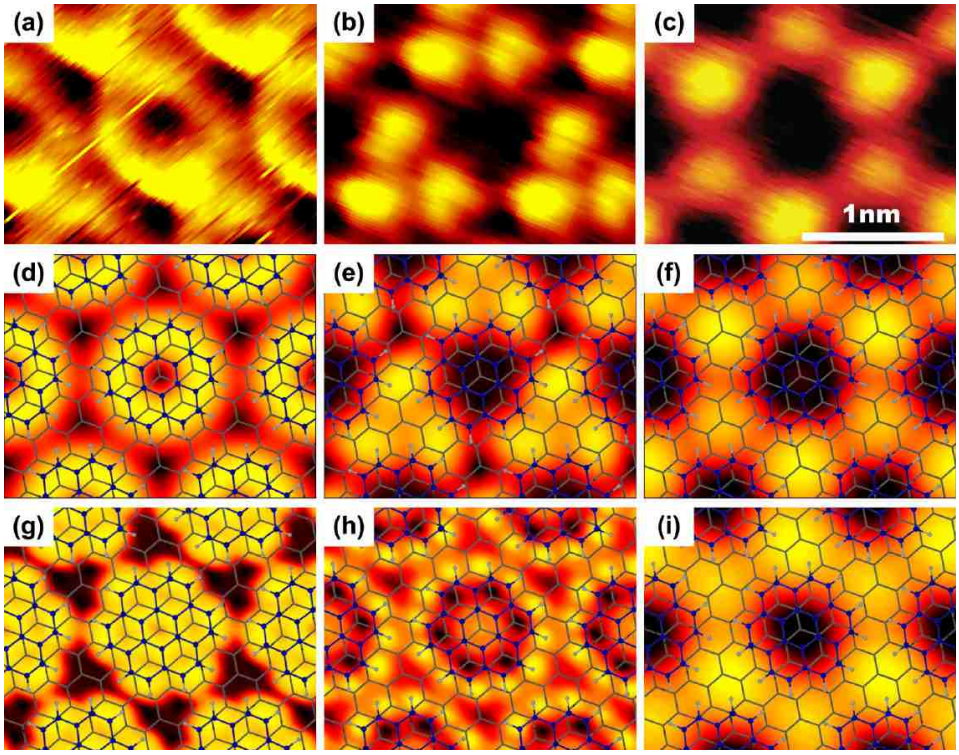


Abb. 12.58: STM-Bilder einer Monoschicht aus Coronen auf Graphit. Das Graphen-Gitter ist in Grau dargestellt, während das Coronen mit den Kohlenstoffatomen in dunkelblau und den Wasserstoffatomen in weiß dargestellt ist [**?**].

`Link to Lecture video`

Anwendungen^{4LP}

May the force be with you.

aus Star Wars (George Lucas, 1977)

Beispiele aus der Molekülphysik

Die Struktur von polyzyklischen, aromatischen Kohlenwasserstoffen adsorbiert auf Graphen adsorbiert, ist für elektronische Anwendung des Materials Graphen von grundlegender Bedeutung. Dazu muss man zunächst die Struktur der adsorbierten Moleküle bestimmen, hier gezeigt am Beispiel von Coronen auf einer Graphenschicht, siehe Abb. 12.58. Mit Hilfe der Tunnelspektrokopie ist weiter gelungen, Signaturen von Schwingungen adsorbierter Moleküle nachzuweisen [**?**]. Acetylen (C_2H_2) wurde dazu auf einer Kupferoberfläche abgeschieden und das Tunnelmikroskop benutzt, die Moleküle abzubilden

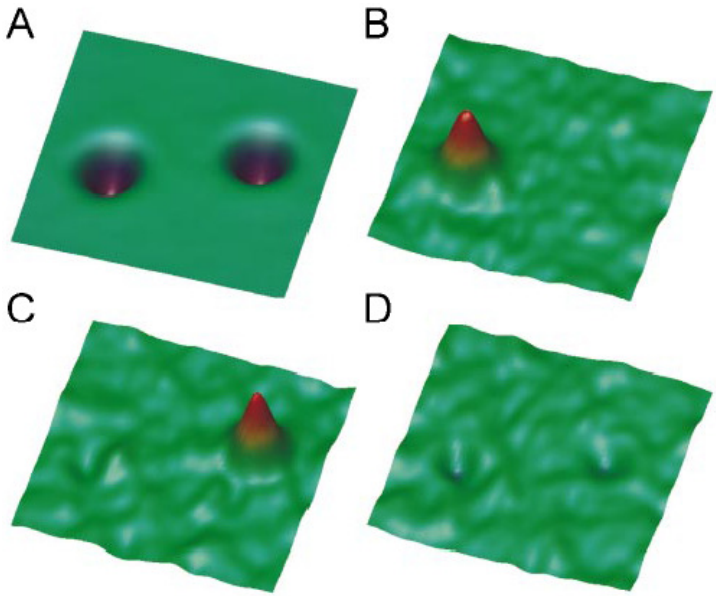


Abb. 12.59: Spektroskopisch räumliche Abbildung des inelastischen Kanäle für C_2H_2 (links) und C_2D_2 (rechts). Die abgebildete Fläche ist 48 Å mal 48 Å groß [**?**].

und Molekülschwingungen über inelastische Streuprozesse beim Tunneln zu messen. Als Vergleich wurde neben C_2H_2 ein deuteriertes Molekül (C_2D_2) auf die Oberfläche gelegt. Die STM Bilder zeigen die genaue Position der Moleküle 12.59 (A,D), wobei die einzelnen Atome in der Messung nicht aufgelöst wurden. Nun wurde die Umgebung der Moleküle gescannt, wobei selektiv einmal die C-H und einmal die C-D Streckschwingung angeregt wurde. Die Bilder zeigen deutlich, dass jeweils nur eines der Moleküle *sichtbar* wird (Abb. 12.59 (B,C)).

Man kann ein STM mit einem angelagerten CO-Molekül an der Spitze nicht nur verwenden, um Moleküle abzubilden, sondern auch chemische Reaktionen, wie beispielsweise die Retro-Bergman-Zyklisierung [**?**], untersuchen:

Reversible Bergman cyclization by atomic manipulation [?]: The Bergman cyclization is one of the most fascinating rearrangements in chemistry, with important implications in organic synthesis and pharmacology. Here we demonstrate a reversible Bergman cyclization for the first time. We induced the on-surface transformation of an individual aromatic diradical into a highly strained ten-membered diyne using atomic manipulation and verified the products by non-contact atomic force microscopy with atomic resolution. The diyne and diradical were stabilized by using an ultrathin NaCl film as the substrate, and the diyne could be transformed back into the diradical. Importantly, the diradical and the diyne exhibit different reactivity, electronic, magnetic and optical properties associated with the changes in the bond topology, and spin multiplicity. With this reversible, triggered Bergman cyclization we demonstrated switching

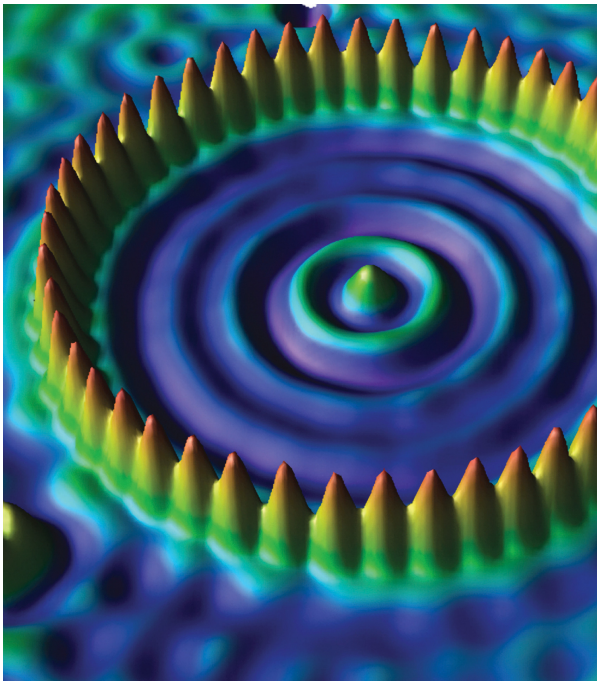


Abb. 12.60: Räumliches Bild der Eigenzustände eines Quantenkorrals, gebildet aus 48 Fe-Atome auf einer Cu(111) Oberfläche. Der Durchmesser des Rings beträgt 142.6Å [**?**].

on demand between the two reactive intermediates by means of selective C-C bond formation or cleavage, which opens up the field of radical chemistry for on-surface reactions by atomic manipulation.

Beispiele aus der Nanostrukturierung

Quantum mirages formed by coherent projection of electronic structure [?]: A scanning tunneling microscope was used to position 36 cobalt atoms in an elliptical structure known as a quantum corral. Electron waves moving in the copper substrate interact both with a magnetic cobalt atom carefully positioned at one of the foci of the ellipse and apparently with a mirage of another cobalt atom (that isn't really there) at the other focus.

Die STM-Methode erlaubt einzelne Atome von der Oberfläche zu entfernen und an anderer Stelle wieder einzubauen. Erzeugt man, wie in dem obigen Beispiel gezeigt, einen Kreis aus Atomen, wird ein Wellenmuster sichtbar. Die Bewegung der Oberflächenelektronen wird auf diesen Bereich eingeschränkt und die Messung visualisiert die (siehe Vorlesung *Wellenfunktion*) quantisierten Energiezustände der Elektronen-Materiewellen. Das STM bestimmt die Bereiche erhöhter Elektronendichte. Das Rastertunnel-Mikroskop liefert also den Beweis für die dort gemachten theoretischen Überlegungen. Abb. 12.60 zeigt eine Messung von Don Eigler (IBM), einem Pionier auf diesem Gebiet [**? ?**]. Aufgenommen ist die Elektronendichte in einem Ring aus 48 Eisenatomen angeordnet auf einer Cu(111) Oberfläche.[59] Man achte auf die Wellenstruktur im Innern des Rings. Dies ist eine stehende Elektronenwelle, vergleichbar dem Vibrationsmuster

[59] Viele technologisch interessante Metalle haben eine fcc-Struktur (*face-cubic centered*). Beispielsweise

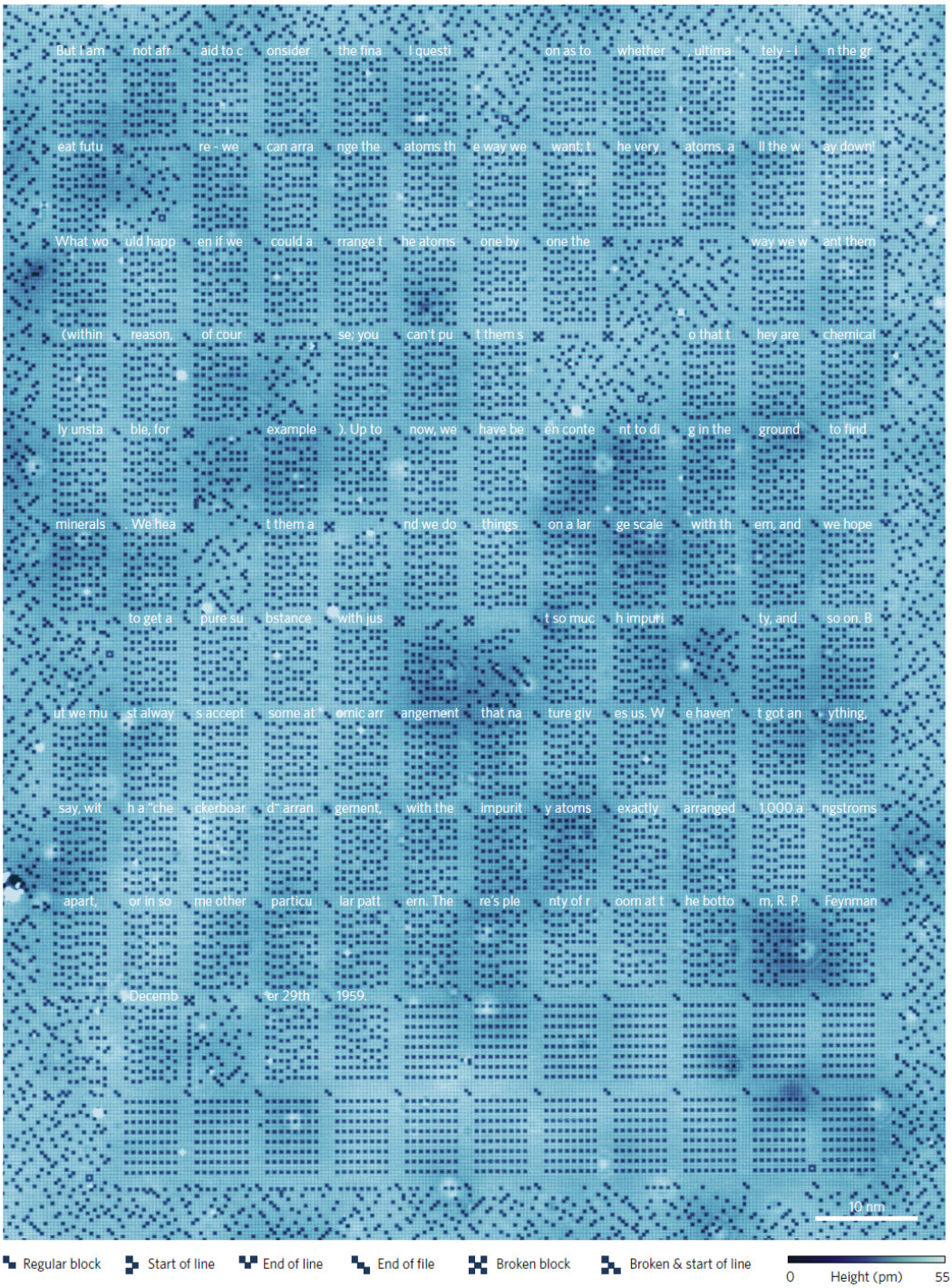


Abb. 12.61: Atomarer Kilobytespeicher. STM-Bild ($96 \times 126\,\mathrm{nm}$, I=2.00 nA, V=+500 mV, T=1.5 K) eines 1.016 Byte Atomspeichers, geschrieben zu einer Passage aus Feynmans Vortrag *There's plenty of room at the bottom* [**?**]. Die verschiedenen verwendeten Markierungen werden in der Legende unter den Bildern erläutert. Der Speicher besteht aus 127 Funktionsblöcken und 17 gebrochenen Blöcken, was zu einer Gesamtflächendichte von $0.778\,\mathrm{Bit{\cdot}nm^{-2}}$ führt [**?**].

eine Pauke!

Link to Lecture Video

A kilobyte rewritable atomic memory [?]: The advent of devices based on single dopants, such as the single-atom transistor, the single-spin magnetometer and the single-atom memory, has motivated the quest for strategies that permit the control of matter with atomic precision. Manipulation of individual atoms by low-temperature scanning tunnelling microscopy provides ways to store data in atoms, encoded either into their charge state, magnetization state or lattice position. A clear challenge now is the controlled integration of these individual functional atoms into extended, scalable atomic circuits. Here, we present a robust digital atomic-scale memory of up to 1 kilobyte (8 000 bit-using an array of individual surface vacancies in a chlorineterminated Cu(100) surface, see Fig. 12.61. The memory can be read and rewritten automatically by means of atomic-scale markers and offers an areal density of 502 terabits per square inch, outperforming state-of-the-art hard disk drives by three orders of magnitude. Furthermore, the chlorine vacancies are found to be stable at temperatures up to 77 K, offering the potential for expanding large-scale atomic assembly towards ambient conditions.

haben alle katalytisch wichtigen Edelmetalle (Pt, Rh, Pd) eine fcc-Struktur. Einen so aufgebauten Kristall kann man in unterschiedlicher Weise spalten. Es entstehen durch unterschiedliche Oberflächenstrukturen. Die (100)-Oberfläche erhält man durch Schneiden parallel zur vorderen Oberfläche der kubischen fcc-Einheitszelle. Die (110)-Oberfläche erhält man, indem die fcc-Einheitszelle parallel zur z-Achse abtrennt. Die (111)-Oberfläche ersteht, indem das fcc-Metall entlang der Volumendiagonalen spaltet.

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron durch eine 1 nm breite Barriere tunnelt, wenn die kinetische Energie des Elektron 0.1 eV geringer ist als die Höhe der Barriere?

Der Energieabstand zur Barriere beträgt für das Elektron 0.1 eV

$$U_0 - E_{kin} = 0.1\,\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-20}\,\text{J}$$

Damit ergibt sich eine Eindringtiefe δ_t von

$$\begin{aligned}
\delta_t &= \frac{\hbar}{\sqrt{2\,m \cdot (U_0 - E_{kin})}} \\
\delta_t &= \frac{1.054 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2 \cdot (9.109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}) \cdot (1.6 \cdot 10^{-20}\,\text{J})}} \\
\delta_t &= 6.18 \cdot 10^{-10}\,\text{m}
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit T_t für das Tunneln des Elektrons durch diese Barriere ergibt

$$\begin{aligned}
T_t &= \exp\left(-\frac{2\,d}{\delta_t}\right) \\
T_t &= \exp\left(-\frac{2 \cdot (1.0\,\text{nm})}{(0.618\,\text{nm})}\right) \\
T_t &= 0.039 = 3.9\%
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.2: Zwei Leiter sind durch einen Luftspalt von 1 nm getrennt. In den Leitern bewegen sich die Elektronen mit der Kinetischen Energie E_{kin}. In der Lücke ist das Potenzial für die Elektronen $U_0 - E_{kin}$=1.0 eV. Es handelt sich also um eine Potenzialbarriere. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron auf der anderen Seite der Barriere erscheint?

Die Höhe der Tunnelbarriere ist $U_0 - E_{kin}$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Tunnelprozess ist gegeben durch Gl. 12.45. Die Eindringtiefe δ_t ist:

$$\begin{aligned}
\delta_t &= \frac{\hbar}{\sqrt{2\,m_e \cdot (U_0 - E_{kin})}} \\
\delta_t &= \frac{(1.054 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})}{\sqrt{2 \cdot (9.109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}) \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{C})}} \\
\delta_t &= 1.95 \cdot 10^{-10}\,\text{m}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Tunnelwahrscheinlichkeit (Gl. 12.45):

$$
\begin{aligned}
T_t &= \exp\left(-\frac{2\,d}{\delta_t}\right) \\
T_t &= \exp\left(-\frac{2\cdot(1.0\cdot10^{-9})\,\mathrm{m}}{1.95\cdot10^{-10},\mathrm{m}}\right) \\
T_t &= 3.5\cdot10^{-5}
\end{aligned}
$$

Die Tunnelwahrscheinlichkeit ist also nicht besonders hoch, aber wenn man viele Elektronen anbietet, könnte eine merkliche Anzahl an Elektronen tunneln. Da der Tunnelprozess in beide Richtungen gleich wahrscheinlich ist, ist der Nettostrom NULL. Was passiert, wenn man die Breite der Lücke verdoppelt?

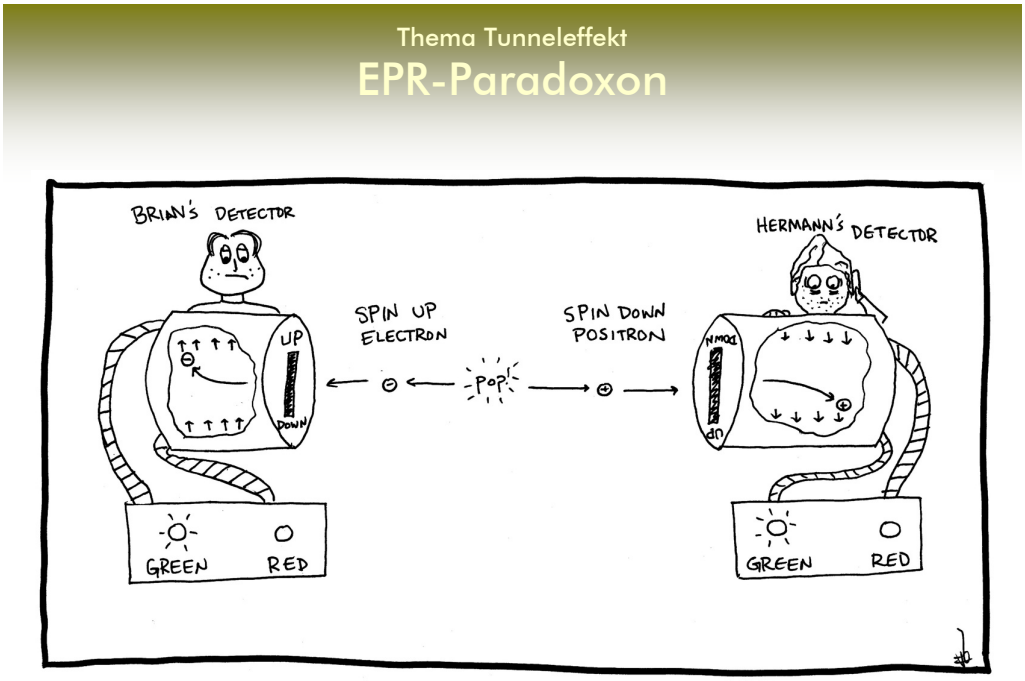
$$
\begin{aligned}
T_t &= \exp\left(\frac{4\,d}{\delta_t}\right) \\
T_t &= \exp\left(-\frac{4\cdot(1.0\cdot10^{-9})\,\mathrm{m}}{1.95\cdot10^{-10},\mathrm{m}}\right) \\
T_t &= 1.25\cdot10^{-9}
\end{aligned}
$$

Die Tunnelwahrscheinlichkeit ist schon deutlich geringer. Der Tunnelstrom reagiert also ziemlich empfindlich auf die Breite der Tunnelbarriere. Erkennen Sie das Konzept des Rastertunnel-Mikroskops wieder?

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Können Sie den experimentellen Aufbau eines Rastertunnel-Mikroskops skizzieren?
2. Wie lautet der Titel von Feynmans berühmtesten Vortrags? Welche Thematik wird behandelt?
3. Was versteht man unter dem piezoelektrischen Effekt?
4. Wieso tunneln die Elektronen in einem Rastertunnel-Mikroskop nur in eine bestimmte Richtung?
5. Welche Maßnahme erhöht die Tunnelwahrscheinlichkeit am effektivsten. Eine Halbierung des Energieunterschieds zwischen der kinetischen Energie des Teilchens und der Höhe der Potenzialschwelle oder eine räumliche Halbierung der Potenzialbreite?
6. Was ist ein *quantum corral*?

Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon^{4LP}



Es scheint hart, dem Herrgott in die Karten zu schauen. Aber dass er würfelt und sich telepathischer Mittel bedient, wie es ihm voi der gegenwärtigen Quantentheorie zugemutet wird, kann ich keinen Augenblick glauben.

Albert Einstein an Cornelius Lanczos

Superposition ist ein grundlegendes Prinzip der Quantenphysik. Die Überlagerung von Wellen wurde schon in der klassischen Physik im Zusammenhang mit Wellenphänomenen insbesondere in der Optik behandelt. Im Rahmen der Quantenphysik muss diese Idee erweitert und neu interpretiert werden. Beispielsweise kann sich ein Wasserstoffatom in einer Überlagerung von Energiezuständen befinden. Zusätzlich unterliegt die quantenphysikalische Superposition Beschränkungen wie der Ununterscheidbarkeit und der Unschärferelation, die Grenzen für eine konsistente Beschreibung der mikroskopischen Welt aufzeigen. Betrachten wir die lokale Verschmierung eines Quantenobjekts. Folge ist, dass ein Teilchen gleichzeitig an vielen unterschiedlichen Orten aufzufinden ist (Stichwort Wahrscheinlichkeitsdichte). Die Größe Δx ist ein Maß dafür, wie viel Platz durch einen Körper belegt ist. Δp gibt an, welche Impulse möglich sind. Die Grenzen für Ort UND Impuls gibt die Heisenbergsche Unschärferelation vor. Die Gleichung $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ besagt, dass Körper sich entweder wie Teilchen (Δx gering) oder Wellen ($\Delta p = h/(\Delta\lambda)$

gering) verhalten. Beides geht, aber nicht gleichzeitig.

Zu Beginn dieses Kapitels eine Betrachtung zu Experimenten mit einzelnen Photonen. Diese spielen im Folgenden eine wichtige Rolle. Der Begriff Photon impliziert, dass Energie nur in kleinen Energiepaketen aus Licht übertragen werden kann. Dazu stelle man sich vor, dass Photonen auf einen Strahlteiler treffen, siehe Abb. 12.62, oben. Ohne eine Quantisierung des Lichtfeldes könnte folgendes passieren: Manchmal würden die beiden Detektoren gleichzeitig anschlagen. In der Quantenphysik tritt dieser Fall nicht auf. Den Beweis lieferte Clauser [**?**], indem er so genannte Photonenpaare nutzte. Der Nachweis eines Photons in einem der Detektoren bedeutet, dass das andere Photon für andere Experimente genutzt werden kann. In einem ähnlich gelagerten Experiment wurde mit solchen Photonenpaaren das Youngsche Doppelspalt-Experiment wiederholt [**?**], siehe Abb. 12.62. Photonen, die einzeln durch den Doppelspalt geschickt werden formen sich zu dem bekannten Interferenzmuster. Eine Interpretation, dass nur interferierende Wellen dieses Muster hervorbringen, ist damit nicht mehr haltbar. Abb. 12.63 zeigt ein Beispiel dafür, welche verrückten Phänomenen sich durch den Welle-Teilchen Dualismus ergeben.

Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky [**?**]**:** A brief review of the physical significance of the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky is given, and it is shown that it involves a kind of correlation of the properties of distant noninteracting systems, which is quite different from previously known kinds of correlation. An illustrative hypothesis is considered, which would avoid the paradox, and which would still be consistent with all experimental results that have been analyzed to date. It is shown, however, that there already is an experiment whose significance with regard to this problem has not yet been explicitly brought out, but which is able to prove that this suggested resolution of the paradox (as well as a very wide class of such resolutions) is not tenable. Thus, this experiment may be regarded as the first clear empirical proof that the aspects of the quantum theory discussed by Einstein, Rosen, and Podolsky represent real properties of matter.

Fernwirkung[60] oder *action at-a-distance* beschreibt eine physikalische Wechselwirkung nicht aufgrund von Stößen. Damit widerspricht sie frühen mechanistischen Modellen. William of Ockham[61] dachte als erster über das Konzept der Fernwirkung nach. Mit dieser Hilfe versuchte er das Phänomen Magnetismus und die Erwärmung der Erdatmosphäre durch die Sonne zu verstehen, die scheinbar erfolgt, ohne dass der Raum zwischen

[60] *Lexikon:* Wie sich herausstellt, kann man die physikalische Wechselwirkung nicht allein auf Stöße reduzieren. **Fernwirkung** ist ein Konzept, bei dem ein physikalisches Objekt beeinflusst werden kann, ohne von einem anderen Objekt physisch berührt zu werden (z.B. mechanischer Kontakt). Der Begriff wurde oft im Zusammenhang mit der Theorie der Gravitation und der Elektrodynamik verwendet, um zu erläutern, wie Objekte auf entfernte Objekte reagieren (siehe Kapitel *Unschärferelation*). Die Beschäftigung mit diesem Phänomen hat zu bedeutenden Entwicklungen in der Physik geführt. Diese reichen vom Konzept eines Feldes, **Verschränkung** und den **Mediatorteilchen** des Standardmodells.

[61] Englischer Philosoph (1288-1347)

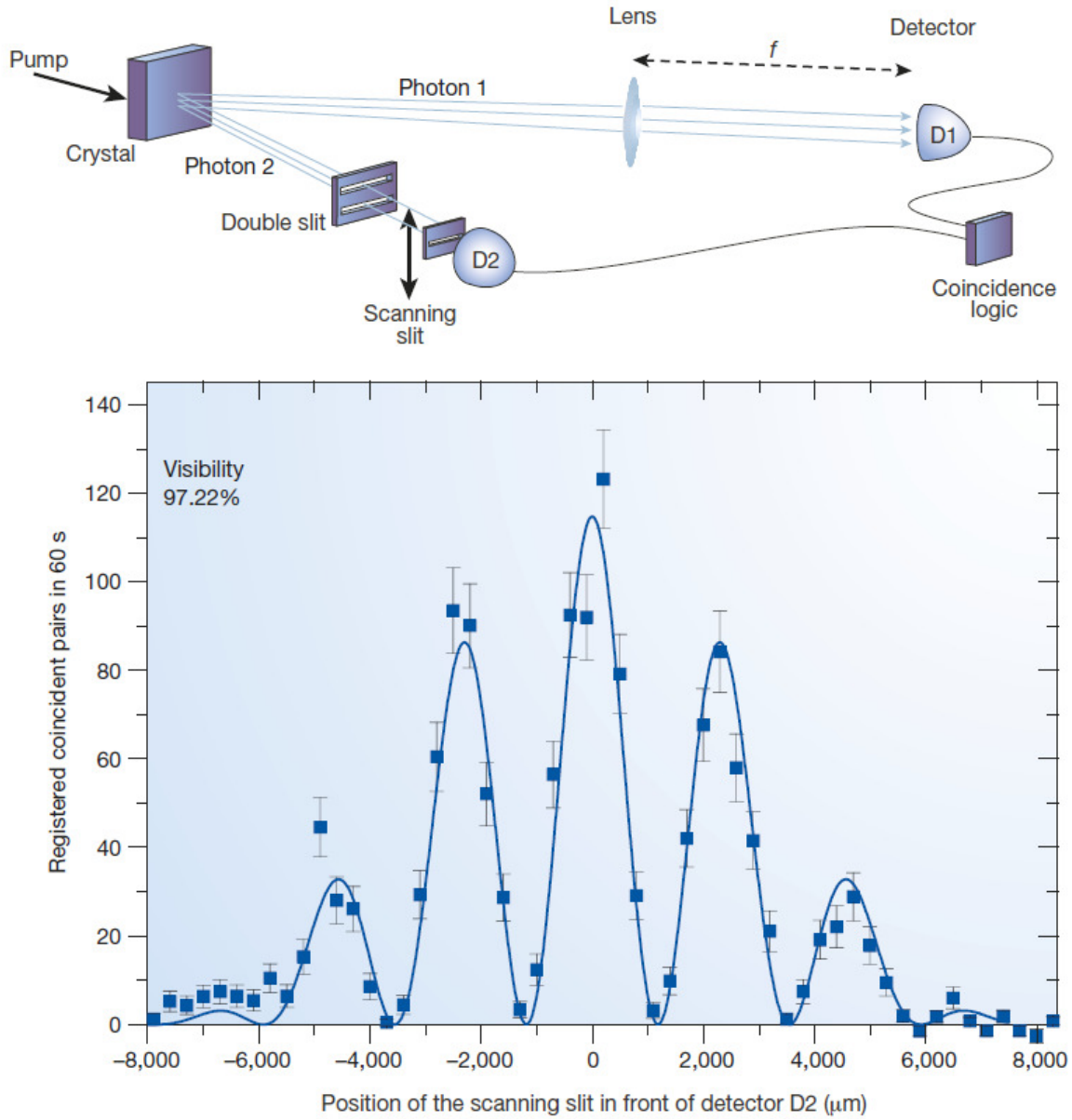


Abb. 12.62: Einzelphotonen-Doppelspalt-Interferenz mit einem Paar verschränkter Photonen. Photon 2 durchquert die Doppelspaltanordnung während Photon 1 vom Detektor $D1$ registriert wird. Abhängig davon, in welcher Reihenfolge die Photonen detektiert werden ergibt sich ein Interferenzmuster (unten), wenn der Weg von Photon 2 vorab nicht nachverfolgt werden kann oder auch nicht, wenn der Weg vorab bekannt ist [**?**].

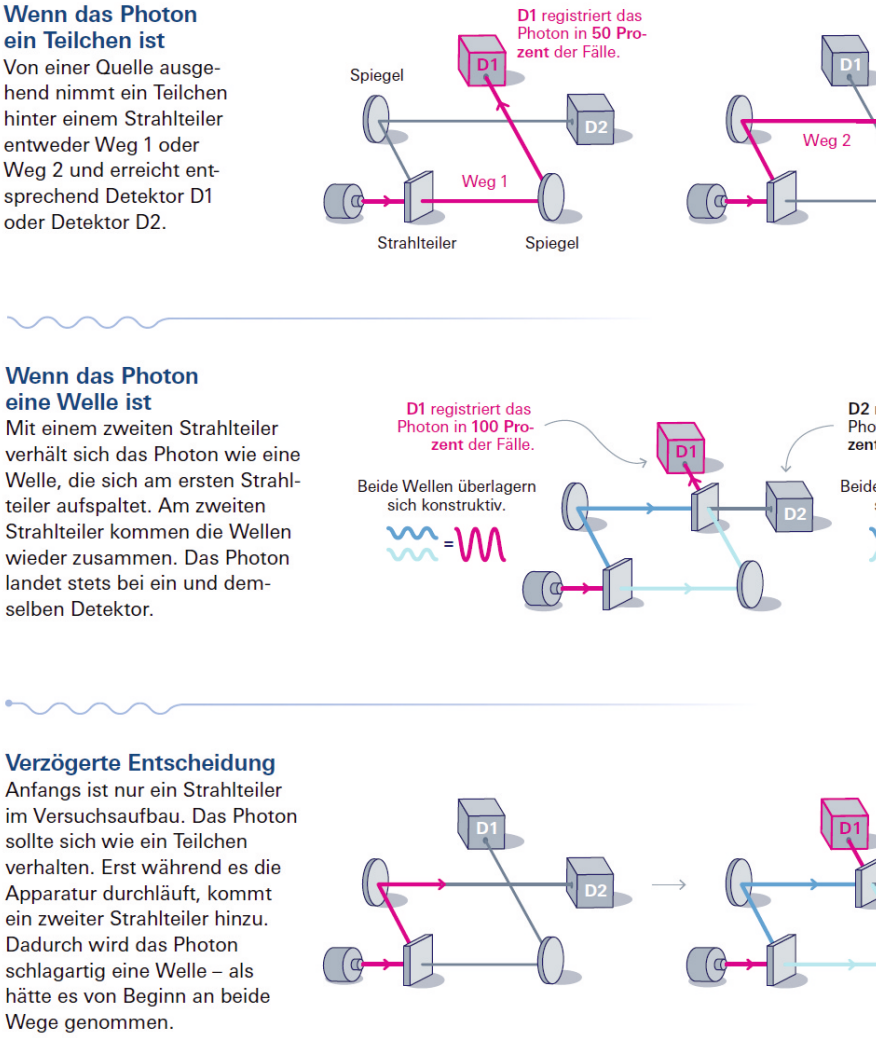


Abb. 12.63: Dieses Experiment mit verzögerter Entscheidung zeigt, wie wechselhaft der Charakter eines Lichtteilchens ist. Entweder beeinflusst das nachträgliche Einfügen des zweiten Strahlteilers das anfängliche Verhalten des Lichtteilchens -also rückwärts in der Zeit- oder Photonen besitzen keine definierten intrinsischen Eigenschaften, solange sie nicht beobachtet werden [**?**].

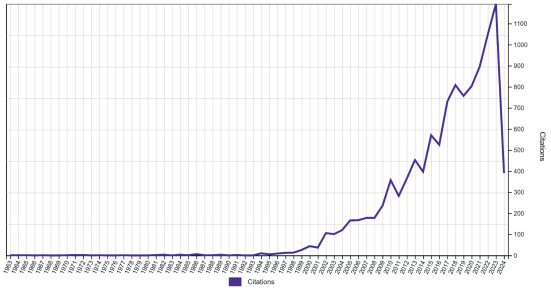


Abb. 12.64: Wie oft wurde das wegweisende Papier von J. S. Bell [**?**] im Laufe der Jahre zitiert [**?**]?

Energiespender und -träger beeinflusst wird.

Nun zum eigentlichen Problem. Die Grundidee stammt aus einer Arbeit von Bohm and Aharonov [**?**]. Zunächst die klassische Sichtweise: Bei der Dissoziation eines zweiatomigen Moleküls (AB →A+B) kann man aus der Energie- und Impulserhaltung die Geschwindigkeiten der beiden Fragmente exakt berechnen. Im Schwerpunktsystem sind die Impulse genau entgegengesetzt. Verkürzt gesagt: Kennt man einen der Beteiligten (A fliegt nach rechts), kennt man auch den Anderen (B fliegt nach links). Determinismus pur! Diese Betrachtung wird in der Quantenphysik arg strapaziert, denn solche Aussagen können erst getroffen werden, wenn man tatsächlich eine Messung durchführt. Was passiert, wenn man mit der Messung wartet? Erst dann kann man feststellen, welches der Fragmente in welche Richtung weg fliegt. Wie erfährt das andere Teilchen, dass eine solche Messung stattgefunden hat? Einstein argumentierte, dass kein Mechanismus bei einer gewissen Distanz ein Messergebnis unmittelbar beeinflussen kann (*spooky-action-at-a-distance*). Vielmehr muss alles schon vorher definiert gewesen sein. Die Quantenphysik ist daher unvollständig.

An den räumlich weit getrennten Teilchen werden zwei Messgrößen wie Ort und Impuls betrachtet. Eine gleichzeitige exakte Bestimmung dieser Messgrößen ist nach der Heisenbergschen Unschärferelation nicht möglich ($\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$). Dennoch sind die Werte der Messgrößen der beiden Teilchen, trotz räumlicher Trennung und trotz Unschärferelation, streng korreliert. Dies führt scheinbar zu einer Verletzung der Regeln der Quantenphysik. Einstein, Podolski und Rosen (EPR) versuchten anhand eines Gedankenexperiments zu beweisen, dass es Ungereimtheiten in der Beschreibung der Welt durch die Quantenphysik gibt [**?**]. Im Wesentlichen wird ein Szenario aus zwei Teilchen betrachtet, die zum Zeitpunkt $t = 0$ aufeinander abgestimmt werden und sich dann weit voneinander (beispielsweise Lichtjahre) entfernen. Sagen wir mal, die Teilchen haben die Eigenschaft (+) und (–). Es ist aber nicht klar, welches der Teilchen die Eigenschaft (+) und welches die Eigenschaft (–) hat. Nun misst man in Andromeda genau diese Eigenschaft und stellt fest, dass das Teilchen die Eigenschaft (+) hat. Im selben Moment ist klar, dass das andere Teilchen die Eigenschaft (–) hat. Der Punkt ist, dass man nicht auf Nachricht aus Andromeda warten muss. Wie gelangt die Information zur Erde? Man kann sich zwei Szenarien vorstellen:

1. Es gibt eine bislang nicht geklärte Fernwirkung (*spooky-action-at-a-distance*) die

sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreitet (Abb. 12.65). Das zweite Postulat der Relativitätstheorie spricht dagegen (Kapitel *Gleichzeitigkeit*).

2. Die spezielle Eigenschaft wird lokal am Ort des Entstehens schon dem System aufgeprägt. Diesen Vorgang wird durch eine bislang noch nicht bekannte Theorie (*hidden variables*) beschrieben. Hier scheint es sich auf den ersten Blick eher um eine philosophische Debatte zu handeln. Allerdings ergab sich durch die Arbeiten von J. S. Bell [**?** **?**],[62] dass man die Theorie der verborgenen Variablen in Experimenten überprüfen kann [**?**]. Das Bell-Theorem wurde unzähligen Tests unterzogen [**?** **?** **?** **?** **?**], und obwohl es noch kein Experiment gibt, dass alle möglichen Schlupflöcher schließt, sprechen die Ergebnisse dafür, dass die Beschreibung der Natur durch die Quantenphysik seine Richtigkeit hat. Die Arbeiten von Bell waren die Geburtsstunde einer interessanten neuen Forschungsrichtung, der Quantenkryptologie [**?**].[63]

Quantum keys dial up tamper-proof conference calls [?]: The ultra-secure *quantum internet* hasnt arrived yet, but when it does, it looks like we will have quantum video conferences. One well-established quantum communication technique uses photons to create a string of data, or key, that can encrypt and decrypt messages. Eavesdroppers can be detected easily because observation disturbs the states of the photons. But these photon-based *quantum keys* are typically distributed to only two parties. Alessandro Fedrizzi at Heriot-Watt University in Edinburgh, UK, and his colleagues showed a way to pass out quantum keys efficiently to groups of three or more. For the demonstration, the team used lasers to produce sets of four photons. Each of the four photons was *entangled* with the others in its set: measuring it would affect the rest, making eavesdropping difficult. The researchers could distribute their entangled quartets over a network of fibre-optic cable with a combined length of as much as 50 kilometres. From the quartets of entangled photons, the team built a cryptographic key about one million bits long. The researchers used this to encrypt an illustration of Lewis Carrolls Cheshire Cat and share it securely between four parties during a short conference call.

Eine Grundidee der Quantenphysik ist, dass die Eigenschaften der Teilchen gekoppelt sind. Ein solches System wird durch einen einzigen quantenphysikalischen Zustand beschrieben. Man sagt, die Eigenschaften der beiden Teilchen sind verschränkt. Was ver-

[62] Als im November 1964 eines der wichtigsten quantentheoretischen Arbeiten veröffentlicht wurde, bemerkte das praktisch niemand. Das Papier *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox* [**?**] wurde in den ersten sechs Jahren kaum zitiert(Abb. 12.64) und auch später von Physiker oft geflissentlich ignoriert.

[63] *Lexikon:* **Quantenkryptologie** nutzt quantenphysikalische Eigenschaften, um kryptographische Aufgaben auszuführen. Das bekannteste Beispiel ist die Verteilung eines Quantenschlüssels, womit eine informationstheoretisch sichere Lösung des Schlüsselaustauschproblems gelingt. Der Vorteil liegt darin, dass sie die Erledigung verschiedener kryptographischer Aufgaben allein mit klassischer Kommunikation ermöglicht. Grundlage ist, dass es unmöglich ist, Daten, die in einem Quantenzustand kodiert sind, zu kopieren. Beim Versucht die kodierten Daten zu lesen, ändert sich der Quantenzustand durch den Kollaps der Wellenfunktion. Dies kann verwendet werden, um das Abhören beim Austausch des Quantenschlüssels zu erkennen.

Action at a Distance in Classical Physics

By Mary B. Hesse *

1

THE scholastic axiom that "matter cannot act where it is not" is one of the very general metaphysical principles found in science before the seventeenth century which retain their relevance for scientific theory even when the metaphysics itself has been discarded. Other such principles have been fruitful in the development of physics: for example, the "conservation of motion" stated by Descartes and Leibniz, which was generalized and given precision in the nineteenth century as the doctrine of the conservation of energy; and the principle that nature works by the shortest route, which was hailed by Maupertuis as a metaphysical principle "so wise, so worthy of supreme Being," and which led directly to variational methods in optics and dynamics.

We may regard these metaphysical statements as generalizations from familiar experience, or from a familiar stock of ideas, applied analogically to the fundamental structure of nature. In this they are like all scientific hypotheses, but they lack the precision of a good hypothesis, and are capable of various interpretations depending on the type of theory in which they are used; also they are often not held tentatively, like hypotheses, but are unconscious presuppositions of science into which all the facts are made to fit. It may be of interest to sketch part of the historical background of one of these principles, namely, the alleged impossibility of action at a distance, and to try to reinterpret some of the controversies that have arisen round it, not in terms of rival ontological theories, but in terms of the choice of suitable models or analogues for the description of physical phenomena.

It has been characteristic of physics that it is only those actions which produce or tend to produce motion that are considered as candidates for fundamental explanations. Actions involving change of other properties, such as illumination or temperature, are explained in terms of motion, and not the reverse. In other words mechanics has traditionally provided the basic categories of physics. The types of action to be admitted in mechanics were further restricted at the beginning of the modern scientific period by the decision to explain the change of motion of bodies only by communication from outside, and not by any innate power or striving within the bodies themselves. Collingwood credits Kepler with "the momentous step of proposing that in treating of physics the word *anima* should be replaced by the word *vis*: in other words, that the conception of vital energy producing qualitative changes should be replaced by that of mechanical energy . . . . producing quantitative changes." [1]

* University of Leeds, England.

[1] *The Idea of Nature* (Oxford, 1945), p. 101.

Abb. 12.65: This in-depth look at the science of ancient Greece examines the influence of antique philosophy on 17th-century thought, plus modern concepts: quantum mechanics, wave-particle duality, the uncertainty principle [**?**].

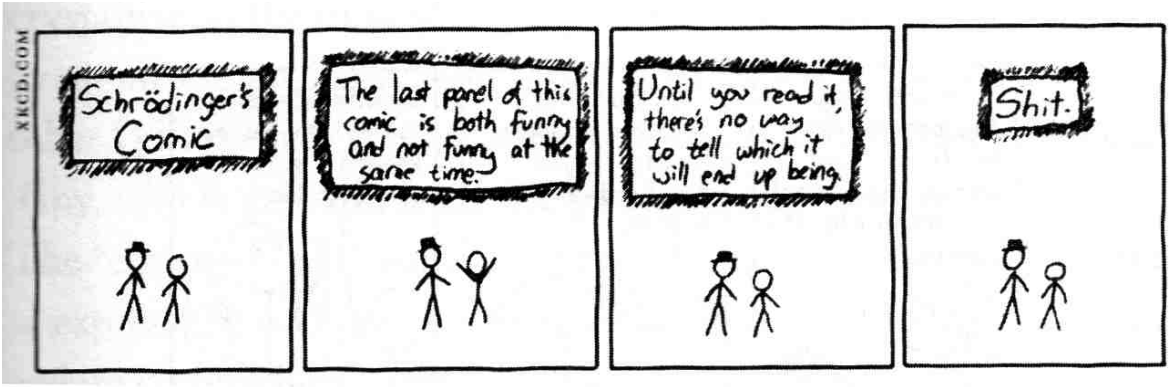


Abb. 12.66: Ein Cartoon zu Schrödingers Katze [**?**].

steht man unter dem Begriff Verschränkung? In der Quantenphysik werden die physikalischen Eigenschaften von mikroskopischer Systemen durch eine Wellenfunktion beschrieben. Diese Quantensysteme können Atome, Elektronen oder Photonen sein. Teilchensysteme können ebenfalls durch EINE Wellenfunktion beschrieben werden. Agieren die Teilchen des Quantensystems unabhängig von einander (nicht verschränkt), kann man Wellenfunktionen separieren. Verschränkte Teilchen können dagegen nur gemeinsam beschrieben werden, auch wenn der Abstand der Teilchen groß ist. Man kann das auch so ausdrücken Das Gesamtsystem ist mehr als die Summe der Einzelobjekte.

A *Schrodinger Cat* Superposition State of an Atom [?]: A *Schrödinger cat*-like state of matter was generated at the single atom level. A trapped ^{9}Be ion was laser-cooled to the zero-point energy and then prepared in a superposition of spatially separated coherent harmonic oscillator states. This state was created by application of a sequence of laser pulses, which entangles internal (electronic) and external (motional) states of the ion. The Schrodinger cat superposition was verified by detection of the quantum mechanical interference between the localized wave packets. This mesoscopic system may provide insight into the fuzzy boundary between the classical and quantum worlds by allowing controlled studies of quantum measurement and quantum decoherence.

Der Cartoon auf der Titelfolie zeigt wie Experimente in diesem Forschungsgebiet ablaufen. An einem bestimmten Ort werden in einen physikalischen Prozess zwei Teilchen erzeugt, die gegensätzliche Eigenschaften aufweisen, z.B. (↑) oder (↓). Misst man an dem einem Teilchen 1 (↑) ist die Richtung des Pfeil von Teilchen 2 festgelegt, nämlich (↓). Sobald die Messungen an Teilchen 1 erfolgt, ist die Information über die Pfeilrichtung in Teilchen 2 verfügbar und zwar mit Überlichtgeschwindigkeit. Ist das eine Verletzung der Einsteinschen Postulate und widerspricht das Experiment nicht der Unschärferelation?

Kopenhagener Deutung

Bohr was right, but he was not clear. Einstein was clear, but he was not right.

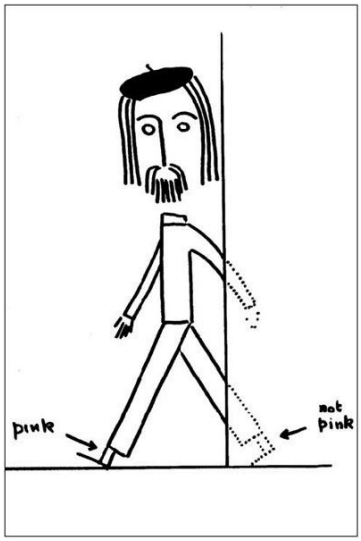


Abb. 12.67: The philosopher in the street, who has not suffered a course in quantum mechanics, is quite unimpressed by Einstein-Podolsky-Rosen correlations. He can point to many examples of similar correlations in everyday life. The case of Bertlmann's socks is often cited. Dr. Bertlmann likes to wear two socks of different colours. Which colour he will have on a given foot on a given day is quite unpredictable. But when you see (Fig. 1) that the first sock is pink you can be already sure that the second sock will not be pink. Observation of the first, and experience of Bertlmann, gives immediate information about the second. There is no accounting for tastes , but apart from that there is no mystery here. And is not the EPR business just the same [**?**]?

Alain Aspect

Der Ausgangspunkt der Debatte zum EPR-Paradoxon ist die so genannte Kopenhagener Deutung der Quantenphysik. Die Kopenhagener Interpretation ist eine Beschreibung der physikalischen Realität, die nicht durch Determinismus und Kontinuität geprägt ist. Entscheidend ist die Beziehung zwischen der Wellenfunktion, welche die Eigenschaften eines Teilchen mathematisch beschreibt und dem Messprozess, in dem die Eigenschaften des Teilchens experimentell bestimmt werden. In der Kopenhagener Interpretation befindet sich das Teilchen vor der Messung gleichzeitig an allen Orten, an denen die Wellenfunktion einen Wert ungleich NULL annimmt (Abb. 12.66). Erst im Moment der Messung kollabiert die Wellenfunktion[64] und das Teilchen lokalisiert an einem ganz bestimmten Ort. Man kann es auch so ausdrücken: Erst wenn eine Messung stattfindet,

[64] *Lexikon:* Erläuterung de Begriffs **Kollaps der Wellenfunktion** anhand eines Pferderennens: Wenn die Schnauze eines Rennpferds als Erstes die Ziellinie überquert, geht die Wahrscheinlichkeit, dass das Pferd das Rennen gewonnen hat, auf EINS. Die Wahrscheinlichkeiten für jedes der anderen Pferde und auch für das abgeschlagene letzte Rennpferd zu gewinnen, sinken schlagartig auf NULL. Dieser Vorgang vollzieht sich mit Überlichtgeschwindigkeit! Die Wahrscheinlichkeiten kollabieren.

fällt der Würfel, und das Teilchen nimmt entsprechend dieser Wahrscheinlichkeiten einen der Zustände ein. Die Quantenphysik drückt das so aus: Vor der Messung gibt es eine kohärente Überlagerung aller möglichen Zustände, nach der Messung wird ein bestimmter möglicher Zustand eingenommen.

Veranschaulichen wir dieses Phänomen am Beispiel des Youngschen Doppelspalt Experiments, dass wir mit einzelnen Photonen durchführen. Wie wertet man dieses Experiment mathematisch aus? Jedes Photon, das am Detektor ankommt, wird mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit P nachgewiesen. Dies entspricht dem Quadrat einer komplexen Wahrscheinlichkeitsamplitude A.

$$P = |A|^2 \tag{12.54}$$

Im Doppelspalt-Experiment eröffnen sich dem Photon zwei Wege und jeder der Wege hat eine bestimmte Amplitude A_i. Beruht der Nachweis des Photons auf solch einer Situation addieren sich die Wahrscheinlichkeitsamplituden in folgender Weise:

$$P = |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2\,|A_1| \cdot |A_2| \cdot \cos\delta \tag{12.55}$$

wobei δ die Phasendifferenz zwischen A_1 und A_2 ist. Der letzte Ausdruck verursacht die Interferenz im Doppelspalt-Experiment. Das Vorzeichen kann sowohl positiv als auch negativ ausfallen. Wichtiger noch die Wahrscheinlichkeit ist in diesem Fall nicht die Summe der Quadrate der Amplituden. Kennt man Weg des Photons wird der letzte Term NULL und die Interferenz verschwindet. Richard Feynman hat es so ausgedrückt:

Es ist unmöglich, eine Vorrichtung zu entwickeln, die den Durchgang des Elektrons durch einen der Spalte bestimmt, ohne dass das Interferenzmuster verschwindet [**?**].

Der Cartoon drückt das komplexe Wechselspiel zwischen physikalischem Ereignis und experimenteller Messung auf seine Weise aus. John Bell erkannte, dass man dieses paradoxe Phänomen experimentell überprüfen kann. Sollten Teilchen, auch wenn niemand nachschaut, einen klar definierten Zustand haben, sollte es weiterhin keine überlichtschnellen Signale geben, die das Ergebnis des Experiments verkünden. Diese Überlegungen führen zu den so genannten Bellschen Ungleichungen [**?**]. Bells Zeichnung in der Veröffentlichung *Bertlmanns socks and the nature of reality* (Abb. 12.67) illustriert das Prinzip der Verschränkung [**?**]: Bertlmann trägt stets eine rosa Socke und eine Socke einer anderen Farbe. Wird ein rosa Socken sichtbar, ist sofort klar, dass die andere Socke nicht rosa sein kann [**?**]. Analog gilt dies auch für verschränkte Teilchen.

Anwendungen 1

Ein Beispiel aus der Chemie

Zur Illustration der Existenz vieler möglicher Zustände bevor die Eigenschaft eines Systems experimentell bestimmt wird, betrachten wir das für die Chemie wichtige Benzolmolekül. Wahrscheinlich kennen Sie die Darstellung der Einzel- und Doppelbindun-

gen bei z.B. Kohlenstoffverbindungen durch eine Strukturformel, siehe Abb. 12.68. Beide Bindungstypen sind notwendig, um die Bindungsverhältnisse in Kohlenstoffringen wiederzugeben. Im Beispiel erkennt man eine Benzolstruktur, wobei zwei der Wasserstoffatome durch Brom (chemisches Zeichen Br) ersetzt wurden. So ergeben sich zwei Möglichkeiten (Struktur 1, Struktur 2) die beiden Br-Atome anzulagern. Man erwartet aufgrund der Struktur unterschiedliche Reaktionsraten. Wäre es möglich, die Isomere chemisch zu trennen, hätte man ein chemische Molekül und zwei Reaktionsraten.

Im Experiment beobachtet man, dass die beiden Strukturen ununterscheidbar und nicht separierbar sind. Er scheint so, als wenn sich das Molekül in einem Mischzustand vorliegt und sich erst im Moment der chemischen Reaktion entscheidet in welcher der beiden Strukturen es vorliegt. Die Wellenfunktion ergibt sich als Superposition von zwei Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2:

$$\Psi_{C_6H_6} = c_1 \cdot \Psi_1 + c_2 \cdot \Psi_2 \tag{12.56}$$

Die Wellenfunktion selbst hat keine physikalische Bedeutung, erst das Quadrat der Wellenfunktion.

$$\begin{aligned} |\Psi_{C_6H_6}|^2 &= |c_1 \cdot \Psi_1 + c_2 \cdot \Psi_2|^2 \\ |\Psi_{C_6H_6}|^2 &= |c_1 \cdot \Psi_1|^2 + |c_2 \cdot \Psi_2|^2 + \Psi_1 \cdot \Psi_2^* \end{aligned} \tag{12.57}$$

Dieses Verhalten ist ein Beispiel für die Kopenhagener Interpretation der Quantenphysik.

Quantum entanglement in photosynthetic light-harvesting complexes [?]:Previous experiments pointed to quantum mechanical effects as the key to the ability of green plants, through photosynthesis, to almost instantaneously transfer solar energy from molecules in light harvesting complexes to molecules in electrochemical reaction centers. Entanglement has been identified as a natural feature of these quantum effects.

Schrödingers Katze

Erwin Schrödinger, einer der Gründungsväter der Quantenphysik, hat diesen Schwebezustand in einem berühmten Gedankenexperiment Schrödingers Katze erstmals vorgestellt [**?**]:

Man kann auch ganz burleske Fälle konstruieren. Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muss): In einem Geigerschen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, so wenig, dass im Lauf einer Stunde vielleicht eines yon den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zahlrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Kölbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde lang sich selbst überlassen, so wird man sich sagen, dab die Katze noch lebt, wenn inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfa11 würde sie vergiftet haben. Die Ψ-Funktion des ganzen Systems

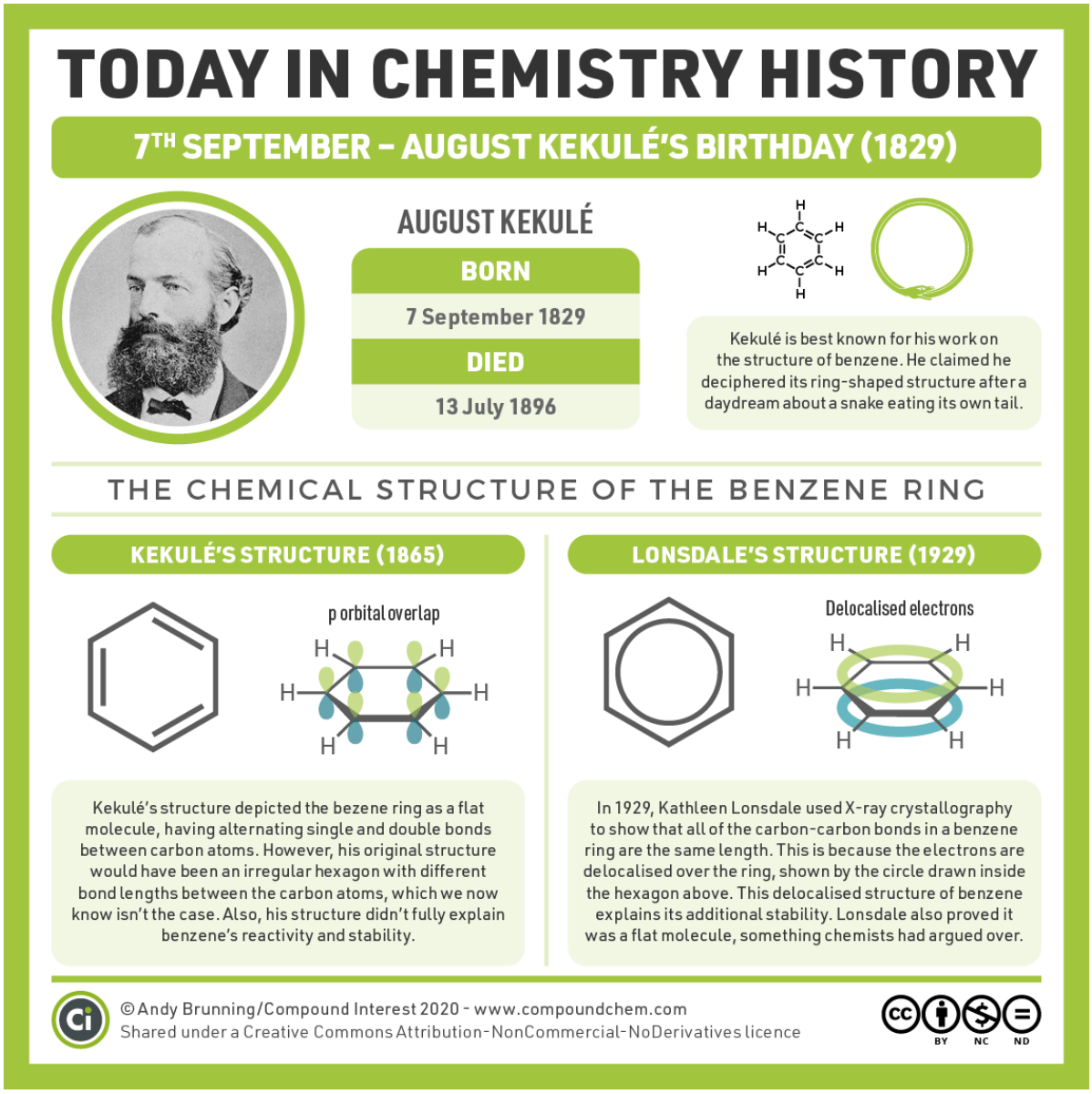


Abb. 12.68: Im Jahr 1865 stellte Friedrich August Kekule seine Benzoltheorie vor, in der die Struktur von Benzol erläutert wird. Danach besteht Benzol aus einem symmetrischen Ring von sechs Kohlenstoffatomen, mit insgesamt sechs Wasserstoffatomen. Die Kohlenstoffatome sind abwechselnd mit Einfach- und Doppelbindungen verknüpft.

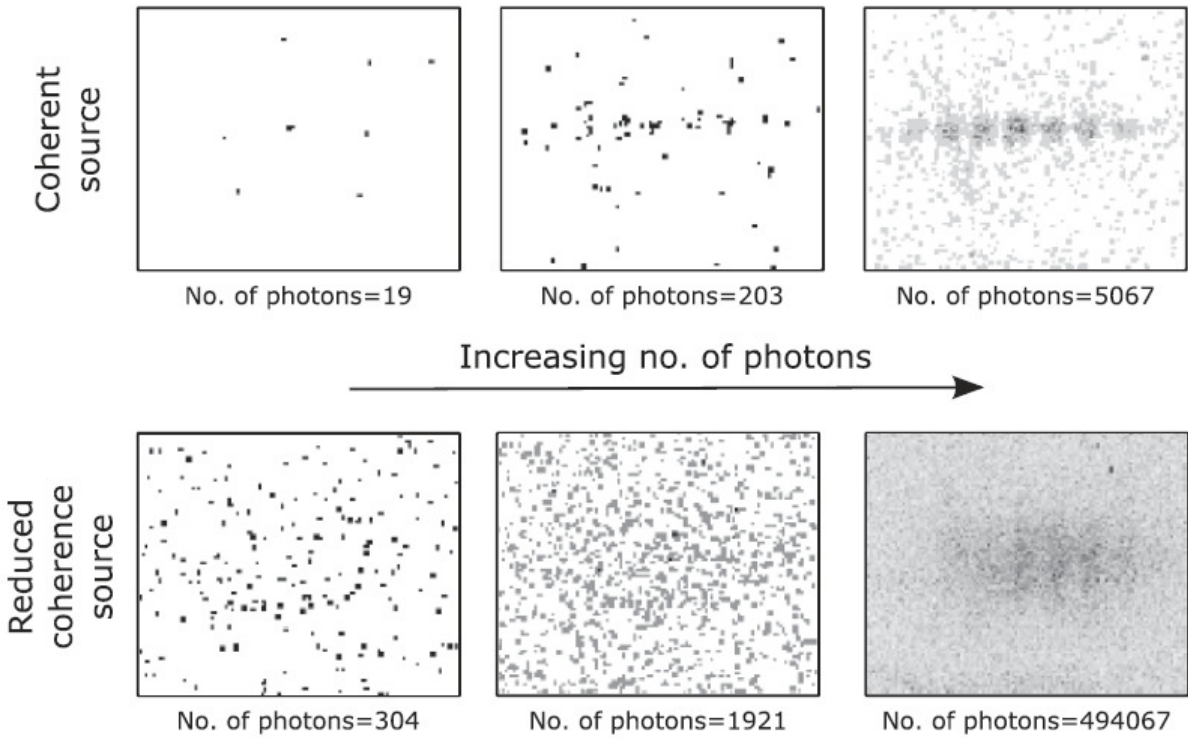


Abb. 12.69: Versuch zur Doppelspaltinterferenz, durchgeführt mit einzelnen Photonen [**?**].

würde das so zum Ausdruck bringen, das in ihr die lebende und die tote Katze (s. v. v.) zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind.

Soweit Erwin Schrödingers Überlegungen. Wie sich herausstellt, kann man solche verrückten Quantenzustände tatsächlich im Experiment realisieren.

Verschränkung

Einstein, Podolsky und Rosen hatten Zweifel an dieser Formulierung der Quantenphysik und dazu ein Experiment vorgeschlagen. Ein System aus zwei Teilchen wird in einem so genannten verschränkten Nur-Zwei-Möglichkeiten-Zustand (A oder B) präpariert. Beide Teilchen entfernen sich voneinander. In einer bestimmten Entfernung wird die Eigenschaft eines des Teilchens 1 experimentell mit (A) bestimmt. Im selben Moment ist unabhängig von der Entfernung klar, dass Teilchen 2 die Eigenschaft (B) hat. Wie kann das sein? Sowohl die Unschärferelation, als auch das Postulat der endlichen Lichtgeschwindigkeit sind verletzt!

Für die EPR-Experimente verwendet man Licht, da man optische Strahlung gut kontrollieren kann. Lange Zeit war es experimentell nicht möglich, verschränkte Teilchen verlässlich zu erzeugen. Als Ausweg bieten sich Messungen mit einzelnen Photonen an.

Kann man Experimente mit nur wenigen Photonen experimental überhaupt durchführen? JA! Schon früh wurde nachgewiesen, dass Interferenzphänomene auch mit Einzelphotonen nachweisbar sind. Schickt man Photonen in langen Zeitabständen durch einen Doppelspalt, beobachtet man eine Interferenzstruktur, die durch die Welleneigenschaften des Lichts hervorgerufen wird. Diese Messung wurde von Taylor 1909 it extrem schwachem Licht durchgeführt [**?**]. Im Experiment wurde das Interferenzbild erst nach einer Belichtungszeit des Films von drei Monaten sichtbar. Die Anzahl der Lichtquanten pro Sekunde war so gering, dass das Bild nur auf die Interferenz einzelner Photonen zurückgeführt werden konnte. Abb. 12.69 zeigt das Ergebnis einer modernen Realisation des Experiments von Taylor [**?**]. Wie ist es möglich, das die Photonen mit sich selbst interferieren? Das Problem taucht nicht auf, wenn man das Experiment aus dem Blickwinkel von elektromagnetischen Wellen betrachtet. Im Photonen-Bild ist diese Beobachtung aber ein Problem, da man erwartet, dass ein Lichtteilchen in einem engen Raumgebiet konzentriert ist. Die Antwort auf die Frage ergibt sich, wenn man das Doppelschlitz auf der Grundlage der Unschärferelation analysiert. Wieso taucht auf dem Detektorschirm ein Interferenzbild auf? Das Experiment wird doch mit einzelnen Photonen durchgeführt und das eine Photon muss doch durch einen der beiden Spalte fliegen. Scheinbar entscheidet sich das Photon erst am Ort des Detektors, welchen Weg es genommen hat. Der Versuchsaufbau liefert also ein Szenario mit zwei verschränkten Lichtwegen.

Observation of quantum entanglement with top quarks at the ATLAS detector [**?**]**:** Entanglement is a key feature of quantum mechanics, with applications in fields such as metrology, cryptography, quantum information and quantum computation. It has been observed in a wide variety of systems and length scales, ranging from the microscopic to the macroscopic. However, entanglement remains largely unexplored at the highest accessible energy scales. Here we report the highest-energy observation of entanglement, in top-antitop quark events produced at the Large Hadron Collider, using a proton–proton collision dataset with a centre-of-mass energy of 13 TeV and an integrated luminosity of 140 inverse femtobarns recorded with the ATLAS experiment. Spin entanglement is detected from the measurement of a single observable D, inferred from the angle between the charged leptons in their parent top- and antitop-quark rest frames. The observable is measured in a narrow interval around the top-antitop quark production threshold, at which the entanglement detection is expected to be significant... The observed result is more than five standard deviations from a scenario without entanglement and hence constitutes the first observation of entanglement in a pair of quarks and the highest-energy observation of entanglement so far.

Doppelpalt reloaded

Betrachten wir dazu das Youngsche Doppelspaltexperiment unter diesen Einzelphotonen-Bedingungen. Photonen wechselwirken einzeln mit dem Doppelspalt und werden durch einen dahinter liegenden Detektor nachgewiesen. Die Resultate werden registriert und das Gesamtergebnis angezeigt.

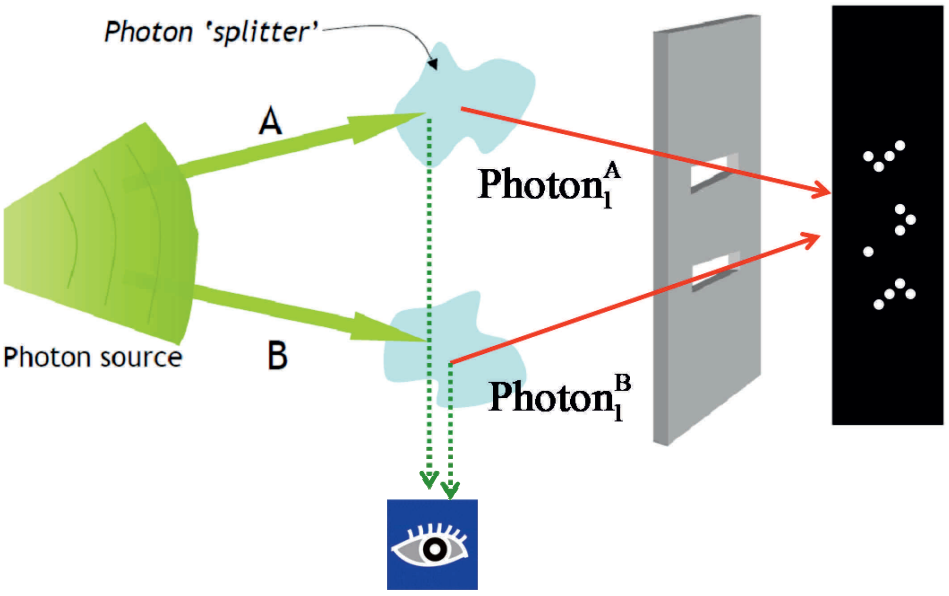


Abb. 12.70: Durchführung des Youngschen Doppelspaltexperiments mit einzelnen Photonen. Ein Photonenspalter streut Licht auf dem Weg von der Lichtquelle zum Doppelspalt und liefert damit Informationen über den Weg, den das Photon nimmt. Da der Detektor nicht unterscheiden kann, welche der Streugebiete das Licht ausgesendet hat, ist der tatsächliche Weg des Photons nicht aufzulösen. Die Interferenzstruktur bleibt erhalten.

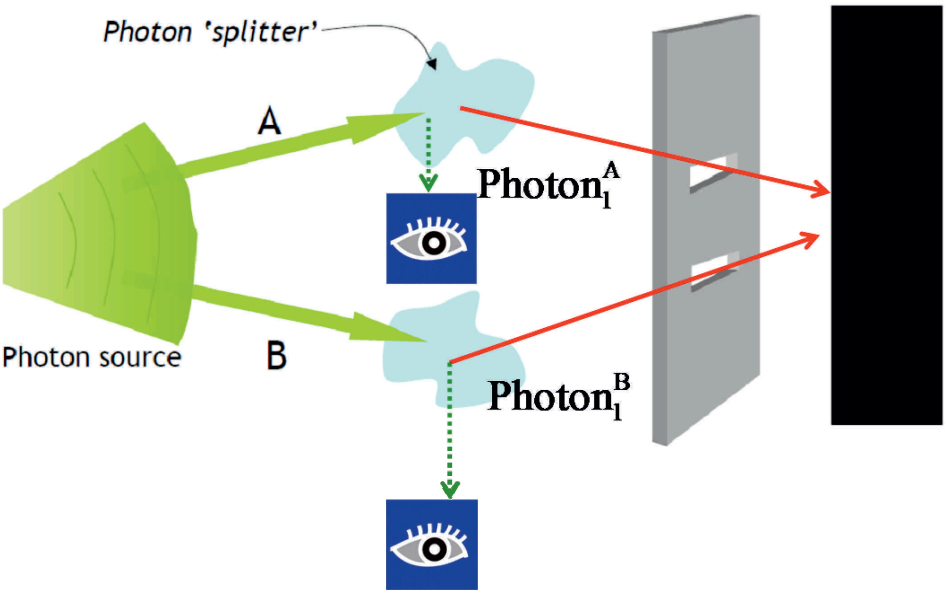


Abb. 12.71: Eine geringfügige Änderung im experimentellen Aufbau ändert alles. Statt eines Detektors verwenden wir je einen Detektor für jede Streuzone. Der Lichtweg kann jetzt nachverfolgt werden und das Interferenzbild verschwindet.

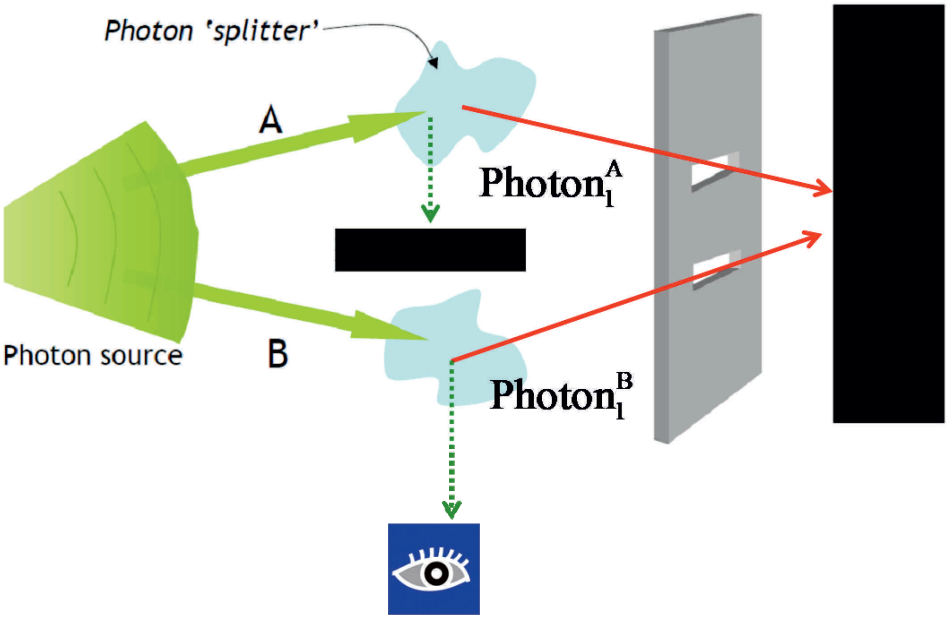


Abb. 12.72: Man könnte vermuten, dass man das Interferenzbild wiederherstellen kann, wenn man sich auf einen Detektor beschränkt und den anderen Lichtweg bloß blockt. Klappt nicht, da auch in diesem Fall der Lichtweg rekonstruiert werden kann.

Experimentelle Beobachtung:
Auf dem Schirm hinter dem Detektor beobachtet man ein Interferenzmuster.

Das unterstreicht den Wellencharakter, widerspricht aber dem Teilchencharakter von Licht, da das Photon scheinbar durch beide Spalte fliegt. Das war das Ergebnis des Experiments von Taylor [**?**]. Nun ändern wir die Versuchsbedingungen. Wir versuchen, den tatsächlichen Lichtweg nachzuvollziehen. Halbe Photonen gibt es nicht, also muss das Photon einen der Wege genommen haben. Wir prüfen nach!

Was würde passieren, wenn wir auf dem Weg zum Spalt die Lichtausbreitung beobachten? Dazu konstruiert man einen Sensor für Photonen (z.B. Lichtstreuung an einer Wolke), der uns zeigt, wo das Photon lang fliegt, siehe Abb 12.70. Dann wüssten wir, wo das Lichtteilchen sich befindet und man könnte vorhersagen, welchen der Spalte das Photon durchquert. Baut man das Experiment in dieser Weise auf, wissen wir zwar, dass das Photon vorbeifliegt, aber welcher der Spalte durchquert wird, lässt sich in diesem Experiment nicht bestimmen.

Experimentelle Beobachtung:
An der Interferenzstruktur ändert sich nichts.

Wir gestalten das Experiment geschickter und installierten zwei Detektoren, um die ein-

zelnen Lichtwege nachzuweisen, siehe Abb. 12.71.

Experimentelle Beobachtung:
Es passiert etwas Erstaunliches. Die Interferenzstruktur verschwindet.

Ähnliches passiert, wenn wir den Weg durch einen der Spalte nachverfolgen könnten, siehe Abb. 12.72.

Experimentelle Beobachtung:
Wieder verschwindet die Interferenzstruktur.

Was ist der Unterschied? In den beiden letzten Fällen, war es experimentell möglich, den Lichtweg genau zu verfolgen. Dieser Informationsvorsprung kostet. Die Interferenzstruktur erscheint nur, wenn wir nicht wissen, wie sich das Photon bewegt. Man hat es wieder mit einem Schwebezustand zu tun. In dem Moment, in dem eine Messung an dem System durchgeführt wird, zerfällt dieser Zustand und das Photon muss sich entscheiden durch welchen der Spalte es fliegt. Technisch eröffnet dieses quantenphysikalische Phänomen ungeahnte Möglichkeiten. Verschränkte Photonen erlauben eine abhörsichere Leitung. Denn sobald jemand zuhört, gehen Informationen, die in den verschränkten Photonen gespeichert sind, verloren. Daher ist dieser Forschungszweig von hoher Relevanz für die Datensicherheit. Dazu der Cartoon in Abb. 12.73. Bevor wir dazu Beispiele liefern, die technische Realisation.

`Link to Movie`

Quantenradierer

Beginnen wir mit einem scheinbar einfachen und auch einfach durchzuführenden Experiment [**?**], das auf Paul Dirac zurück geht [**?**], siehe Abb. 12.74. Ein Strahl unpolarisierten Lichts trifft auf einen Polarisator, der das Licht vertikal polarisiert. Nach dem Gesetz von Malus wird 50% des Licht transmittiert. Das Licht trifft dann auf einen Polarisator, der nur horizontal polarisiertes Licht hindurch lässt. Was erwarten Sie als Ergebnis des Experiments? Genau. Die Mattscheibe hinter der optischen Anordnung bleibt schwarz, denn vertikal polarisiertes Licht kann diesen Polarisator nicht passieren. Nun fügen wir ein zusätzliches optisches Element hinzu, einen Polarisator, der diagonal zu den anderen beiden Polarisatoren ausgerichtet ist. Stellt man ihn vor oder hinter die beiden anderen Polarisatoren, ändert sich am Ergebnis des Experiments nichts. Wenn der diagonale Polarisator jedoch zwischen den vertikalen und horizontalen Polarisator gehalten wird, tritt Licht aus dem letzten horizontalen Polarisator aus und die Mattscheibe wird hell. Das ist das Drei-Polarisator-Paradoxon. Das Experiment illustriert ein Phänomen der Quantenphysik. Das klassische Denken von entweder/oder lässt sich unter Umständen nicht aufrecht erhalten. Der diagonale Polarisator hinter dem horizontalen Polarisator, lässt er die eintreffenden Hälfte der Photonen durch. Diese transmittierten Photonen sind nicht horizontal, sondern diagonal polarisiert. Ihnen fehlt die Erinnerung, jemals horizontal

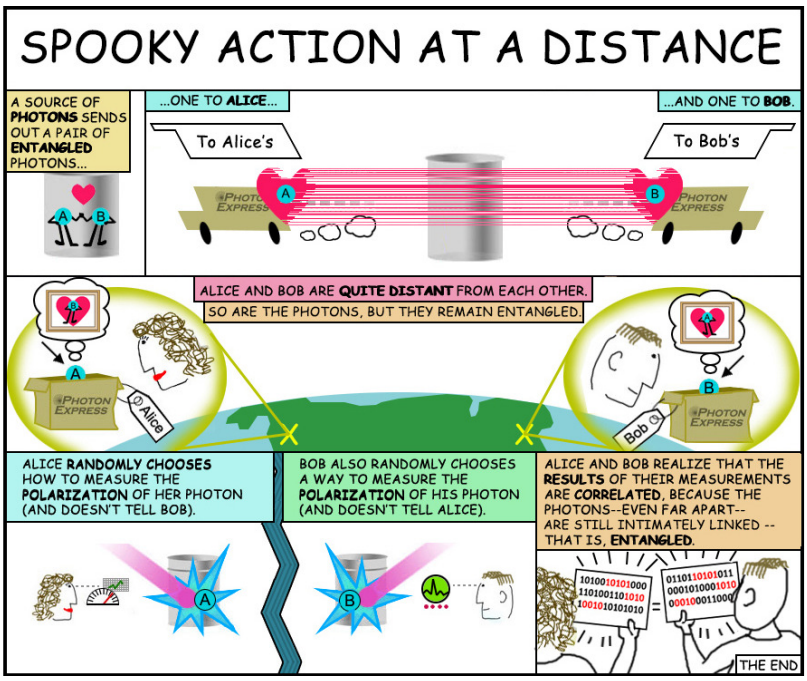


Abb. 12.73: Particles in Love: This cartoon helps to explain the idea of entangled particles, whereby Alice and Bob represent photon detectors.

polarisiert gewesen zu sein.Wenn diese diagonal polarisierten Photonen am vertikalen Polarisator ankommen, wird die Hälfte von ihnen durchgelassen und die Mattscheibe wird hell.

Um ein EPR-Experiment durchzuführen bedarf einer Quelle für verschränkte Objekte. Paarvernichtung, d.h. die Umwandlung ($E = mc^2$) von Materie (Elektron e^-, Positron e^+) in Energie (2 Photonen γ) liefert verschränkte Teilchen [**?**]. Dieser Prozess erfüllt

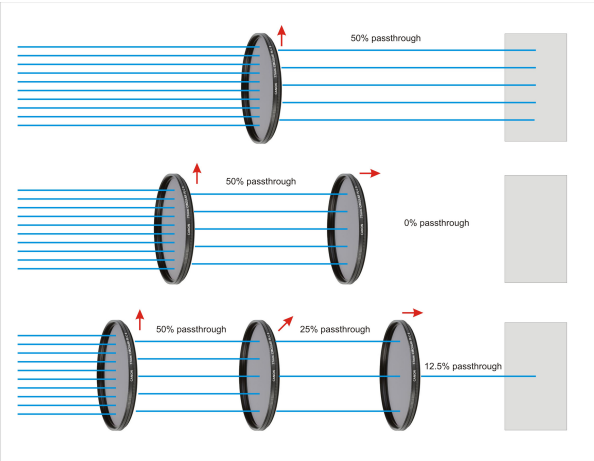


Abb. 12.74: Drei-Polarisator-Paradoxon.

die Voraussetzungen für Energie-, Impuls- und Ladungserhaltung.

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma \tag{12.58}$$

Anmerkung: Der hier beschriebene Prozess wird in der Positron-Emissionstomographie verwendet, um in der Medizin tomographische Aufnahmen zu erhalten (siehe Vorlesung *Bildgebende Verfahren*).

Mit heutiger Technik erzeugt man zwei verschränkte Photonen in einem optisch-parametrischen Prozess (*spontaneous parametric down-conversion*) [**?**]. Der Effekt wird in der Laserphysik verwendet, um durchstimmbares Licht zu erzeugen, siehe Kapitel *Laser*. In einem geeigneten nichtlinearen optischen Kristall entstehen bei der Wechselwirkung mit dem Lichtfeld ($\hbar\omega_{input}$) zwei Photonen genannt Signal: ($\hbar\omega_{signal}$) und Idler: ($\hbar\omega_{idler}$) für die Energie- und Impulserhaltung gelten:[65]

$$\hbar\omega_{input} = \hbar\omega_{signal} + \hbar\omega_{idler} \tag{12.60}$$

$$\hbar\vec{k}_{input} = \hbar\vec{k}_{signal} + \hbar\vec{k}_{idler} \tag{12.61}$$

Aus Konvention nennt man das Licht mit kürzerer Wellenlänge signal und das längerwelligere Licht idler. Durch den Einsatz solcher Kristalle lassen sich Lasersysteme vom optischen bis tief in den infraroten Spektralbereich kontinuierlich durchstimmen. Im den EPR-Experimenten wird der Kristall so eingestellt, dass Signal und Idler dieselbe Wellenlänge haben ($\lambda_{signal} = \lambda_{idler}$). Diese Konfiguration ergibt:

$$\hbar\omega_{signal} = \hbar\omega_{idler} = \hbar\omega_{input}/2 \tag{12.62}$$

Die erzeugten Photonen haben gleiche Wellenlänge, unterscheiden sich aber in ihrer Polarisation. Es ist bis zu einer nachprüfenden Messung ungewiss, welches Photon welche Polarisation aufweist: (Photon 1: vertikal polarisiert; Photon 2: horizontal polarisiert) oder (Photon 1: horizontal polarisiert; Photon 2: vertikal polarisiert). Das System befindet sich also -wie Schrödingers Katze- in einem Schwebezustand. Mit dieser Methode kann man moderne Experimente zur Verschränkung von Quantenzuständen durchführen [**? ?**]. Um den Effekt zu demonstrieren, bietet es sich der so genannte Quantenradierer an [**?**]. Der Versuch, siehe Abb. 12.75 demonstriert, wie man mit geringem Aufwand ein Experiment mit verschränkten Photonen realisieren kann [**? ?**].

`Link to Movie`

Hat die Messung der Polarisation eines der Photonen Auswirkungen auf den Polarisationszustand des anderen Photons? Durch eine Messung enthüllt sich der Polarisationszustand des betrachteten Photons. Stellt man fest, dass dieses Photon *horizontal polarisiert*

[65] Für einen effektiven Konversionsprozess ist eine Phasenanpassung notwendig. Diese tritt ein, wenn die nichtlineare Polarisation in Phase mit dem antreibenden Feld ist. Für die drei k-Vektoren: k_{input}, k_{signal}, k_{idler} muß gelten:

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}_{input} + \vec{k}_{signal} + \vec{k}_{idler} = 0 \tag{12.59}$$



Abb. 12.75: Der Quantenradierer eine Variante des Youngschen Doppelspaltexperiments, das die Phänomene Verschränkung und Komplementarität veranschaulicht [**?** **?** **?**]. Maßnahmen, die es erlauben, den Weg eines Photons durch die Schlitze aufzulösen, führen dazu, dass das Photon mehr mit sich selbst interferiert.

ist, ist im selben Moment klar, dass eine Messung von Photon 2 den Polarisationszustand *vertikal polarisiert* liefern wird. Diese Information benötigt kein lichtschnelles Medium als Träger der Information, sondern kann überlichtschnell erfolgen (EPR-Paradoxon). Man sagt, die Zustände sind verschränkt.

Anwendungen 2

Beispiele aus der Kryptologie

Der entscheidende Schritt, der das EPR-Paradoxon und die Bellschen Ungleichungen von der rein wissenschaftlichen Neugierde [**?**] in Richtung Anwendung öffnet, geht zurück auf eine Arbeit von Arthur Ekert[**?**], in der das Potenzial für die Datensicherheit aufgezeigt wurde. Die Erkenntnis, dass das kryptografische Protokoll sicher ist, auch wenn die zur Durchführung eingesetzten quantenphysikalischen Geräte nicht vertrauenswürdig sind, hat die Forschung auf diesem Gebiet rasant ansteigen lassen.

Experimental quantum teleportation [**?**]**:** Quantum teleportation - the transmission and reconstruction over arbitrary distances of the state of a quantum system - is demonstrated experimentally. During teleportation, an initial photon which carries the polarization that is to be transferred and one of a pair of entangled photons are subjec-

ted to a measurement such that the second photon of the entangled pair acquires the polarization of the initial photon. This latter photon can be arbitrarily far away from the initial one. Quantum teleportation will be a critical ingredient for quantum computation networks.

Experimente mit verschränkten Photonen lassen sich mittlerweile im großen Maßstab durchführen, zum Beispiel indem man ein Glasfaserkabel unterhalb der Donau durchführt [**?**].[66] Damit konnte man nachweisen, dass der Schwebezustand über makroskopische Distanzen erhalten bleibt. Chinesische Forscher haben Verschränkung inzwischen auch mit Hilfe von Satelliten erfolgreich getestet.

Mit einem Weltraumexperiment haben chinesische Forscher eine zentrale Aussage der Quantenphysik bestätigt. Das könnte der Anfang eines sicheren globalen Quanten-Kommunika-tionsnetzwerkes sein. Nicht erst seit den jüngsten Abhör- und Hacker-Skandalen besteht weltweit ein reges Interesse an absolut sicherer Datenübertragung. Tatsächlich ist es möglich, mit speziell präparierten Lichtteilchen Informationen vollkommen abhörsicher zu übermitteln. Dafür sorgen die Eigenheiten der Quantenmechanik: Würde ein Lauscher versuchen, diese Photonen zwecks Datendiebstahls abzufangen, so müsste er dafür an ihnen eine Messung durchführen. Eine solche Messung aber würde nach den Gesetzen der Quantenphysik unvermeidlich Spuren hinterlassen, die den Lauscher entlarvten [**?**].

Neue Züricher Zeitung, 15.6.2017

Entanglement-based secure quantum cryptography over 1,120 kilometres [?]: Quantum key distribution (QKD) is a theoretically secure way of sharing secret keys between remote users. It has been demonstrated in a laboratory over a coiled optical fibre up to 404 kilometres long. In the field, point-to-point QKD has been achieved from a satellite to a ground station up to 1,200 kilometres away. However, real-world QKD-based cryptography targets physically separated users on the Earth, for which the maximum distance has been about 100 kilometres. The use of trusted relays can extend these distances from across a typical metropolitan area to intercity and even intercontinental distances. However, relays pose security risks, which can be avoided by using entanglement-based QKD, which has inherent source-independent security. Long-distance entanglement distribution can be realized using quantum repeaters, but the related technology is still immature for practical implementations. The obvious alternative for extending the range of quantum communication without compromising its security is satellite-based QKD, but so far satellite-based entanglement distribution has not been efficient enough to support QKD. Here we demonstrate entanglement-based QKD between two ground stations separated by 1,120 kilometres at a finite secret-key rate of 0.12 bits per second, without the need for trusted relays. Entangled photon pairs were distributed via two bidirectional downlinks from the Micius satellite to two ground

[66] The Nobel Prize in Physics 2022 was awarded jointly to Alain Aspect, John F. Clauser and Anton Zeilinger *for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science*

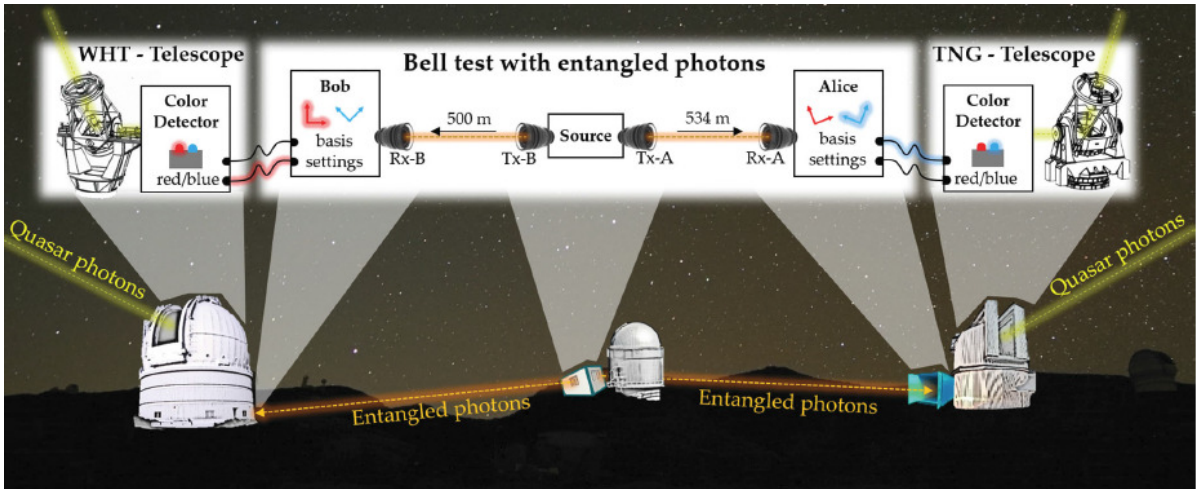


Abb. 12.76: Die Experimentierstationen für den kosmischen Bell Test. Alice empfängt mit dem *Telescopio Nazionale Galileo* (TNG) und Bob mit dem *William Herschel Teleskop* (WHT) kosmische Photonen. Polarisationsverschränkte Photonen werden von der Quelle zu Alice und Bob gesendet. Die Entfernungen von Quelle zu Bob und Alice waren 500 bzw. 534 m [**?**].

observatories in Delingha and Nanshan in China. The development of a high-efficiency telescope and follow-up optics crucially improved the link efficiency. The generated keys are secure for realistic devices, because our ground receivers were carefully designed to guarantee fair sampling and immunity to all known side channels. Our method not only increases the secure distance on the ground tenfold but also increases the practical security of QKD to an unprecedented level.

`Link to Lecture Video`

Hinweis: Wer Interesse hat, kann sich diesen Film anschauen. Hier erfährt man, ob es in der Quantenphysik versteckte Variablen gibt. Zwei letzte aktuelle Beispiele verdeutlichen, wie aktuell und breit das Forschungsgebiet aufgestellt ist:

Cosmic Bell Test Using Random Measurement Settings from High-Redshift Quasars [**?**]**:** In this Letter, we present a cosmic Bell experiment with polarization-entangled photons (Abb. 12.76), in which measurement settings were determined based on real-time measurements of the wavelength of photons from high-redshift quasars, whose light was emitted billions of years ago; the experiment simultaneously ensures locality. Assuming fair sampling for all detected photons and that the wavelength of the quasar photons had not been selectively altered or previewed between emission and detection, we observe statistically significant violation of Bell's inequality by 9.3 standard deviations, corresponding to an estimated p value of $\lesssim 7.47.4 \cdot 10^{-21}$. This experiment pushes back to at least ~ 7.8 Gyr ago the most recent time by which any local-realist influences could have exploited the *freedom-of-choice* loophole to engineer the observed

Bell violation, excluding any such mechanism from 96% of the space-time volume of the past light cone of our experiment, extending from the big bang to today.

Challenging local realism with human choices [**?**]**:** A Bell test is a randomized trial that compares experimental observations against the philosophical worldview of local realism, in which the properties of the physical world are independent of our observation of them and no signal travels faster than light. A Bell test requires spatially distributed entanglement, fast and high-efficiency detection and unpredictable measurement settings. Although technology can satisfy the first two of these requirements, the use of physical devices to choose settings in a Bell test involves making assumptions about the physics that one aims to test. Bell himself noted this weakness in using physical setting choices and argued that human 'free will' could be used rigorously to ensure unpredictability in Bell tests. Here we report a set of local-realism tests using human choices, which avoids assumptions about predictability in physics. We recruited about 100 000 human participants to play an online video game that incentivizes fast, sustained input of unpredictable selections and illustrates Bell-test methodology. The participants generated 97 347 490 binary choices, which were directed via a scalable web platform to 12 laboratories on five continents, where 13 experiments tested local realism using photons, single atoms, atomic ensembles and superconducting devices. Over a 12-hour period on 30 November 2016, participants worldwide provided a sustained data flow of over 1 000 bits per second to the experiments, which used different human-generated data to choose each measurement setting. The observed correlations strongly contradict local realism and other realistic positions in bipartite and tripartite scenarios. Project outcomes include closing the 'freedom-of-choice loophole' (the possibility that the setting choices are influenced by 'hidden variables' to correlate with the particle properties), the utilization of video-game methods for rapid collection of human-generated randomness, and the use of networking techniques for global participation in experimental science.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Erläutern Sie das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon!
2. Was versteht man unter Verschränkung?
3. Wie erfährt das Photon davon, dass es im Doppelspaltexperiment einen zweiten Schlitz gibt?
4. Zeichnen Sie die Kekule-Struktur des Benzol-Moleküls!
5. Gibt es für das Gedankenexperiment *Schrödingers Katze* eine technische Anwendung?
6. Was versteht man in der Nichtlinearen Optik und *Signal* und *Idler*?
7. Welche Bedeutung hat das Phänomen der Verschränkung für die Quantenkrypotologie?

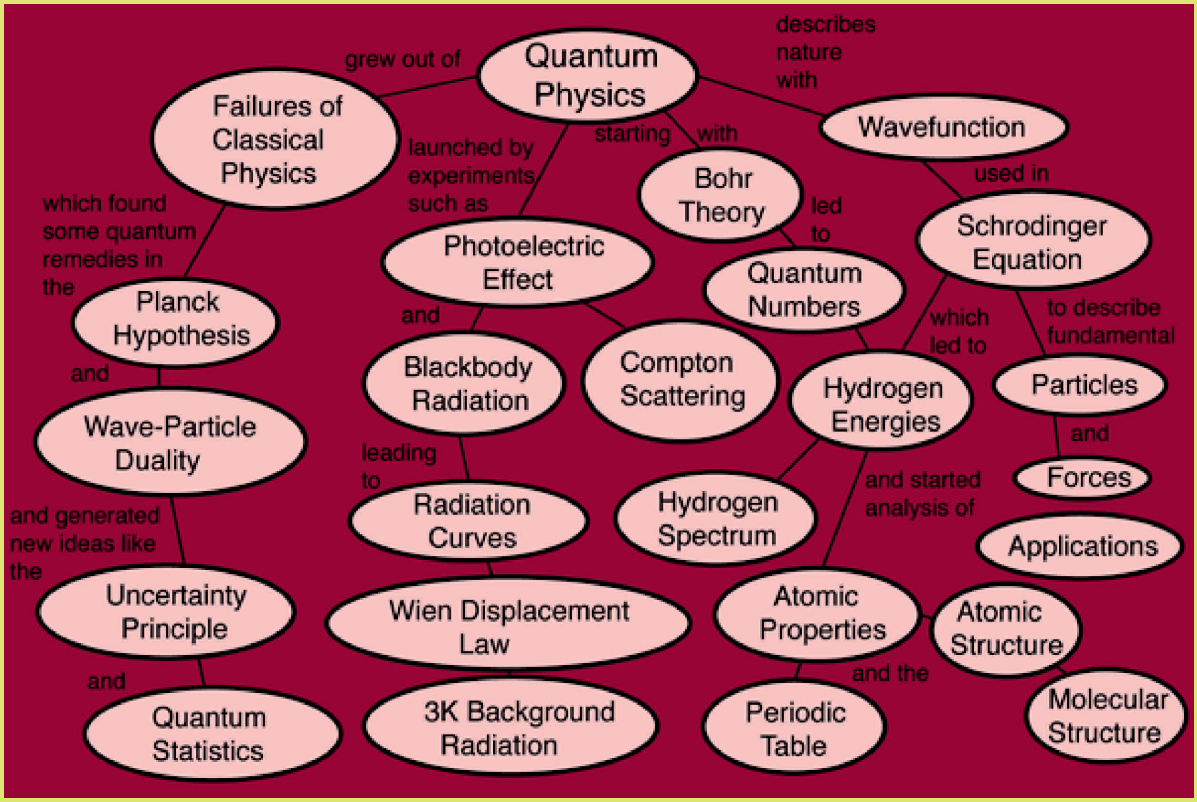


Abb. 12.77: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

- Reflexion und Transmission eines Wellenpakets an einer Potenzialstufe
- Wellenfunktion in endlich hohem Potenzialtopf
- Tunneln durch eine rechteckig geformte Barriere (Gl. 12.42):
  - Wellenfunktion

$$\Psi(x) = A_L \cdot \exp(-x/\delta_t)$$

  - Eindringtiefe (Gl. 12.43):

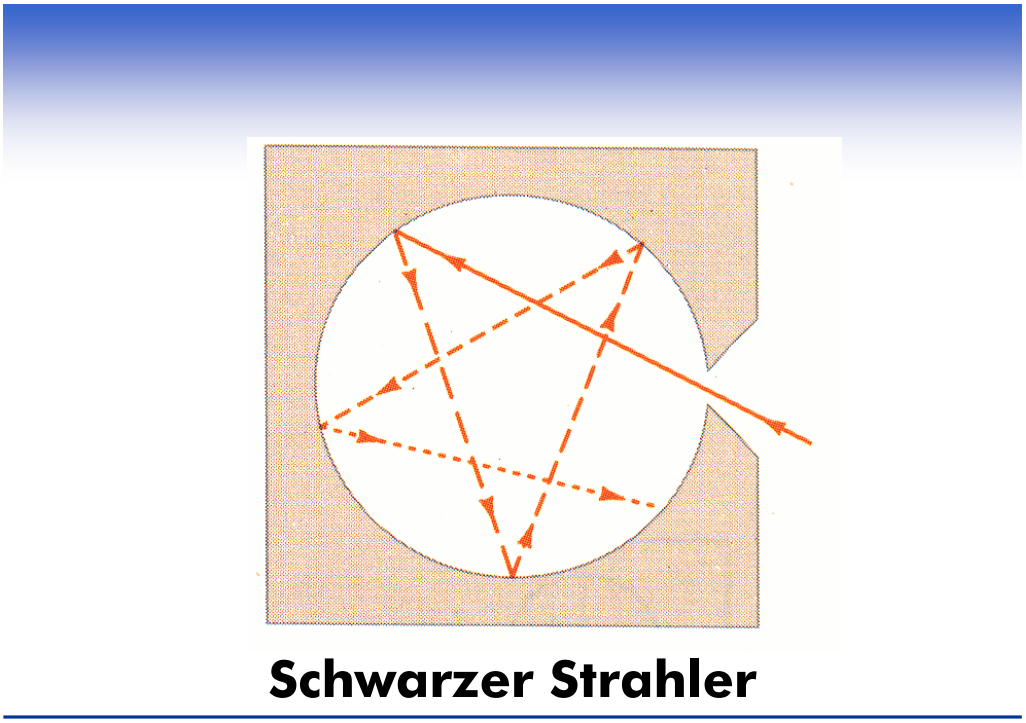
$$\delta_t = \frac{\hbar}{\sqrt{2\,m \cdot (U_0 - E)}}$$

  - Tunnelwahrscheinlichkeit (Gl. 12.45)

$$P_{tunnel} = \exp\left(-\frac{2\,d}{\delta_t}\right)$$

- α-Zerfall und Geiger–Nuttall Regel
- Bedeutung von Tunnelprozessen für Naturwissenschaft und Technik
- Funktionsweise eines Rastertunnel-Mikroskops

13 Schwarzer Strahler



Ladies and Gentlemen.
The Royal Academy of Sciences has decided to award the Nobel Prize for Physics, for the year 1918, to Geheimrat Dr. Max Planck, professor at Berlin University, for his work on the establishment and development of the theory of elementary quanta. From the time that Kirchhoff enunciated the principle *that the intensity of radiation from a black body is dependent only upon the wavelength of the radiation and the temperature of the radiating body, a relationship worth while investigation,* the theoretical treatment of the radiation problem has provided a rich, fertile source of fresh discoveries. It is only necessary here to recall the fertile Doppler principle, and further, the transformation of our - concept of the nature of light as seen now in the electromagnetic theory of light formulated by that great man, Maxwell, the deduction of Stefan's Law by Boltzmann, and Wien's Law of Radiation. Since it was clear, however, that this did not correspond exactly with the reality, but was rather, like a radiation law propounded by Lord Rayleigh,

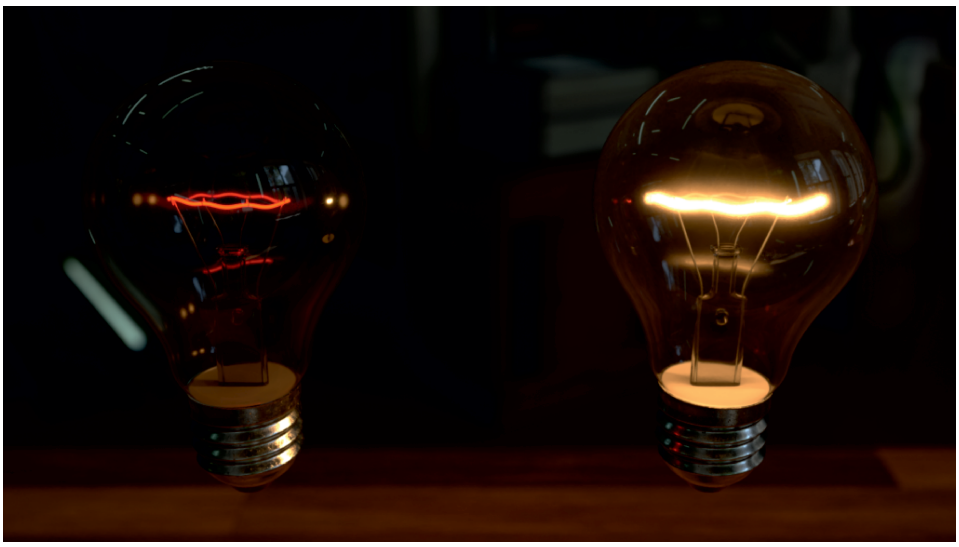


Abb. 13.1: Emission einer Glühlampe bei Änderung der Temperatur des Wolframfadens.

only a special case of the general radiation law, Planck sought for, and in 1900 found, a mathematical formula for the latter, which he derived theoretically later on. The formula contained two constants; one, as was demonstrated, gave the number of molecules in a gram molecule of matter. Planck was also the first to succeed in getting, by means of the said relation, a highly accurate value for the number in question, the so-called Avogadro constant. The other constant, the so-called Planck constant, proved, as it turned out, to be of still greater significance, perhaps, than the first. The product $h\nu$, where ν is the frequency of vibration of a radiation, is actually the smallest amount of heat which can be radiated at the vibration frequency ν. This theoretical conclusion stands in very sharp opposition to our earlier concept of the radiation phenomenon. Experience had to provide powerful confirmation, therefore, before Planck's radiation theory could be accepted. In the meantime this theory has had unheard-of success...

Nobel Prize in Physics 1918 Presentation Speech by A.G. Ekstrand
President of the Royal Swedish Academy of Sciences

[1]Bei Temperaturen oberhalb des absoluten Nullpunkts emittiert jeder Körper elektromagnetische Strahlung, die als Wärmestrahlung bezeichnet wird. Abb. 13.1 zeigt als Beispiel die Emission des Wolframfadens einer Glühbirne bei unterschiedlicher Temperatur. Für einen beliebigen Körper lässt sich die emittierte Strahlungsleistung in ihrer Abhängigkeit von Richtung, Wellenlänge und Temperatur nur bei Kenntnis der Materialeigenschaften angeben. (Abb. 13.2). Ein Hohlraumstrahler emittiert bei Raumtemperatur (300 K) Strahlung in Höhe von 460 W/m^2. Bei Bedingungen, die der Sonnenoberfläche entsprechen (5800 K) steigt der Wert auf 64 MW/m^2.[2] Die Intensität und die

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

[2]Die Strahlung, die die Erde erreicht, stammt aus einer nur 500 km dicken Schicht, in der die Temperatur von 6600K auf 4300K absinkt.

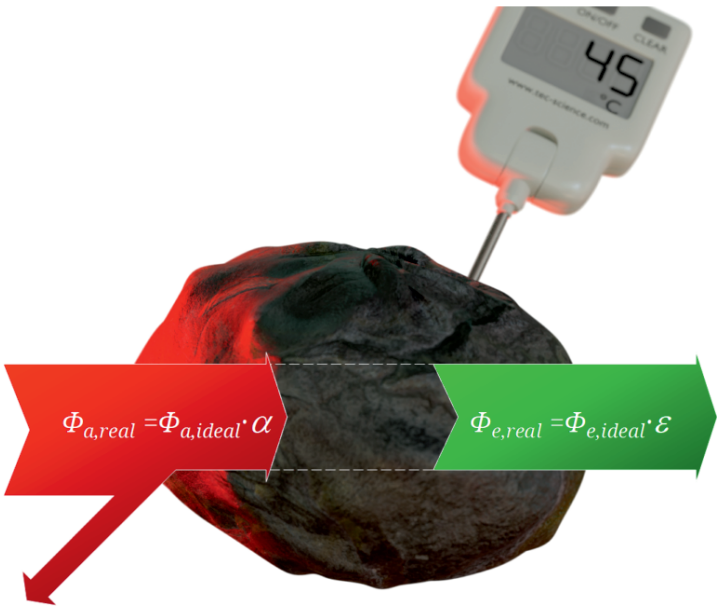


Abb. 13.2: Ein Schwarzer Körper kann einfallende Strahlung absorbieren oder reflektieren. Gleichzeitig emittiert er elektromagnetische Strahlung aufgrund seiner Temperatur.

spektrale Verteilung der Schwarzkörperstrahlung sind dabei unabhängig von der Beschaffenheit des Körpers und der Oberfläche. Abb. 13.3 zeigt dies am Beispiel eines Würfels, der innen weiß ausgekleidet ist. Der Körper emittiert Licht aufgrund seiner Umgebungstemperatur. Schaut man auf das Loch erscheint die Öffnung dem Auge deshalb schwarz.

A black body absorber from vertically aligned single-walled carbon nanotubes [?]**:** Among all known materials, we found that a forest of vertically aligned single-walled carbon nanotubes behaves most similarly to a black body, a theoretical material that absorbs all incident light. A requirement for an object to behave as a black body is to perfectly absorb light of all wavelengths. This important feature has not been observed for real materials because materials intrinsically have specific absorption bands because of their structure and composition. We found a material that can absorb light almost perfectly across a very wide spectral range (0.2-200 μm). We attribute this black body behavior to stem from the sparseness and imperfect alignment of the vertical single-walled carbon nanotubes

Aufgrund des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik[3] kam Kirchhoff zu der Erkenntnis, dass im thermischen Gleichgewicht für dieselbe Temperatur und Wellenlänge der Absorptionsgrad gleich dem Emissionsgrad[4] sein muss. Kurz gesagt:

[3] *Lexikon:* **2. Hauptsatz der Thermodynamik:** Wärme kann nicht von selbst von einem Körper niedriger Temperatur auf einen Körper höherer Temperatur übergehen.

[4] *Lexikon:* Der **Emissionsgrad** ε_{th} (Emissivität) ist ein Maß dafür, wie stark ein Material oder ein Körper Wärme mit seiner Umgebung austauscht. Der größtmögliche Wert des Emissionsgrads ist

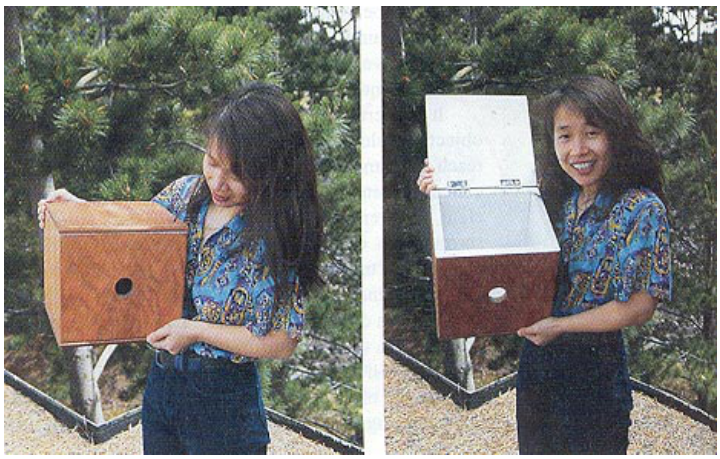


Abb. 13.3: Blick in einen Hohlraumstrahler. Aufgrund seiner Umgebungstemperatur im Innern erscheint das Loch schwarz, obwohl die inneren Wände weiß ausgekleidet sind.

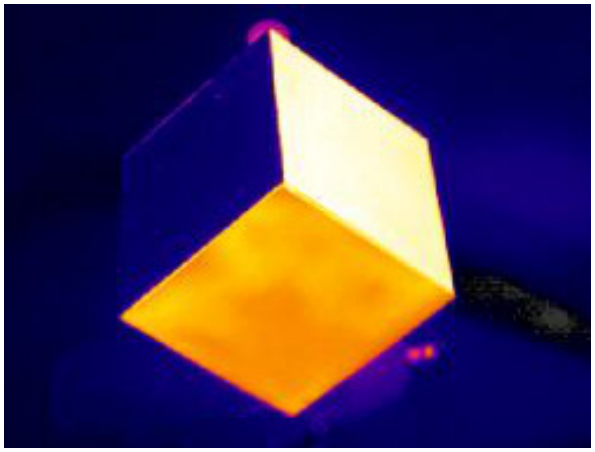


Abb. 13.4: Ein Leslie-Würfel dient zur Messung der Wärmeabstrahlung unterschiedlicher Oberflächen (matt, reflektierend, poliert, aufgeraut,...).

Ein Körper, der gut absorbiert, strahlt auch gut!

Kein anderer Körper kann bei gleicher Temperatur mehr Wärmestrahlung aussenden als ein Schwarzer Strahler.[5] Bei der Absorption und Emission elektromagnetischer Strahlung

EINS. (Schwarzer Körper). Das andere Extrem wäre Körper mit einem Emissionsgrad von NULL. Dieser Körper würde weder emittieren noch absorbieren und damit keine Wärme über Strahlung mit seiner Umgebung austauschen. Reale Materialien haben einen Emissionsgrad zwischen NULL und EINS. Dies bedeutet, dass sie weniger Wärmestrahlung abgeben als ein schwarzer Körper und Strahlung sowohl reflektieren, streuen als auch transmittieren. Der Emissionsgrad der Materialien ist keine konstante Zahl, sondern hängt von der Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung ab.

[5] *Lexikon:* Ein **Schwarzer Strahler** (**Schwarzer Körper**, **Hohlraumstrahler**)[6] ist eine idealisierte thermische Strahlungsquelle, beispielsweise ein hohler Würfel. Ein idealer schwarzer Körper hat im thermischen Gleichgewicht folgende Eigenschaften:

- Bei allen Wellenlängen emittiert ein Schwarzer Strahler genauso viel Strahlung wie jeder



Abb. 13.5: Die Hefnerkerze ist eine Flammenlampe, die als Standardflamme in der Photometrie als Maß für die Leuchtkraft (Einheit Hefner) verwendet wurde. Hierzulande wird die Hefnerkerze als Einheit für die Intensität von Petroleumdrucklampen verwendet.

realer Körper spielt allerdings die Oberflächenbeschaffenheit eine wichtige Rolle. Der spektrale Emissionsgrad ε_{th} charakterisiert dieses Verhalten und beschreibt die Fähigkeit eines Körpers, Wärmestrahlung zu emittieren. Abb. 13.4 zeigt den so genannten Leslie-Würfel.[7] Der Körper ist hohl und hat unterschiedliche Seitenflächen. Für das Experiment wird der Würfel wird mit heißem Wasser gefüllt und mit Hilfe einer Wärmebildkamera betrachtet. Mit dem Leslie-Würfel kann demonstriert werden, dass bei gleicher Temperatur ein dunkler Körper mehr Strahlungsenergie abgibt als heller Körper. Dasselbe Ergebnis ergibt sich für raue und glatte Oberflächen. Tab. 13.1 gibt beispielhaft Werte für Aluminium an.

In welcher Weise ist ein Schwarzer Strahler relevant für die Technik?

Die wissenschaftlich-technische Motivation der Industrie zu Beginn des 20ten Jahrhunderts war eine möglichst genaue Temperatur- und Strahlungsmessung, um eine absolute Temperaturskala zur Verfügung zu haben. Man muss diese Anforderungen im Zusammenhang mit der Einführung der wirtschaftlicheren, elektrischen Lampen sehen, die nach und nach die Gaslampen ablösten. Weiter sollte nach Willen der Deutschen Reichsregierung ein neuer Kalibrierstandard eingeführt werden. Ausführendes Organ war díe

andere Körper bei gleicher Temperatur.

- Ein Schwarzer Körper emittiert seine Strahlung isotrop. Das bedeutet, dass die Abstrahlung der Energie nicht richtungsabhängig ist.

[7] *Lexikon:* Der **Leslie-Würfel** ist ein hohler Würfel aus Metall mit vier unterschiedlichen Oberflächen (poliert, aufgeraut, mit schwarzer bzw. weißer Farbe lackiert). Er wird mit heißem Wasser gefüllt, um alle Würfelseiten auf dieselbe Temperatur zu bringen.

	Temperatur	Emissionskoeffizient ε_{th}
blank gewalzt	170 °C	0.04
nicht oxidiert	25 °C	0.02
nicht oxidiert	100 °C	0.03
stark oxidiert	93 °C	0.20
hochpoliert	100 °C	0.09

Tab. 13.1: Abhängigkeit des Emissionskoeffizienten von der Oberflächenbeschaffenheit am Beispiel von Aluminium.

Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) [**?**], die 1887 als weltweit erstes Institut für Meteorologie gegründet wurde, mit Max Planck als einer der Forscher. Die in Abb. 13.5 gezeigte Hefnerkerze war Grundlage des damalig genutzten Standardverfahrens zur Bestimmung der Leuchtkraft.[8] Vorgabe war eine 83 g schwere Wachskerze, auf der eine 42 mm hohe Flamme brennt.[9] [10]

Für kommerzielle Anwendungen versucht man sich einem idealen Schwarzen Körper so weit wie möglich anzunähern. Bei der Wahl der Quellen für Schwarzkörperstrahlung muss man den Temperaturbereich, die geplante Anwendung und die Umgebung in der die Messung erfolgt berücksichtigen. Wichtige Faktoren sind die

- Temperaturen, die abgetastet werden soll
- Emissivität des Strahlers
- Größe der emittierenden Fläche
- Aufwärm- und Abkühlzeit
- geforderte Regelungsstabilität

Die theoretische Beschreibung der Schwarzkörperstrahlung im Rahmen einer klassischen Theorie führt im UV-Bereich[11] zur so genannten Ultraviolett-Katastrophe. Im Rahmen der Quantenphysik wird die vom Schwarzen Körper ausgesandte elektromagnetische Strahlung durch das Plancksche Strahlungsgesetz dagegen richtig beschrieben.

In einem Brief vom 7. Oktober 1931 an den amerikanischen Experimentalphysiker Robert Williams Woodan bemerkte Planck:

[8] *Lexikon:* Die Leuchtkraft oder Luminosität (Einheit: Leistung, also Energie pro Zeit) ist in der Astronomie eine wichtige Zustandsgröße. Sie wird verwendet, um Sterne, aber auch Galaxien zu charakterisieren.

[9] Lesen Sie dazu auch die Geschichte über den wahrscheinlich unbekanntesten Physik-Nobelpreisträger: Nils Gustav Dalén[**?**].

[10] The Nobel Prize in Physics 1912 was awarded to Nils Gustaf Dalen *for his invention of automatic regulators for use in conjunction with gas accumulators for illuminating lighthouses and buoys*

[11] UV: ultraviolett

Eine theoretische Deutung musste um jeden Preis gefunden werden, und wäre er noch so hoch.

Max Planck

Im Rahmen dieses Kapitels wird geklärt, dass man nur unter Berücksichtigung der Körnigkeit des Lichts die Form des Schwarzkörperspektrum richtig wiedergeben kann. Die aus der Thermodynamik bekannten Strahlungsgesetze von Wien und Stefan-Boltzmann lassen sich aus dem Strahlungsgesetz herleiten. Es lohnt sich, zunächst die Rolle des Schwarzkörperspektrums näher zu beleuchten, da es wichtige Informationen über Sterne und das Universum liefert.

Und wie sah Max Planck seine Erkenntnis?

Eine glücklich erratene Interpolationsformel

Max Planck


Inhalt
Schwarzer Strahler
- Wärmestrahlung in der klassischen Thermodynamik
- Welche Temperatur hat das Universum?
- Ultraviolettkatastrophe: unerklärlich im Rahmen der klassischen Physik
- Plancksches Strahlungsgesetz erklärt das Spektrum des schwarzen Strahlers
- Einsteinsches Modell erklärt Wärmekapazitäten bei tiefen Temperaturen
Kapitel 1
Wärmestrahlung und Schwarzer Körper
thermo
chemistry
technology
daily life
Kapitel 2
Schwarzkörperstrahlung der Sterne und des Universums
thermo
chemistry
astro
Kapitel 3
Ultraviolettkatastrophe und Plancksche Strahlungsformel
thermo
optics
technology
Kapitel 4
Wärmekapazität
thermo
chemistry

13.1 Wärmestrahlung

Thema Schwarzer Strahler

Wärmestrahlung



Bemerkenswert erschien, dass ich Wärme empfand, aber wenig Licht hatte, wenn ich einige davon benutzte. Andere dagegen gaben mit viel Licht, aber kaum Wärmeempfindung.

Friedrich Wilhelm Herschel, 1794

Thermische Energie kann auf unterschiedlichste Weise transportiert werden. In der Vorlesung zum Thema *Wärme* lernt man, dass diese Energieform auf drei unterschiedliche Weisen transportiert wird.

- Wärmeleitung
- Konvektion
- Strahlung

Im späten 18. Jahrhundert erfand der englische Unternehmer Josiah Wedgwood ein Verfahren, um die herrschenden Temperatur in Porzellanöfen zu bestimmen. Grundlage war die Beobachtung, dass unterschiedliche Materialien bei gleicher Temperatur in der gleichen Farbe leuchten. *Eine wichtige Errungenschaft, sowohl für den Philosophen als auch für den praktischen Künstler.* Wedgwoods thermische Sonde und Newtons Prisma

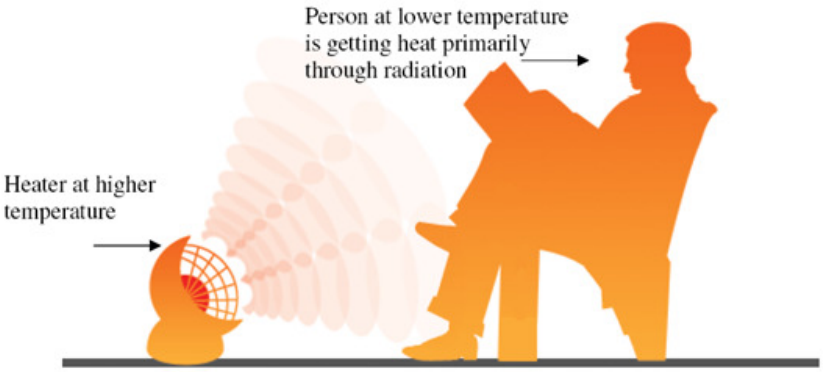


Abb. 13.6: Wärmetransport durch Strahlung. Der Strahlungstransport ist nicht auf ein Medium angewiesen und ist insbesondere im Vakuum sogar am effektivsten.



Abb. 13.7: Gasheizstrahler als Beispiel für eine thermische Strahlungsquelle.

ermöglichte einen neuen Zugang auf die physikalische Größe Temperatur und den Zusammenhang zum Phänomen Licht.

Im Zusammenhang mit dem aktuellen Thema interessiert uns der Aspekt elektromagnetischer Strahlung. Energie wird berührungslos ausgetauscht, siehe Abb. 13.6. Unsere Alltagserfahrung spricht dagegen, dass es sich bei Licht und Wärme um ein und dasselbe physikalische Phänomen handelt. Das liegt zum Teil daran, dass wir die Phänomene mit unterschiedlichen Sinnesorganen erfassen und andererseits daran, dass beide Strahlungsarten oft nicht gemeinsam auftreten.

Kennen Sie Beispiele?

It occurred to me, that the prismatic rays might have the power of heating bodies very unequally distributed among them.

William Herschel (1800)



Abb. 13.8: Die im Menschen gespeicherte thermische Energie wird in Form von Infrarotstrahlung abgegeben. Manche Stoffe, wie eine Plasiktüte, sind in diesem Spektralbereich transparent und absorbieren dagegen sichtbares Licht. Bei anderen Materialien wie Brillengläsern ist es genau andersherum [**?**].

Herschel war der Erste der vermutete, dass Wärme unsichtbares Licht sei.[12] Körper strahlen aufgrund ihrer Temperatur in einer ganz charakteristischen Weise. Beispielsweise erzeugt eine Heizstrahler im Auge den Eindruck eines rot leuchtenden Objekts (Abb. 13.7). Je nach Wellenlängenbereich wechselwirkt elektromagnetische Strahlung unterschiedlich mit Materie. Für das Auge unsichtbare Wärmestrahlung durchdringt beispielsweise optisch nicht transparente Materialien. Abb. 13.8 demonstriert dies am Beispiel einer Plastiktüte. Der Farbeindruck eines heißen Körpers kann genutzt werden, um technische Prozesse zu überwachen. In Brennöfen bildet der Ofenraum einen schwarzen Strahler. Mit Hilfe von Pyrometern[13] können die im Ofen herrschenden Temperaturen genau bestimmt werden. In einem Experiment wird ein Buchstabe in einen Graphitblock eingefräst und der Block erwärmt. Bei geringer Temperaturen absorbiert der Körper die gesamte einfallende Strahlung und der Buchstabe erscheint schwarz (Abb. 13.9) links. Erhöht man die Temperatur im Vergleich zur Umgebung wird der Körper zur Strahlungsquelle. Der Block glüht rot auf und der eingefräste Buchstabe erscheint weiß, weil die Temperatur des Blocks im Innern höher als die Oberflächentemperatur des Körpers ist (Abb. 13.9, rechts).

[12] Herschel testete die durch Licht erzeugte Wärme. Er platzierte ein Prisma an einem Fenster, sodass das durchfallende Sonnenlicht auf einem Tisch einen Spektrum erzeugte. Dann platzierte er eine verstellbare Karte mit einem schmalen Schlitz zwischen Prisma und Tisch. Die Karte blockierte alles Licht bis auf einen schmalen Farbstreifen. Die Kugel eines Thermometers befand sich im Spektralausschnitt, ein Anderes im Schatten der Karte. Herschel zeichnete die Temperatur mit Licht und im Schatten für rote, grüne und violette Lichtstreifen akribisch auf und fand, dass *unsichtbares* Licht (Infrarot) zu einem Temperaturanstieg führte.

[13] *Lexikon:* **Pyrometer** sind berührungslose Instrumente, um Temperaturmessungen im Bereich -30 bis 3500 °C durchzuführen. Ein Teil der Schwarzkörperstrahlung liegt im infraroten Spektralbereich. Dieser Anteil wird zur Temperaturmessung verwendet. Die Strahlung durchdringt die Atmosphäre und wird auf einen Detektor fokussiert, welches ein der Strahlung proportionales elektrisches Signal erzeugt.



Abb. 13.9: Der in einen Graphitwürfel (Temperatur T_{cube}) eingefräste Buchstabe H erscheint vollständig schwarz, wenn die Umgebungstemperatur (Temperatur T_u) höher ist und erscheint hell, wenn $T_{cube} > T_u$ [?].

Link to video `Stefan-Boltzmann and Wien Laws`

Link to video `Blackbody Radiation Oven`

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Geophysik

Pahoehoe-Lava ist niedrigviskose basaltische Lava, die als Lavastrom hangabwärts fließt. Die vorherrschenden Temperaturen in der Pahoehoe-Lava kann man anhand der Farbe abschätzen. Das so ermittelte Temperatur stimmt gut mit der direkt gemessenen Temperatur von 1 000-1 200 ^{o}C überein.

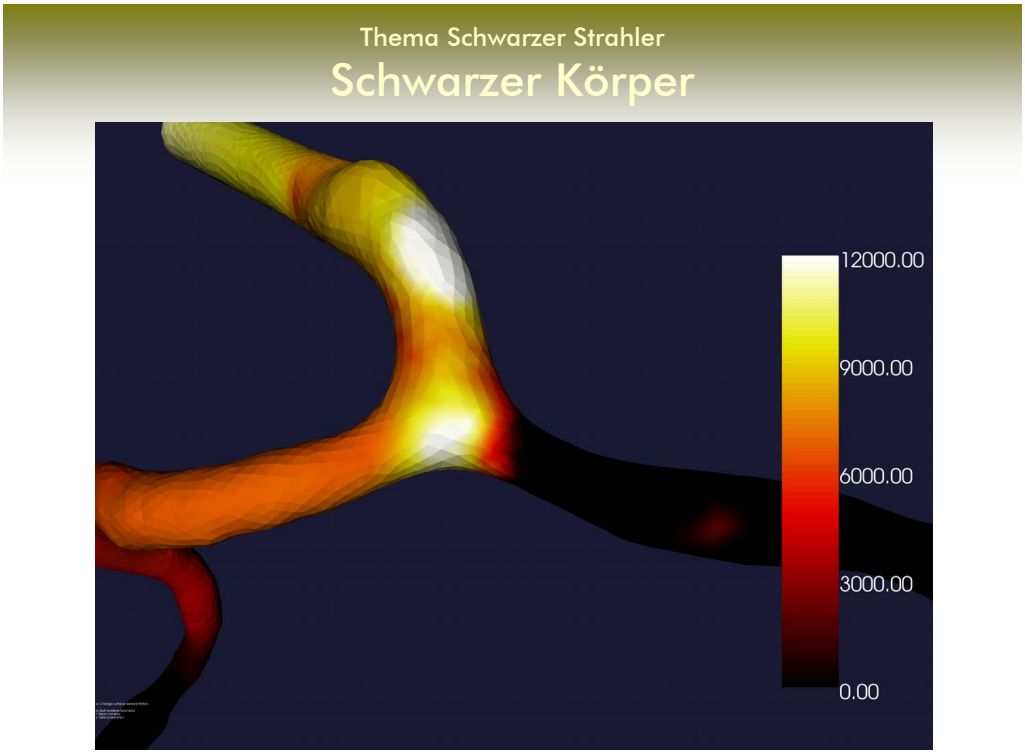
The changing morphology of an open lava channel on Mt. Etna [?]: An open channel lava flow on Mt. Etna (Sicily) was observed during May 30 31, 2001. Data collected using a forward looking infrared (FLIR) thermal camera and a Minolta-Land Cyclops 300 thermal infrared thermometer showed that the bulk volume flux of lava flowing in the channel varied greatly over time. Cyclic changes in the channels volumetric flow rate occurred over several hours, with cycle durations of 113-190 min, and discharges peaking at 0.7 m^3s^{-1} and waning to 0.1 m^3s^{-1}. Each cycle was characterized by a relatively short, high- volume flux phase during which a pulse of lava, with a well-defined flow front, would propagate down-channel, followed by a period of waning flow during which volume flux lowered. Pulses involved lava moving at relatively high velocities (up to 0.29 $m{\cdot}s^{-1}$) and were related to some change in the flow conditions occurring up-channel, possibly at the vent. They implied either a change in the dense rock effusion rate at the source vent and/or cyclic- variation in the vesicle content of the lava changing its bulk volume flux. Pulses would generally overspill the channel to emplace phoehoe overflows. During periods of waning flow, velocities fell to 0.05 $m{\cdot}s^{-1}$. Blockages forming during such phases caused lava to back up. Occasionally backup resulted in overflows of slow moving a that would advance a few tens of meters down the levee flank. Compound levees were thus a symptom of unsteady flow, where overflow levees were emplaced as relatively fast moving phoehoe sheets during pulses, and as slow -moving aa units during backup. Small, localized fluctuations in channel volume flux also

occurred on timescales of minutes. Volumes of lava backed up behind blockages that formed at constrictions in the channel. Blockage collapse and/or enhanced flow under/around the blockage would then feed short-lived, wave-like, down-channel surges. Real fluctuations in channel volume flux, due to pulses and surges, can lead to significant errors in effusion rate calculations.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was ist ein Pyrometer?
2. Zwei Hohlraumstrahler haben Wände aus unterschiedlichen Materialien. Wie würden sich ihre Strahlungsspektren bei gleicher Temperatur unterscheiden?
3. Erläutern Sie die unterschiedlichen Wärmetransportprozesse!
4. Warum scheinen Hohlräume, die sich in einem einem Holzfeuer bilden, heller zu leuchten als das brennende Holz selbst? Ist die Temperatur dort höher als die Oberflächentemperatur des brennenden Holzes?

13.2 Eigenschaften Schwarzer Körper



Die Wissenschaft kann das letzte Geheimnis der Natur nicht lösen. Und das liegt daran, dass wir selbst letztlich Teil des Geheimnisses sind, das wir zu lösen versuchen [**?**].

Max Planck, 1933

Ein schwarzer Körper ist ein Objekt, der die gesamte einfallende elektromagnetische Strahlung absorbiert. Gleichzeitig emittiert er Strahlung. Abb. 13.10 zeigt die Bandbreite des Themas. Was würde passieren, wenn ein Körper Strahlung absorbiert, aber keine Strahlung abgibt? Das hätte die Folge, dass der Körper immer heißer werden würde. Im Thermodynamischen Gleichgewicht wird weder Energie aus der Umgebung aufgenommen noch Energie abgegeben. In diesem Fall hat der Körper die Umgebungstemperatur angenommen. Im thermischen Gleichgewicht emittiert ein Schwarzer Körper pro Sekunde genauso viel Strahlung wie er absorbiert. Das bedeutet aber nicht, dass das Emissionsspektrum mit dem Absorptionsspektrum übereinstimmt. Die Emission kann in einem anderen Wellenlängenbereich erfolgen. Ein erstes illustratives Beispiel liefert die Wärmestrahlung der Erde [**?**], siehe Abb. 13.11, die elektromagnetische Strahlung intensiv im Bereich von etwa 10 μm abstrahlt. Das Sonnenlicht, dass maßgeblich den Wärmehaushalt regelt, liefert Strahlung bei 500 nm. Das gemessene Spektrum ist durch die Atmosphäre stark beeinflusst und es kommt zu charakteristischen Einbrüchen in der

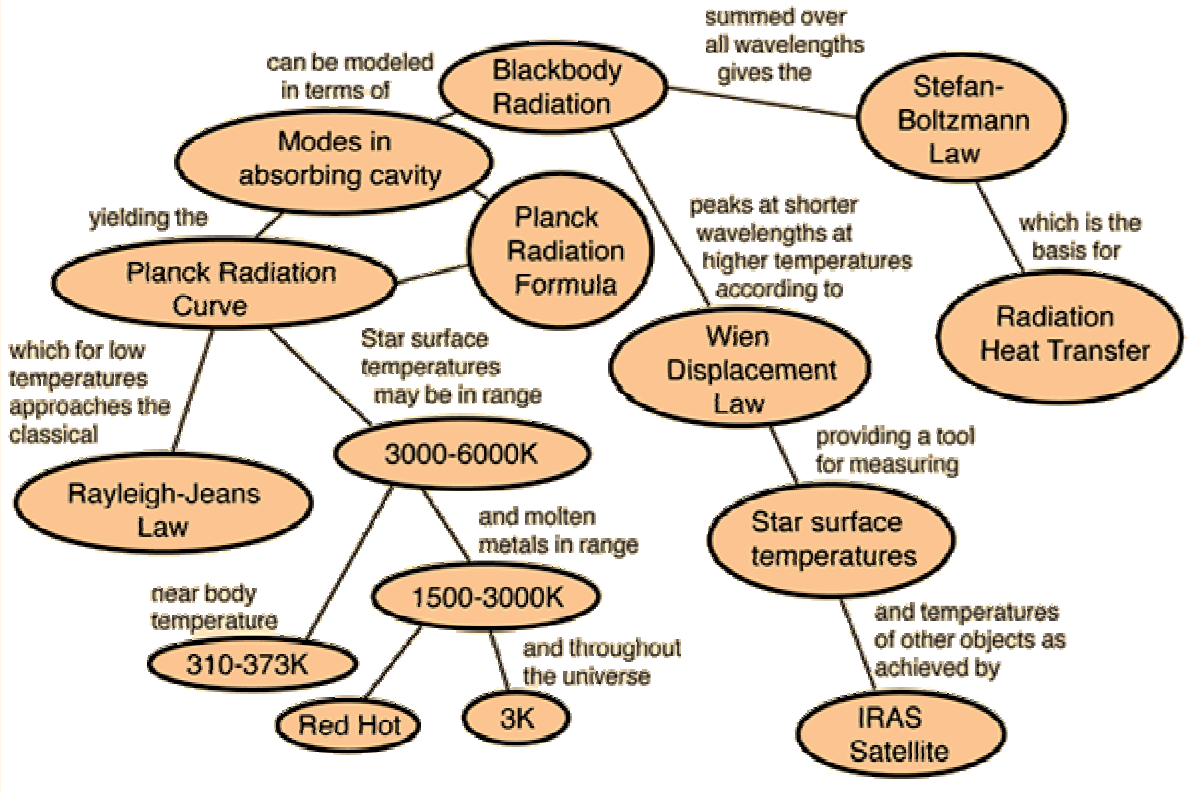


Abb. 13.10: Themenkomplex Schwarzer Körper (Schwarzer Strahler, Hohlraumstrahlung) [**?**].

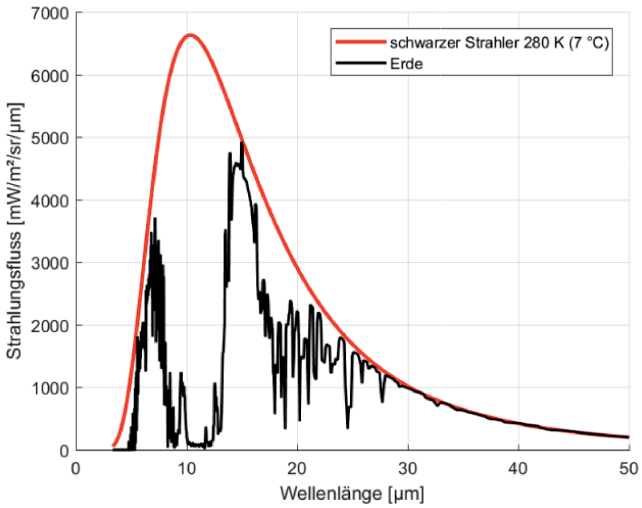


Abb. 13.11: Emittierte Strahlung gemessen an den Grenzen der Erdatmosphäre. Das Spektrum (schwarz) zeigt Absorption bei bestimmten Frequenzen. Zum Vergleich zeigt die rote Kurve den Fluss eines Schwarzen Strahler bei einer Temperatur von 294 K (21 °C) [**?**]

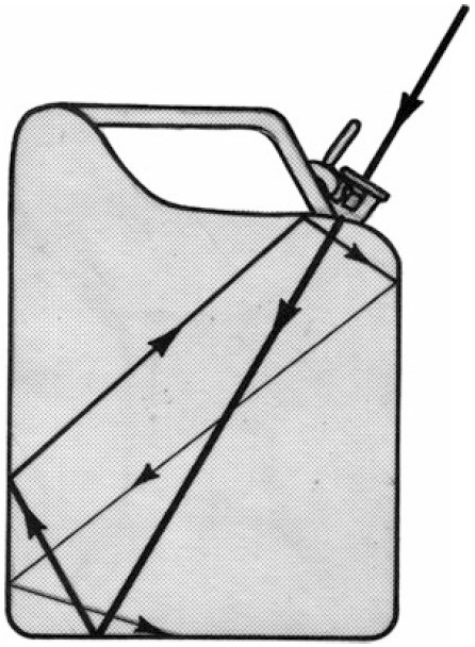


Abb. 13.12: Ein Körper mit einem Hohlraum, wie ein Benzinkanister, vermittelt eine gute Vorstellung von einem schwarzen Körper. Die einfallende Strahlung erfährt mehrfache Reflexionen und interne Absorptionen und wird schließlich vollständig absorbiert [**?**].

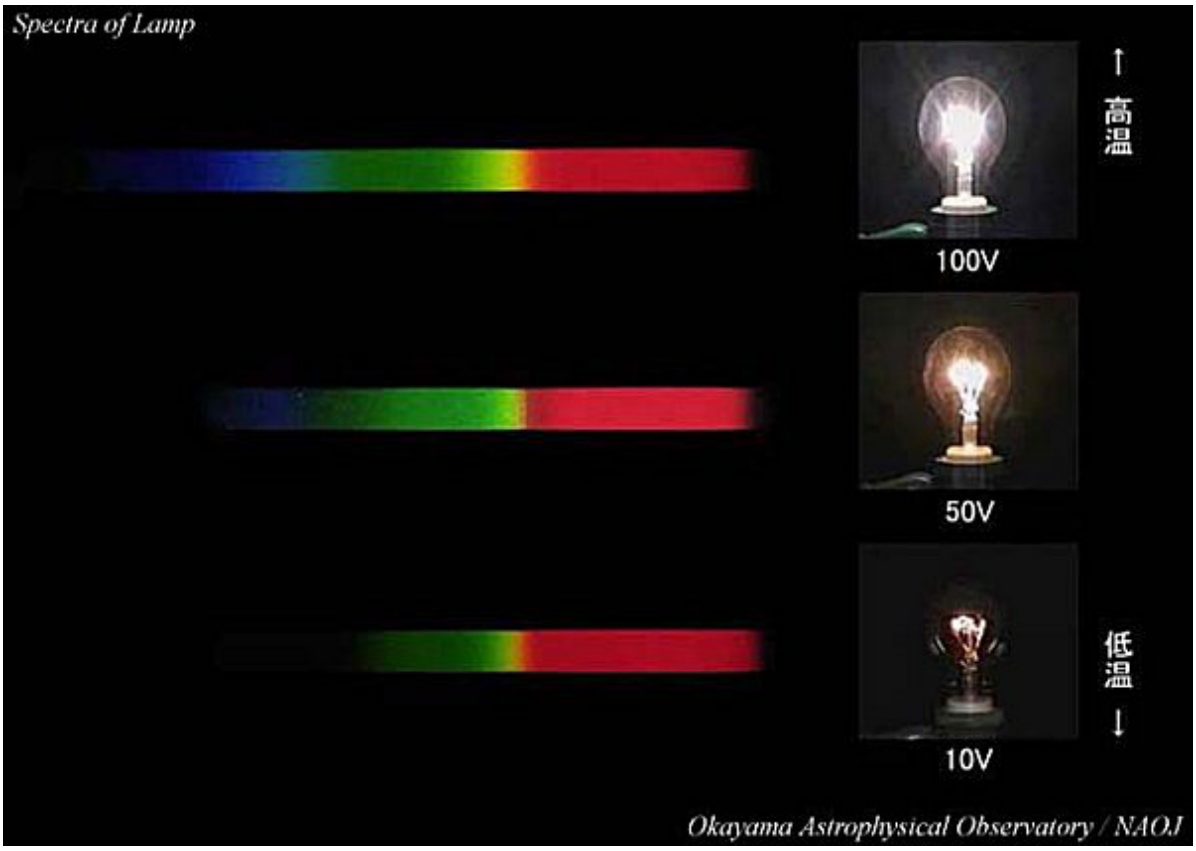


Abb. 13.13: Spektrum einer Glühlampe bei unterschiedlicher angelegter Spannung. Durch die Höhe des elektrischen Stroms wird die Temperatur des Heizfadens eingestellt.

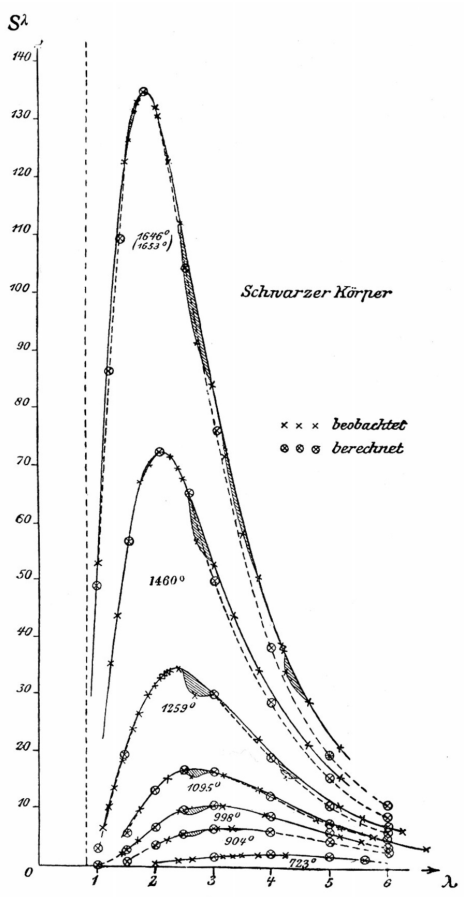


Abb. 13.14: Schwarzkörperstrahlung bei verschiedenen Temperaturen mit Abweichungen vom erwarteten Wien-Gesetz [**?**].

Intensität. Wie durch die rote Kurve angedeutet, kann man aus der Messkurve auf die Oberflächentemperatur der Erde schließen. Eine experimentelle Realisation im Labor ist ein Hohlraum mit einem Loch (Abb. 13.12) für die Messung, daher der Name Hohlraumstrahlung. Die durch Öffnung eintretende Strahlung wird an den Wänden reflektiert und absorbiert. Wenn der Körper in dieser Weise erhitzt wird, ist der Hohlraum im thermischen Gleichgewicht mit der Strahlung. Dasselbe gilt auch für die Lichtabsorption und -emission des Körpers. Abb. 13.13 zeigt am Beispiel einer Glühbirne, die man als gutes Beispiel für einen Schwarzen Strahler ansehen kann, wie sich die Helligkeit als auch das optische Spektrum (spektrale Aufspaltung beispielsweise durch ein Prisma) verändert, wenn man den elektrischen Strom durch eine Änderung der elektrischen Spannung erhöht.

Wie hängen absorbierte und die emittierte Strahlung in Bezug auf ihre Wellenlänge zusammen?

Zur genaueren Analyse wird die Intensität der Hohlraumstrahlung als Funktion der Wellenlänge $I(\lambda)$ gemessen. Abb. 13.14 zeigt das Ergebnis der historischen Messung von Lummer und Pringsheim (1898), denen es gelang das Spektrum eines Schwarzen Körpers

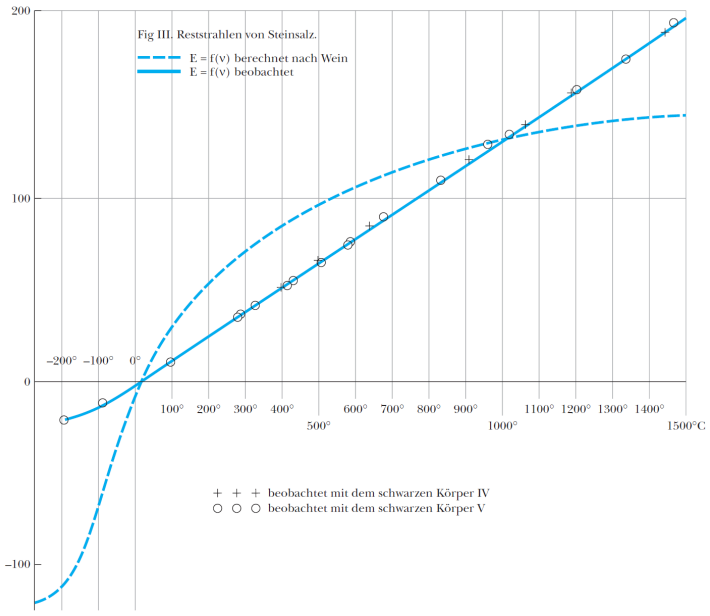


Abb. 13.15: Vergleich der theoretischen und experimentellen Schwarzkörper-Emissionskurven bei einer ausgewählten Wellenlänge von 51.2μm und über den Temperaturbereich von 188 bis 1500^{o}C [**?** **?**].

mit hoher Auflösung bis in den Infrarotbereich (6 μm) zu messen.[14] Die durchgezogene Linie gibt das Ergebnis der Messungen wieder. Auf eine Besonderheit in Bezug auf die damalige theoretische Beschreibung durch das Wiensche Strahlungsgesetz (gestrichelt) sei hier schon hingewiesen: Bei höheren Temperaturen und längeren Wellenlängen ergeben sich Abweichungen. Betrachten wir die Messungen genauer. Das Spektrum eines schwarzen Strahlers zeigt als Funktion der Temperatur eine Reihe an Besonderheiten:

- Das Maximum des Spektrums verschiebt mit steigender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen. Beispielweise findet man das Maximum bei einer Objekttemperatur von 2 000 K bei 1.5 μm und bei 3 000 K bei 1 μm.

- Integriert man die Strahlungsleistung stellt man fest, dass die Intensität der Strahlung mit der Temperatur überproportional zunimmt. Anhand der Abbildung erkennt man, dass sich die Intensität im Maximum der Emission um mehr als eine Größenordnung erhöht, wenn die Temperatur von 2 000 K auf 4 000 K verdoppelt wird.

Strahlungsgesetze

Das Spektrum eines schwarzen Körpers wird durch zwei wichtige Gesetze beschrieben:

[14] Messungen bis Wellen längen von 60μm wurden von Rubens und Kurlbaum durchgeführt [**?**], siehe Abb. 13.15.

Object	Temperature		λ_{max}	
	Celsius	Kelvin		
Dry Ice (frozen carbon dioxide)	-79	194	0.015 millimetres	Infrared
Human body	37	310	0.009 millimetres	Infrared
Hot Poker	900	1173	0.0025 millimetres	Infrared
Light Bulb filament	3,500	3,773	768 nanometres	Infrared/Visible light boundary
Surface of the Sun	5,500	5,773	502 nanometres	Visible light
Surface of a very hot star	20,000	20,273	143 nanometres	UV
Core of an atomic bomb	20,000,000	20,000,273	0.145 nanometres	X-rays

Abb. 13.16: Maxima der Emission Schwarzer Körper bei gegebener Temperatur nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz.

- das Wiensche Verschiebungsgesetz[15]

- das Stefan-Boltzmann Gesetz

Simulation: **Blackbody Spectrum**

Das Wiensche Verschiebungsgesetz [?] gibt die Lage des Maximums der Emission bei einer gewählten Temperatur an.

$$\lambda_{\max} \cdot T_K = b_\lambda \tag{13.1}$$

Wiensche Verschiebungskonstante: b_λ=2898 μm·K

Das bedeutet, dass je heißer ein Körper wird, desto mehr verlagert sich die abgegebene Strahlung vom Infrarot in den kürzerwelligen sichtbaren Spektralbereich, siehe die Tabelle in Abb. 13.16. Abb. 13.17 zeigt, in welcher Weise sich das Maximum im Spektrum des Schwarzen Körpers bei Änderung der Temperatur verschiebt.

Die Emissivität von Materialien hängt von der Wellenlänge und vom Zustand der Oberfläche ab. Eine polierte Aluminiumfolie beispielsweise hat einen Emissionskoeffizienten $\varepsilon_{th}(\lambda = 3\,\mu\text{m})$=0.09 und $\varepsilon_{th}(\lambda = 10\,\mu\text{m})$=0.04. Für den Gesamtemissionsgrad, also integriert über alle Wellenlängen, ergeben sich Werte wie in Tab. 13.2. Weitere Werte für Emissionskoeffizienten findet man auf[16] Böden und flüssiges Wasser haben Emissionskoeffizienten nahe EINS. Dies erleichtert die Bestimmung von Bodentemperaturen durch Infrarotaufnahmen durch Satelliten. Abb. 13.18 zeigt eine Wärmebildaufnahme eines Sandsturms über dem Roten Meer vom 13.5.2005. Die Analyse der Oberflächentemperatur zeigt den kälteren Staub als blauen Streifen über dem heißen und trockenen Gebiet zwischen Ägypten und Saudi-Arabien.

[15] The Nobel Prize in Physics 1911 was awarded to Wilhelm Wien *for his discoveries regarding the laws governing the radiation of heat*

[16] Tableau récapitulatif des émissivités en thermographie infrarouge

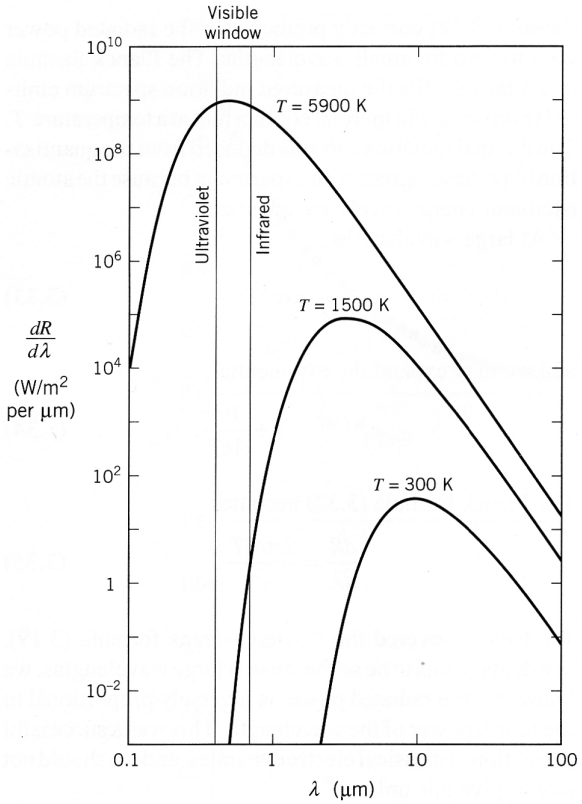


Abb. 13.17: Intensität der Schwarzkörperstrahlung als Funktion der Wellenlänge der emittierten Strahlung. Jede Kurve entspricht einer anderen Temperatur des Schwarzen Körpers. Alle Kurven weisen dieselbe Form auf und die Fläche unten Kurven skaliert mit T_K^4. Der für das Auge sichtbare Spektralbereich ist eingezeichnet. Man erkennt, dass das 300K heiße Objekt im Optischen nicht sichtbar ist [**?**].

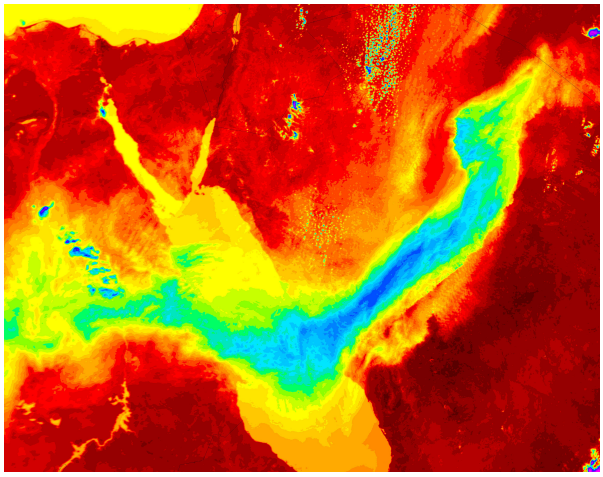


Abb. 13.18: Thermographische Aufnahme eines Sandsturms über dem Roten Meer [**?**].

Material	Emissivität
poliertes Gold	0.02
Sand	0.60
Schnee	0.80
flüssiges Wasser	0.96
weißes Papier	0.70-0.90
schwarzes Papier	0.9

Tab. 13.2: Emissivität unterschiedlicher Materialien.

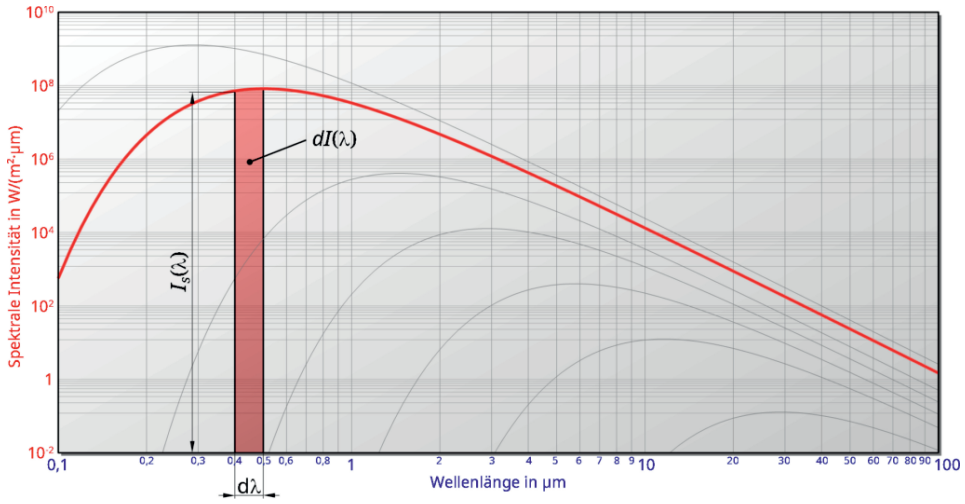


Abb. 13.19: Interpretation der Fläche unter der spektralen Intensitätskurve: Die Fläche unter der Kurve liefert den Wert für die abgestrahlte Intensität im betrachteten Wellenlängenbereich

Das Stefan-Boltzmann Gesetz sagt aus, dass die emittierte Strahlung P_{EM} eines schwarzen Strahlers im gesamten Wellenlängenbereich proportional zur vierten Potenz seiner absoluten Temperatur T_K ansteigt.

$$P_{EM} = \varepsilon_{th} \cdot \sigma_{SB} \cdot A_0 \cdot T_K^4 \tag{13.2}$$

wobei ϵ_{th} die Emissivität, A_0 die Fläche, die die Strahlung emittiert (Abb. 13.19) und

Stefan-Boltzmann Konstante: σ_{SB}=5.67 · 10^{-8} W·m^{-2}·K^{-4}

Erwärmt man einen beliebigen Stoff durch Energiezufuhr von außen, so emittiert er elektromagnetische Strahlung. Die gesamte abgegebene Strahlungsenergie, als auch die Wellenlängenverteilung, hängen von der Temperatur des Körpers ab. Abb. 13.20 zeigt, im Vergleich zum sichtbaren Spektralbereich, wie sich das Spektrum eines Schwarzen Strahlers als Funktion der Temperatur entwickelt. Die einzelnen Spektren veranschaulichen das Verhalten nach Gl. 13.1 und 13.2.

Anwendungen^{4LP}

Welche Bedeutung hat der Schwarze Strahler für die Technik?

- Ruß ist in einem bestimmten Wellenlängenbereich eine gute Annäherung an einen Schwarzen Körper. Die Lichtemission einer Kerze, siehe Abb. 13.21, zeigt die Emission von Rußteilchen. Im unteren Teil der Flamme ist ausreichend Sauerstoff vorhanden, so dass es zur vollständigen Verbrennung kommt. Das verdampfende

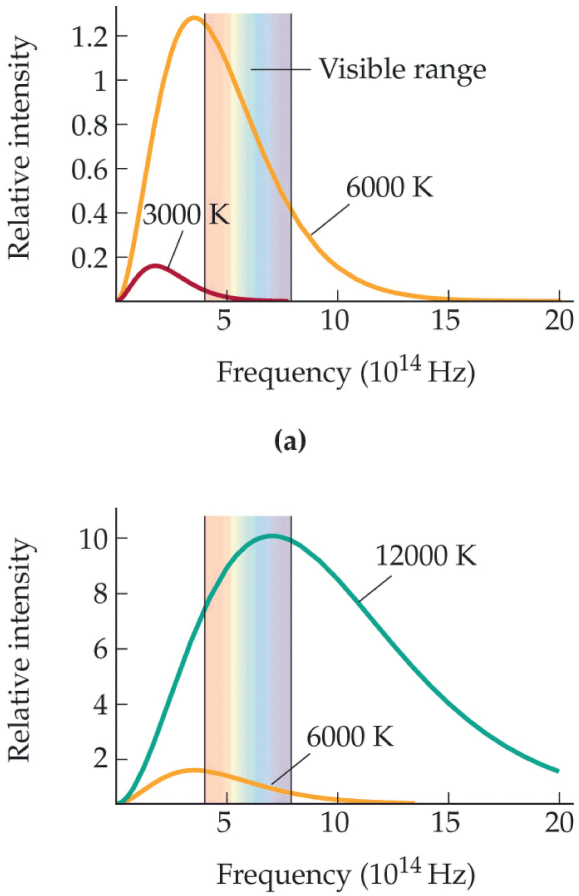


Abb. 13.20: Emissionsspektren von Schwarzen Strahlern bei unterschiedlichen Temperaturen. Anhand der Spektren ergeben sich Informationen über die *Farbe* des Körpers. Eingeblendet ist zusätzlich der Wellenlängenbereich in dem unser Auge empfindlich ist.



Abb. 13.21: Photo einer Kerzenflamme. Siehe Text für weitere Informationen.

Wachs leuchtet aufgrund der ablaufenden chemischen Reaktion bläulich. Im oberen Teil der Flamme steht nicht mehr so viel O_2 zur Verfügung und die sich bildenden Rußteilchen leuchten aufgrund der hohen Temperatur rot-orange auf.

- Viele nichtmetallische Materialien haben bei Wellenlängen größer als etwa $3\,\mu$m einen hohen Emissionsgrad und können als Schwarze Strahler betrachtet werden. Dieses Verhalten hat Bedeutung für die Messungen bei niedrigen Temperaturen (Raumtemperatur) und bei der Wärmeabstrahlung von Heiz- oder Kühlkörpern mit nichtmetallischer Beschichtung.

- Der Farbeindruck glühender Metalle war lange Zeit von Bedeutung für die Bearbeitung und Härtung von Stahl [**?**].

- Mit steigender Temperatur erhöht sich der Anteil des emittierten sichtbaren Lichtes, der vom Schwarzen Körper emittiert wird. Bei Glühlampen muss deshalb die Fadentemperatur möglichst hoch sein.

- Lasermessgeräte verwenden oft Hohlraumabsorber zur kalorimetrischen Bestimmung der Leistung. Da Hohlkörper Licht gut absorbieren, wird die Messgenauigkeit erhöht und Streustrahlung vermieden.

- Es ist nicht möglich, einen Wirkungsgrad von 100% bei der Lichtausbeute im optischen Spektralbereich (400-700 nm) zu erreichen, da Verluste durch Infrarotstrahlung entstehen.

- Abb. 13.22 zeigt den Einsatz der Thermographie[17] zur Charakterisierung der Wärmeverluste an Gebäuden.

`Link to video: Eruption Old Faithful`

Aus eigener Erfahrung wissen Sie wahrscheinlich, dass eine Herdplatte heiß sein kann, obwohl man kein rotes Leuchten beobachtet. Das liegt daran, dass die Emission im Wesentlichen im infraroten Spektralbereich erfolgt. Für die Charakterisierung ist dieser Spektralbereich daher sehr interessant. Notwendig sind allerdings Strahlungssensoren, die in diesem Bereich empfindlich sind. Die Infrarotstrahlung wurde im Jahr 1800 von Wilhelm Herschel[18] entdeckt. Herschel schwärzte den Glaskolben eines Thermometers setzte es unterschiedlichen Spektralbereichen des Sonnenspektrums aus. Bewegte er das Thermometer im Spektrum von violett bis rot, beobachtete er, dass die Temperatur des Thermometers anstieg. Am roten Ende des Spektrums maß er die höchste Temperatur und noch weiter in diese Richtung bewegt, stellte er fest, dass die Temperatur nochmal merklich anstieg und ein Maximum zeigte, obwohl er mit dem Auge keine Strahlung

[17] *Lexikon:* Die **Thermografie** ist ein Verfahren, bei dem mit Hilfe von Spezialkameras thermische Strahlung sichtbar gemacht wird, die von Körpern oder Objekten abgegeben wird. Da die Intensität und das Spektrum der Wärmestrahlung temperaturabhängig ist, ermöglicht eine thermografische Aufnahme die Temperaturverteilung eines Körpers zu erfassen.

[18] Astronom, Musiker, Komponist und Entdecker des Planeten Uranus

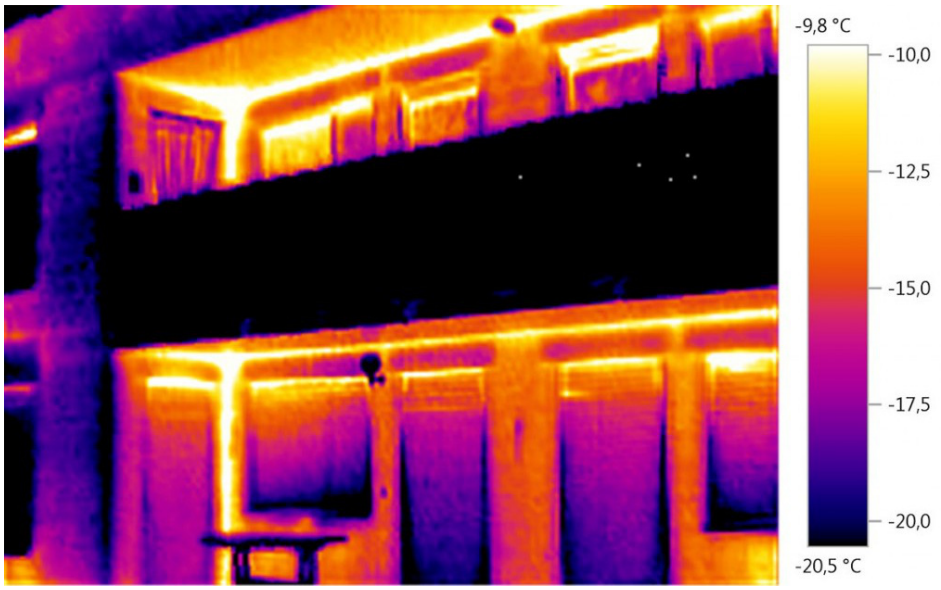


Abb. 13.22: Thermographische Aufnahme einer Hausfassade, die zur Identifizierung von Wärmelecks genutzt werden kann [**?**].



Abb. 13.23: Woods-Effekt bei der Infrarot-Photographie [**?**].

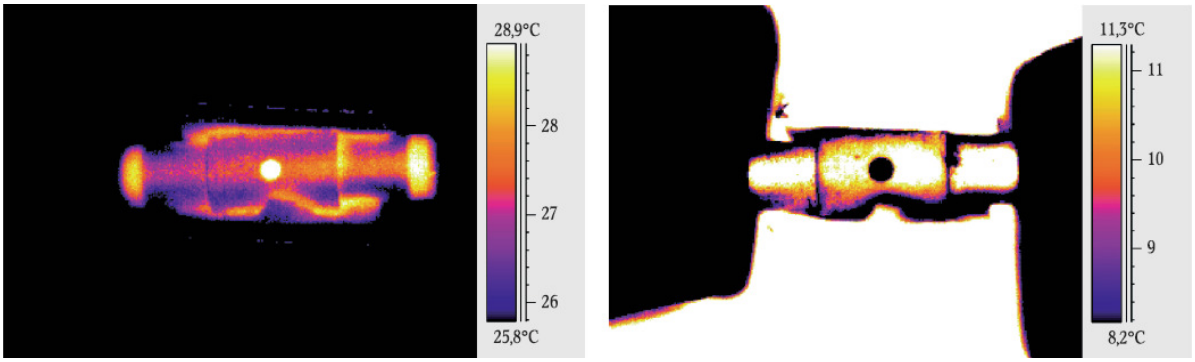


Abb. 13.24: Übergang zwischen Absorption und Emission einer Graphithülse als Annäherung an einen Schwarzen Strahler. *links:* Beide Hülsenseiten wurden zuvor durch Fingerkontakt angewärmt. *rechts*) Beide Seiten wurden durch Eiswürfel gekühlt [**?**].

mehr wahrnahm. Dieses Experiment war die erste Beobachtung von Strahlung jenseits des sichtbaren Spektrums. Pionier auf dem Gebiet der Photographie war Robert Williams Wood.[19] Im Jahr 1903, erfand Wood einen Ultraviolett-Filter, den er aus Nitroso-Dimethyl-Anilin und dem Farbstoff Uranin herstellte Der Woods-Glassfilter blockierte sichtbares Licht und lies ultraviolettes Licht passieren. Mit Hilfe dieser Technik gelangen die ersten Photografien von Stoffen, die im ultravioletten Spektralbereich fluoreszierten. Man verwendet den Woods-Glasfilter übrigens in Schwarzlichtlampen. Wichtig für uns ist, dass ein geringer Anteil an infrarotem Licht ebenfalls transmittiert wurde. In den so aufgenommenen Photographien erscheint das Grün von Blättern im nahen Infrarot strahlend weiß (Woods-Effekt), siehe Abb. 13.23. Das liegt daran, dass Chlorophyll im infraroten Bereich transparent ist. Das einfallende Infrarotlicht wird daher an dem in der Pflanze enthaltenen Wasser reflektiert. Für Pflanzen ist die Transparenz im Infraroten entscheidend, da eine zu hohe Absorption von Infrarotstrahlung der Sonne einen Wärmetod der Pflanze auslösen würde.

Abb. 13.24 zeigt den Übergang von Emission zu Absorption von Strahlung bei einem Schwarzen Körper der sich im thermischen Ungleichgewicht mit der Umgebung befindet. Ist die Umgebungstemperatur geringer, strahlt der Körper Energie ab (links). Ist die Temperatur des Objekts geringer als die Temperatur der Umgebung nimmt der Körper Energie auf und erscheint in der Thermographie schwarz (rechts) [**?**].

Menschliche Haut bei Körpertemperatur strahlt im Wellenlängenbereich zwischen 2 und 14 μm wie ein Schwarzer Körper. Dieser Umstand wird bei der pyrometrischen Fiebermessung im Ohr verwendet. Die Tabelle in Abb. 13.25 liefert Werte für die Emissivität der menschlichen Haut [**?**]. Die hohe Emissivität nahe EINS demonstriert, dass die

[19]Robert Williams Wood (1868-1955). Wood beobachtet 1897 erstmals den Tunneleffekt bei der Feldemission von Elektronen. Leider waren die Erkenntnisse der Quantenphysik damals noch nicht bekannt, so dass es für dieses Phänomen keine vernünftige Erklärung gab.

Tissue	Emissivity
Black skin (3 - 12 µm)	0.98±0.01
White skin (3 - 14 µm)	0.97±0.02
Forehead (3 - 14 µm)	0.98±0.01
Burnt skin (3 - 14 µm)	0.97±0.02
Epicardium (fresh : 0.5 hour)	
3 µm	0.85
5 µm	0.86
7 µm	0.87
>9 µm	0.89
Epicardium (9 days at -20°C)	
3-14µm	0.99
Pericardium	
3µm	0.88
5µm	0.94
7µm	0.95
9µm	0.95
11µm	0.97

Abb. 13.25: Emissionsgrad menschlichen Gewebes, gemessen im infraroten und einer Temperatur von 40 ^{0}C [**?**].

Haut des Menschen im nahen bis fernen Infrarot tatsächlich als Schwarzer Strahler angesehen werden kann. Die Thermographie ist deshalb auch eine wichtige medizinische Diagnostik, wie man an dem in Abb. 13.26 gezeigten lahmenden (vorne rechts) Pferd erkennt. Abb. 13.27 zeigt Beispiele für das Schwarzkörperspektrum unterschiedlich heißer Schwarzer Körper.

A Reappraisal of the Use of Infrared Thermal Image Analysis in Medicine [?]: Infrared thermal imaging of the skin has been used for several decades to monitor the temperature distribution of human skin. Abnormalities such as malignancies, inammation, and infection cause localized increases in temperature which show as hot spots or as asymmetrical patterns in an infrared thermogram. Even though it is nonspecific, infrared thermology is a powerful detector of problems that affect a patients physiology. While the use of infrared imaging is increasing in many industrial and security applications, it has declined in medicine probably because of the continued reliance on first generation cameras. The transfer of military technology for medical use has prompted this reappraisal of infrared thermology in medicine. Digital infrared cameras have much improved spatial and thermal resolutions, and libraries of image processing routines are available to analyze images captured both statically and dynamically. If thermographs

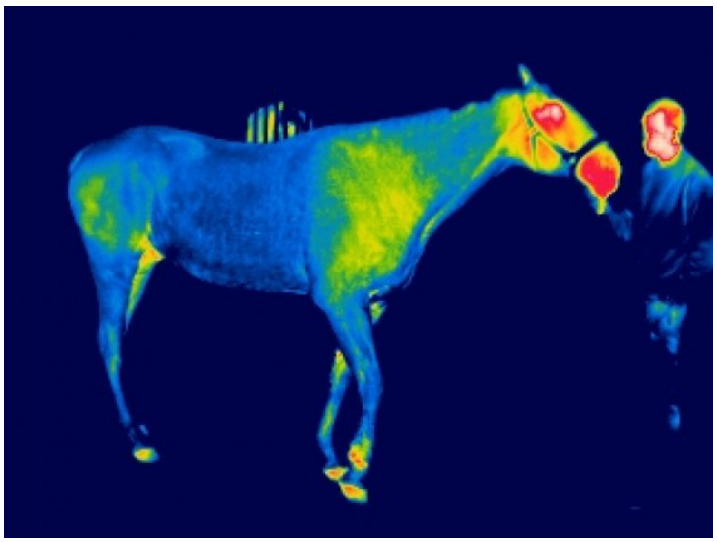


Abb. 13.26: Thermographieaufnahme eines Pferdes mit lahmendem rechten Vorderbein.

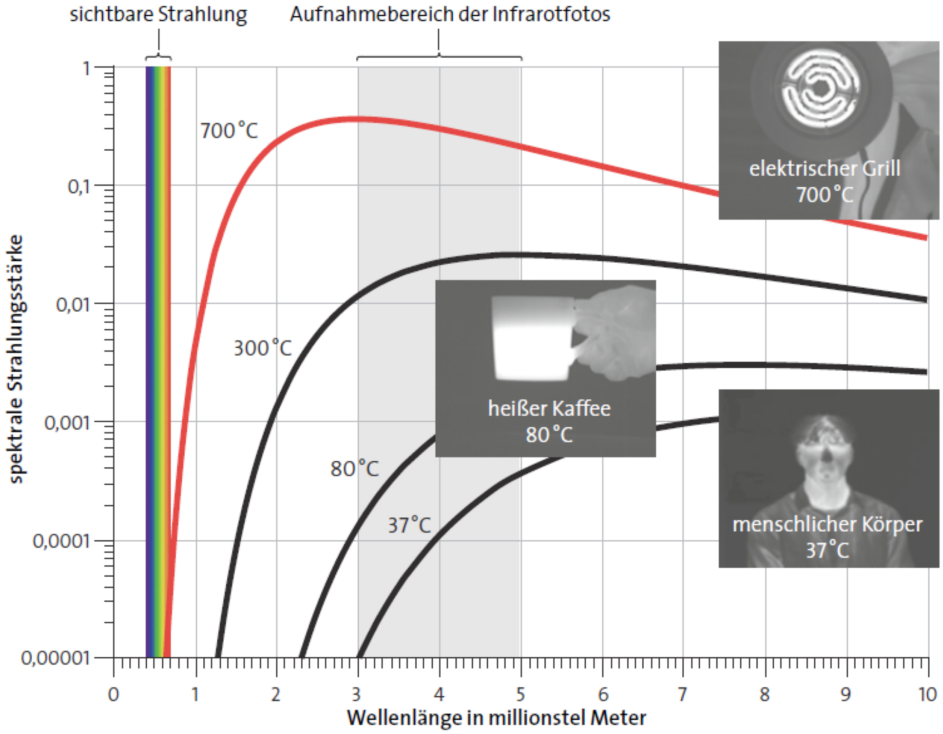


Abb. 13.27: Erst ab einer Temperatur von etwa 700 ^{0}C (rote Linie) ist die Wärmestrahlung von Objekten auch im sichtbaren Spektralbereich so intensiv, dass das menschliche Auge sie wahrnimmt. Die spektrale Strahlungsstärke gibt die bei einer bestimmten Wellenlänge pro Fläche abgestrahlte Leistung an [**?**].

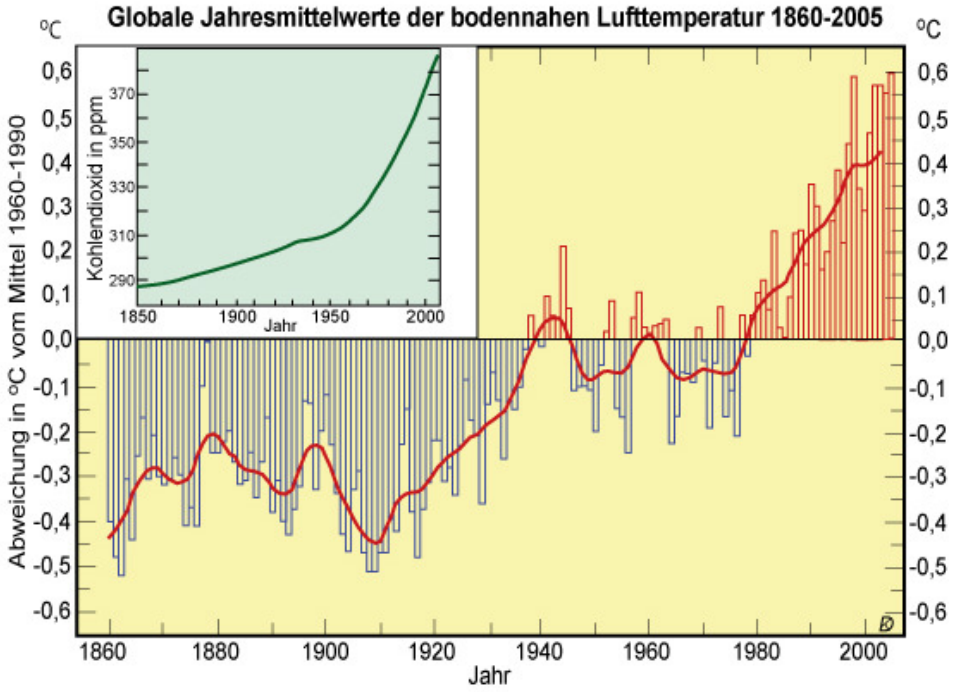


Abb. 13.28: Jährliche mittlere Oberflächentemperatur im Vergleich zum Durchschnitt des 20. Jahrhunderts (1880-2020). Blaue Balken zeigen überdurchschnittlich kühle Jahre; rote Balken überdurchschnittlich warme Jahre an [**?**].

are captured under controlled conditions, they may be interpreted readily to diagnose certain conditions and to monitor the reaction of a patients physiology to thermal and other stresses. Some of the major areas where infrared thermography is being used successfully are neurology, vascular disorders, rheumatic diseases, tissue viability, oncology (especially breast cancer), dermatological disorders, neonatal, ophthalmology, and surgery [**?**].

Ein Beispiel aus der Klimaforschung[20] [21]

Das Wiensche Verschiebungsgesetz gibt an, bei welcher Wellenlänge ein schwarzer Strahler maximal abstrahlt. Für den Fall der Sonne ergibt sich das Maximum bei einer Wellenlänge von 500 nm. Die Erde strahlt aufgrund ihrer Oberflächentemperatur. Hier ergibt

[20] Im Jahr 1856 füllte Eunice Newton Foote lange Zylinder mit unterschiedlichen Gasen und Gasgemischen (feuchte und trockene Luft, Kohlendioxid, Sauerstoff und Wasserstoff). Foote stellte die Zylinder in die Sonne und beobachtet, mit Hilfe von Thermometern, wie sich die Gase erwärmten. Der Zylinder mit Kohlendioxid erwärmte sich am meisten und behielt seine hohe Temperatur auch längere Zeit bei, nachdem man ihn aus dem Licht der Sonne genommen hatte [**?**].

[21] The Nobel Prize in Physics 2021 was awarded *for groundbreaking contributions to our understanding of complex systems* with one half jointly to Syukuro Manabe and Klaus Hasselmann *for the physical modelling of Earth's climate, quantifying variability and reliably predicting global warming* and the other half to Giorgio Parisi *for the discovery of the interplay of disorder and fluctuations in physical systems from atomic to planetary scales.*

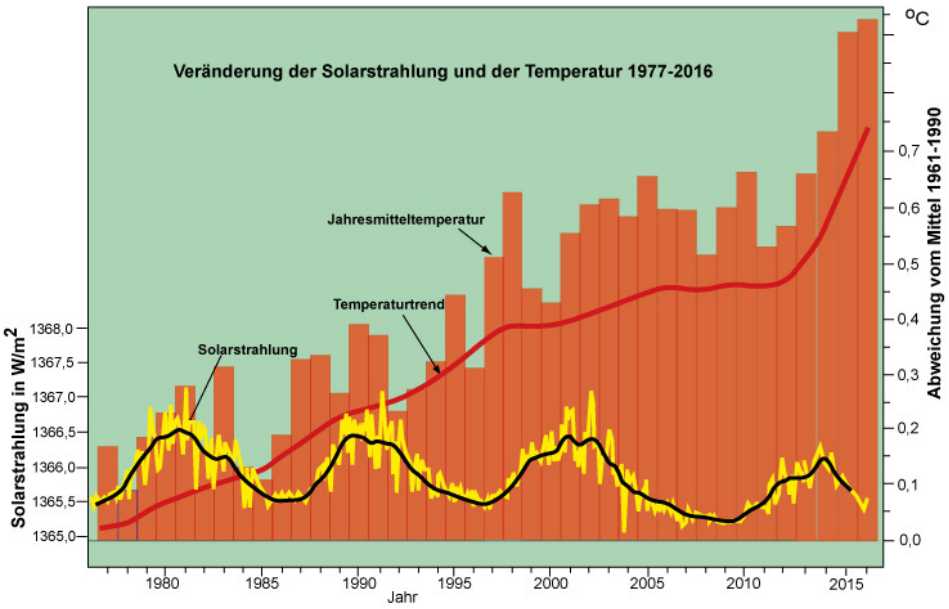


Abb. 13.29: Anstieg der mittleren Temperatur auf der Erde im Vergleich zu Variationen der in der Einstrahlung von Sonnenlicht (Stichwort: Solarkonstante). Der vermutete Zusammenhang kann durch die Messungen nicht bestätigt werden [**?**].

eine Rechnung nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz ein Maximum der Emission bei etwa 10 μm, siehe Abb. 13.11. Die Atmosphäre ist nahezu durchlässig für sichtbare Strahlung. Nahezu der gesamte Energiefluss der Sonne erreicht daher die Erdoberfläche. Rechnet man den Energieeintrag der Sonne auf die Erde aus den Daten über Oberflächentemperaturund den Abstand Sonne-Erde aus findet man einen Wert von 279 K. Das ist bemerkenswert nah an der tatsächlichen mittleren Oberflächentemperatur der Erde von 288 K [**? ? ?**]. Ein Anteil der Strahlung wird durch atmosphärische Gase stark absorbiert. Sauerstoff und Stickstoff, als Hauptbestandteil der Luft, absorbieren kaum Wärmestrahlung. Die Absorption erfolgt im Wesentlichen durch Wasserdampf und Kohlendioxid. Die Atmosphäre wirkt daher wie eine Wärmedecke, wodurch es zu einer Erwärmung der Erde kommt. Wie Abb. 13.28 demonstriert, ist es durch den Eintrag von stark absorbierenden Gasen zu einem merklichen Anstieg der globalen Temperatur gekommen. Diese Entwicklung kann dabei nicht auf die Änderung in der Sonneneinstrahlung zurückgeführt werden, wie Abb. 13.29 nachweist. Neben Kohlendioxid sind Spurengase wie Methan, Ozon, Stickoxide und FCKWs für den Temperaturanstieg verantwortlich. Obwohl der prozentuale Anteil von Methan in der Atmosphäre gering ist, kann man den Beitrag zur Strahlungsabsorption nicht vernachlässigen, da das Absorptionsvermögen von CH_4 im Vergleich zu CO_2 nahezu zwanzigmal höher ausfällt. Um dieser Entwicklung entgegen zu steuern, bedarf es freie Vakanzen zur Speicherung von CO_2. Eine Möglichkeit ist die Absorption in Meerwasser. CO_2 wird im Meer fast vollständig in andere Verbindungen, insbesondere in der Reaktion Wasser und Karbonat zu Hydrogenkarbonat, umgewandelt. Durch die Industrialisierung hat die Konzentration an Karbonat

um 10% abgenommen. Dadurch verbleibt immer mehr Kohlendioxid im Wasser und die Möglichkeit des Oberflächenwassers, weiteres Kohlendioxid aus der Atmosphäre aufzunehmen, verringert sich. Eine weitere Möglichkeit ist die Photosynthese. Hier existiert das Problem der Abholzung von Regenwäldern, insbesondere in Brasilien.

Solarkonstante: $1361\,\mathrm{W/m^2}$

Noch eine Bemerkung zum Abschluss: Die Bezeichnung Schwarzer Körper kann zu der Annahme verführen, dass alle im für das Auge sichtbaren Spektralbereich schwarz erscheinenden Materialien auch im Infraroten einen hohen Absorptions- und Emissionsgrad aufweisen. Nicht jeder schwarze Gegenstand ist deshalb auch ein guter Schwarzer Körper im physikalischen Sinne. Ein Beispiel sind Sonnenkollektoren, die schwarz erscheinen, aber für den Infrarotanteil des Sonnenlichts eine hohe Transmission aufweisen. Auch Textilien erscheinen im Nahinfrarot hell, obwohl sie im Sichtbaren schwarz erscheinen. Weiße Farbe oder Fensterglas besitzen im mittleren infraroten Spektralbereich einen hohen Emissions- und Absorptionsgrad. Die Beispiele verdeutlichen, dass für eine Charakterisierung der thermographischen Eigenschaften von Objekten der gesamte Bereich des Spektrums relevant ist, in dem Wärmestrahlung auftritt.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 2.1: Wie lange hat es geophysikalisch gedauert, bis die Erde von ihrer hohen Anfangstemperatur T_i auf Raumtemperatur T_f abgekühlt hat?

Die zur Verfügung stehende Energie verteilt sich gleichmäßig auf alle Atome N_A nach dem Maxwellschen Gleichverteilungsgesetz:

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{2} N_{at} \cdot k_B \cdot T_K \\ \frac{dE}{dT} &= \frac{3}{2} N_{at} \cdot k_B \end{aligned}$$

Die Abkühlzeit t_E eines Schwarzes Körpers (ε_{th}=1) allein durch Strahlungsabgabe ergibt sich damit

$$\begin{aligned} P &= \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dT}\frac{dT}{dt} \\ \frac{dE}{dT}\frac{dT}{dt} &= \frac{3}{2} N_{at} \cdot k_B \cdot \frac{dT}{dt} \end{aligned}$$

Die Energieabgabe lässt sich auch aus dem Stefan-Boltzmann Gesetz (Gl. 13.2) herleiten. Wir können davon ausgehen, dass die Erdtemperatur in der Zwischenzeit deutlich abgesunken ist, also $T_i \gg T_f$. In dem Fall kann man den Term T_f vernachlässigen und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sigma_{SB} \cdot A_0 (T_i^4 - T_f^4) \\ \frac{dE}{dt} &\approx \sigma_{SB} \cdot A_0 \cdot T_i^4 \\ dt &= \frac{3}{2} \frac{N_{at} \cdot k_B}{\sigma_{SB} \cdot A_0 \cdot T_i^4} dT \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_E &= -\frac{3}{2} \frac{N_{at} \cdot k_B}{\sigma_{SB} \cdot A_0} \int_{T_i}^{T_f} \frac{1}{T^4}\, dT \\ t_E &= -\frac{N_{st} \cdot k_B}{2\,\sigma_{SB} \cdot A_E} \left(\frac{1}{T_f^3} - \frac{1}{T_i^3} \right) \end{aligned}$$

Interessant nicht wahr! Die anfänglich hohe Temperatur der Erde T_i spielt für die Abkühlung wegen dem Term $1/T^3$ keine Rolle ($1/T_i^3 \gg 1/T_f^3$). Der hohe Temperaturunterschied sorgt für eine rasche Abkühlung. Erst wenn die Anfangstemperatur merklich reduziert ist, erfolgt der Abkühlungsprozess langsamer. In der Gleichung steht die

Anzahl der Atome. Diese muss man aus dem Volumen eines Atoms abgeschätzt werden. Wir wählen den in Kapitel *Der Weg zum Atom* bestimmten Wert von Kohlenstoff (r_A=$1.24 \cdot 10^{-10}$ m; V_A=$7.98 \cdot 10^{-30}$ m^3). Aus dem Radius der Erde (R=$6.4 \cdot 10^6$ m) ergibt sich eine Oberfläche und ein Volumen von A_E=$5.14 \cdot 10^{14}$ m^2 und V_E=$1.1 \cdot 10^{21}$ m^3. Damit ergibt sich eine grobe Abschätzung für die Anzahl an Atomen N_A auf der Erde von

$$N_{at} = \frac{V_E}{V_A} = 1.37 \cdot 10^{50}$$

Damit lässt sich die Abkühlzeit t_E abschätzen.

$$\begin{aligned} t_E &= \frac{1.37 \cdot 10^{50} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}}{2 \cdot (1.0) \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}} \cdot 5.14 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^2}} \cdot \frac{1}{(300\,\mathrm{K})^3} \\ t_E &= 3.84 \cdot 10^4\,\mathrm{a} \end{aligned}$$

Die Zeitspanne ist also deutlich kürzer als das Alter der Erde. Man stellt aber fest, dass das Innere der Erde noch ziemlich heiß ist. Mehr dazu im Kapitel *Kerne*, wo gezeigt wird, dass die natürliche Radioaktivität für den heißen Erdkern verantwortlich ist.

Aufgabe 2.2: Unsere Sonne wird in ihrer weiteren Entwicklung zunächst ein Roter Riese (rR, Radius R_{rR}, Oberflächentemperatur T_{rR}=$3 \cdot 10^3$ K) und dann ein weißer Zwerg (wZ, R_{wZ}, T_{wZ}=$2.5 \cdot 10^4$ K). Die Größe des weißen Zwerges entspricht dem der Erde und R_{rR}=$10^5 \cdot R_{wZ}$. Vergleichen Sie die Strahlungsleistung der beiden Objekte?

Für die Strahlungsabgabe spielen zwei Beiträge eine Rolle: die Temperatur des Körpers und die Oberfläche A, die die Strahlung abgibt. Wir definieren deshalb I_{wZ}=P_{wZ}/A_{wZ} und I_{rR}=P_{rR}/A_{rR}.

$$\begin{aligned} \frac{I_{wZ}}{I_{rR}} &= \left(\frac{T_{wZ}}{T_{rR}}\right)^4 \\ \frac{I_{wZ}}{I_{rR}} &= \left(\frac{2.5 \cdot 10^4\,\mathrm{K}}{3.0 \cdot 10^3\,\mathrm{K}}\right)^4 \\ \frac{I_{wZ}}{I_{rR}} &= 4820 \end{aligned}$$

Die Leistungsabgabe eines weißen Zwerg pro Quadratmeter ist also erheblich höher verglichen mit einem roten Riesen. Anders sieht es aus, wenn man die Gesamtabgabe be-

trachtet:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{wZ}}{P_{rR}} &= 4820 \cdot \frac{A_{wZ}}{A_{rR}} \\
\frac{P_{wZ}}{P_{rR}} &= 4820 \cdot \frac{4\,\pi r_{wZ}^2}{4\,\pi r_{rR}^2} \\
\frac{P_{wZ}}{P_{rR}} &= 4820 \cdot \left(\frac{r_{wZ}}{r_{rR}}\right)^2 \\
\frac{P_{wZ}}{P_{rR}} &= 4820 \cdot \left(\frac{r_{wZ}}{10^5 \cdot r_{wZ}}\right)^2 \\
\frac{P_{wZ}}{P_{rR}} &= 4.8 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}$$

Obwohl die Oberflächentemperatur des roten Riesen deutlich geringer ist als die des weißen Zwerges, sorgt der immens größere Radius für eine deutlich höhere Energieabstrahlung.

Aufgabe 2.3: Ein perfekter Schwarzer Körper ist ein perfekter Energieabsorber. Aber welcher physikalische Prozess ist verantwortlich für den Energietransfer?[22]

(i) Wärmeleitung

(ii) Konvektion

(iii) Induktion

(iv) Strahlung

Aufgabe 2.4: Ein Anteil von etwa 40% Prozent der Schwarzkörperstrahlung der Sonne liegt im sichtbaren Spektralbereich. Wie hoch die Intensität?

Die Oberflächentemperatur der Sonne beträgt 5 800 K. Die spektrale Strahlungsdichte in einem 1 nm Intervall bei einer Wellenlänge von 500 nm und einem Raumwinkel von 1 Steradian beträgt $4.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot Sterad^{-1}}$. Integration über alle Wellenlängen liefert eine Intensität von:

$$I_{sun} = 10^7\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot Sterad}}$$

Integriert man weiter über die gesamte Sonnenoberfläche ($4\,\pi \cdot R_{sun}^2$) findet man eine Leistung von:

$$P_{sun} = 3.82 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$$

Ein Bruchteil erreicht aufgrund des enormen Abstands $r{=}1.5 \cdot 10^{11}$ m die Erde (Radius r_{earth}). Der zugehörige Raumwinkel ist:

$$\Delta\Omega = \frac{\pi \cdot r_{earth}}{4\,\pi \cdot r^2} = 2.5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Sterad}$$

[22] Antwort: (iv)

Das ergibt eine Leistung von

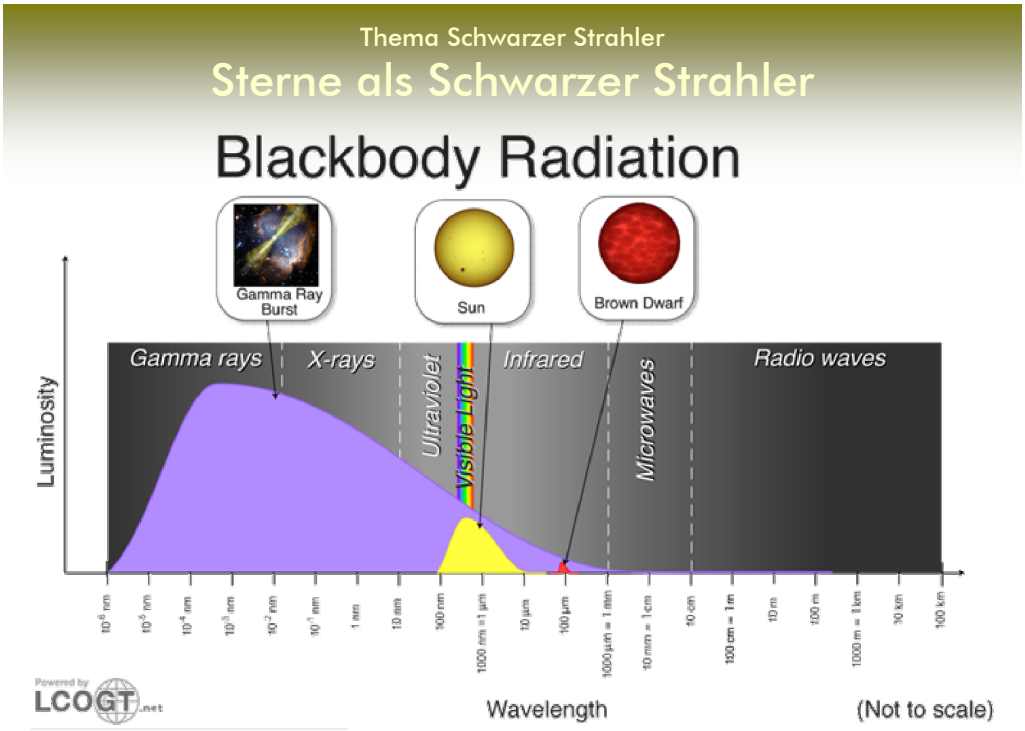
$$P = \frac{P_{sun} \cdot (\Delta\Omega)}{4\,\pi} = 7.8 \cdot 10^{18}\,\mathrm{W}$$

Umgerechnet auf einen Quadratmeter ergibt dies die Solarkonstante. Ohne Berücksichtigung atmosphärischer Absorption entfallen etwa $500\,\mathrm{W/m^2}$ auf den sichtbaren Anteil des elektromagnetischen Spektrums.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. In einer Töpferei wird eine kleine und eine große Vase gebrannt. Welche der Objekte glüht zuerst rot auf?
2. Charakterisieren Sie die Eigenschaften eines Schwarzen Körpers!
3. Jeder Körper strahlt elektromagnetische Energie ab. Warum können wir dann in einem dunklen Raum keine Objekte sehen, die Raumtemperatur haben?
4. Sie sehen, dass eine Herdplatte leuchtet. Welche Temperatur hat die Platte schätzungsweise?
5. Kann man das Leuchten eines 300K heißen Objekts mit dem nackten Auge beobachten, wenn es nur groß genug ist?
6. Gibt es Objekte, die ein Licht ausstrahlen, das nicht dem eines Schwarzen Strahlers entspricht?
7. Wie lautet das Wiensche Verschiebungsgesetz?
8. Wie stark steigt die von einem schwarzen Körper abgestrahlte Leistung, wenn sich seine Temperatur verdreifacht?
9. Was versteht man unter Emissivität?
10. Nennen Sie Einsatzmöglichkeiten für Thermographie!
11. Welche Bedeutung hat die Solarkonstante?
12. Welche Ursachen hat der Treibhauseffekt?
13. Warum werden wir nicht braun, wenn wir stundenlang vor einem Kamin sitzen?

Sterne als Schwarze Strahler[4LP]



Die Sonne zeigt ein elektromagnetisches Spektrum, dass sich gut mit dem Modell eines Schwarzen Strahlers annähern lässt, siehe Abb. 13.30. Warum ist das so? Dazu muss man sich den Aufbau eines Sterns betrachten. Jede Sonne ist ein heißer Gasball, der nahezu undurchsichtig für Strahlung ist. Jedes von außen kommende Photon wird unzählige Male am Gas gestreut oder absorbiert und machen den Stern so zu einem idealen Absorber. Photonen aus dem Inneren, werden auf ihrem Weg nach außen ebenfalls unzählige Male gestreut, absorbiert und re-emittiert, bevor sie die Photosphäre[23] erreichen. In diesem Bereich sinkt die Gasdichte rapide ab und das Gas wird für Strahlung transparent. Millionen Jahre können vergehen, bevor ein Photon aus dem Kern dieses Gebiet erreicht. Dies führt zu einer Thermalisierung von Licht und Gastemperatur und resultiert in einem Spektrum, dass dem eines idealen Schwarzen Körpere entspricht. Gäbe es diese Streuprozesse nicht, hätte das Spektrum einen hohen Anteil hochenergetischer Photonen

[23] *Lexikon:* Die **Photosphäre** ist eine nur wenige hundert Kilometer dicke Schicht nahe der Oberfläche eines Sterns. Daran schließt sich die **Chromosphäre** an. Die Dichte des Gases ist hier so gering, dass diese Schicht nahezu transparent ist, selbst kaum Strahlung produziert und deshalb kaum zum Schwarzkörperspektrum der Sonne beiträgt. Darüber liegt die **Korona**, einer Gasschicht noch geringerer Dichte. Bei einer **Sonnenfinsternis** wird diese Schicht für einen Beobachter auf der Erde sichtbar.

aufgrund der Strahlung, die in den Fusionsprozessen freigesetzt wird.

Aus den optischen Daten kann auf eine Oberflächentemperatur von 5800 K geschätzt werden. Das Spektrum erscheint bis auf kleinere Abweichungen (siehe Kapitel *Der Weg zum Atom*) kontinuierlich. Allerdings kommt es durch die Absorption von Strahlung in der Erdatmosphäre zu charakteristischen Einbrüchen, die im wesentlichen durch molekulare Gase verursacht sind (Abb. 13.31). Wichtig ist unter anderem die hohe Absorption von Ozon im ultravioletten Spektralbereich.

Skin cancer and solar UV radiation [?]: Ultraviolet (UV) radiation in sunlight is the most prominent and ubiquitous physical carcinogen in our natural environment. It is highly genotoxic but does not penetrate the body any deeper than the skin. Like all organisms regularly exposed to sunlight, the human skin is extremely well adapted to continuous UV stress. Well-pigmented skin is clearly better protected than white Caucasian skin. The sun-seeking habits of white Caucasians in developed countries are likely to have contributed strongly to the increase in skin cancer observed over the last century. Skin cancer is by far the most common type of cancer in the U.S.A. and Australia, which appears to be the result of an unnatural displacement of people with sun-sensitive skin to sub-tropical regions. Although campaigns have been successful in informing people about the risks of sun exposure, general attitudes and behaviour do not yet appear to have changed to the extent that trends in skin cancer morbidity and the corresponding burden on public healthcare will be reversed. The relationship between skin cancer and regular sun exposure was suspected by physicians in the late 19th century, and subsequently substantiated in animal experiments in the early part of the 20th century. UV radiation was found to be highly genotoxic, and DNA repair proved to be crucial in fending off detrimental effects such as mutagenesis and cell death. In fact, around 1940 it was shown that the wavelength dependence of mutagenicity paralleled the UV absorption by DNA. In the 1970s research on UV carcinogenesis received a new impetus from the arising concern about a possible future depletion of the stratospheric ozone layer: the resulting increases in ambient UV loads were expected to raise skin cancer incidences. Epidemiological studies in the last decades of the 20th century have greatly refined our knowledge on the aetiology of skin cancers. Analyses of gene mutations in skin carcinomas have identified UV radiation as the cause. The relationship between the most fatal skin cancer, i.e. malignant melanoma and solar UV exposure is, however, still unclear and needs to be clarified to optimise preventive measures and minimise mortality from skin cancers.

Durch die Analyse des Lichtes entfernter Objekte erfahren Astronomen Details über Entfernung, Bewegung, Dichte und chemische Zusammensetzung von Himmelsobjekten. Die Oberflächentemperatur von Sternen wird oft über den Ansatz ermittelt, dass es sich hierbei um Schwarze Strahler handelt. Die Farbe der Sterne kann also als astronomisches Thermometer genutzt werden. Alnitak in der Nähe des Pferdekopfnebels beispielsweise ist ein System aus drei blauen Sternen. Alnitak Aa, ein blauer Überriese (20-facher Durchmesser der Sonne), ist mit einer Oberflächentemperatur von 29 000 Kelvin

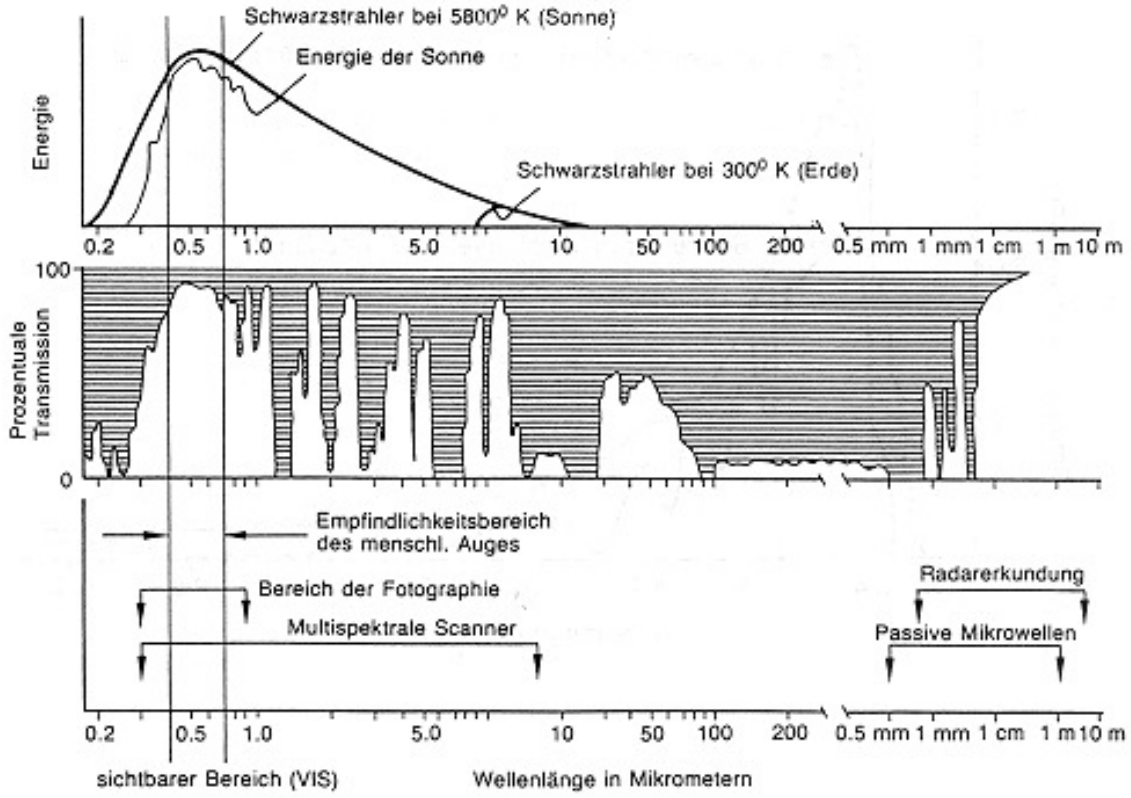


Abb. 13.30: Das elektromagnetische Spektrum und die Spektralbereiche von Fernerkundungssensoren. Zusätzlich sind die Fenster für elektromagnetische Strahlung der irdischen Atmosphäre, sowie die Emission eines Schwarzen Strahlers und der Sonne eingezeichnet [**?**].

der hellste Stern am Himmel (10^5-fache bolometrische Leuchtkraft[24] der Sonne). Man kann die Leuchtkraft L der unterschiedlichen Sterne vergleichen und findet mit Hilfe des Stefan-Boltzmann Gesetzes (Gl. 13.2)

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{R_A^2 \cdot T_A^4}{R_B^2 \cdot T_B^4} \tag{13.3}$$

Das bedeutet, dass ein Stern, der bei gleichem Radius zweimal heisser ist eine 16-fach höhere Leuchtkraft entwickelt. Für Sterne auf der Hauptreihe gilt im Vergleich zur Sonne annähernd [**?**]:

$$\frac{L_{star}}{L_{sun}} \approx \left(\frac{M_{star}}{M_{sun}}\right)^{7/2} \tag{13.4}$$

siehe auch die Masse-zuLeuchtkraft Beziehung in Abb. 13.32. In Einheiten der Sonnen-

[24]Die bolometrische Helligkeit ist die über das gesamte elektromagnetische Spektrum integrierte Leuchtkraft.

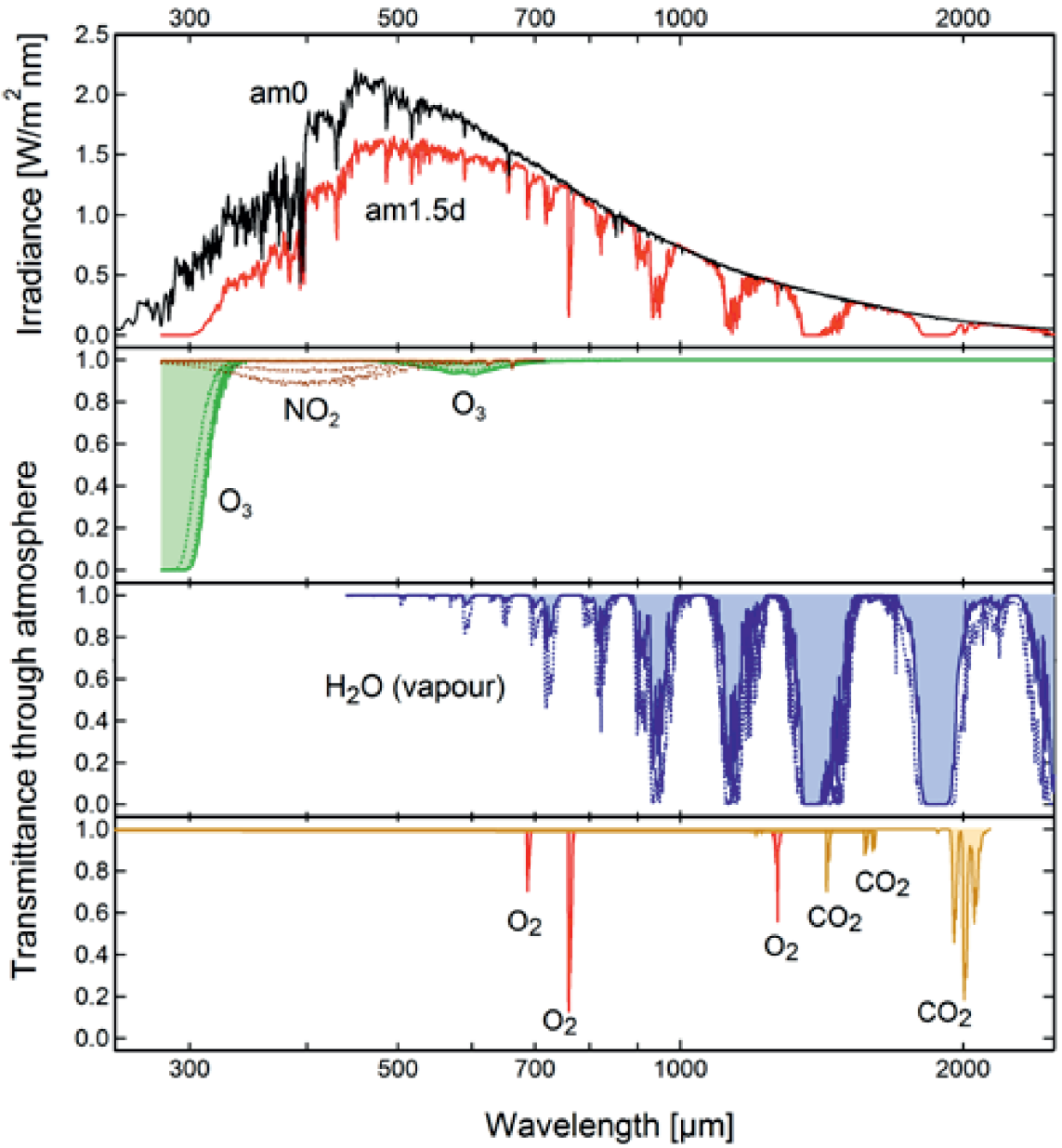


Abb. 13.31: Atmosphärische Effekte, die die Transmission des Sonnenspektrums beeinflussen. Die durchgezogenen Linien stellt die Transmission unter normalen atmosphärischen Bedingungen dar. Die gepunkteten Kurven weisen auf die Variabilität hin: (oben) Die Ozondichte wird im Ozonloch über der Antarktis reduziert (zweite Abb. von oben) NO_2 zeigt sich bei mittlerer und starker Verschmutzung (NO_2 gibt Smog seine bräunliche Farbe) (dritte Abb. von oben) Wasserdampf absorbiert stärker bei feuchten, tropischen Bedingungen (unten) Beitrag durch Mie-Streuung an einem klaren und einem diesigen Tag.

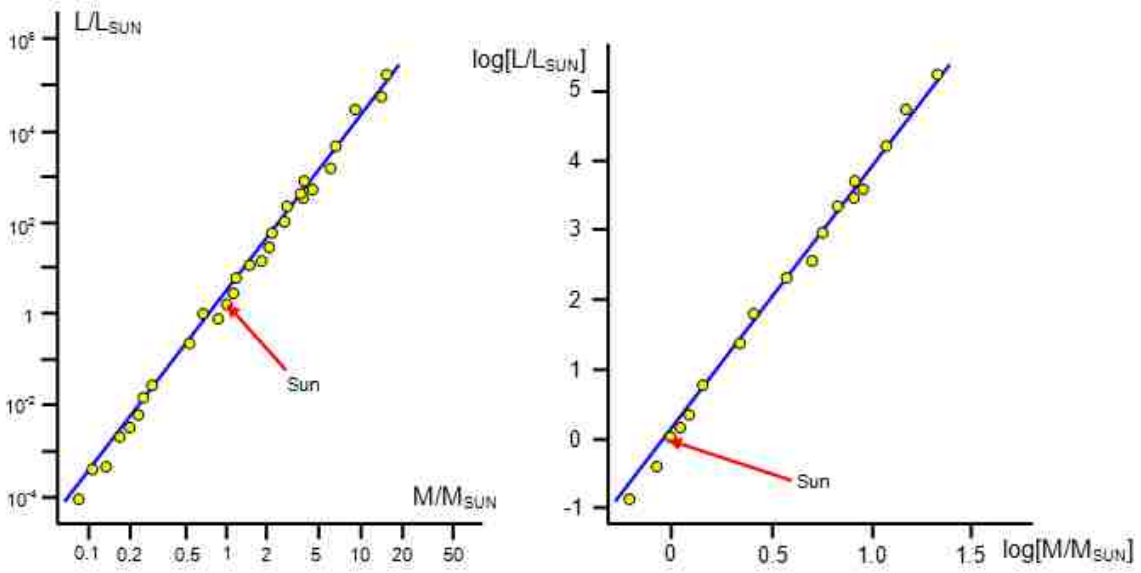
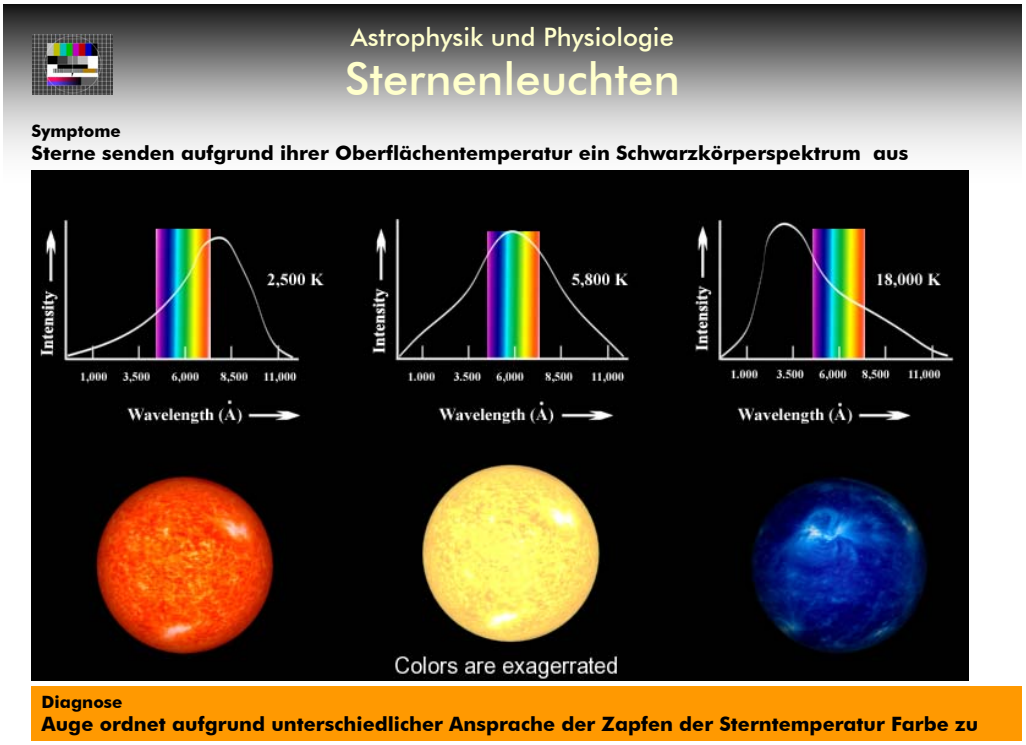


Abb. 13.32: Die Diagramme zeigen zwei Möglichkeiten, die Masse-Leuchtkraft-Beziehung darzustellen. Die Abbildung links zeigt die Leuchtkraft aufgetragen gegen die Masse und in Relation zur Leuchtkraft und Masse der Sonne. Die Abbildung rechts dieselben Daten in einer logarithmischen Darstellung. Die Steigung gibt die Masse-zu-Leuchtkraft Beziehung an [**?**].

masse reduziert sich die Gleichung

$$L_{star} \approx (M_{star})^{7/2} \tag{13.5}$$

Die mit dem Faktor 23 ausgedrückte Leuchtkraft von Sirius weist auf eine 23-fache erhöhte Helligkeit im Vergleich zur Sonne hin.



Der Farbeindruck bei der Betrachtung von Sternen durch ein Teleskop ergibt sich aus der spektralen Intensitätsverteilung im Bereich des optischen Sehens. Warum gibt es eigentlich keine grünen Sterne?

Link to video `Why Aren't There Any Green Stars?`

Hertzsprung-Russell-Diagramm

Unterschiede in der Leuchtkraft roter Sterne führte zur Einteilung in Riesen und Zwerge. Die Einteilung der Sterne nach Leuchtkraft und spektralen Eigenschaften (Spektralklasse)[25] führte zur Entwicklung eines Diagramms benannt nach den Forschern Hertzsprung und Russell, siehe Abb. 13.33. Das Hertzsprung-Russell-Diagramm [**?**] ist das wichtigste Zustandsdiagramm der Astronomen zur Klassifikation der Sterne. Der Spektraltyp eines Sterns ist im Wesentlichen von seiner Oberflächentemperatur bestimmt. Die Einträge

[25] *Lexikon:* Die **Spektralklasse** gibt Auskunft über die Oberflächentemperatur der Sterne. Mit abnehmender Temperatur[26] werden Sterne in sieben Spektralklassen O (25-70 kK), B (11-25 kK), A (7.5-11 kK), F (6-7.5 kK), G (5-6 kK), K (3.5-5 kK) und M (2-3.5 kK) unterteilt (blau bis rotorange). Merksatz: *Offenbar Benutzen Astronomen Furchtbar Gerne Komische Merksätze.* Um die Angabe der Spektralklasse zu präzisieren, wird jede Spektralklasse zusätzlich in zehn Gruppen mit den Ziffern 0 bis 9 unterteilt. Beispielsweise handelt es sich bei Sirius um einen A2-Stern.

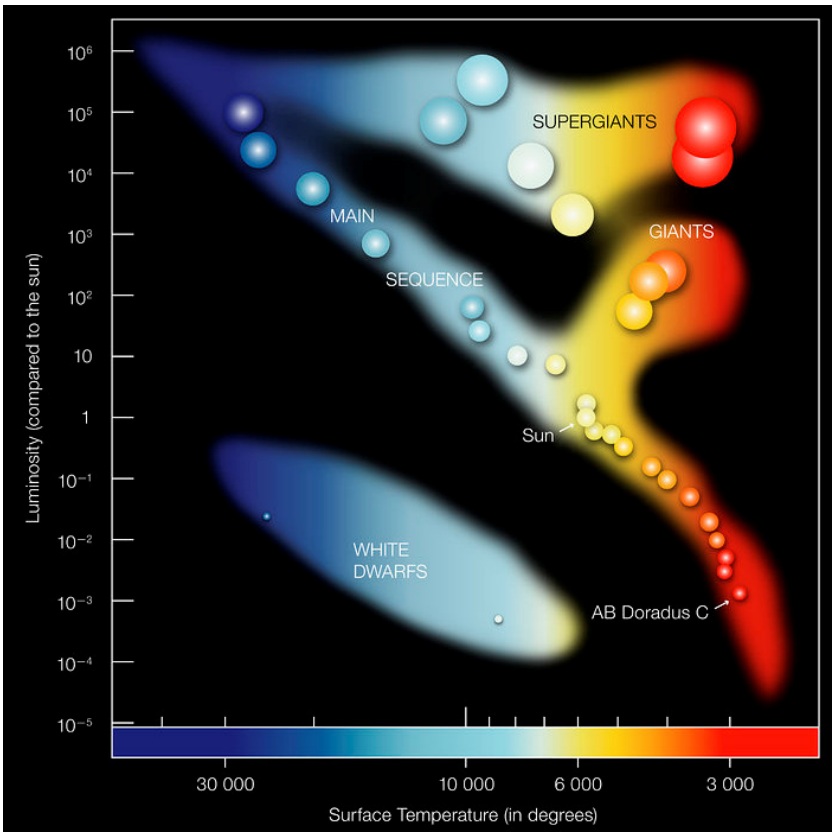


Abb. 13.33: Das Hertzsprung-Russell-Diagramm zeigt die Entwicklungen, die die Sterne durchlaufen können [**?**].

im Diagramm sind dabei Schnappschüsse im Leben der Sterne. Man stellt fest, dass die Sterne im Diagramm in bestimmter Weise angeordnet sind. Die meisten Sterne liegen auf der so genannten Hauptreihe. Das deutet darauf hin, dass der Hauptanteil der Sterne im Universum eine ähnliche Entwicklung durchlaufen. Eine ganze Reihe von Sternen findet man in einem Bereich, der von der Hauptreihe abzweigt. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass die Leuchtkraft bei abnehmender Temperatur zunimmt. Das ist nur möglich, wenn sich der Radius des Sterns stark vergrößert. Das sind die roten Riesensterne. Weitere Informationen im Kapitel *Der Weg zum Atom*.

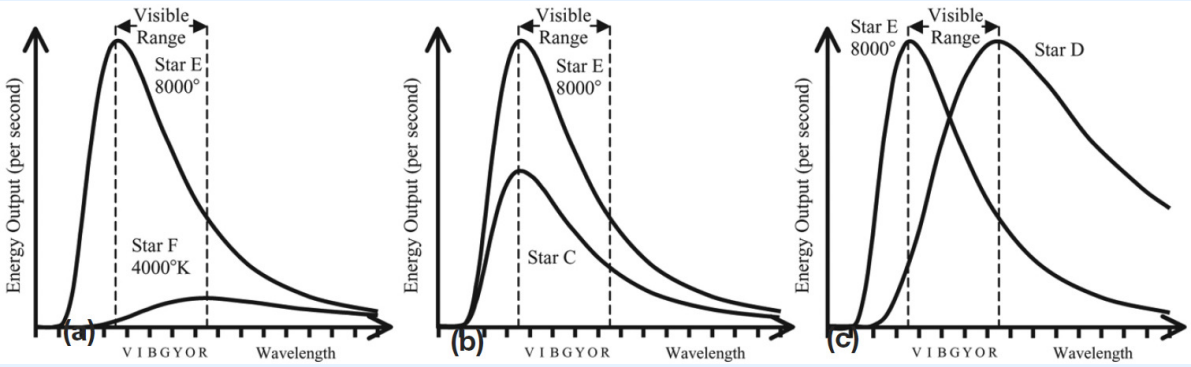


Abb. 13.34: zu Aufbabe 3.1

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Abbildung 13.34 vergleicht Spektren unterschiedlicher Sterne (C-F). Dargestellt ist die Leuchtkraft als Funktion der Wellenlänge. Welche Aussagen können Sie bezüglich des Farbeindrucks und der Größe des Sterns, seiner Temperatur und Energieabgabe machen?

- Die Sonnen C und E weisen ein Maximum der Emission bei kürzeren Wellenlängen auf und werden im Teleskop als blau-violett beobachtet.

- Die Sonnen D und F dagegen zeigen ein Maximum bei längeren Wellenlängen und erscheinen im Teleskop als rötliche Sterne.

- Das Auge kann Licht im Bereich von 380 bis 780 nm nachweisen. Mit dieser Information lassen sich die zugehörigen Wellenlängen der Maxima aus der Abbildung ableiten. Wenn die Wellenlängenskala eine Hunderter Einteilung hat, ergeben sich Wellenlängen von 350 und 750 nm. Aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz ergeben sich Temperaturen von 8 300 K für die Sonnen C, E und und 3900 K für D, F.

- Die Sonnen C und E haben eine vergleichbare Oberflächentemperatur. Trotzdem hat die Sonne E eine höhere Leuchtstärke. Das Stefan-Boltzmann Gesetz (Gl. 13.2) gibt die Antwort: Der Stern E hat einen größeren Durchmesser.

- Schätzt man das Integral der Emissionskurven von D und E ab, ergibt sich, dass D -obwohl kühler- einen höhere Leuchtkraft aufweist. Auch hier muss man schließen, dass die Sonne D größer ist als E.

  Für den Vergleich der Luminositäten L_D, L_E der Sonnen D und E kann man die Größenverhältnisse aus dem Stefan-Boltzmann Gesetz mit ε_{th}=1 für beide Sterne

abschätzen:

$$\begin{aligned} L_D &> L_E \\ \varepsilon_{th} \cdot \sigma_{SB} \cdot A_D \cdot T_D^4 &= \varepsilon_{th} \cdot \sigma_{SB} \cdot A_E \cdot T_E^4 \\ A_D \cdot T_D^4 &= A_E \cdot T_E^4 \\ R_D^2 \cdot T_D^4 &= R_E^2 \cdot T_E^4 \\ R_D &> R_E \cdot \frac{T_E^2}{T_D^2} \\ R_D &> R_E \cdot \left(\frac{8000\,\mathrm{K}}{4000\,\mathrm{K}}\right)^2 \\ R_D &> 4 \cdot R_E \\ A_D = 4\,\pi \cdot R_D^2 &> 16 \cdot A_E \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2: Zwei Sterne S_1, S_2 gleicher Größe weisen Oberflächentemperaturen von $T_2 = 2 \cdot T_1$ auf. Wie ist das Verhältnis L_2/L_1 in der Leuchtkraft[27]?

(a) 1/16

(b) 1/8

(c) 2

(d) 4

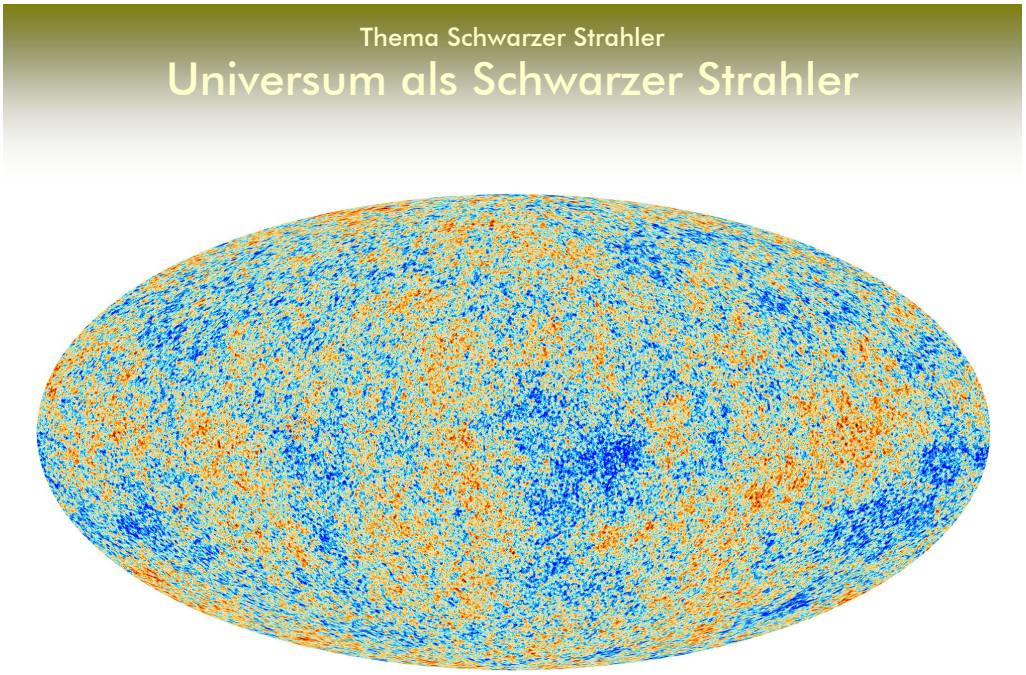
(e) 16

[27] Antwort: (e)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie lautet der Maxwellsche Gleichverteilungssatz?
2. Welche Oberflächentemperatur hat die Sonne?
3. Was versteht man unter Leuchtkraft?
4. Hat ein gelber oder ein roter Sonne eine höhere Oberflächentemperatur, ?
5. Was würden Sie beobachten, wenn Sie die Temperatur eines Körpers von $10^3\,\mathrm{K}$ auf $10^6\,\mathrm{K}$ erhöhen würden.
6. Warum muss ein kälterer Stern groß sein, um eine hohe Leuchtkraft zu haben?
7. Warum hat ein massereicher Stern eine hohe Leuchtkraft?
8. Warum haben Sterne mit einer hohen Leuchtkraft nur eine geringe Lebensdauer?
9. Welche Bedeutung hat das Hertzsprung-Russell Diagramm?
10. Was versteht man unter der Hauptreihe im Hertzsprung-Russell Diagramm?

Universum als Schwarzer Strahler^{4LP}



Sir Arthur Eddington states that, philosophically, the notion of a beginning of the present order of Nature is repugnant to him. I would rather be inclined to think that the present state of quantum theory suggests a beginning of the world very different from the present order of Nature. Thermodynamical principles from the point of view of quantum theory may be stated as follows: (1) Energy of constant total amount is distributed in discrete quanta. (2) The number of distinct quanta is ever increasing. If we go back in the course of time we must find fewer and fewer quanta, until we find all the energy of the universe packed in a few or even in a unique quantum [**?**].

Georges Lemaitre, 1931

Der größte Schwarze Körper ist das Universum. Seine zugehörige Emission nennt man die Kosmische Hintergrundstrahlung. Der Ursprung der Strahlung lässt sich zurück datieren auf den Moment in dem der Kosmos für elektromagnetische Strahlung durchsichtig wurde. Die zugehörige kosmologische Rotverschiebung (Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*) ist z=1100. Damit ist die Kosmische Hintergrundstrahlung die älteste Signatur, die Menschen je gemessen haben! Das war grob vierhundert tausend Jahre nach dem

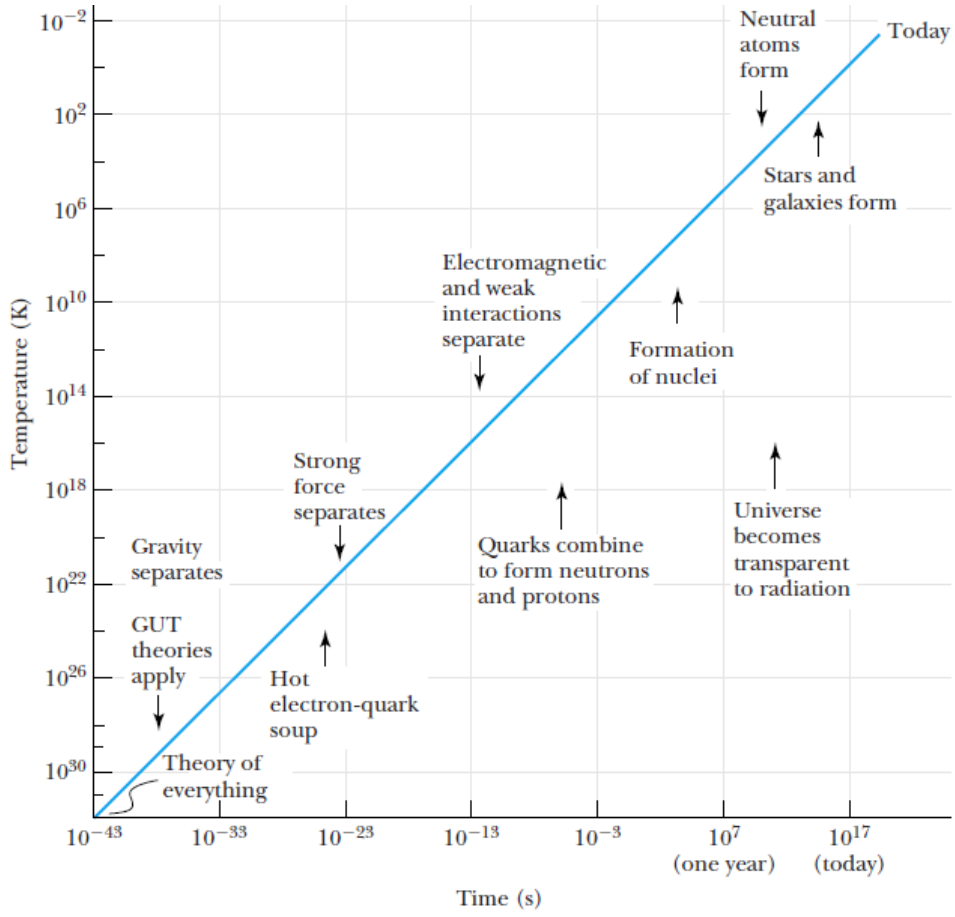


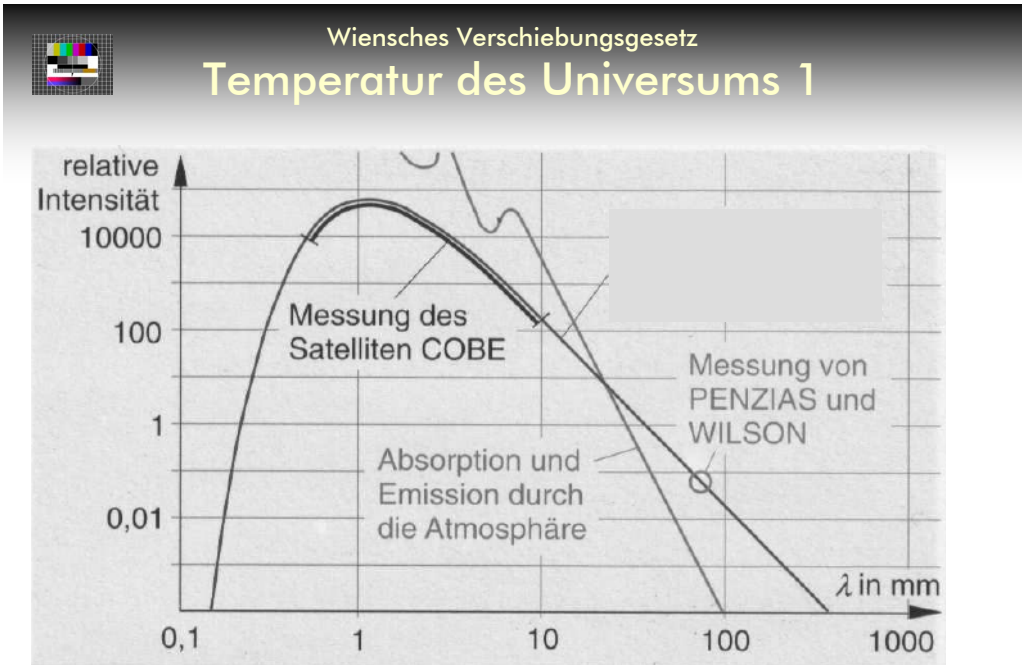
Abb. 13.35: Die Temperatur des Universums als Funktion der Zeit seit Urknall. Die Zeitmarken weisen auf bestimmte Stadien in der Entwicklung des Kosmos hin. Man beachte die logarithmischen Skalen [**?**].

Urknall.[28] Damals hatte das Universum eine Temperatur von 3 000 K. Der Strahlungshintergrund wurde von Gamow und Alpher als Folge des Urknalls vorhergesagt [**?**]. Die Hintergrundstrahlung ist damit ein Fingerabdruck des jungen Universums. Ausgelöst durch die Expansion des Universums, hat sich das Schwarzkörperspektrum vom roten in den Mikrowellenspektralbereich verschoben (siehe Vorlesung *Relativistischer Dopplereffekt*). Abb. 13.35 zeigt die Zeitentwicklung der Temperatur des Universums seit dem Urknall.[29]

[28] Im Jahr 1928 erweiterte Paul Dirac die Schrödingergleichung unter Einbeziehung relativistischer Effekte. Die Theorie sagte die Existenz von Antimaterie voraus. Zu jedem Materieteilchen gibt es ein entsprechendes Antiteilchen. Beide Materiearten wurden im Urknall erzeugt. Aber wo die die Antimaterie geblieben, die eigentlich die Hälfte des Universums ausmachen sollte? Lesen Sie dazu [**?**].

[29] *Lexikon:* Das Urknall-Modell des Astronomen Lemaître beschreibt ein dynamisches Universum, dessen Anfang auf ein heißes, dichtes und extrem kleines Volumen zurückzuführen ist. Damit hat der Kosmos einen Anfang und ist nicht statisch. Die Hinweise auf einen Urknall sind:

- dass der Anteil an Helium im Universum gut mit den Vorhersagen übereinstimmt.
- die Kosmische Hintergrundstrahlung [**?**]
- Supernova-Explosionen vom Typ IA [**?**][30]
- die primordiale Nukleosynthese [**?**]
- die Fluchtbewegung des Galaxien
- Verteilung und Anzahl der Galaxienhaufen



Penzias and Wilson looked for dung[31] but found gold, which is just opposite of the experience of most of us.

Ivan Kaminow, Kollege von Penzias

Kosmische Hintergrundstrahlung

Die beiden -sie hießen Arno Penzias [**?**] und Robert Wilson- wollten 1965 mit einer großen Funkantenne arbeiten, die den Bell Laboratories gehörte und in Holmdel, New Jersey stand. Dabei störte sie aber ein ständiges Hintergrundgeräusch - ein ununterbrochenes Zischen, das jede experimentelle Arbeit unmöglich machte. Es war ein erbarmungsloser unbestimmter Lärm, der Tag und Nacht, zu allen Jahreszeiten, von allen Stellen des Himmels kam. Ein Jahr lang versuchten die jungen Astronomen alles, was ihnen in den Sinn kam, um die Ursachen des Geräusches ausfindig zu machen und zu beseitigen. Sie überprüften sämtliche elektrischen Geräte. Sie bauten Instrumente um, prüften Stromkreise, spielten mit Kabeln herum, staubten Stecker ab. Sie kletterten in die Antennenschüssel und brachten Klebeband auf allen Schweißnähten und Nieten

[31] Penzias und Wilson untersuchten verzweifelt, die Quelle der vermeintlichen Störstrahlung zu identifizieren. Sie vermuteten schließlich, dass möglicherweise der Kot von Tauben, die sich in der großen Hornantenne (siehe Abb. 13.36) tummelten, verantwortlich sei. Sie versuchten die Vögel zu vertreiben und verbrachten Stunden damit, den Taubenmist aus der Vorrichtung zu entfernen.

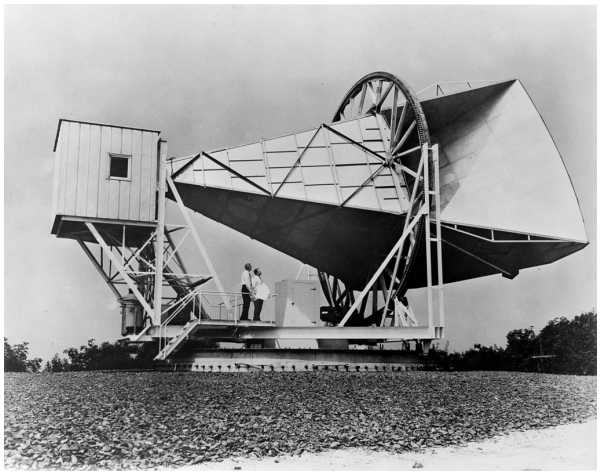


Abb. 13.36: Penzias und Wilson und ihre Hornantenne, mit der die Kosmische Hintergrundstrahlung 1965 entdeckt wurde [**?**].

an. Sie kletterten noch einmal in die Schüssel, dieses Mal mit Besen und Bürsten, und schrubbten alles ab, was sie in einem späteren Fachaufsatz als *weißes dielektrisches Material* bezeichneten, was aber gemeinhin Vogelscheiße genannt wird. Aber was sie auch versuchten, es nützte nichts [**?**].

Bill Bryson - Ein kurze Geschichte von fast allem

Im Wellenlängenbereich zwischen 0.001 und 10 m ist die Atmosphäre wie im optischen Bereich für elektromagnetische Strahlung durchlässig, siehe Abb. 13.37. Das ist der Bereich in dem die Radioastronomie arbeitet. Eher durch Zufall wurde bei Messungen die Hintergrundstrahlung entdeckt. Wilson und Penzias untersuchten Radioquellen in der Milchstraße und fanden ein Mikrowellenrauschen, dass gleichmäßig aus allen Richtungen zu kommen schien [**?** **?** **?**].[32] Die Forscher hatten ein Signal gefunden das zwanzig Jahre vorher vorausgesagt worden war [**?** **?** **?**]. Die Wellenlänge, bei der die Forscher die Strahlung nachwiesen, war 7.35 cm. Das entspricht 16.5 μeV.[33] Zum Vergleich: Ein Photon im sichtbaren Spektralbereich hat eine Energie in der Größenordnung von 2 eV. Die Anpassung an ein Schwarzkörperspektrum ergab eine Temperatur von 2.7 K und wurde als Temperatur des Universums identifiziert. Abb. 13.38 zeigt wie empfindlich die Kurve der Schwarzkörperstrahlung auf geringste Temperaturunterschiede ist.

Historisch gesehen ergaben sich erste experimentelle Hinweise schon durch Messungen von McKellar [**?**], der die Temperatur von CN-Molekülen im interstellaren Medium aus dem Rotationsspektrum mit 2.3 K bestimmte [**?**], siehe auch [**?**]. Wie wurde die Messung durchgeführt? In den Spektren verschiedener Sterne fanden sich Absorptionslinien des Moleküls CN. Rotiert das Moleküls nicht, findet man eine Linie bei einer Wellenlänge von 387.46 nm. Befindet sich CN im ersten angeregten Rotationszustand (Kapitel *Moleküle*)

[32] The Nobel Prize in Physics 1978 was divided, one half awarded to Pyotr Leonidovich Kapitsa *for his basic inventions and discoveries in the area of low-temperature physics*, the other half jointly to Arno Allan Penzias and Robert Woodrow Wilson *for their discovery of cosmic microwave background radiation.*

[33] Prüfen Sie das nach!

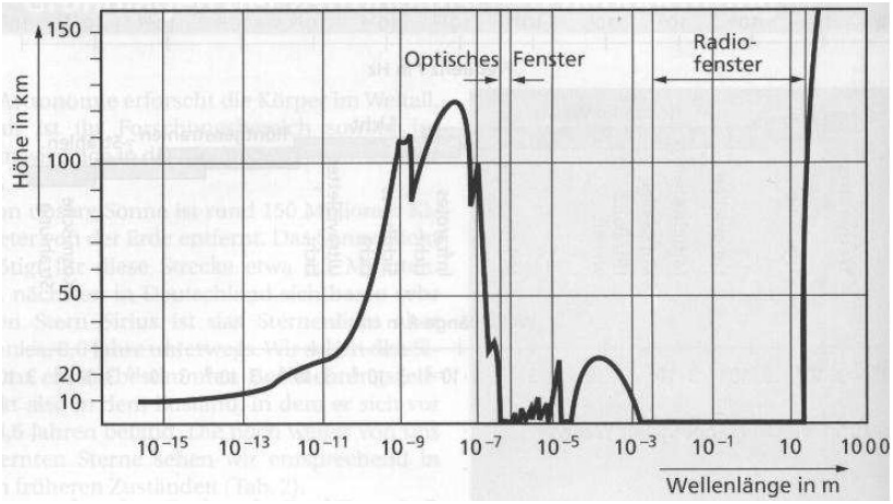


Abb. 13.37: Absorption elektromagnetischer Strahlung verschiedener Wellenlängen durch die Erdatmosphäre. Die Kurve gibt diejenige Höhe an, bei der die einfallende Strahlung auf 10% ihrer ursprünglichen Intensität abgefallen ist [**?**].

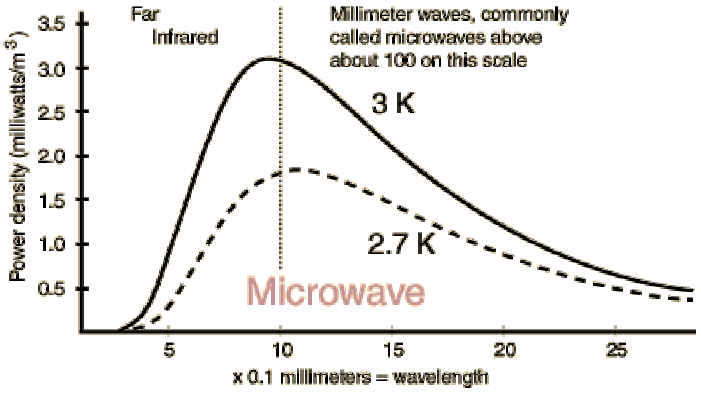


Abb. 13.38: Vergleich des Spektrums eines Schwarzen Strahlers bei 2.7 und 3.0 K [**?**].

verschiebt sich die Linie nach 387.40 nm. Für den Stern Zeta Ophiuchi konnten beide Linien aufgelöst und aus dem Verhältnis der Linienstärke die Umgebungstemperatur bestimmt werden.[34] Die Ergebnisse fanden Eingang in den Herzberg,[35] das Standardwerk der Molekülphysik [**?**]. Allerdings wurde die Tragweite der Messung damals nicht

[34]Tatsächlich kann man diese Aussage nur unter der Annahme treffen, dass sich die Moleküle im thermischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung befinden. Das ist im interstellaren Medium aufgrund der geringen Dichte ($10^{-4} - 10^5$ Atome/cm^3) nicht unbedingt gegeben, da die Teilchen durch Stöße oder Strahlung angeregt werden, die möglicherweise nicht einem thermisch Spektrum entsprechen. Wie sich herausstellte, liegt die Wellenlänge von 2.6 mm für den Rotationsübergang in der Nähe des Maximums des Mikrowellenhintergrunds. CN ist damit ein empfindliches Thermometer für diese Strahlung.

[35] The Nobel Prize in Chemistry 1971 was awarded to Gerhard Herzberg *for his contributions to the knowledge of electronic structure and geometry of molecules, particularly free radicals.*

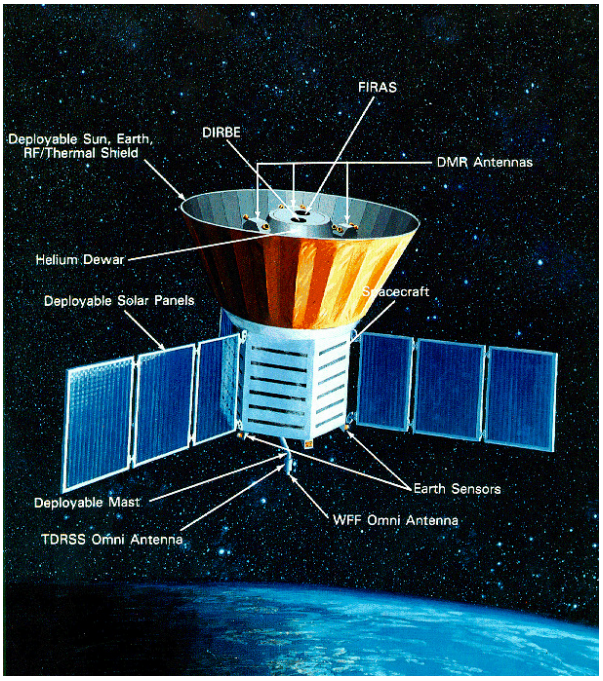


Abb. 13.39: Zeichnung des Satelliten Cosmic Background Explorer (COBE) der zwischen 1989 bis 1993 Messungen zur Kosmischen Hintergrundstrahlung durchführte.

erkannt. Herzberg bemerkte: From the intensity of ration of the lines with $K = 0$ and $K = 1$ a rotational temperature of 2.3 kelvin follows, which has of course only a very restricted meaning. DENKSTE! Um den Beitrag der Hintergrundstrahlung einordnen zu können, der Hinweis auf einen verrauschten Fernsehkanal. Etwa 1% dieses Rauschsignals wird durch die Hintergrundstrahlung hervorgerufen.

Also from Adams' results on the interstellar CN lines, it can be calculated that the rotational temperature of interstellar space is about 2 K.

Andrew McKellar, 1941

Aus Sicht eines Experimentalphysikers im Labor ist eine Temperatur von 3 K ziemlich tief. Um die Mikrowellenstrahlung nachweisen zu können bedarf es beispielsweise einer Referenzprobe, die, um aussagekräftige Werte liefern zu können, in flüssiges Helium getaucht wird. Aus astrophysikalischer Sicht sind 3 K eine ziemlich hohe Temperatur. Umgerechnet ergibt sich daraus eine Energiedichte von $1\,\mathrm{eV/cm^3}$. Das entspricht in etwa dem Wert, die die Milchstraße über das Licht der Sterne, kosmische Strahlung, magnetische Felder etc. liefert. Im Raum zwischen den Galaxien sinkt die Energiedichte um zwei bis drei Größenordnungen. Da die Energiedichte des Mikrowellenhintergrunds nicht absinkt ist diese Strahlung hier die dominante Strahlungskomponente.

Kurz nach der Entdeckung der Mikrowellenhintergrundstrahlung wurden Messungen durchgeführt, die nach richtungsabhängigen Anisotropien suchten [**?**]. Die Idee war, dass sich geringe Unterschiede unmittelbar nach dem Urknall in Folge der Expansion zu merklichen Fluktuationen ausbilden, die möglicherweise zur ausgedehnten Struktur im

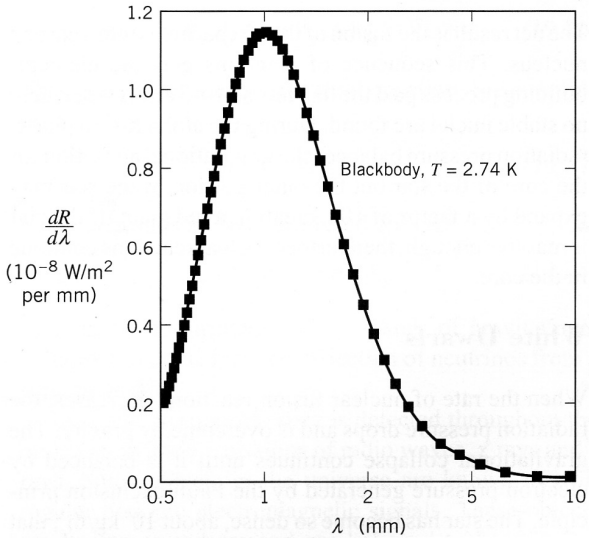


Abb. 13.40: Ergebnis der Messung der kosmischen Hintergrundstrahlung durch den Satelliten COBE [**?**]

Universum führen, siehe [**?**]. Das Instrument von Partridge und Wilkinson war allerdings zu unempfindlich, um einen Nachweis zu erbringen.[36]

Das Messergebnis von Wilson und Penzias wurde durch Ballonmessungen [**?**] und dem Satelliten COBE[37] (Abb. 13.39) bestätigt. Das Ergebnis der Messungen zeigt Abb. 13.40. COBE lieferte von 1989 bis 1993 Daten zur Kosmischen Hintergrundstrahlung [**?**]. Abb. 13.41 zeigt das COBE Resultat, das die Zeitschrift *Physics Today* als Titelbild veröffentlichte. Zu sehen sind wichtige Stufen der Auswertung. Die Milchstraße entspricht dem Äquator in den Darstellungen. Verschiedene Korrekturen wurden durchgeführt. Da ist zum Einen die Dipolasymmetrie, die durch die Bewegung des Sonnensystems relativ zur weit entfernten Materie im Universum entsteht (oberes Bild). Zum Zweiten muss die Emission der Milchstraße abgezogen worden (Mitte). Die untere Abbildung liefert schließlich das von diesen größeren Einflüssen bereinigte Spektrum der Temperaturverteilung im Kosmos. Aus den Messungen ergeben sich zwei wichtige Werte:

Temperatur des Universums [**?**]: $T_{universe} = (2.72548 \pm 0.00057)\,\mathrm{K}$

Photonendichte im Universums [**?**]: $n_{universe} = (410.72 \pm 0.26)\,\mathrm{cm}^{-3}$

Setzt man $T_{universe}$ in das Stefan-Boltzmann Gesetz ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} I_{th} &= \sigma_{SB} \cdot A_0 \cdot T_K^4 \\ I_{th} &= (5.67 \cdot 10^{-8}\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^4) \cdot (1.0\,\mathrm{m}^2) \cdot (2.7\,\mathrm{K})^4 \\ I_{th} &= 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W/m}^2 = 3\,\mu\mathrm{W/m}^2 \end{aligned} \tag{13.6}$$

[36] Die Messung der Anisotropie der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung erfolgte erstmals durch ein Instrument an Bord eines U2-Flugzeugs der NASA [**? ? ?**].

[37] COBE: Cosmic Background Explorer

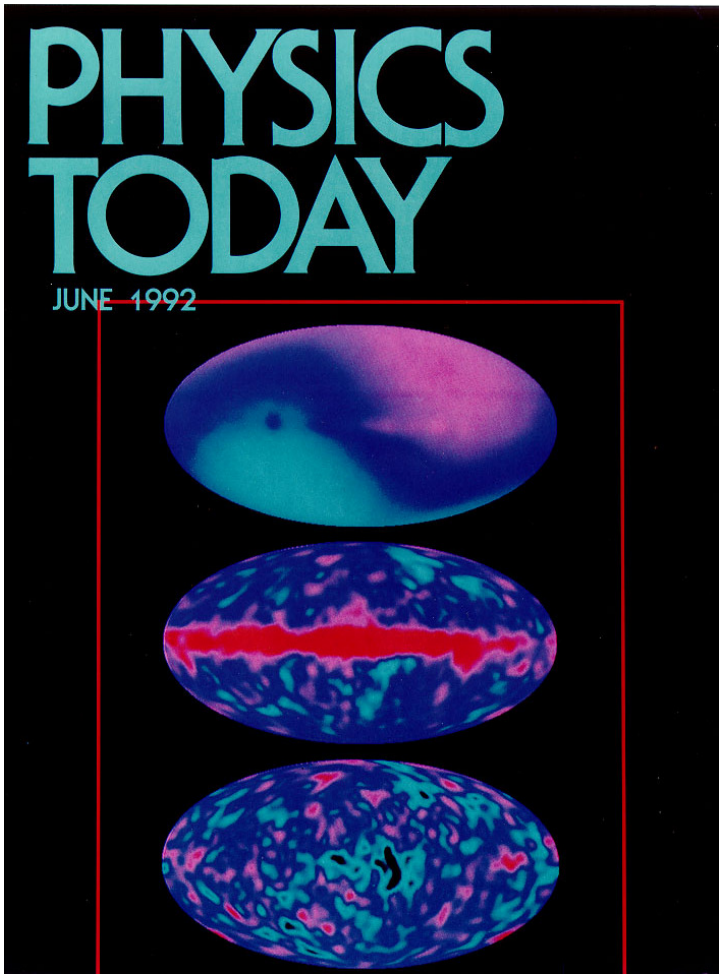


Abb. 13.41: Titelbild der Wissenschaftszeitschrift *Physics Today* von 1992 mit Ergebnissen der COBE Mission.

Zum Vergleich strahlt eine Tiefkühlpizza (-18 °C oder 255 K) von 30 cm Durchmesser mit 33 W/ m^2. Bestimmt man die Temperatur des Universums stellt man fest, dass es nur geringe Temperaturunterschiede $\Delta T_{universe}$ als Funktion der Beobachtungsrichtung gibt. Die in Abb. 13.41 sichtbaren Farbunterschiede deuten die ermittelten Temperaturunterschiede an. Die Unterschiede sind auf einem Niveau[38] von etwa $6 \cdot 10^{-6}$. Die geringe Streuung der Messwerte deutet darauf hin, dass der gesamte Kosmos im thermischen Gleichgewicht ist. Aufgrund der enormen Entfernungen ist dieses Resultat mehr als überraschend.[39] [40]

[38] Die Forscher hatten Glück. Wären die geringe Änderungen im Signal der Kosmischen Hintergrundstrahlung nur drei bis fünfmal geringer gewesen, hätte COBE das Signal nicht auflösen können [**?**].

[39] The Nobel Prize in Physics 2006 was awarded jointly to John C. Mather and George F. Smoot *for their discovery of the blackbody form and anisotropy of the cosmic microwave background radiation.*

[40] The Nobel Prize in Physics 2019 was awarded *for contributions to our understanding of the evolution of the universe and Earth's place in the cosmos* with one half to James Peebles *for theoretical discoveries in physical cosmology*, the other half jointly to Michel Mayor and Didier Queloz *for the discovery of an exoplanet orbiting a solar-type star*

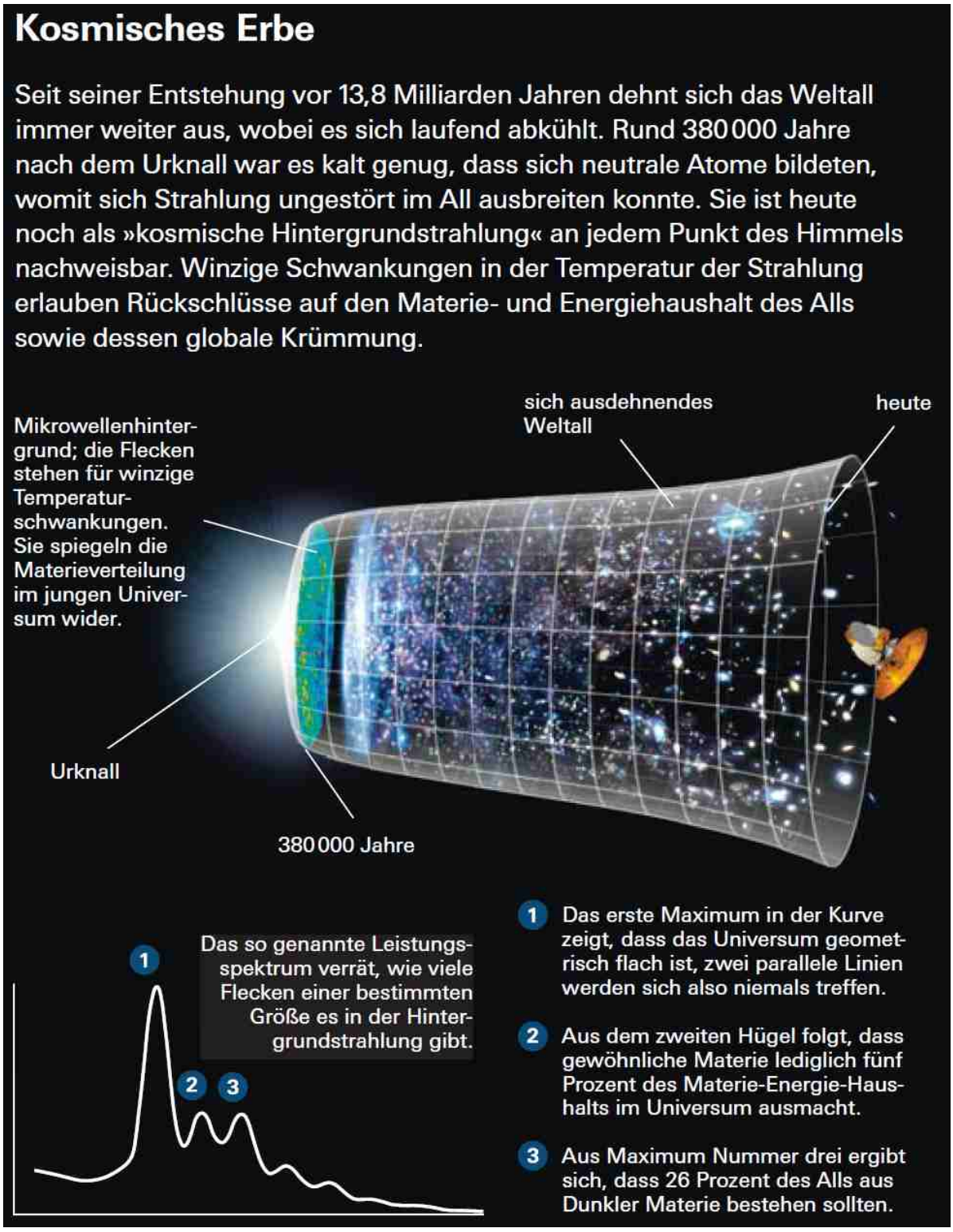


Abb. 13.42: Geschichte des Universums [**?**].

	Photon	Baryon
Energiedichte	$4.5 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg/m^3}$	$2.2 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg/m^3}$
mittlere Energie	$230\,\mu\mathrm{eV}$	$936\,\mathrm{MeV}$
Dichte	$1.9 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{m^{-3}}$	$2.1 \cdot 10^{-36}\,\mathrm{m^{-3}}$

Tab. 13.3: Verhältnis der Photonen-zu-Baryonendichte. Die Photonendichte beträgt 413 Photonen pro cm^3. Grob abgeschätzt kommt man auf eine Milliarde Photonen des Kosmischen Hintergrunds ein Baryon, d.h. ein Proton oder ein Neutron.

Aus den Messungen kann man folgende Abschätzung für das Verhältnis Photon-zu-Baryon ableiten. Die Strahlung im Kosmos ist dominiert von der Kosmischen Hintergrundstrahlung. Die Emission aller Sterne im Universum ist dagegen vernachlässigbar. Die Zahlen sind in Tab. 13.3 aufgeführt, wobei wir für die mittlere Photonenenergie des Universums $3\,k_B{\cdot}T_{universe}$=230 μeV einsetzen. Damit ergibt ein Verhältnis von 10^9 Photonen pro Kernteilchen. Dieser Wert hat sich über die Lebensdauer des Universums kaum geändert. Das Photon-zu-Baryon Verhältnis ist nach Weinberg [**?**]: the most important quantitative conclusion to be drawn from measurements of the microwave radiation back-ground. Warum? Galaxien und Sterne konnten sich erst formen, als die Temperatur des Universums unter 3000 K abgefallen war. Erst ab diesem Moment konnten sich Atome bilden, wird Materie für Strahlung transparent und die Gravitation beginnt gegenüber dem nach außen gerichteten Strahlungsdruck zu dominieren. Bei 10^9 Photonen/Baryon wäre bei $T_{universe} > 3000\,\mathrm{K}$ eine kritische Jeans-Masse[41] von $10^6 \cdot M_{galaxy}$ erforderlich. Hierbei ist M_{galaxy} die typische Masse einer großen Galaxie. Mit der Bildung von Atomen und einem transparenten Universum sinkt die kritische Jeans-Masse auf etwa $10^{-6} \cdot M_{galaxy}$, wodurch die Entstehung von Sternen und Galaxien durch einen Gravitationskollaps ermöglicht wird.

Neben der Bestimmung der Temperatur des Universums liefern die Messungen weitere Erkenntnisse über unseren Kosmos. Wenn man die Ergebnisse der Weltraumteleskope COBE, WMAP[42] [**? ?**] und PLANCK mit anderen kosmologischen Experimenten abgleicht (Abb. 13.43 [**?**]), kann man Aussagen darüber treffen, wie viel Dunkle Materie[43] sich in unserem Universum befindet, siehe Abb. 13.42.

[41] *Lexikon:* Die Jeans-Masse wird in der Theorie der Sternentstehung verwendet und beschreibt ab welchen Massen Gaswolken des interstellaren Mediums gravitativ instabil werden und zu Protosternen und jungen stellaren Objekten kollabieren.

[42] WMAP: Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

[43] *Lexikon:* Erste Hinweise auf eine neue Materieform im Universum lieferten astronomische Beobachtungen von Gravitationseffekten. Licht, das an Galaxien vorbei fliegt, wurde stärker abgelenkt als berechnet (siehe Kapitel *Allgemeine Relativitätstheorie*). Das deutete darauf hin, dass es unsichtbare Masse oder **Dunkle Materie** (Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*) geben muss, die das Licht anzieht. Diese Materieform tritt durch ihre Gravitation in Erscheinung, ist aber nicht sichtbar.

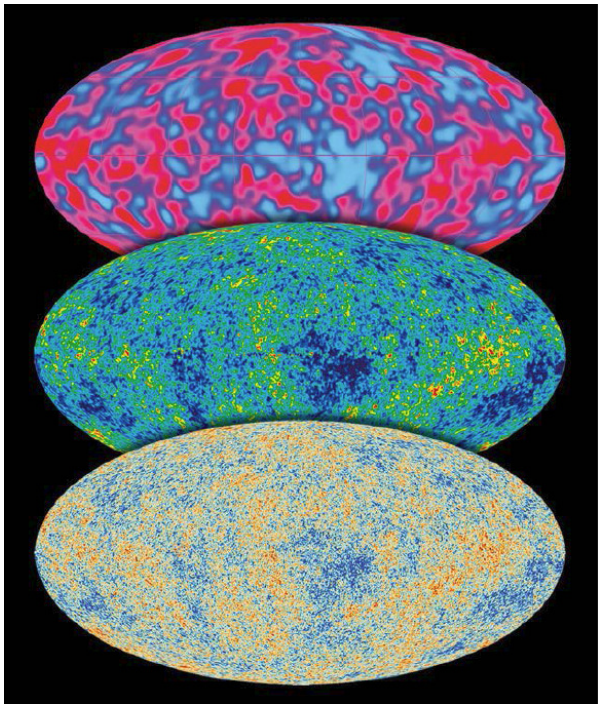


Abb. 13.43: Temperaturschwankungen des Kosmischen Mikrowellenhintergrunds, gemessen mit COBE (1989-1993), WMAP (2001-2010) und PLANCK (2009-2013) (von oben nach unten). Während es COBE zum ersten Mal gelang, die Fluktuationen nachzuweisen, ermöglichte es Planck, diese schließlich mit größtmöglicher Auflösung zu messen [**?**].

Am Anfang war der Urknall[44]

The scientist's problem is to recognize basic facts even though they are obscured by a wealth of extraneous material, and then to apply creative imagination in their interpretation. This Karl Jansky did.[45]

Cyril Jansky, Vater von Karl Jansky

Eine der größten Überraschungen war, dass die Position der stärksten Radioquellen nicht mit den optisch beobachteten Quellen übereinstimmte. Das verdeutlicht die Bedeutung der Radioastronomie. Man erhält neue astronomische Informationen über den Kosmos. Zu nennen ist in diesem Zusammenhang die Forschung von J. S. Hey, der

- feststellte, dass die Sonne Strahlung im Meterbereich aussendet [**?**]. Die Ursache sind aktive Sonnenflecken. Sonnenforschung lässt sich also auch im Radiobereich durchführen.

- beobachtete, dass Meteore Ionisationsspuren in der oberen Atmosphäre hinterlassen [**?**]. Dies eröffnet Möglichkeiten Meteore und die obere Atmosphäre mit Radiowellen zu erforschen.

[44] Der Name Urknall wurde im Jahr 1949 vom Astronomen Fred Hoyle in einer BBC-Radiosendung geprägt.

[45] Karl Jansky baute eine Antenne, die auf Rädern gedreht werden konnte (Modell T, genannt *Jansky's merrygo-round*) um Quellen von Funkstörungen aufspüren. Seine Entdeckung von Radiosignalen aus dem Zentrum der Milchstraße gaben den Anstoß zur Radioastronomie. Die Einheit Jansky wird in der Radioastronmie als Einheit der Radiowellenintensität verwendet.

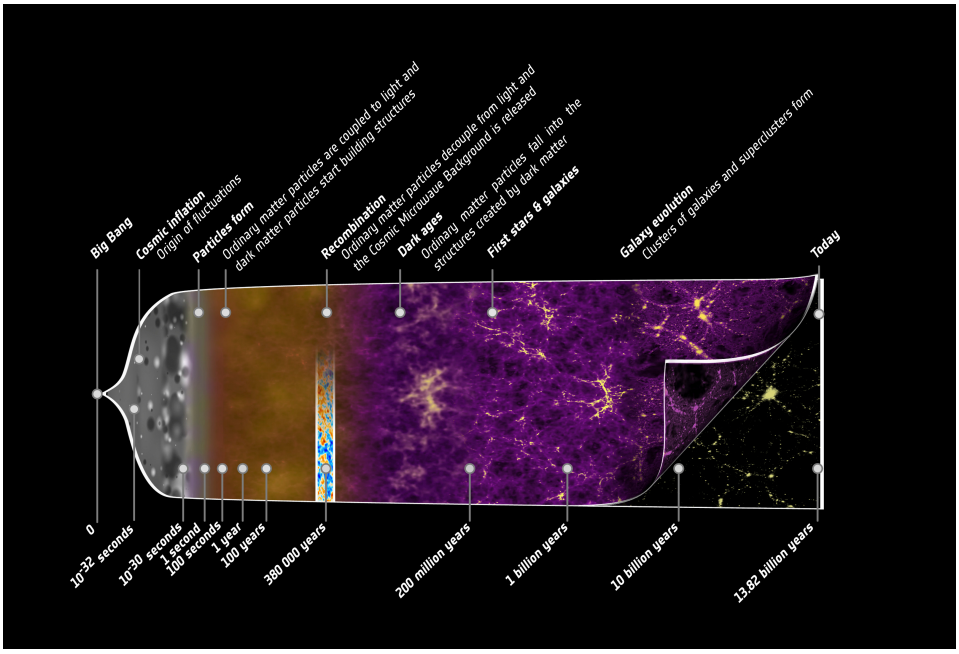


Abb. 13.44: Die Geschichte der Strukturbildung im Kosmos [**?**] fußt auf dem Modell des Inflationären Universum, dass das Horizont- und das Flachheitsproblem löst, zuerst vorgestellt von Alan Guth [**?**].. Danach verdoppelt nach dem Urknall das Universum alle 10^{-36} s seine Größe. Nach etwa 100 Zyklen tunnelt das Universum in einen stabilen Zustand und die rasante Expansion stoppt.

- mit der Radiogalaxie Cygnus A die erste ferne Quelle für Radiowellen entdeckte [**?**].

Im sehr frühen Universum, also bei hohen Temperaturen, lag die kosmische Materie nicht in Form von Atomen, sondern in Form eines Plasmas vor: Zunächst als Quarksuppe bei einer Dichte von $10^{25}\,\mathrm{kg/m^3}$. Nach $10\,\mu$s bilden sich hauptsächlich Hadronen (Protonen, Neutronen, Pionen und ihre Antiteilchen), aber auch Elektronen, Positronen, Neutrinos, Photonen. Teilchen-Antiteilchenstöße führen zu Annilihation. Die freigesetzte Strahlung erzeugt wiederum neue Teilchenpaare. Ein solches Plasma ist für elektromagnetische Strahlung weitestgehend undurchsichtig, weil diese von den freien, geladenen Teilchen ständig gestreut wird. Solange es dieses Plasma gab, blieb das frühe Universum so undurchsichtig wie ein Nebel. Die Materie bestand zu circa 75% aus Wasserstoff und 25% aus Helium sowie geringen Bestandteilen von Deuterium, Beryllium und Lithium. Das Universum musste sich bis auf 3000 K abkühlen, damit sich erste Atome bilden konnten. Das war ungefähr 400 000 Jahre nach dem Urknall der Fall. Es dauerte dann weitere 40 000 Jahre, bis aus dem kosmischen Plasma ein Gas aus Atomen geworden war. Aus dieser Zeit stammt der Kosmische Hintergrundstrahlung, denn sobald das Plasma zu Gas rekombinierte und damit die freien Ladungen verschwanden, konnte sich elektromagnetische Strahlung frei durch das Universum ausbreiten. Wenn wir heute die Kosmische Hintergrundstrahlung beobachten, zeigt er uns das Universum in einem physikalischen

Zustand, wie er 400 000 Jahre nach dem Urknall war [**?**].[46]

Die Ergebnisse von COBE zerstreuten die Zweifel an der Urknall-Hypothese. Die geringen Unterschiede in der Temperatur des Kosmos werden durch die Inflationstheorie erklärt. Gleich nach dem Urknall hat das Universum eine Periode ultraschneller Expansion erlebt, hervorgerufen durch die Energie, die beim Phasenübergang freigesetzt wurde, der Starke und Schwache Wechselwirkung voneinander trennte (Stichwort GUT). Vor der Inflationsphase war das Universum kleiner als ein Proton. Am Ende der Inflationsperiode war das Universum etwa so groß wie ein Apfel mit einer nahezu homogenen Temperaturverteilung. Winzige Quantenfluktuationen in der Energieverteilung des Universums zu diesem Zeitpunkt nahmen, im Lauf der weiteren Entwicklung, makroskopische Ausmaße an. So entstanden Regionen mit höherer Energiedichte, die Materie anzog und dadurch andere Bereiche entleerte. Dies führte mit der Zeit zu den heutigen Anordnungen der Galaxien. Danach expandierte das Universum langsamer, wobei Temperaturunterschiede ausgefroren wurden. Abb. 13.44 zeigt, wie man man sich die Kosmologen die Entwicklung des Universums vom Urknall bis heute vorstellen.

Ein interessanter Effekt ergibt sich bei der Analyse der Feinstruktur des kosmischen Mikrowellenhintergrund. Das als Sunyaev-Zeldovich Effekt [**?**] bekannte Phänomen ist die spektrale Verzerrung des kosmischen Mikrowellenhintergrunds durch inverse Comptonstreuung (siehe Kapitel *Materiewellen*) [**?**], siehe Abb. 13.45. Der Effekt ist tritt insbesondere bei Beobachtung von Galaxienhaufen zu Tage. Niederenergetische Photonen der Hintergrundstrahlung erfahren durch die Wechselwirkung mit energetischen Elektronen in Galaxienhaufen einen Energieübertrag. Der Sunyaev-Zeldovich-Effekt ist eine empfindliche Sonde der warmen und heißen Gase unseres Universums. Der Effekt bietet einzigartige Möglichkeiten, die Struktur des Universums auf großen Skalen zu untersuchen. Die Forscher erwarten aus den Untersuchungen unter anderem die Hubble-Konstante genauer zu bestimmen. Der Effekt erlaubt es, neue Galaxienhaufen zu entdecken und ihren inneren Aufbau zu entschlüsseln. Da der Sunyaev-Zeldovich-Effekt durch einen Streuprozess zustande kommt, führt er zu keiner Rotverschiebung infolge des Dopplereffekts.

[46] *Lexikon:* Das **Horizontproblem** beschreibt die Problematik der räumlichen Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung. Die Strahlung des kosmischen Hintergrunds hat, unabhängig von der Richtung, aus der sie die Erde erreicht, auf einer Größenordnung von 10^{-4} dieselbe Temperatur. Im Rahmen des Standardmodell kann dies nur erklärt werden, wenn man annimmt, dass das Universum zu einem frühen Zeitpunkt kausal verbunden und homogen war.

- 10 Sekunden nach dem Urknall beträgt die Temperatur des Universums 10^{11} K. Das Maximum der Strahlungsemission liegt bei etwa 30 fm,[47] also weit im Bereich der γ-Strahlung.
- 10 Stunden nach dem Urknall ist die Temperatur des Universums auf 10^8 K gefallen. Das Maximum der Emission liegt nun bei 0.03 nm, also im Röntgenbereich.
- 1000 Jahre nach dem Urknall stellt sich eine Temperatur etwa 10^5 K ein und das Emissionsmaximum verschiebt sich ins Ultraviolette (30 nm).
- 400 000 Jahre nach dem Urknall ist das Universum auf rund 3 000 K abgekühlt. Das Maximum liegt bei 1 μm, also im Infraroten Spektralbereich.

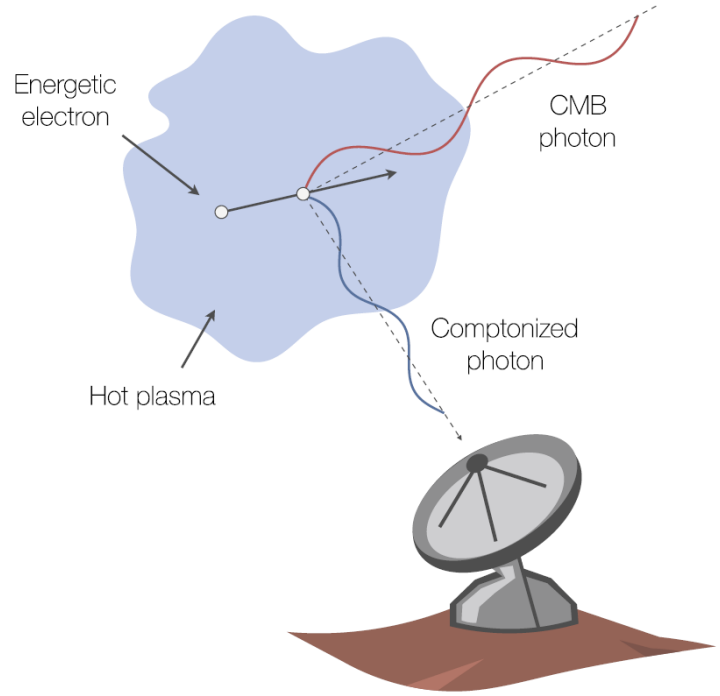


Abb. 13.45: Erklärung des Sunyaev-Zeldovich Effekts: Ein Photon des Kosmischen Hintergrunds (rot) tritt aus einem beliebigen Winkel in ein heißes interstellares Medium (hellblau) ein und wird durch die Wechselwirkung mit Elektronen (schwarz) (siehe Kapitel *Compton-Effekt*) im Mittel zu höheren Energien verschoben (blau) [**?**].

Damit können auch Galaxiencluster mit hoher relativistischer Rotverschiebung untersucht werden. Abb. 13.46 zeigt Messungen des thermischen Sunyaev-Zeldovich-Effekts durchgeführt am Atacama Large Millimeter/submillimeter Array (ALMA) in Chile (blau vor der astronomischen Aufnahme). Zu sehen ist einer der massereichsten Galaxienhaufen (RX J1347.5-1145). Das Zentrum des Haufens ist als dunkler Fleck zu erkennen. Die Energieverteilung der Photonen der Kosmischen Hintergrundsstrahlung verschieben sich durch den inversen Comptoneffekt und äußern sich im Bild als Temperaturabnahme. Deshalb erscheint die Aufnahme an dieser Stelle dunkler.

Unsere Sicht der Entwicklung des Universums ist, dass die Strahlung die Energiedichte im Universum dominiert, je näher man dem Moment des Urknalls kommt.

Aber wie sieht es heute aus?

Dazu schreibt man das Stefan-Boltzmann Gesetz (Emissivität ε_{th}=EINS) um. Eine Betrachtung der Strahlung einer heißen Oberfläche ergibt, dass die Strahlungsleistung pro Fläche proportional der Energiedichte w ist. Der Proportionalitätsfaktor ergibt sich mit

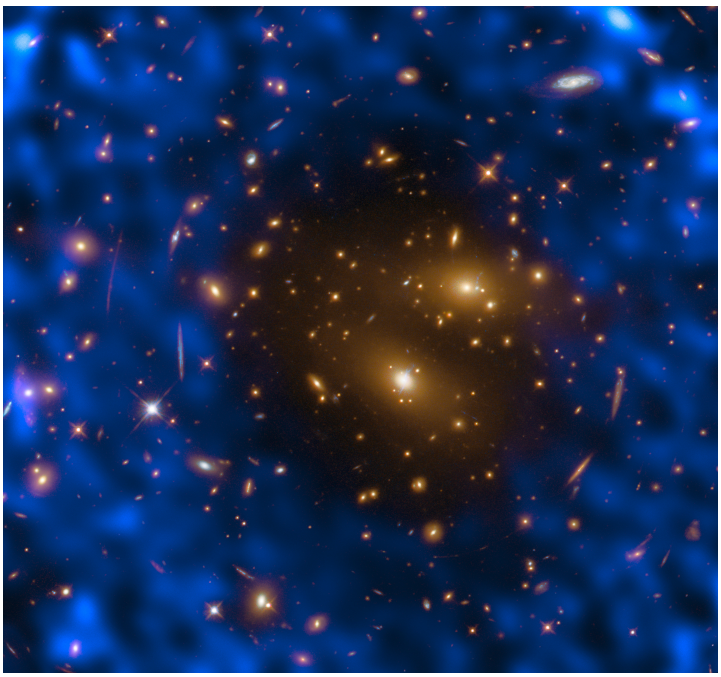


Abb. 13.46: Überlagerte Aufnahmen des Weltraumteleskops Hubble und des Radioteleskop ALMA des massereichen Galaxienhaufen, RX J1347.5-1145, 5 Milliarden Lichtjahre von der Erde entfernt. Mit dem Atacama Large Millimeter/submillimeter Array (ALMA) wurde der Kosmische Mikrowellenhintergrund unter Berücksichtigung des thermischen Sunyaev-Zeldovich Effekts untersucht (blau-violette Einfärbung) [**?**].

$c/4$. Setzt man die heute Temperatur des Universums eine, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P &= \varepsilon_{th} \cdot \sigma_{SB} \cdot A_0 \cdot T_K^4 \\
\frac{P}{A_0} &= \sigma_{SB} \cdot T_K^4 \\
\frac{P}{A_0} &= \frac{c}{4} \cdot w_{EM} \\
w_{EM} &= \frac{4}{c} \cdot \sigma_{SB} \cdot T_K^4 \\
w_{EM} &= \frac{4}{2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} \cdot (5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}) \cdot (2.7\,\mathrm{K})^4 \\
w_{EM} &= 4.02 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J \cdot m^{-3}} \\
w_{EM} &= 0.251\,\mathrm{MeV \cdot m^{-3}}
\end{aligned} \tag{13.7}$$

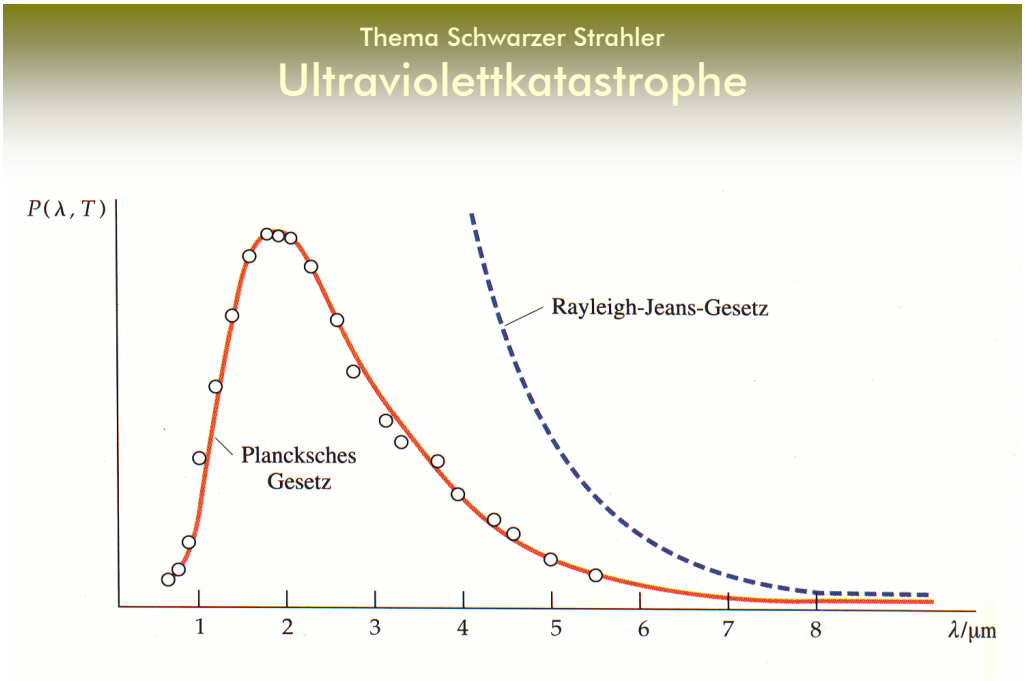
Hinzu kommt der Beitrag durch Neutrinos in Höhe von $0.4\,\mathrm{MeV/m^3}$. Dem gegenüber steht die Energiedichte der kosmischen Materie. Hier lautet die Schätzung $500\,\mathrm{MeV/m^3}$. Der Anteil der Materie im heutigen Universum ist also um drei Größenordnungen höher als der der Strahlung.

Microwave background temperature at a redshift of 6.34 from H_2O absorption [?]: Distortions of the observed cosmic microwave background provide a direct measurement of the microwave background temperature at redshifts from 0 to 1. Some additional background temperature estimates exist at redshifts from 1.8 to 3.3 based on molecular and atomic line-excitation temperatures in quasar absorption-line systems, but are model dependent. No deviations from the expected $(1+z)$ scaling behaviour of the microwave background temperature have been seen, but the measurements have not extended deeply into the matter-dominated era of the Universe at redshifts $z > 3.3$. Here we report observations of submillimetre line absorption from the water molecule against the cosmic microwave background at $z = 6.34$ in a massive starburst galaxy, corresponding to a lookback time of 12.8 billion years. Radiative pumping of the upper level of the ground-state ortho-H2O($1_{10} - 1_{01}$) line due to starburst activity in the dusty galaxy HFLS3 results in a cooling to below the redshifted microwave background temperature, after the transition is initially excited by the microwave background. This implies a microwave background temperature of 16.4-30.2 K (1σ range) at z=6.34, which is consistent with a background temperature increase with redshift as expected from the standard ΛCDM cosmology.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Temperatur hat das Universum und ist diese Temperatur zeitlich konstant?
2. Wit welchem Instrument misst man die Kosmische Hintergrundstrahlung?
3. Wie homogen ist die kosmische Hintergrundstrahlung?
4. Was versteht man unter einem Inflationären Universum?
5. Welche Hinweise gibt es für die Gültigkeit der Urknall-Hypothese?
6. Was versteht man unter dem Sunyaev-Zeldovich Effekt?
7. Die Astronomen nutzen die kosmische Hintergrundstrahlung als Bezugssystem. Kann man aufgrund dieses Absoluten Bezugssystems die Spezielle Relativitätstheorie deshalb nicht verwerfen?

Ultraviolettkatastrophe



There is nothing new to be discovered in physics now. All that remains is more and more precise measurement.

Lord Kelvin, 1897

Das Rayleigh-Jeans Gesetz[48] kann das Spektrum eines Schwarzen Körpers bei großen Wellenlängen gut wiedergeben. Für kleinere Wellenlängen sagt es dagegen zu hohe Werte voraus. Tatsächlich würde die Gesamtstrahlung eines Schwarzen Strahlers ins Unendliche anwachsen. Die enorme Abgabe an Energie hätte beispielsweise zur Folge, dass die Sonne auskühlen würde. Der Physiker Paul Ehrenfest hat dieses Theorie-Desaster als Ultraviolett-Katastrophe bezeichnet. Als Einstieg führen wir eine Dimensionsbetrachtung aus. Im thermischen Gleichgewicht[49] zwischen Strahlung und den einschließenden Wänden sollte die Hohlraumstrahlung nicht von der Beschaffenheit der Wände abhängen

[48] The Nobel Prize in Physics 1904 was awarded to Lord Rayleigh (John William Strutt) *for his investigations of the densities of the most important gases and for his discovery of argon in connection with these studies.*

[49] *Lexikon:* Das **Thermodynamische Gleichgewicht** ist ein Konzept der Thermodynamik. Im thermodynamischen Gleichgewicht gibt es innerhalb eines Systems oder zwischen Systemen keinen Materie- oder Energiefluss.Es kommt damit nicht zu einer makroskopischen Zustandsänderung.

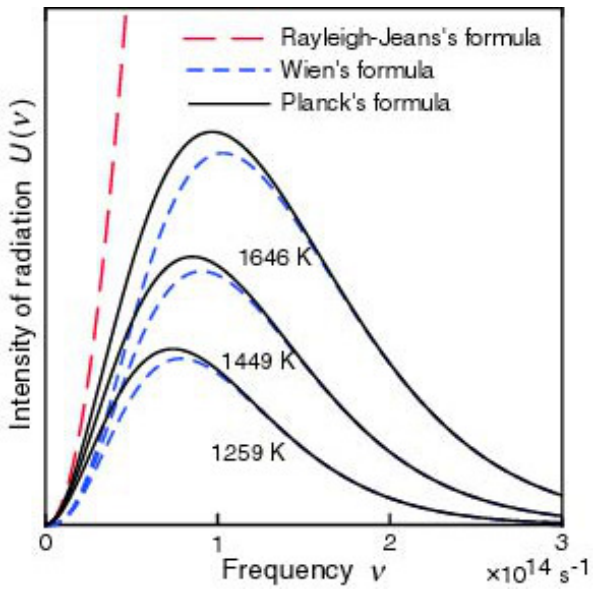


Abb. 13.47: Vergleich der Theorien zur Erklärung des Spektrums eines Schwarzen Strahlers.

und sich nur aus den Eigenschaften des Strahlungsfeldes ergeben. Die Energiedichte $w_{EM}(\nu, T_K)$ hat die Einheit Energie/ (Frequenz·Volumen). Neben der Frequenz (ν) und der Temperatur (T_K) kommen nur zwei Naturkonstanten als Einträge in die endgültige Formel in Frage. Diese sind die Lichtgeschwindigkeit (c) und die Boltzmannkonstante (k_B). Materialabhängige Größen dürfen keine Rolle spielen, denn das Gesetz soll allgemein gelten. Die Dimensionsbetrachtung liefert folgendes Ergebnis:

$$w_{EM}(\nu, T_K) \propto \frac{\nu^2}{c^3} \cdot k_B \cdot T_K \tag{13.8}$$

Prüfen Sie nach! Bis auf einen Zahlenfaktor ($8\,\pi$) ergibt sich dasselbe Ergebnis auch nach der Rayleigh-Jeans Analyse aus dem Maxwellschen Gleichverteilungssatz[50]

$$w_{EM}^{RJ}(\nu, T_K) = \frac{8\,\pi\,\nu^2}{c^3} k_B T_K \tag{13.9}$$

Wie experimentell bestätigt, ist die Gleichung falsch und beschreibt nicht das Spektrum eines Schwarzen Strahlers. Man muss also vermuten, dass wenigstens eine weitere, bislang unbekannte Naturkonstante berücksichtigt werden muss. Wie sich im Weiteren herausstellt, handelt es sich hierbei um die Plancksche Konstante h. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es einen Vorschlag von Wien gab (Wiensches Strahlungsgesetz),

[50] *Lexikon:* Der **Maxwellsche Gleichverteilungssatz** oder auch **Gleichverteilungssatz der Thermodynamik** setzt die Temperatur eines Systems mit seinen durchschnittlichen Energien in Beziehung. Energie im thermischen Gleichgewicht verteilt sich gleichmäßig auf alle unterschiedlichen Energieformen. Jeder **Freiheitsgrad** steuert pro Teilchen im Mittel den Betrag $1/2\,k_B T_K$ zur inneren Energie bei.

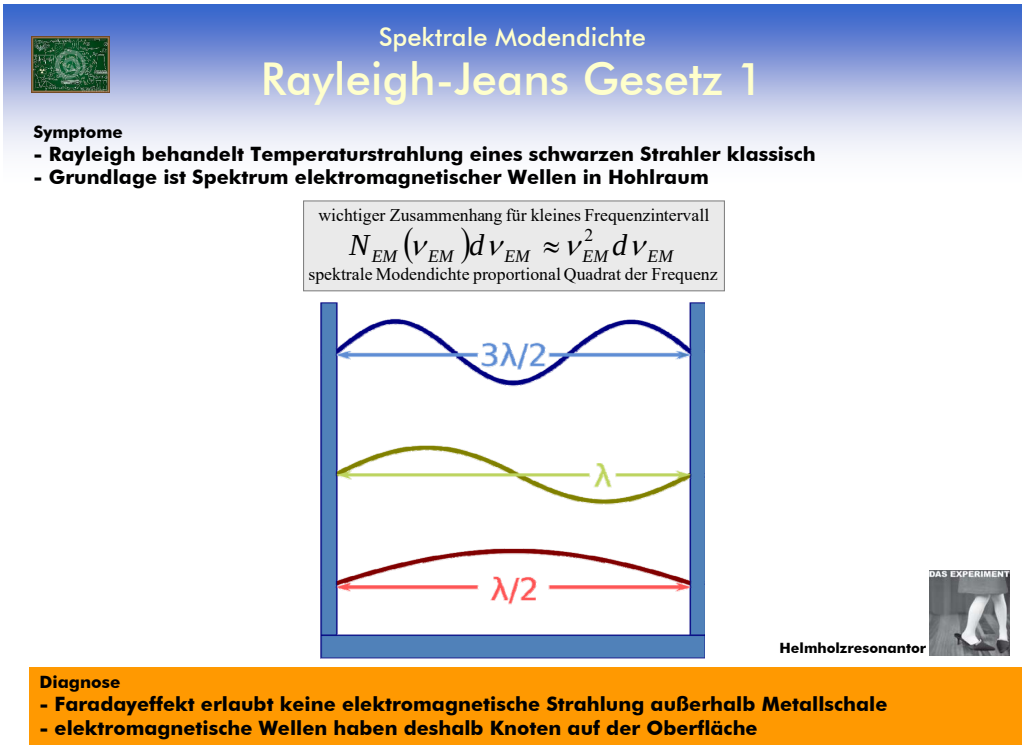
die Lichtabgabe bei hohen Frequenzen zu beschränken.

$$\begin{aligned} w_{EM}^{W}(\nu, T_K) &= a_1 \cdot \nu^3 \cdot \exp\left(-\frac{a_2 \nu}{T_K}\right) \\ \frac{a_1}{a_2} &= \frac{8\,\pi\,k_B}{c^3} \end{aligned} \tag{13.10}$$

Allerdings konnte die Gleichung mit den empirischen Größen (a_1, a_2) physikalisch nicht motiviert werden. Erst Planck gelang die Einträge aus seiner Theorie herleiten:

$$\begin{aligned} a_1 &= 8\,\pi\,h/\,c^3 \\ a_2 &= h/k_B \end{aligned} \tag{13.11}$$

Die Abb 13.47 zeigt einen Vergleich der drei Ansätze.



Herleitung

Grundlage des Rayleigh-Jeans-Gesetzes ist die Behandlung elektromagnetischer Wellen in einem abgeschlossenen metallischen Hohlkörper mit Durchmesser D_{BB}. Die Randbedingungen aus der Maxwellschen Theorie ergeben Lichtwellen bei Wellenlängen, die von der Geometrie des Körpers abhängen. Die Strahlung, die zum Spektrum beiträgt, hat Knoten auf der Oberfläche.[51]

Aus der dreidimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{13.12}$$

ergeben sich Lösungen der Form

$$E = E_0 \cdot \sin\left(\frac{n_1 \cdot \pi \cdot x}{D_{BB}}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_2 \cdot \pi \cdot y}{D_{BB}}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_3 \cdot \pi \cdot z}{D_{BB}}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\,\pi \cdot c \cdot t}{\lambda}\right) \tag{13.13}$$

[51] *Lexikon:* Eine **Mode** einer elektromagnetischen Welle in einem Hohlraum muss die Bedingung eines verschwindenden elektrischen Felds an den Wänden erfüllen. Bei kürzeren Wellenlängen ergeben sich mehr Möglichkeiten, Moden in den Hohlraum einzupassen.

Einsetzen in die Wellengleichung führt auf:

$$\left(\frac{n_1 \cdot \pi}{D_{BB}}\right)^2 + \left(\frac{n_2 \cdot \pi}{D_{BB}}\right)^2 + \left(\frac{n_3 \cdot \pi}{D_{BB}}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{13.14}$$

Daraus ergibt sich folgende Bedingung:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \;=\; \frac{4D_{BB}}{\lambda^2} \tag{13.15}$$

Berücksichtigt man die Lichtpolarisation (Faktor 2) und ($n_i > 0$) ergibt sich die Modenanzahl N_{EM} mit

$$N_{EM} = \frac{\pi}{3}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)^{3/2} = \frac{8\pi\, D_{BB}^3}{3\lambda^3} \tag{13.16}$$

Damit lässt sich die so genannte spektrale Modendichte (Anzahl möglicher Frequenzen pro Frequenz- oder Wellenlängenintervall: $dN_{em}/\,d\lambda$ oder $dN_{em}/\,d\nu$) berechnen, wobei sich der Faktor ZWEI aus den zwei Polarisationsrichtungen der elektromagnetischen Strahlung ergibt:

$$N_{EM}(\nu)d\nu = 2 \cdot \frac{4\,\pi \cdot V_{BB}}{c^3} \cdot \nu^2\, d\nu \tag{13.17}$$

Für einen Schwarzer Strahler muss nach der Kirchhoff gelten, dass die im Objekt gespeicherte elektromagnetische Energie mit der Temperatur des Körpers übereinstimmt. Das heißt, dass sich das System im thermischen Gleichgewicht befindet. Ausgehend von diesem Ausdruck für die spektrale Modendichte $N_{EM}(\nu)\,d\nu$ lässt sich die spektrale Energiedichte $w_{EM}(\nu,\, T_K)\,d\nu$ herleiten. Gesucht ist, wie viel Energie in einem Volumen gespeichert ist, also $E_{k_BT}^{avg}/\,V_{BB}$. Weiter gibt w_{EM} unter Berücksichtigung von Gl. 13.17 an, welchen Beitrag die einzelnen Frequenzen zum Energiegehalt liefern:

$$\begin{aligned} w_{EM}(\nu,\, T_K)d\nu &= N_{EM}(\nu) \cdot \frac{E_{k_BT}^{avg}}{V_{BB}}\, d\nu \\ w_{EM}(\nu,\, T_K)d\nu &= \frac{8\,\pi \cdot E_{k_BT}^{avg}}{c^3} \cdot \nu^2\, d\nu \\ w_{EM}(\nu,\, T_K)d\nu &\approx E_{k_BT}^{avg} \cdot \nu^2\, d\nu \end{aligned} \tag{13.18}$$

Die Analyse von Rayleigh und Jeans liefert, dass jeder Frequenzbereich $d\nu$ mit einem Faktor ν^2 zur spektralen Energiedichte beträgt.

Wenn alle Oszillatoren bei einer gegebenen Temperatur im thermischen Gleichgewicht schwingen, dann erwartet man nach dem Gleichverteilungssatz der Thermodynamik, dass die mittlere Energie jedes Oszillators k_BT_K beträgt. Eingesetzt in die spektrale Energiedichte (Gl. 13.18)

$$w_{EM}(\nu,\, T_K)d\nu = \frac{8\pi \cdot E_{EM}^{avg}}{c^3}\nu^2\, d\nu \tag{13.19}$$

ergibt sich das Rayleigh-Jeans-Gesetz.[52]

$$w_{EM}^{RJ}(\nu, T_K)d\nu = \frac{8\pi \cdot k_B \cdot T_K}{c^3}\nu^2\, d\nu \tag{13.20}$$

Das Gesetz gibt das Spektrum eines Schwarzen Strahlers im Bereich längerer Wellenlängen gut wieder. Der Term ν^2 in der Gleichung ist allerdings problematisch. Für kürzere Wellenlängen ergibt sich eine deutliche Abweichung im Vergleich zum experimentellen Spektrum. Das Rayleigh-Jeans-Gesetz sagt eine bei höheren Frequenzen quadratisch anwachsende Energiedichte voraus, so dass der Hohlraum über alle Frequenzen integriert eine unendliche Energie enthalten müsste. Dieses unphysikalische Verhalten ist als Ultraviolettkatastrophe bekannt geworden.

[52] Lord Rayleigh leitete das Gesetz im Jahr 1900 ab. Von James Jeans wurde es fünf Jahre später verallgemeinert. Daher der Name Rayleigh-Jeans Gesetz.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Zu Beginn des Kapitels findet man ein Zitat von Lord Rayleigh. Können Sie seiner Ansicht widersprechen?

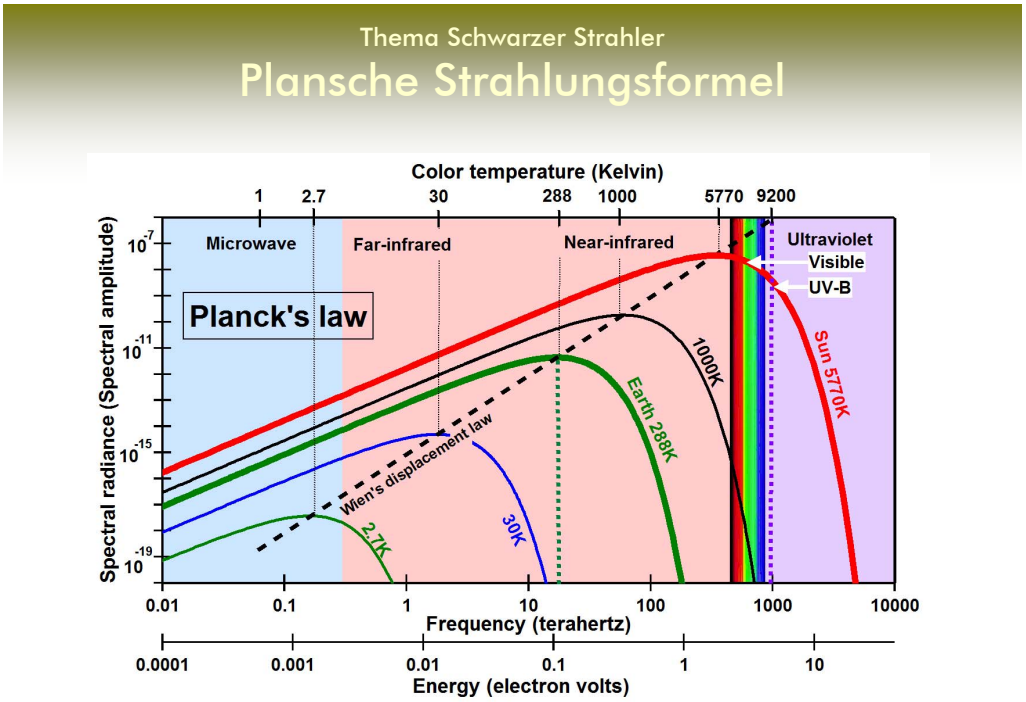
2. Was versteht man unter einem Thermodynamischen Gleichgewicht?

3. Erläutern Sie das Phänomen der Ultraviolett-Katastrophe!

4. Warum ist die Vorhersage einer Ultraviolett-Katastrophe physikalisch nicht haltbar?

5. In welchem Spektralbereich gibt das Rayleigh-Jeans Gesetz das Spektrum eines Schwarzen Strahlers gut wieder?

Plancksches Strahlungsgesetz



Ich kann die ganze Prozedur als einen Akt der Verzweiflung charakterisieren, da ich von Natur aus friedlich bin und alle zweifelhaften Abenteuer ablehne [**?**].

Max Planck

Erst Max Planck[53] konnte mit Hilfe seines Strahlungsgesetzes das Spektrums eines Schwarzen Körpers richtig wiedergeben [**?**]. Die Annahme, dass die Lichtemission allein von der Temperatur und nicht von anderen physikalisch-chemischen Eigenschaften abhängen könnte, ließen Planck einen fundamentalen Zusammenhang, vergleichbar mit dem Wirken der Gravitation, vermuten. Eine Herleitung ist im Rahmen der klassischen Physik nicht möglich. Planck postulierte, dass der Energieaustausch zwischen den Oszillatoren und dem elektromagnetischen Feld nicht kontinuierlich, sondern durch Energiepakete erfolgt. Die Frage stellt sich: Warum hat man, bis zu den Arbeiten von Planck, elektromagnetische Strahlung als kontinuierlich angenommen. Die Antwort fällt nicht schwer. Die Teilcheneigenschaften von Licht sind durch die enorme Anzahl an Lichtquanten maskiert. Es sei darauf hingewiesen, dass das auf der Grundlage des Photonbildes von Planck gefundene Strahlungsgesetz die Quantenphysik begründete. Das

[53] The Nobel Prize in Physics 1918 was awarded to Max Karl Ernst Ludwig Planck *in recognition of the services he rendered to the advancement of Physics by his discovery of energy quanta.*

oben vermerkte Zitat belegt, welche Zweifel Planck bei der Aufstellung seiner Quantenhypothese geplagt haben.

Herleitung

Kern der Planckschen Überlegungen ist eine Neubewertung der Energiedichte der klassischen Thermodynamik. Danach kann Strahlungsenergie nur in diskreten Energiepaketen [**?**] bereit gestellt werden. Diese sind abhängig von der Frequenz des Lichts:

$$n_{ph} \cdot E_{ph} = n_{ph} \cdot h \cdot \nu_{ph} \tag{13.21}$$

Plancksche Konstante: $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$

wobei n_{ph} eine GANZE Zahl ist. Die Analyse führt auf eine Formel, die aussagt, welchen Anteil bestimmte Frequenzen an der mittleren Energie haben (Energie pro Mode). Je höher die Frequenz ist, desto geringer ist der Beitrag. Für einen Schwarzen Körper der Temperatur T_K gilt:

- Es muss eine minimale Energie zur Verfügung gestellt werden, um eine höherfrequente Mode anzuregen.
- Moden, deren Mindestenergie deutlich über $k_B T$ liegt, können nicht angeregt werden.
- Moden, die eine Energie benötigen, die wenig über $k_B T$ liegt, werden mit einer gewisser Wahrscheinlichkeit angeregt und tragen nur mit einem Bruchteil zur Hohlraumstrahlung bei.
- Nur Moden, deren Mindestenergie niedriger als $k_B T$ ist, werden vollständig angeregt.

Der entscheidende Schritt ist, dass Planck für E_{EM}^{avg} folgenden Ausdruck verwendet

$$E_{EM}^{avg} = \frac{h \cdot \nu_{ph}}{\exp\left(\dfrac{h \cdot \nu_{ph}}{k_B \cdot T_K}\right) - 1} \tag{13.22}$$

Analysiert man die Gleichung, stellt man fest: Für geringe Frequenzen ν_{ph} spielt der Exponentialterm keine Rolle und E_{EM}^{avg} nimmt linear mit der Frequenz zu ($E_{EM}^{avg} \propto \nu_{ph}$). Bei hohen Frequenzen reduziert sich der Beitrag zur Gesamtenergie allerdings. In welcher Höhe bestimmte Frequenzen (ν_{ph}) zu E_{EM}^{avg} beitragen, wird über die Temperatur des Körpers (T_K) festgelegt ($h\nu / k_B T_K$). Setzt man diesen Ausdruck in die spektrale Energiedichte (Gl. 13.19) ein, ergibt sich die Plancksche Strahlungsformel. für einen

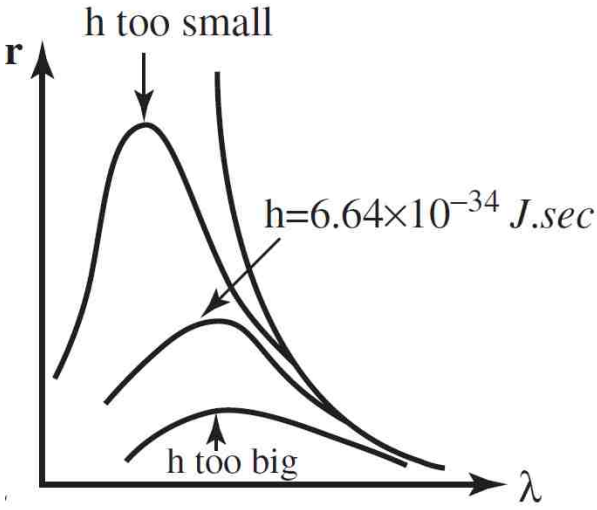


Abb. 13.48: Bestimmung der Planckschen Konstanten. Durch Anpassung der Planckschen Gleichung an das experimentelle Resultat kann der Wert der Konstanten ermittelt werden [**?**].

Hohlraumstrahler. Die Einheit ist Leistung pro Fläche pro Frequenz oder die Leistung pro Fläche pro Wellenlänge:

$$w_{EM}^{Planck}(\nu,\, T_K)\, d\nu = \frac{8\,\pi}{c^3} \frac{h \cdot \nu^3}{\exp\left(\dfrac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T_K}\right) - 1}\, d\nu \tag{13.23}$$

wobei der Ausdruck Bestrahlungsstärke[54] genannt wird, wenn man über alle Frequenzen integriert. Die Einheit, in der das Strahlungsgesetz formuliert ist, ist Leistung pro Raumwinkel pro Fläche pro Frequenz oder Leistung pro Raumwinkel pro Fläche pro Wellenlänge. Führt man diese Rechnung aus, d.h. man integriert man über alle Frequenzen, lässt sich daraus das Stefan-Boltzmann Gesetz ableiten.

$$\frac{P}{A_0} = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 \cdot k_B^4}{h^3 \cdot c^2} \cdot T_K^4 \tag{13.24}$$

Den Vorfaktor

$$\sigma_{SB} = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 \cdot k_B^4}{h^3 \cdot c^2} \tag{13.25}$$

nennt man die Stefan-Boltzmann Konstante. Weiter liefert Ableiten und Bestimmung der Nullstelle das Wiensches Verschiebungsgesetz. Abb 13.48 zeigt, wie man den Wert der Naturkonstanten h in einer Anpassung der Planckschen Strahlungsformel an experimentelle Daten bestimmen kann.

Abb. 13.49 zeigt den Vergleich zwischen einer 250 W Halogenlampe und dem berechneten Spektrum eines Schwarzen Strahlers nach der Planckschen Strahlungsformel. Man

[54] *Lexikon:* Die **Bestrahlungsstärke** gibt die gesamte Leistung einfallender elektromagnetischer Energie, die auf eine Oberfläche trifft, an. Die Einheit ist deshalb [W/cm^2]. Man sollte die Bestrahlungsstärke nicht mit der Beleuchtungsstärke verwechseln, denn diese berücksichtigt die spektrale Empfindlichkeit des Auges.

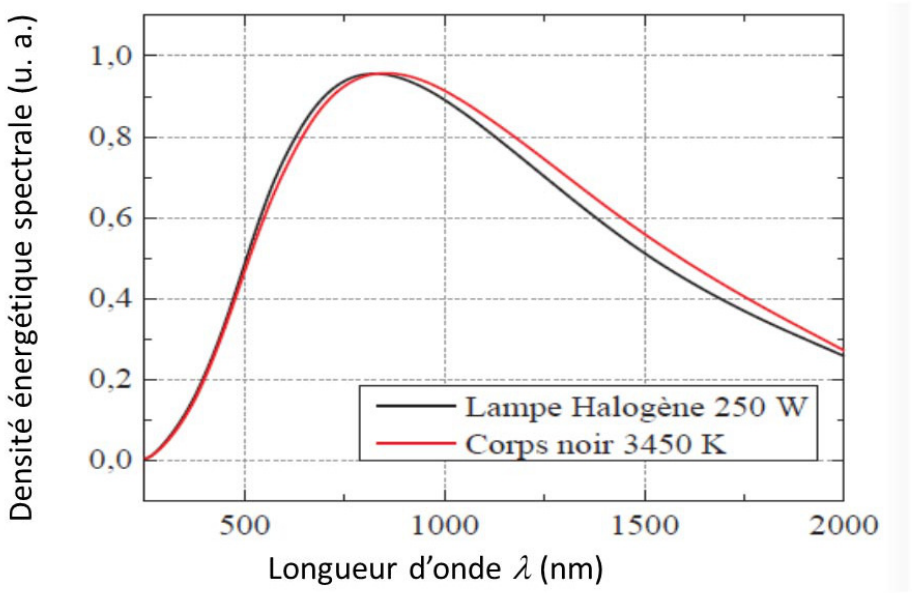


Abb. 13.49: Spektrum einer 250-W-Halogenlampe im Vergleich zur Schwarzkörperstrahlung bei einer Temperatur von 3450 K [**?**].

erkennt anhand der guten Übereinstimmung, dass man das resultierende Spektrum der Lampe gut mit einem Hohlraumstrahler einer Temperatur von 3450 K beschreiben kann. Ähnliches ergibt sich aus der spektralen Analyse der auf der Erde von Sonne kommenden Strahlung, wie Abb. 13.50 demonstriert. Für die Anwendung ist es manchmal günstiger, statt mit der Frequenz (ν_{ph}), mit der zugehörigen Wellenlänge (λ_{EM}) zu arbeiten.

$$
\begin{aligned}
w_{EM}^{Planck}(\nu, T_K)d\nu &= \frac{8\,\pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\cdot\nu}{k_B\cdot T_K}\right)-1}d\nu \\
w_{EM}^{Planck}(\nu, T_K)d\nu &= w_{EM}^{Planck}(\nu, T_K)\frac{d\nu}{d\lambda}d\lambda \\
w_{EM}^{Planck}(\lambda_{EM}, T_K)d\lambda_{EM} &= \frac{8\,\pi \cdot h \cdot c}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\cdot c}{\lambda_{EM}\cdot k_B\cdot T_K}\right)-1}d\lambda_{EM} \qquad (13.26)
\end{aligned}
$$

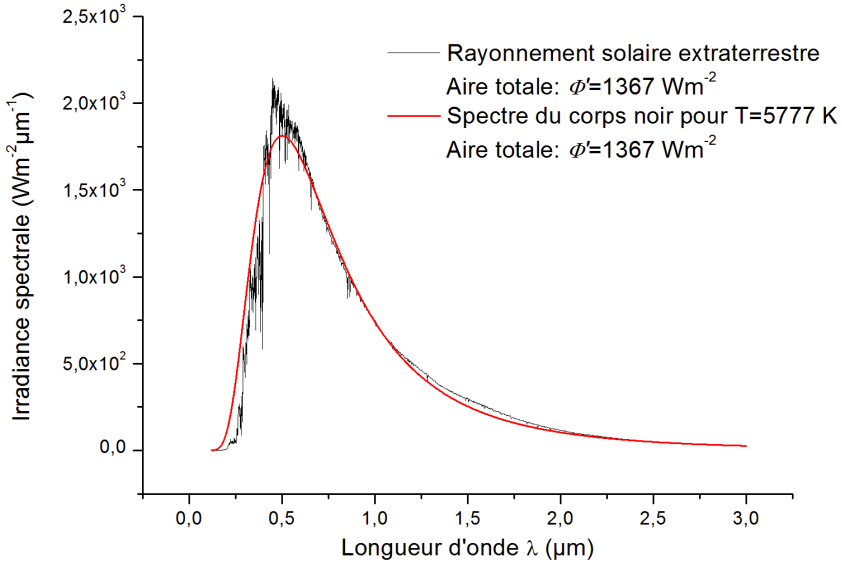


Abb. 13.50: Vergleich des Emissionsspektrums der Sonne außerhalb der Atmosphäre mit der theoretischen Kurve von Planck für einen Schwarzen Strahler bei T_K=5777 K [**?**].

Die Photonendichte n_{ph}^{Planck} im Frequenz- bzw. Wellenlängenintervall ist:

$$n_{ph}^{Planck}(\nu,\, T_K)d\nu \;=\; \frac{8\,\pi\cdot\nu^2}{c^3}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\cdot\nu}{k_B\cdot T_K}\right)-1}d\nu \tag{13.27}$$

$$n_{ph}^{Planck}(\lambda_{EM},\, T_K)d\lambda \;=\; \frac{8\,\pi}{\lambda^4}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\cdot c}{\lambda_{EM}\cdot k_B\cdot T_K}\right)-1}d\lambda_{EM} \tag{13.28}$$

Für die Umrechnung der Planckgleichung von der Wellenlänge in Frequenzform ist der Faktor also λ^2/c. Abb. 13.51 zeigt die Plancksche Strahlungskurve eine 5 000 K heißen Schwarzen Körpers, einmal als Anzahl Photonen und einmal als Funktion von Energie pro Wellenlängenintervall. Man sieht, dass die Wahl der Auftragung einen Unterschied macht. Beispielsweise verschiebt sich das Maxima der Kurve von $3\,k_BT_K/h$ bei Auftragung über die Frequenz zu $hc/5\,k_BT_K$ bei Verwendung der Wellenlänge. Auch der Mittelwert verschiebt sich deutlich.

Wie wir festgestellt haben gibt die Plancksche Strahlungsformel die spektrale Verteilung der Strahlung eines Schwarzen Strahlers richtig wieder (Abb. 13.52). Bevor man weiter blättert, sollte man die Plancksche Gleichung mit dem Rayleigh-Jeans Gesetz (Gl. 13.20) vergleichen. Welche Gemeinsamkeiten/ Unterschiede fallen Ihnen auf?

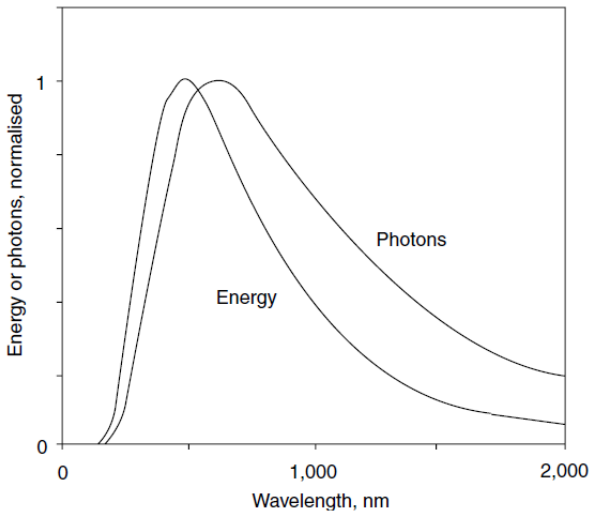


Abb. 13.51: Schwarzkörperstrahlung (5.000 K), aufgetragen als Anzahl Photonen pro Wellenlängenintervall und als Energie pro Wellenlängenintervall

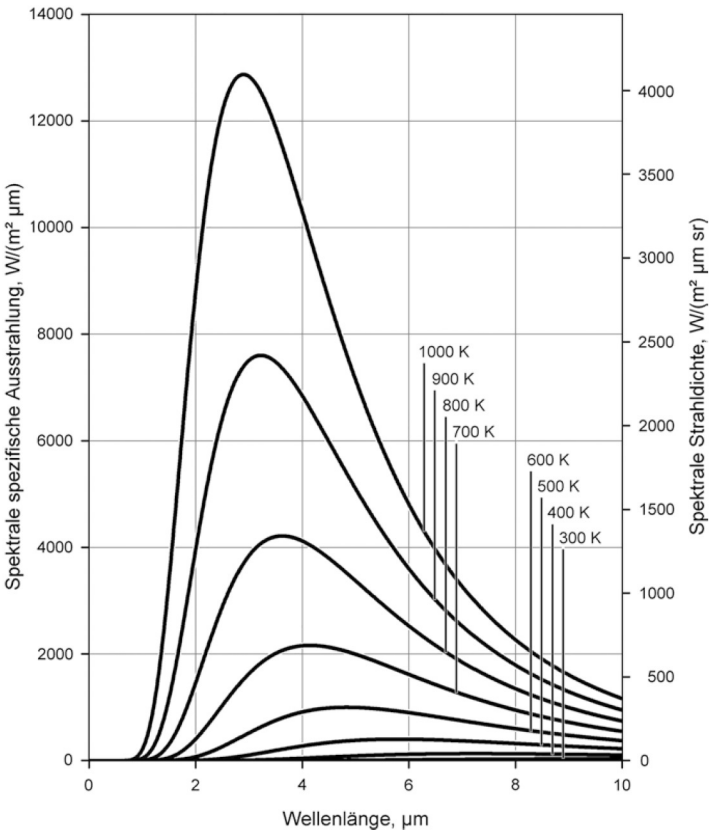


Abb. 13.52: Plancksches Strahlungsgesetz für Schwarze Körper unterschiedlicher Temperatur [**?**].

Extrablatt

Zusammenhänge

Planck vs Rayleigh-Jeans

Reihenentwicklung für geringe Frequenzen d.h. Infrarot $(\exp(x)\approx 1+x)$

$$\exp\left(\frac{h\nu_{EM}}{k_B T_K}\right) \approx 1+\frac{h\nu_{EM}}{k_B T_K}$$

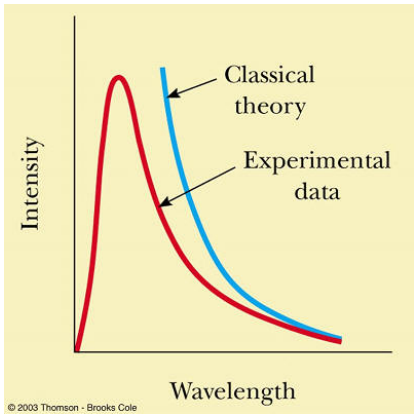
Mathematik Alles, was zählt

$$w_{EM}^{\text{low }\nu_{EM}}(\nu_{EM},T_K)d\nu_{EM} = \frac{8\pi h\nu_{EM}^3}{c^3\left(1+\frac{h\nu_{EM}}{k_B T_K}-1\right)}d\nu_{EM}$$

$$w_{EM}^{\text{low }\nu_{EM}}(\nu_{EM},T_K)d\nu_{EM} = \frac{8\pi h\nu_{EM}^3}{c^3\frac{h\nu_{EM}}{k_B T_K}}d\nu_{EM}$$

$$w_{EM}^{\text{low }\nu_{EM}}(\nu_{EM},T_K)d\nu_{EM} = \frac{8\pi k_B T_K}{c^3}\nu_{EM}^2 d\nu_{EM}$$

Plancksche Strahlungsforme ergibt Rayleigh-Jeans Gesetz



Diagnose
- Entwicklung für geringe Frequenzen/ große Wellenlängen ergibt Rayleigh-Jens Gesetz
- Verschiebungsgesetz und Stefan-Boltzmann Gesetz kann ebenfalls abgeleitet werden

Rayleigh-Jeans reloaded

Eine Reihenentwicklung der Planckschen Strahlungsformel für niedrige Frequenzen ($e^x \approx 1 + x$) liefert das Rayleigh-Jeans-Gesetz. Ein ähnliches Ergebnis ergibt sich auch für Gl. 13.1. Für hohe Frequenzen erhält man das Wiensche Gesetz aus der Näherung

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{h\cdot\nu}{k_B\cdot T_K}\right)-1} \approx \exp\left(-\frac{h\cdot\nu}{k_B\cdot T_K}\right) \tag{13.29}$$

Die in der Thermodynamik gefundenen Gesetze ergeben sich damit als Näherungen aus dem Planckschen Gesetz:

$$\frac{h\cdot\nu}{\exp\left(\frac{h\cdot\nu}{k_B\cdot T_K}\right)-1} = k_B\cdot T_K \quad \text{für} \quad h\cdot\nu \ll k_B\cdot T_K \tag{13.30}$$

$$\frac{h\cdot\nu}{\exp\left(\frac{h\cdot\nu}{k_B\cdot T_K}\right)-1} = h\cdot\nu\cdot\exp\left(\frac{h\cdot\nu}{k_B\cdot T_K}\right) \quad \text{für} \quad h\cdot\nu \gg k_B\cdot T_K \tag{13.31}$$

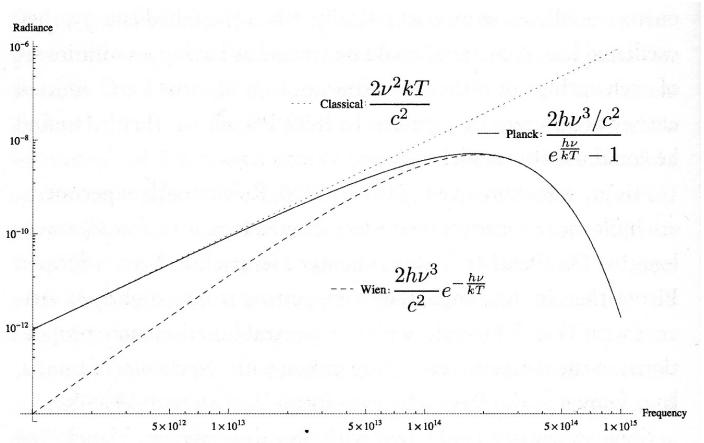


Abb. 13.53: Die drei vorgeschlagenen Gesetzmäßigkeiten für Schwarzkörperstrahlung, angegeben in Intensität oder Strahlungsdichte gegenüber der Frequenz. Das Wiensche Gesetz (gestrichelte Linie) passt zu den experimentellen Daten der Schwarzkörperstrahlung bei hohen Frequenzen und beschreibt die Verschiebung des Maximums mit der Temperatur. Die klassische Formel (gepunkte Linie), passte nicht zu diesen Daten, beschreibt aber das Verhalten bei niedrigen Frequenz. Die Plancksche Gleichung (durchgezogene Linie) verbindet diese beiden Bereich und ist daher wie Goldilocks Ideal: weder zu klein noch zu groß [**?**].

Abb. 13.53 stellt die drei Ansätze (Rayleigh-Jeans, Wien und Planck) und ihre vorhergesagten spektralen Verlauf nochmal gegenüber. Eine abschließende Bemerkung: Die Plancksche Analyse des Schwarzen Strahlers haben wir anhand der Wellennatur der Strahlung durchgeführt. Eine ähnliche Analyse, die auch auf das Plancksche Strahlungsgesetz führt, kann man auch im Photonenbild durchführen. Grundlage in dieser Beschreibung ist ein Photonengas, das bestimmte Energiezustände in dem betrachtete Hohlraum besetzt. Da es sich bei Photonen um so genannte Bosonen handelt, die nicht dem Pauliverbot (Kapitel *Beyond Bohr*) unterliegen, spricht man von einem Bose-Gas.[55]
[56] [57] [58] [59]

[55] *Lexikon:* Ein **Bosegas** ist ein Zustand der Materie, angelehnt an die Eigenschaften eines klassischen idealen Gases. Allerdings werdenseine Eigenschaften durch die Quantenphysik bestimmt. Bosonen sind Teilchen, die mit der Bose-Einstein-Statistik beschrieben werden. Nach Einstein, der die Betrachtungen von Bose für Photonen auf Teilchen übertragen hat, kann ein Bose-Gas bei niedriger Temperatur ein Kondensat bilden. Dieser neue Materiezustand wird als Bose-Einstein-Kondensat bezeichnet.

[56] The Nobel Prize in Physics 1913 was awarded to Heike Kamerlingh Onnes for his investigations on the properties of matter at low temperatures which led, inter alia, to the production of liquid helium.

[57] The Nobel Prize in Physics 1962 was awarded to Lev Davidovich Landau *for his pioneering theories for condensed matter, especially liquid helium.*

[58] The Nobel Prize in Physics 1996 was awarded jointly to David M. Lee, Douglas D. Osheroff and Robert C. Richardson for their discovery of superfluidity in helium-3.

[59] The Nobel Prize in Physics 2001 was awarded jointly to Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle and Carl

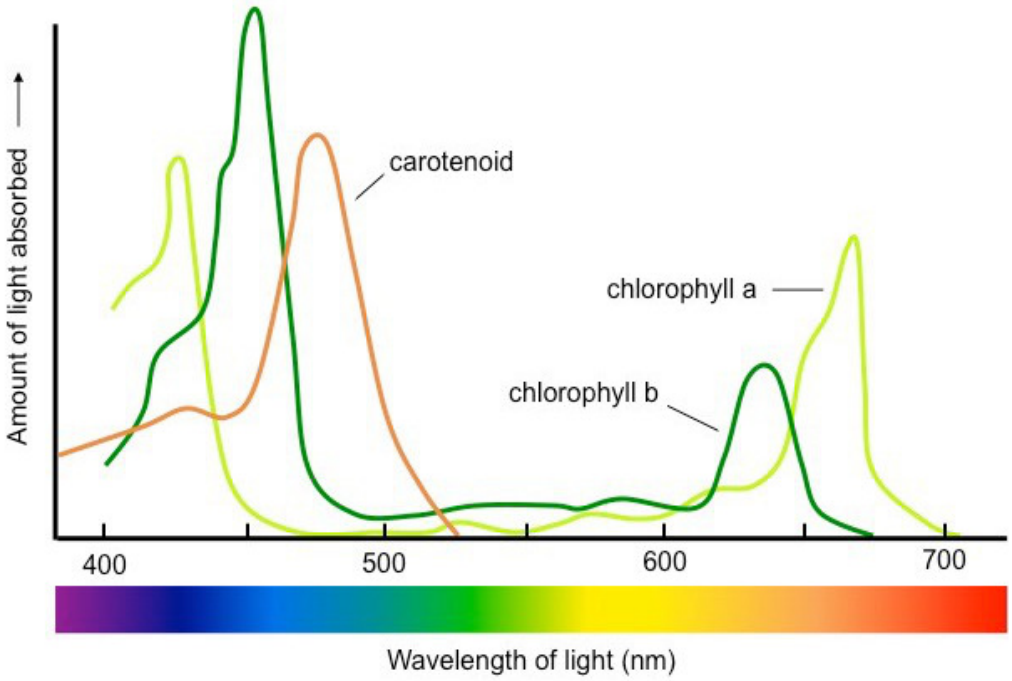


Abb. 13.54: Absorptionsspektren von Chlorophyll und Carotinoiden [**?**].

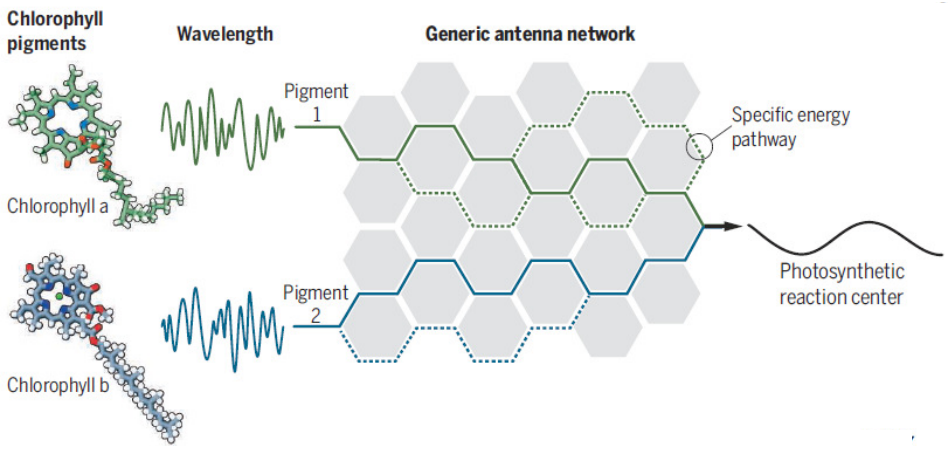


Abb. 13.55: Eine Antenne bindet mindestens zwei verschiedene Arten von Pigmenten, deren absolute und relative Absorption Wellenlängen fein abgestimmt sind. Damit kann ein schwankender (d.h. verrauschte) Lichteintrag in einen gleich bleibenden (d.h. rauscharmen) Output umgewandelt werden [**?**].

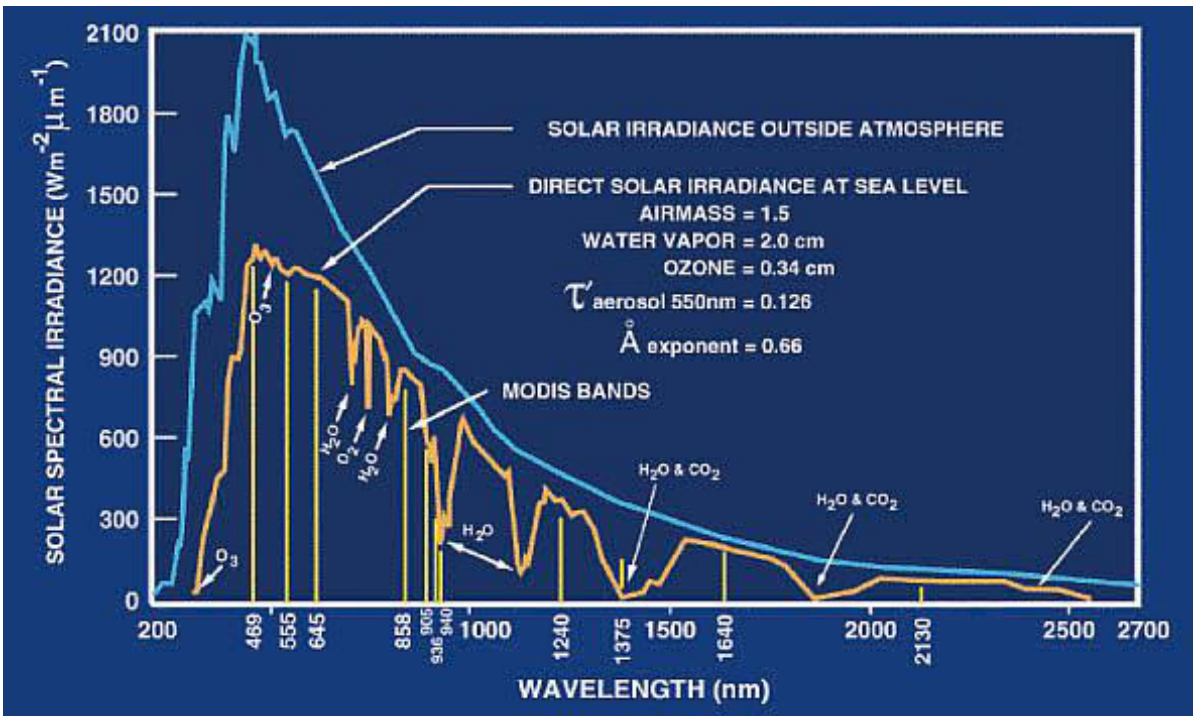


Abb. 13.56: Spektrum der Sonnenstrahlung und Absorption in der Atmosphäre durch hauptsächlich H_2O, CO_2, O_3, O_2, N_2, O, N. Schwächere Absorber in der Atmosphäre sind NO, N_2O, CO, CH_4 [**?**].

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Biologie

Pflanzen nutzen das Schwarzkörperspektrum der Sonne zur Photosynthese, aber das Absorptionsspektrum von beispielsweise Chlorophyll zeigt am spektralen Maximum der Sonneneinstrahlung bei 550 nm ein Absorptionsminimum, siehe Abb. 13.54.[60] Stattdessen absorbieren die Chlorophyllmoleküle stark am roten und blauen Rand des Schwarzkörperspektrums. Der Prozess der Photosynthese wird offenbar nicht effizient genutzt. Verwirrend kommt hinzu: Trotz erheblicher Fluktuationen in den biologischen Systemen auf molekularer Ebene, ergibt sich eine photochemische Konversionseffizienz von EINS (100 Photonen generieren 100 photochemisch aktive Elektronen). Tatsächlich geben Pflanzen der Minimierung von Energieschwankungen Vorrang vor maximaler Effizienz, wie man kürzlich herausgefunden hat [**?**]. Der Selbstschutz der Pflanzen ist verantwortlich, denn wolkenfreier und bedeckter Himmel sorgen für starke Intensitätsschwankungen des Sonnenlichts und damit variiert die für die Photosynthese zur Verfügung gestellte Energiemenge. Diese Fluktuationen können die Pflanzenzellen eines Blattes schädigen. Der quantenchemische Umwandlungsprozess, in dem die Energie der Photo-

E. Wieman *for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates.*

[60] Carotinoide sind eine Gruppe von natürlichen Farbstoffen, die in vielen Gemüsesorten enthalten sind.

nen in chemische Energie umgewandelt wird, funktioniert gut, wenn der Energieeintrag konstant bleibt. In der Frühpase der Photosynthese mangelte es im Meer an Licht. Dieser Umstand führte zur Entwicklung von lichtsammelnden Antennen, dass sind eine modulare Anordnung pigment-bindender Proteine, die die Sonnenenergie absorbieren und an die Reaktionszentren der Photosynthese abgeben. An dieser Schnittstelle wurde im Laufe der Evolution optimiert. Die Natur hat einen Weg gefunden, die Sonnenenergie über ein flexibles Netzwerk zu transportieren (Abb. 13.55), und Schwankungen im Energieeintrag damit zu minimieren. Unter Umwelteinflüssen scheint es am klügsten zu sein, Licht bei spektral weit voneinander entfernten Wellenlängen aufzusammeln. Lediglich zwei unterschiedliche Pigmente, die bei unterschiedlichen Wellenlängen Licht absorbieren, reichen aus, um die Photosynthese auch bei stark schwankenden Lichteinfall auszubalancieren. Wie sich herausstellt, ist die Annahme nicht mehr haltbar, dass die Photosynthese ein Prozess der Effizienzmaximierung ist. Vielmehr scheint es darum gegangen zu sein, Fluktuationen im Energietransport zu minimieren.

Ein Beispiel aus der Klimaforschung

Eine Anwendung des Planckschen Strahlungsgesetzes ist eine satellitengestützte Bestimmung der Oberflächentemperatur der Erde. Dazu bestimmen schmalbandige Sensoren im optischen und infraroten Spektralbereich Punkte auf der Planck-Kurve. Aus den Daten wird das zugehörige Planck-Spektrum unter Berücksichtigung der Luftabsorption berechnet und so die Oberflächentemperatur bestimmt. Abb. 13.56 zeigt die auf die Erde einfallende Strahlung der Sonne (blau) und die Absorption durch die Atmosphäre (orange). Eingezeichnet sind die 36 Spektralbereiche (gelb), die MODIS,[61] eingesetzt auf den Satelliten *Terra* und *Aqua*, auswertet, um die Temperaturdaten zu erfassen.

Niemand kann mit den Gesetzen der Physik verhandeln.

Jean-Pascal van Ypersel, ehemaliger Vizechef des Weltklimarats, 2018

Planck-Einheiten^{4LP}

Es sind Möglichkeit gegeben, Einheiten aufzustellen, welche, unabhängig von speciellen Körpern oder Substanzen, ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch außerirdische und außermenschliche Culturen nothwendig behalten und welche daher als *natürliche Maasseinheiten* bezeichnet werden können [**?**].

Max Planck, 1899

Die Plancksche Konstante ist und das hat sich im Laufe dieser Vorlesung vielfach gezeigt, eine der wichtigsten Naturkonstanten. Was ergibt sich, wenn man fundamentale Konstanten kombiniert? Eine solches Vorgehen liefert die Planck-Einheiten. Man kombiniert

[61] MODIS: Moderate-resolution Imaging Spectroradiometer

fundamentale Konstanten (Quantum: $\hbar$, Licht: c, Gravitation: G_N, Temperatur: k_B, Ladung: k_C), so dass die sich als beispielsweise die Einheit Meter ergibt. Die Planck-Länge ℓ_P ist

$$\begin{aligned}
\ell_P &= \sqrt{\frac{\hbar \cdot G_N}{c^3}} \\
\ell_P &= \sqrt{\frac{(1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}})}{(2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^3}} \\
\ell_P &= 1.6 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{13.32}$$

Das ist ein ziemlich geringer Wert. Das Proton hat einen Durchmesser in der Größenordnung von $10^{-15}\,\mathrm{m}$. Der Unterschied beträgt 20 Größenordnungen. Die Insel Mallorca ist im Durchmesser etwa 100 km groß. Wäre es möglich, das Proton auf diese Größe zu vergrößern, wäre die Planck-Länge der Durchmesser des ursprünglichen Protons.

Berechnet man die Planck-Zeit t_P, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
t_P &= \sqrt{\frac{\hbar \cdot G_N}{c^5}} \\
t_P &= \sqrt{\frac{(1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}})}{(2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^5}} \\
t_P &= 5.4 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s}
\end{aligned} \tag{13.33}$$

Wie lang ist das? Licht benötigt etwa $10^{-24}\,\mathrm{s}$, um das Proton zu durchqueren. Das sind 20 Größenordnungen Unterschied. Das entspricht der Dauer einer Millisekunde im Vergleich zum Alter des Universums von $13.8 \cdot 10^9\,\mathrm{a}$.

Schließlich die Planck-Masse m_P:

$$\begin{aligned}
m_P &= \sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G_N}} \\
m_P &= \sqrt{\frac{(1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{(6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}})}} \\
m_P &= 2.2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg}
\end{aligned} \tag{13.34}$$

Sie können nachprüfen, aber dieser Wert ergibt sich. Das ist einigermaßen überraschend, oder? Machen Sie sich die Mühe und finden Sie die Erklärung!

1954	Planck-Länge	Gravitationslimit der Quantentheorie	O. Klein
1955		Quantenlimit der Relativitätstheorie	J. Wheeler
1965	Planck-Masse	Größte Masse eines Elementarteilchens	M. Markov
1966	Planck-Temperatur	Höchste erreichbare Temperature	A. Sacharow[a]
1971	Planck-Masse	Geringste Masse eines Schwarzen Lochs	S. Hawking
1982	Planck-Dichte	Oberste Grenze der Dichte von Materie	M. Markov

Tab. 13.4: Die Grenzen der Physik!

[a] The Nobel Peace Prize 1975 was awarded to A. Sakharov *for his struggle for human rights in the Soviet Union, for disarmament and cooperation between all nations.*

Wie hoch ist die Planck-Temperatur?

$$\begin{aligned} T_P &= \sqrt{\frac{\hbar \cdot c^5}{G_N \cdot k_B^2}} \\ T_P &= \sqrt{\frac{(1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^5}{(6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}) \cdot (1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}})^2}} \\ T_P &= 1.4 \cdot 10^{32}\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{13.35}$$

Im Innern heißer Sterne herschen Temperaturen von 10^9 K. Das sind 24 Größenordnungen Unterschied. Technisch unerreichbar! Die Planck-Einheiten haben keine praktische Anwendung. Kein Entfernungsmesser wird in Planck-Längen kalibriert, kein Kalender wird in Planck-Zeiten aufgeteilt und kein Thermometer wird eine Skala in Einheiten der Planck-Temperatur haben. Sind die Planck-Einheiten deshalb bedeutungslos? NEIN! Die Werte zeigen uns die Grenzen der Physik auf, siehe Tab. 13.2. Kombinieren Sie munter weiter und entdecken Sie weitere Planck-Einheiten, wie beispielsweise die Planck-Energie oder die Planck-Ladung!

Interessant wird es, wenn relevante physikalische Größen dieselbe Größenordnung erreichen. Der Ereignishorizont eine Schwarzen Lochs wird durch den Schwarzschild-Radius beschrieben. Was ist, wenn der Schwarzschild-Radius r_S vergleichbar wird zur Compton-Wellenlänge λ_C eines Teilchens der Masse m?

$$\begin{aligned} r_S &= \lambda_C \\ \frac{2\,G_N \cdot \cdot m}{c^2} &= \frac{h}{m \cdot c} \\ m &= \sqrt{\frac{h \cdot c}{2\,G_N}} = 3.8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{13.36}$$

$$r_S = \lambda_C = \sqrt{2\,\hbar \cdot G_N} c^3 = 5.7 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m} \tag{13.37}$$

Hier handelt es sich um Objekte, die man nur mit Hilfe der Quantengravitation beschreiben lassen. Leider ist diese Theorie, die die Quantenphysik mit der Allgemeinen

Relativitätstheorie vereinigt, noch nicht entwickelt worden.

Eine neue wissenschaftliche Wahrheit pflegt sich nicht in der Weise durchzusetzen, daß ihre Gegner überzeugt werden und sich als belehrt erklären, sondern vielmehr dadurch, daß die Gegner allmählich aussterben und daß die heranwachsende Generation von vornherein mit der Wahrheit vertraut gemacht ist.

Max Planck, 1948



Abb. 13.57: Platzregen in Indien. Aufgrund der enormen Regenmengen kann man einzelnen Regentropfen nicht mehr unterscheiden und man hat den Eindruck eines kontinuierlichen Wasserflusses. Ähnlich kann man sich den Übergang von einzelnen Photonen zu einem kontinuierlichen Lichtstrahl vorstellen

Aufgaben

Aufgabe 6.1: Wie viele Photonen emittiert ein grüner Laserpointer (550 nm) mit einer Leistung von 1 mW?

$$
\begin{aligned}
P_{LP} &= \frac{E_{LP}}{1.0\,\mathrm{s}} \\
P_{LP} &= \frac{n_{photons} \cdot h \cdot \nu_{ph}}{1.0\,\mathrm{s}} \\
P_{LP} &= \frac{n_{photons} \cdot h \cdot c}{\lambda_{ph} \cdot 1.0\,\mathrm{s}} \\
n_{photons} &= \frac{P_{LP} \cdot \lambda_{ph} \cdot 1.0\,\mathrm{s}}{h \cdot c} \\
n_{photons} &= \frac{(1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J/s}) \cdot (550 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}) \cdot \mathrm{s}}{(6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})} \\
n_{photons} &= 2.78 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}
$$

Dies ist eine enorm große Anzahl an Photonen und die Körnigkeit des Lichts kaum auflösbar. Man denke an einen Starkregen als Analogie (Abb. 13.57). Die Einzelnen Regentropfen werden nicht mehr wahrgenommen. Die Situation ist also ähnlich wie in der Elektrostatik, wo man einen elektrischen Strom als Vielfaches der Elementarladung anzusehen müsste. Eine solche Detailfreudigkeit ist aber bei vielen Probleme überhaupt nicht notwendig und man kann sich mit makroskopischen Größen zufrieden geben.

Aufgabe 6.2: Der Faden einer Glühbirne hat eine Temperatur von T_K=3000 K. Vergleichen Sie die Strahlungsabgabe im Maximum des menschlichen Sehens (λ_{eye}=550 nm) mit der Abgabe bei der Wellenlänge $\lambda_{\max}$, bei der die Emission maximal ist!



Abb. 13.58: Heatball.[a] Aus der Frankfurter Allgemeinen vom 18.10.2010.
[a] Wie von der Europäischen Kommission in der *Verordnung zu Anforderungen an die umweltgerechte Gestaltung von Haushaltslampen* beschlossen, soll die Glühbirne bis 2012 in ganz Europa verschwinden.

Zunächst benötigt man die Wellenlänge $\lambda_{\max}$, bei dem die Plancksche Strahlungskurve ihr Maximum hat. Diese erhält man aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{\max} = (2.898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}) \cdot (3 \cdot 10^{3}\,\mathrm{K}) = 966\,\mathrm{nm}$$

Das Maximum liegt im infraroten Spektralbereich, wo das Auge nicht empfindlich ist. Hinzu kommt, dass die Plancksche Strahlungskurve einen langen Schwanz hin zu noch längeren Wellenlängen hat. Die sich ergebende mittlere Wellenlänge λ_{mean} ist also noch mehr ins Infrarote verschoben und landet bei etwa 1 400 nm. Die Hälfte der emittierten Strahlung ($\lambda > \lambda_{mean}$) ist also für das Auge schon mal nicht sichtbar. In sofern kann man vermuten, dass der Einsatz als Lichtquelle nicht sehr effizient ist. Zur Berechnung der Strahlungsleistung im Sichtbaren benötigen wir die Plancksche Strahlungsformel in Abhängigkeit von der Wellenlänge, siehe Gl. 13.26. Da wir nur an Vergleichswerten interessiert sind, reduziert sich die Plancksche Gleichung auf

$$\begin{aligned}
\frac{w_{EM}^{Planck}(\lambda_{eye}, T_K)}{w_{EM}^{Planck}(\lambda_{\max}, T_K)} &= \frac{\lambda_{\max}^5 \cdot \left(\exp\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_{\max} \cdot k_B \cdot T_K}\right) - 1\right)}{\lambda_{eye}^5 \cdot \left(\exp\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_{eye} \cdot k_B \cdot T_K}\right) - 1\right)} \\
\frac{w_{EM}^{Planck}(\lambda_{eye}, T_K)}{w_{EM}^{Planck}(\lambda_{\max}, T_K)} &= \frac{4.46 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^5}{11.5 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^5} \\
\frac{w_{EM}^{Planck}(\lambda_{eye}, T_K)}{w_{EM}^{Planck}(\lambda_{\max}, T_K)} &= 0.389
\end{aligned}$$

Zusammenfassend kann man davon ausgehen, dass weit weniger als die Hälfte der Strahlung der Glühbirne nicht als sichtbares Licht emittiert wird. Für den genauen Wert müsste man die Planckkurve zwischen 400 nm und 700 nm integrieren und zusätzlich noch mit der Empfindlichkeitskurve der Retina (Kapitel *Photoelektrischer Effekt*) falten. Nach dem Verbot des Verkaufs von Glühbirnen in Deutschland im Jahr 2009, versuchte man in einer Kunstaktion Glühlampen als Heizstrahler anzupreisen, siehe Abb. 13.58.

Aufgabe 6.3: Wie hoch ist nach der Planckschen Analyse die mittlere Energie E_{avg}eines Oszillators der Frequenz ν, wobei $E_\nu = h \cdot \nu = k_B \cdot T_K$?

$$\begin{aligned} E_{avg} &= \frac{E_\nu}{\exp\left(\frac{E_\nu}{k_B \cdot T_K}\right) - 1} \\ E_{avg} &= \frac{k_B \cdot T_K}{e^1 - 1} \\ E_{avg} &= 0.582 \cdot k_B \cdot T_K \end{aligned}$$

Nach der klassischen Theorie ergibt sich E_{avg}=$k_B \cdot T_K$!

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Aussagen über die Natur eines Schwarzen Strahlers macht die Plancksche Strahlungsformel?

2. Welche Aspekte eines schwarzen Strahlers führten Planck dazu anzunehmen, dass Energiezustände quantisiert sind?

3. Wie kann man mit Hilfe des Spektrums eines Schwarzen Strahlers das Plancksche Wirkungsquantum bestimmen?

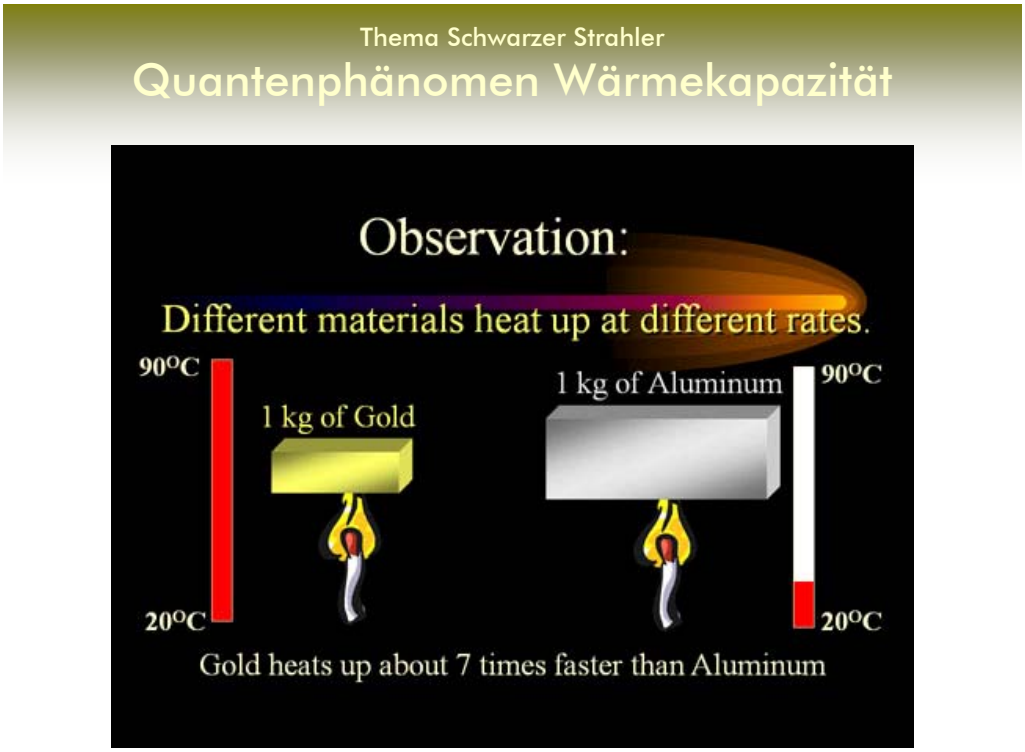
4. Die Strahlungsabgabe eines Schwarzen Körpers kann man als Funktion der Energie oder als Funktion der Wellenlänge darstellen. Unterscheidet sich die Lage der Maxima?

5. Warum bemerken wir das Phänomen der Quantisierung nicht im normalen Alltag?

6. Welche physikalische Größe ergibt sich aus dem Ausdruck h/e^2. Was für ein Wert ergibt sich?

7. Nehmen wir mal an, dass die Planck-Konstante deutlich größer ausfallen würde, zum Beispiel 1 J·s. Hätte die Quantisierung dann direkte Auswirkungen auf unser Leben?

Quantenphänomen Wärmekapazität^{4LP}



Wenn die Plancksche Strahlungstheorie den Kern der Sache trifft, so müssen wir erwarten, auch auf anderen Gebieten der Wärmetheorie Widersprüche zwischen der gegenwärtigen molekular-kinetischen Theorie und der Erfahrung zu finden, die sich auf dem eingeschlagenen Weg heben lassen [**?**].

Albert Einstein, 1907

Dulong-Petit Gesetz

Die Atome in einem Festkörper sind in ständiger thermischer Bewegung. In einem einfachen Bild kann man sich vorstellen, dass ein Atom, umgeben von sechs anderen Atomen sich bewegt und die Positionen aller anderen Atome eingefroren sind, siehe Abb. 13.59. Man kann diese Schwingung mit Hilfe des Hookschen Gesetzes (Kapitel *Wellenfunktion*) analysieren und kommt unter zu Hilfenahme des makroskopischen Größen für zum Beispiel Aluminium auf Schwingungsfrequenzen von $3.4 \cdot 10^{12}$ Hz. Der Ansatz ist stark vereinfacht, da natürlich alle Atome schwingen. Tatsächlich beträgt der Wert $6.4 \cdot 10^{12}$ Hz, aber die Größenordnung wird durch das grobe Modell gut wiedergegeben. Für die Amplitude ergeben sich Werte von 0.2 Å. Mit Hilfe dieser Informationen kann man versuchen,

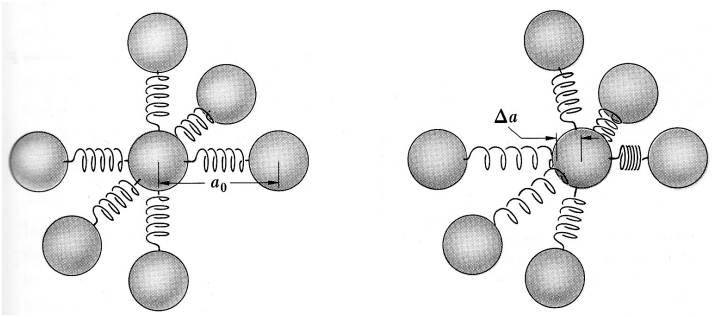


Abb. 13.59: Vereinfachtes Modell eines Festkörpers. (a) Gleichgewichtskonfiguration (b) Das zentrale Atome schwingt um seine Gleichgewichtslage, während die umgebenden Atome fixiert sind.

die Wärmekapazität dieses Stoffes zu ermitteln. Die Analyse führt letztendlich auf das Gesetz von Dulong-Petit, dass das Verhalten der Festkörper bei hohen Temperaturen wiedergibt. Wir betrachten dagegen jetzt die thermischen Eigenschaften von Festkörpern speziell bei geringen Temperaturen. Stimmt das Dulong-Petit Gesetz dann immer noch? NEIN! Abweichungen vom erwarteten Verhalten wurden von H. F. Weber 1875 bei Messungen an Bor, Kohlenstoff und Silizium bei ($T_C < 0\,^o$C) gefunden. Der Wert der spezifische Wärme war signifikant unter dem erwarteten Wert nach dem Dulong-Petit Gesetz. Wie es schien, froren innere Freiheitsgrade bei niedriger Temperatur aus. Auf der Grundlage der klassischen Physik war dieses Verhalten nicht verständlich.

Auf den ersten Blick hat dieses Thema keinen Anknüpfungspunkt zum Schwarzen Körper. Es zeigt sich aber, dass man das Konzept von Planck übernehmen kann und Aussagen über Temperaturabhängigkeit der Energiespeicherung über Phononen[62] machen kann. Die theoretische Aufarbeitung geht zurück auf die Arbeiten von Einstein und Debye.

Allgemeine Gaskonstante[63] R_G=8.314 J·mol^{-1}·K^{-1}

Eine Energiezufuhr ΔQ_{th} erwärmt einen Körper. Dabei hängt die Temperaturerhöhung ΔT_K von der Wärmekapazität C_{th} des jeweiligen Materials ab.

$$\Delta Q_{th} = C_{th} \cdot \Delta T_K \tag{13.38}$$

Betrachtet man statt der spezifischen Wärmekapazität (Einheit J kg^{-1} K^{-1}) die molare Wärmekapazität (Einheit J mol^{-1} K^{-1}) ergibt sich ein einfacher Zusammenhang, den man aus dem Gleichverteilungssatz der Thermodynamik ableiten kann. Die mittlere Energie eines Atoms, wenn es um die Gleichgewichtslage im Festkörper schwingt ist von der Größenordnung $k_B \cdot T_K$. Jede Raumrichtung trägt bei, also ergibt sich bei N ein Wert von $3\,N \cdot k_B \cdot T_K$.Der Beitrag zur molaren internen Energie U aufgrund der Bewegung

[62] *Lexikon:* **Phononen** sind Elementaranregungen von Gitterschwingungen eines Festkörpers.

der Atome ist daher

$$U = 3\,N_A \cdot k_B \cdot T_K = 3\,R_G \cdot T_K \tag{13.39}$$

Die molare Wärmekapazität[64] bei konstantem Volumen ist damit

$$C_{th} = \frac{\partial U}{\partial T_K} = 3\,R_G = 24.9 \cdot \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}\mathrm{mol}^{-1} \tag{13.40}$$

Das Gesetz von Dulong-Petit sagt für alle Materialien einen Wert von $3\,R_G$ für die molare Wärmekapazität voraus. Klassisch lässt sich aber nicht erklären, warum im Bereich niedriger Temperaturen die experimentellen Werte erheblich von $3\,R_G$ abweichen. Einen quantenphysikalischen Beitrag haben wir schon kennengelernt, die Nullpunktsenergie (Kapitel *Wellenfunktion*). Dieser spielt aber im weiteren keine Rolle, aber er deutet darauf hin, dass die Quantenphysik vielleicht einen nicht unerheblichen Beitrag zur makroskopischen Größe Wärmekapazität liefern könnte.

Einstein-Modell

Die Einsteinsche Theorie der spezifischen Wärmekapazität beschreibt, auf der Grundlage der Planckschen Analyse des Schwarzen Körpers, die Wärmekapazität von Festkörpern über den gesamten Temperaturbereich. Dabei geht Einstein von der Annahme aus, dass alle Atome des Festkörpers mit der gleichen Frequenz harmonisch um ihre Gleichgewichtspositionen schwingen. Wie sich herausstellt, sind auch die Schwingungen der Atome in einem Kristall quantisiert. Die zugehörigen Energiepakete (Schallquanten) nennt die Festkörperphysik Phononen. Wie wird die Wärmekapazität experimentell bestimmt? Man nutzt ein Kalorimeter.[65] Abb. 13.60 zeigt die Version von Depretz und Dulong, mit dem sie den Grundumsatz von Lebewesen untersuchten.
Für die spezifischen Molwärmen C_V gilt bei hohen Temperaturen die Dulong-Petit Regel, wonach ein Zusammenhang zwischen C_V und der Allgemeinen Gaskonstante R_G besteht, nämlich $C_V \approx 3R_G$. Danach beinhaltet jeder Freiheitsgrad die Energie $k_B T_K$. Abb. 13.61 zeigt die Entwicklung von C_V / R_G verschiedener Festkörper, die sich bei hohen Temperaturen dem Dulong-Petit Wert annähern.

Betrachten wir dazu ein ideales Gas[66] in einem abgeschlossenen Container (Volumen: $V = L^3$). Jedes Molekül (Index i) stößt in der Zeit Δt oftmals mit den Wänden (x, y, z) und übt damit -über den Impulsübertrag Δp_{xi} der Teilchen- im zeitlichen Mittel, Kräfte

[64] *Lexikon:* Die **molare Wärmekapazität** aller chemisch einfachen, festen kristallinen Stoffe beträgt etwa $3\,R_G$. Diese empirisch gefundene Regel wird in der klassischen kinetischen Theorie der Wärme mit dem Gleichverteilungssatz begründet.

[65] *Lexikon:* Ein **Kalorimeter** ist eine Apparatur mit der man die Wärmemenge bestimmt, die bei physikalischen, chemischen oder biologischen Prozessen auftreten.

[66] In einem Idealen Gas gibt es keine Wechselwirkung der Atome untereinander.

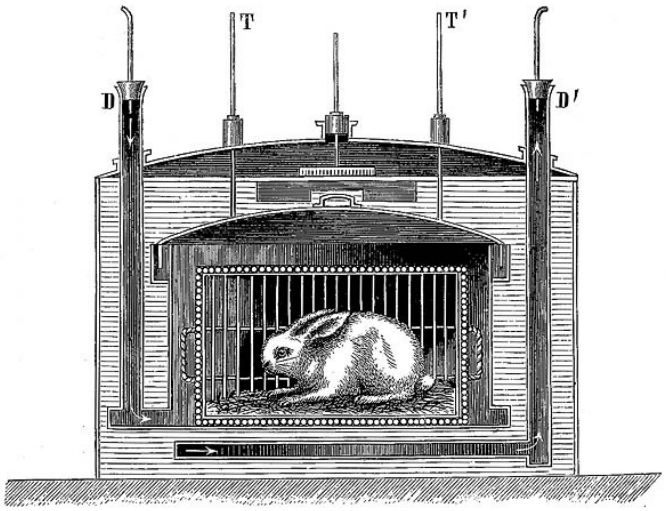


Abb. 13.60: Untersuchung des Energieverbrauchs von Tieren durch ein Kalorimeter nach Depretz und Dulong[**?**].

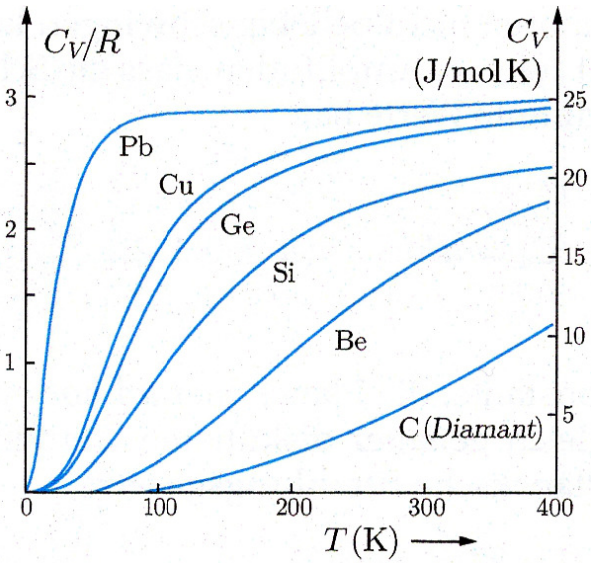


Abb. 13.61: Die spezifische Wärmekapazität der Elemente steigt als Funktion der Temperatur zunächst an und ist oberhalb einer bestimmten Temperatur im Allgemeinen konstant. Dieses Verhalten wird durch das Gesetz von Dulong-Petit beschrieben. Die Grenzwerttemperatur fällt für unterschiedliche Elemente allerdings unterschiedlich aus. Für Blei flacht die Kurve oberhalb von 200 K, bei Silizium erst bei über 600 K ab [**?**].

(F_x, F_y, F_z) auf die Containerwände aus:

$$\begin{aligned} F_{xi} &= \frac{|\Delta p_{xi}|}{\Delta t_i} \\ F_{xi} &= \frac{m \cdot v_{xi}}{\Delta t_i} \\ F_{xi} &= \frac{m \cdot v_{xi}^2}{L} \end{aligned} \tag{13.41}$$

wobei die Stöße im Abstand $\Delta t{=}L/v_{xi}$ erfolgen. Der gesamte Druck p auf die Wände ergibt sich durch die Summation der Kräfte aller N Teilchen, dividiert durch die Grundfläche A_0 des Containers:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sum_i F_{xi}}{A_0} \\ p &= \frac{m \cdot \sum_i v_{xi}^2}{A_0 \cdot L} \\ p &= \frac{N \cdot m}{V} \cdot \frac{\sum_i v_{xi}^2}{N} \\ p &= \frac{N \cdot m \cdot < v_x^2 >}{V} \end{aligned} \tag{13.42}$$

wobei $< v_x^2 >{=}\sum_i v_{xi}^2/N$ der quadratische Mittelwert über alle Molekülgeschwindigkeiten in Bezug auf die x-Komponente ist. Ähnliche Ausdrücke findet man für $< v_y^2 >$ und $< v_z^2 >$ und es ergibt sich:

$$< v^2 >=< v_x^2 > + < v_y^2 > + < v_z^2 >= 3 < v_x^2 > \tag{13.43}$$

da $< v_x^2 >=< v_y^2 >=< v_z^2 >$. Damit kann man den Druck schreiben als:

$$\begin{aligned} p &= \frac{N \cdot m}{V} \cdot \frac{1}{3} < v^2 > \\ p \cdot V &= N \cdot m \cdot \frac{1}{3} < v^2 > \end{aligned} \tag{13.44}$$

Erkennen Sie den den Zusammenhang zur Allgemeinen Gasgleichung?[67]

Allgemeine Gasgleichung: $p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T_K$

Deshalb ergibt sich als mittlere kinetische Energie der Teilchen:

$$\begin{aligned} N \cdot m \cdot \frac{1}{3} < v^2 > &= N \cdot k_B \cdot T_K \\ \frac{1}{2} m \cdot < v^2 > &= \frac{1}{3} k_B \cdot T_K \end{aligned} \tag{13.45}$$

[67] *Lexikon:* Die **Allgemeine Gasgleichung** beschreibt den Zusammenhang zwischen den thermischen Zustandsgrößen Druck, Volumen, Temperatur und Stoffmenge bzw. Teilchenanzahl eines idealen Gases.

Die Analyse liefert den Hinweise auf die Bedeutung des Begriffs Temperatur. Die Temperatur eines Systems ist proportional zur mittleren kinetischen Energie pro Molekül. Heißer heißt also höhere kinetische Energie der Teilchen.

Temperatur ist ein Maß für die Energie pro Atom.

Was bedeutet es, wenn man Wechselwirkungen einschaltet?

Freiheitsgrade der Bewegung

Die Möglichkeiten der Bewegung im Raum nennt man die Freiheitsgrade eines Körpers. Atome eines einatomigen Gases haben DREI Freiheitsgrade. Sie können sich im allen drei Raumrichtungen bewegen. Ein zweiatomiges Molekül hat mehr Möglichkeiten. Diese sind Vibration und Rotation, siehe Abb. 13.62. Die Teilchen eines zweiatomigen Gases haben bei der Annahme einer starren Hantel fünf Freiheitsgrade. Ein dreiatomiges symmetrisches Molekül hat, wie Abb. 13.63 zeigt, allein DREI Freiheitsgrade für die Vibration. Der Maxwellsche Gleichverteilungssatz besagt, dass pro Teilchen jeder Freiheitsgrad im Mittel $E_{avg} = 1/2\, k_B \cdot T_K$ zur inneren Energie beiträgt. Die Chemiker geben diesen Ausdruck auch gerne pro Mol an, d.h. $E_{avg} = 1/2\, R_G \cdot T_K$ an. Man erinnere sich, dass gilt: $R_G = N_A \cdot k_B$. Konsequenz der Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade ist, dass Moleküle gegenüber Atomen eine erhöhte Wärmekapazität aufweisen.

Die Quantisierung der Energiezustände in der Quantenphysik und die damit verbundenen Energiesprünge bewirkt, dass nicht alle theoretisch in Frage kommenden Freiheitsgrade auch tatsächlich verfügbar sind. Die Translationsbewegung unterliegt dabei nicht der Quantisierung. Messungen zur Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität von Wasserstoff zeigen die Quantisierung der Vibrations- und Rotationsfreiheitsgrade, siehe Abb. 13.64. Bei molekularem Wasserstoff ist eine bestimmte Energie notwendig, damit das Wasserstoffmolekül beginnt, um die Molekülachse zu rotieren. Bei tiefen Temperaturen reicht die im Gas gespeicherte Energie in der Regel nicht aus, dass das Molekül rotiert oder Schwingungen ausführt. Man könnte von eingefrorenen Freiheitsgraden sprechen. Es stellt sich heraus, dass bei niedrigen Temperaturen zunächst Rotationen angeregt werden können. Erst bei höherem Energieeintrag (höhere Temperatur) können Schwingungen im Molekül angeregt werden. Für die Ermittlung der Wärmekapazität von Festkörpern ist nur die Quantisierung der Schwingungsenergie relevant, denn der durch die chemische Bindung stabilisierte Atomverband erlaubt keine Drehbewegungen. Aus dem Maxwellschen Gleichverteilungssatz kann die Dulong-Petit Regel abgeleitet werden. Dazu berechnet man die innere Energie des Körpers U_{th} und schaut sich die Temperaturabhängigkeit an $(dU_{th}/\, dT_K)$, aus der sich die Wärmekapazität C_V berechnet.

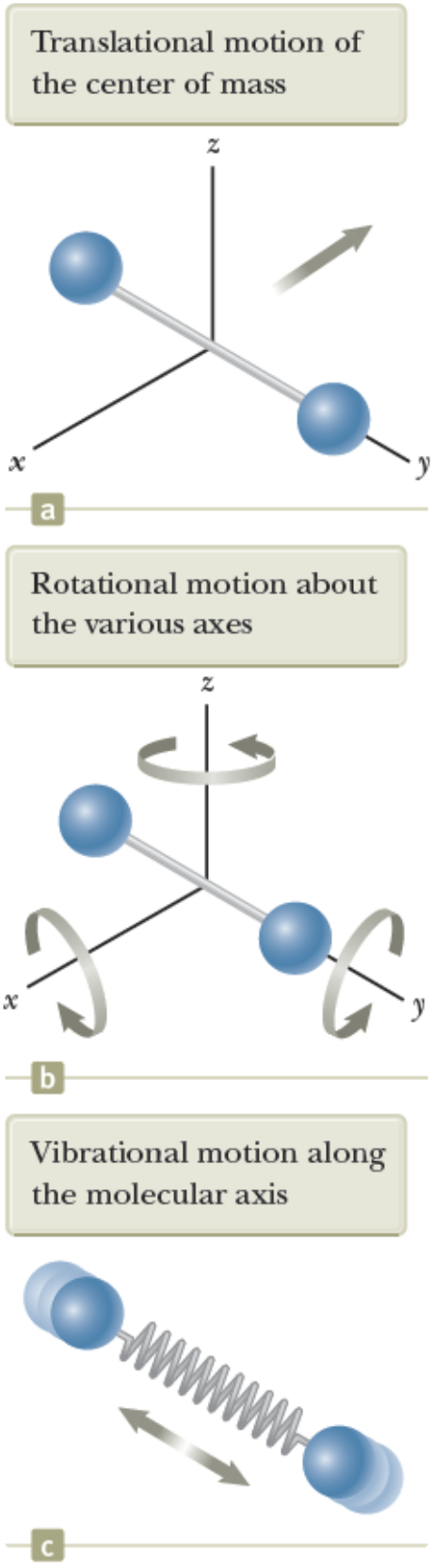


Abb. 13.62: Translations-, Rotations- und Vibrations-Freiheitsgrade eines zweiatomigen Moleküls [**?**].

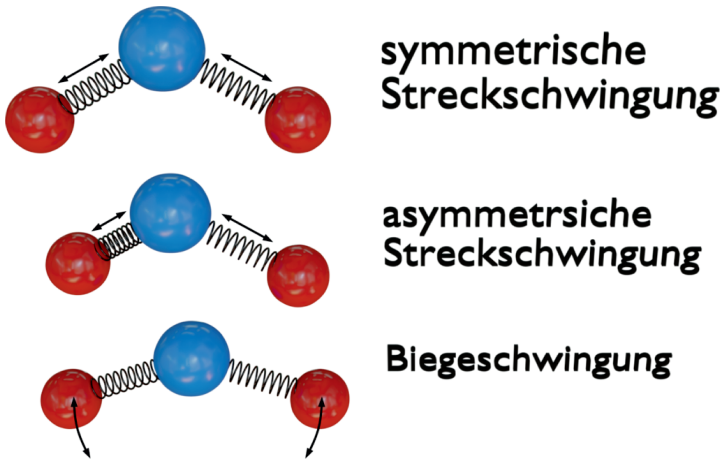


Abb. 13.63: Schwingungs-Freiheitsgrade für ein dreiatomiges Molekül [**?**].

$$
\begin{aligned}
U_{th} &= 6\,N_A \cdot E_{avg} \\
U_{th} &= 6\,N_A \cdot \left(\frac{1}{2} k_b \cdot T_K\right) \\
U_{th} &= 6\,N_A \cdot k_B \cdot T_K && (13.46) \\
C_V &= \frac{dU_{th}}{dT_K} \\
C_V &= 3\,N_A \cdot k_B = 3\,R_G && (13.47) \\
C_V &= 24.9\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1} && (13.48)
\end{aligned}
$$

Avogadro-Konstante: N_A=6.022 $\cdot$ 10^{23} mol^{-1}

Im Bereich hoher Temperaturen gibt das Dulong-Petit Gesetz das Verhalten vieler Materialien richtig wieder. Wie man aus Abb. 13.61 erkennt, ergibt sich der Wert von $3\,R_G$ aus der Annahme, dass alle Freiheitsgrade unabhängig voneinander mit ein und derselben Energie zur Wärmekapazität beitragen. Bei niedrigeren Temperaturen führt die Quantisierung der Energiezustände zu Abweichungen.

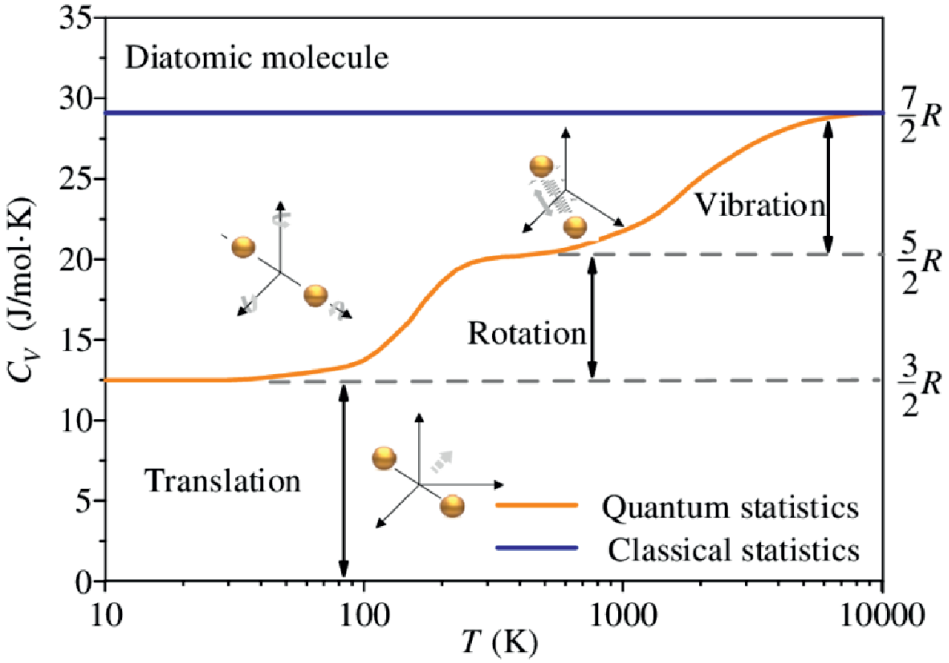
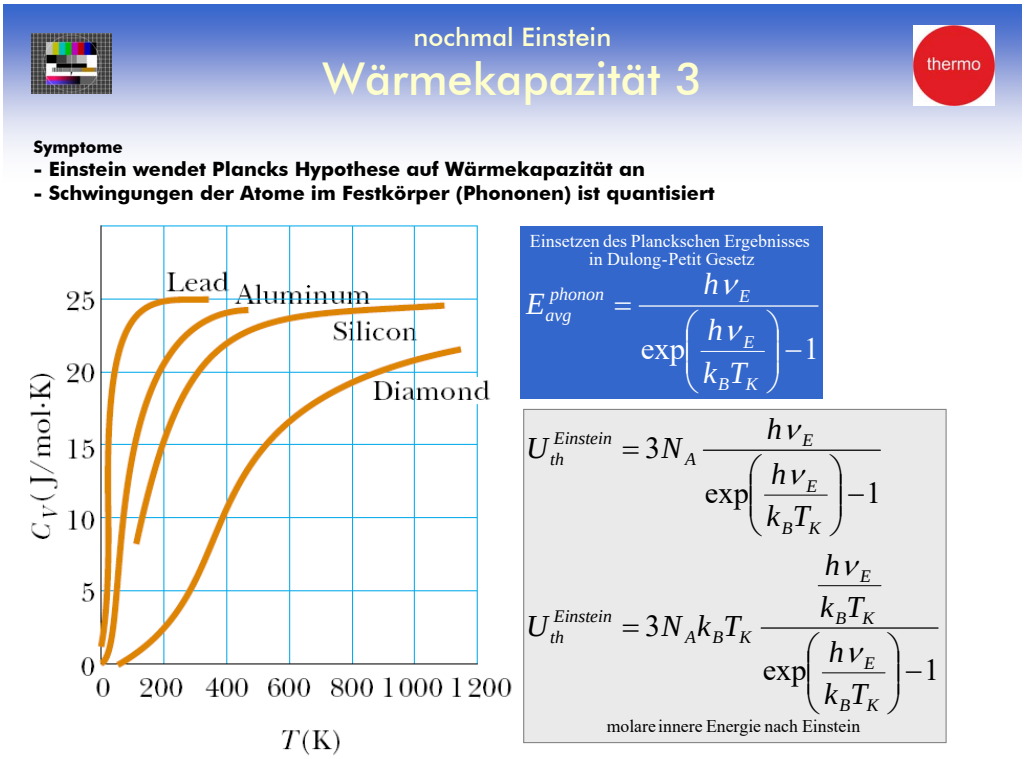


Abb. 13.64: Die Änderung der Wärmekapazität von Wasserstoff (H_2) als Funktion der Temperatur zeigt den Einfluss der Quantenphysik [**?**].



Herleitung

Einstein ersetzt den Maxwellschen Ansatz $U_{th} = 3N_A k_B T_K$ durch den Ausdruck, den Planck in der Analyse des schwarzen Strahlers gefunden hat[68]

$$E_{avg}^{phonon} = \frac{h \cdot \nu_E}{\exp\left(\frac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right) - 1} \tag{13.49}$$

wobei er als Frequenz die Gitterschwingung ν_E einsetzt. Damit lässt sich das Temperaturverhalten der spezifischen Wärmekapazität erklären. An dieser Stelle sei angemerkt, dass im Einsteinschen Modell nur eine Phononfrequenz (ν_E) zur Wärmekapazität beiträgt. Stellen Sie sich Phononen als stehende Wellen im Kristall vor. Die Wellenlänge kann allerdings nicht geringer werden, als der doppelte Abstand der Atome untereinander. Wissen Sie warum? Dies entspricht einer maximalen Frequenz. Warum sollten alle Atome Schwingungen mit ein und derselben Frequenz ausführen? Realistischer ist doch, dass ein Festkörper unterschiedlichste Schwingungen ausführt. Hier ist scheinbar

[68] Der Nenner in der Gleichung wurde zuerst von Satiendra Bose für Photonen aufgestellt. Einstein adaptierte den Ausdruck und erweiterte die statistische Analyse (Bose Statistik) auf Teilchen mit ganzzahligem Spin (Bosonen!Bose-Einstein Statistik). Dies sind unter anderem Phononen.

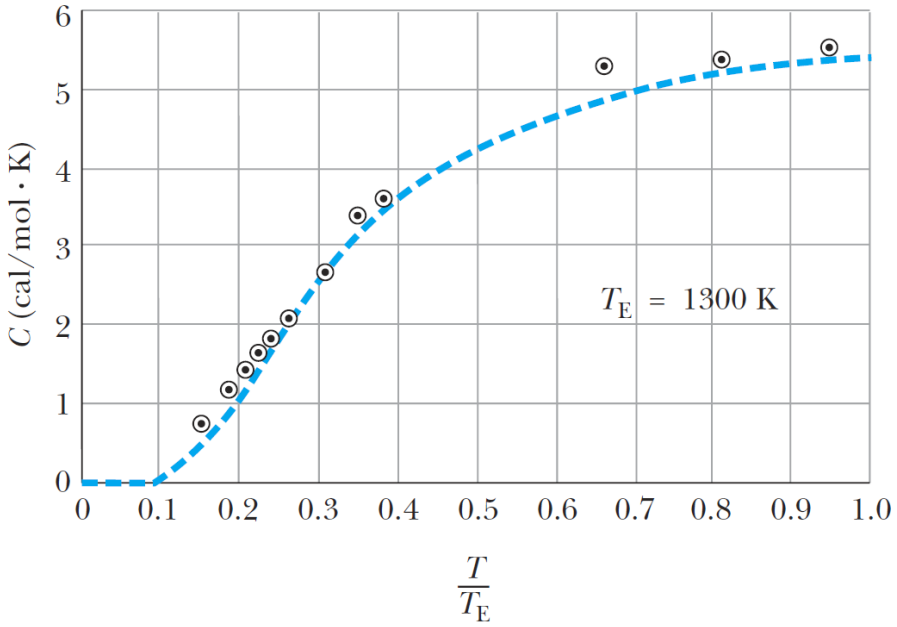


Abb. 13.65: Vergleich von Experiment und Einsteinschem Ansatz der spezifischen Wärmekapazität, nach [**?**].

noch Luft nach oben, wie der nächste Abschnitt zeigen wird. Ableitung von U_{th} nach der Temperatur liefert die spezifische Wärmekapazität.

$$
\begin{aligned}
C_V^{Einstein} &= \frac{dU_{th}}{dT_K} \\
C_V^{Einstein} &= 3\,N_A \cdot k_B \left(\frac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right)^2 \frac{\exp\left(\dfrac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right)}{\left(\exp\left(\dfrac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right) - 1\right)^2} \\
C_V^{Einstein} &= 3\,N_A \cdot k_B \left(\frac{\Theta_E}{T_K}\right)^2 \frac{\exp\left(\dfrac{\Theta_E}{T_K}\right)}{\left(\exp\left(\dfrac{\Theta_E}{T_K}\right) - 1\right)^2}
\end{aligned}
\tag{13.50}
$$

wobei $\Theta_E = h \cdot \nu_E / k_B$ die Einsteintemperatur bezeichnet. Typische Werte für Θ_E liegen bei 300 K, also Raumtemperatur. In Diamant ist der Wert höher und man findet einen Wert von 1320 K. Abb. 13.65 zeigt den Vergleich von Experiment und Modells, entnommen aus der Originalarbeit von Einstein [**?**]. Es ist sinnvoll, die Skalierung der Wärmekapazität bei extremen Temperaturen zu betrachten. Für hohe Temperaturen ($T_K \to \infty$) gilt

$$\begin{aligned} \frac{\hbar \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K} &\rightarrow 0 \\ \exp\left(\frac{\hbar \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right) &\rightarrow 1 \\ \exp\left(\frac{\hbar \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right) - 1 &\approx \frac{\hbar \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K} \end{aligned} \tag{13.51}$$

so dass sich für Gl. 13.50 ergibt

$$\begin{aligned} C_V^{Einstein} &\approx 3\,N_A \cdot k_B \left(\frac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right)^2} \\ C_V^{Einstein} &\approx 3\,N_A \cdot k_B = 3\,R_G \end{aligned} \tag{13.52}$$

Das Einstein-Modell ergibt also für hohe T_K das klassische Resultat (Gl. 13.47). Bei niedrigen Temperaturen dagegen ist der Term $\exp(h\nu_E/k_B T_K) \gg 1$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} C_V^{Einstein} &\approx 3\,N_A \cdot k_B \frac{\left(\frac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right)^2 \exp\left(\frac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right)\right)^2} \\ C_V^{Einstein} &\approx 3\,N_A \cdot k_B \left(\frac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right)^2 \exp\left(-\frac{h \cdot \nu_E}{k_B \cdot T_K}\right) \\ C_V^{Einstein} &\approx 3\,N_A \cdot k_B \left(\frac{\theta_E}{T_K}\right)^2 \exp\left(-\frac{\Theta_E}{T_K}\right) \end{aligned} \tag{13.53}$$

Das bedeutet, dass man bei tiefen Temperaturen einen Verlauf der Wärmekapazität gemäß

$$C_V^{Einstein} \approx \frac{1}{T_K^2} \exp\left(-\frac{\Theta_E}{T_K}\right) \tag{13.54}$$

erwartet. Das Modell gibt die experimentellen Daten gut wieder. Wenn man allerdings genauer hinschaut, erkennt man Abweichungen. Woran liegt das?

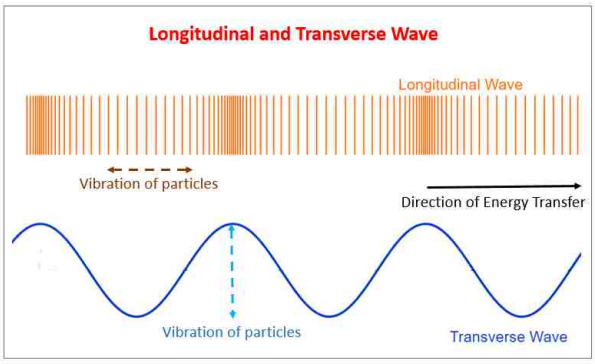


Abb. 13.66: Vergleich von longitudinaler und transversaler Ausbreitung von Wellen.

Debye-Modell

In welcher Weise könnte man das Modell von Einstein erweitern? Peter Debye[69] hat die Einsteinsche Theorie überarbeitet und Schwingungsmoden im Frequenzintervall $[\nu : \nu + d\nu]$ in seinem Modell berücksichtigt [**?**]. Dies ergibt die Funktion $D_\nu(\nu)d\nu$ unter der realistischen Annahme einer maximalen Frequenz ν_D. Diese so genannte Debyefrequenz ν_D liegt im Bereich von 10^{12} Hz. Insgesamt ergibt sich aufgrund der Anzahl möglicher Freiheitsgrade in einem Körper mit N_{At} Atomen und Volumen V_0

$$\int_0^{\nu_D} D_\nu(\nu)\, d\nu = 3\, N_{At} \tag{13.55}$$

Grundsätzlich muss man zwischen longitudinalen und transversalen Schallwellen[70] im Festkörper unterscheiden. Die Werte werden in der Betrachtung in dem Parameter a_D zusammengefasst. Für D_ν ergibt sich

$$D_\nu = a_D \cdot V_0 \cdot \nu^2 \tag{13.56}$$

Abb. 13.67 zeigt einen Vergleich des Debye-Modells mit dem experimentell bestimmten Schwingungsspektrum von Aluminium. Wie man erkennt, ist das Modell immer noch eine Näherung in Bezug auf die wirklichen Verhältnisse. Die berechnete spezifische Molwärme im Debye Modell C_V^{Debye} ergibt sich mit

$$C_V^{Debye} = \left(\frac{\partial U}{\partial T_K}\right)_V = 9\, k_B \cdot N_{At} \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T_K} \frac{x^4 \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} dx \tag{13.57}$$

[69] The Nobel Prize in Chemistry 1936 was awarded to Petrus (Peter) Josephus Wilhelmus Debye *for his contributions to our knowledge of molecular structure through his investigations on dipole moments and on the diffraction of X-rays and electrons in gases.*

[70] *Lexikon:* **Mechanische Wellen** sind Wellen, die sich durch ein Medium mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausbreiten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt von den elastischen und trägen Eigenschaften des Mediums ab. Man unterscheidet zwei Arten der Wellenbewegung, siehe Abb. 13.66. Bei einer **Longitudinalwelle** ist die Auslenkung des Teilchens PARALLEL zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Bei einer **Transversalwelle** ist die Auslenkung SENKRECHT zur Richtung der Wellenausbreitung.

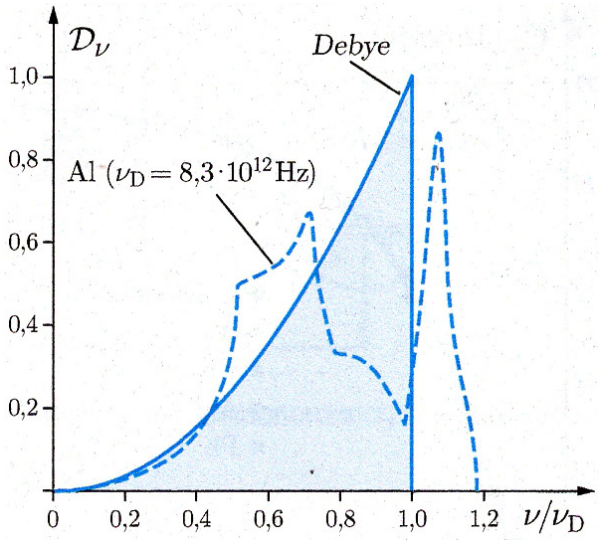


Abb. 13.67: Spektrum der Schwingungsmoden des Aluminium Festkörpers (gestrichelt) im Vergleich zum Debye-Modell. Der Wert für Anzahl der Schwindungsmoden im Frequenzintervall $[\nu : \nu + d\nu]$: $\mathcal{D}(\nu)\, d\nu$ ist in Einheiten von N_A/ν_D angegeben, wobei N_A die Avogadro-Konstante bezeichnet [**?**].

wobei Θ_D die Debye-Temperatur bezeichnet[71] und folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{aligned} k_B \cdot \Theta_D &= h \cdot \nu_D \\ \Theta_D &= \frac{h \cdot \nu_D}{k_B} \qquad (13.58) \\ x_D &= \frac{h \cdot \nu_D}{k_B \cdot T_K} = \frac{\Theta_D}{T_K} \qquad (13.59) \end{aligned}$$

Allgemein kann man sagen, dass Θ_D umso größer ausfällt, je stärker die Bindungsverhältnisse im Festkörper sind und je geringer die Masse der Festkörperatome ist. Abb. 13.68 gibt einen Überblick über die Debye-Temperaturen (Θ_D) der Elemente im Periodensystem. Abb. 13.69 zeigt, wie sich die Wärmekapazität im Einstein und Debye Modell als Funktion der Temperatur entwickelt. Für hohe Temperaturen ist der Term (x_D) im Debye-Modell klein und man kann in Gl. 13.57 Terme mit e^x durch 1 und (e^x-1) durch x ersetzen, so dass sich der Ausdruck vereinfacht

$$\int_0^{\theta_D/T_K} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \approx \int_0^{\theta_D/T_K} x^2\, dx \qquad (13.60)$$

Dann folgt für die spezifische Wärmekapazität

$$C_V^{Debye} = 9\, k_B \cdot N_A \frac{T_K^3}{\theta_D^3} \frac{x^3}{3} = 3\, k_B \cdot N_A = 3\, R_G \qquad (13.61)$$

da $x = \Theta_D/T_K$. Damit ergibt sich bei hohen Temperaturen auch für das Debye Modell das klassische Dulong-Petit Resultat (Gl. 13.47). Bei geringen Temperaturen erreicht x_D

[71] Die physikalische Bedeutung der Debye-Temperatur ist, dass $k_B\Theta_D$ die maximal mögliche Energie einer Vibrationsmode ist. Bei höheren Temperaturen schmilzt der Festkörper. Die Debye-Temperatur ist proportional der Wurzel der Schmelztemperatur.

Periodic Table of Debye Temperatures

Li	**Be**											**B**	**C**	**N**	**O**	**F**	**Ne**
344	1440												2230				75
Na	**Mg**											**Al**	**Si**	**P**	**S**	**Cl**	**Ar**
158	400											428	645				92
K	**Ca**	**Sc**	**Ti**	**V**	**Cr**	**Mn**	**Fe**	**Co**	**Ni**	**Cu**	**Zn**	**Ga**	**Ge**	**As**	**Se**	**Br**	**Kr**
91	230	360	420	380	630	410	470	445	450	343	327	320	374	282	90		72
Rb	**Sr**	**Y**	**Zr**	**Nb**	**Mo**	**Tc**	**Ru**	**Rh**	**Pd**	**Ag**	**Cd**	**In**	**Sn (w)**	**Sb**	**Te**	**I**	**Xe**
56	147	280	291	275	450		600	480	274	225	209	108	200	211	153		64
Cs	**Ba**	**La (b)**	**Hf**	**Ta**	**W**	**Re**	**Os**	**Ir**	**Pt**	**Au**	**Hg**	**Tl**	**Pb**	**Bi**	**Po**	**At**	**Rd**
38	110	142	252	240	400	430	500	420	240	165	71.9	78.5	105	119			
Fr	**Ra**	**Ac**															
				Ce	**Pr**	**Nd**	**Pm**	**Sm**	**Eu**	**Gd**	**Tb**	**Dy**	**Ho**	**Er**	**Tm**	**Yb**	**Lu**
										200		210				120	210
				Th	**Pa**	**U**	**Np**	**Pu**	**Am**	**Cm**	**Bk**	**Cf**	**Es**	**Fm**	**Md**	**No**	**Lr**
				163		207											

Source: Ch. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 6th ed., Wiley, 1986, page 110

© Sven L.M. Schroeder, 2003

Abb. 13.68: Debye-Temperaturen der Elemente.

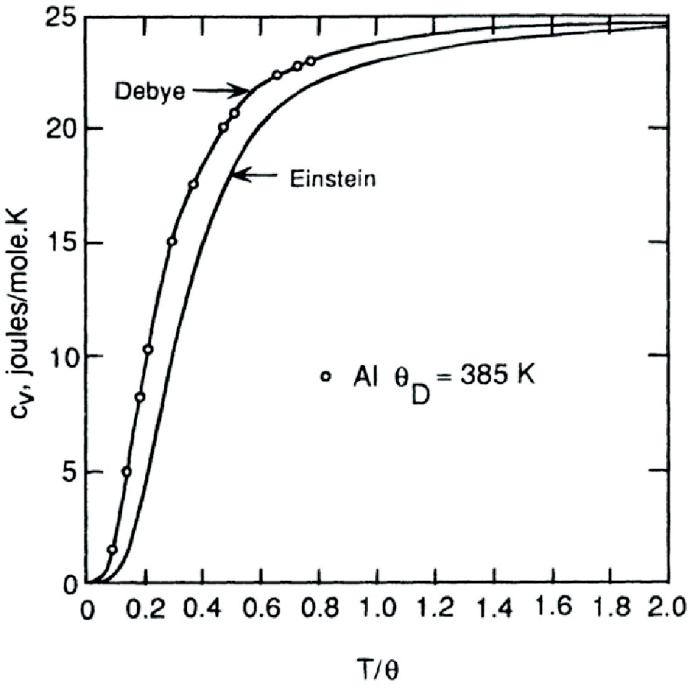


Abb. 13.69: Wie sich herausstellte, gibt Einsteins Theorie den Trend in der Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazitäten richtig, aber nicht exakt wieder. Nach der Theorie nimmt die Wärmekapazität schneller ab, als experimentell beobachtet. Als Ursache erkannte Debye die Einschränkung in der theoretischen Betrachtung auf nur eine einzige Schwingungsmode. Die Berücksichtigung vieler kollektiver Moden (Phononen) zeigt eine deutliche Verbesserung im Hinblick auf eine genauere Wiedergabe der Experimente.

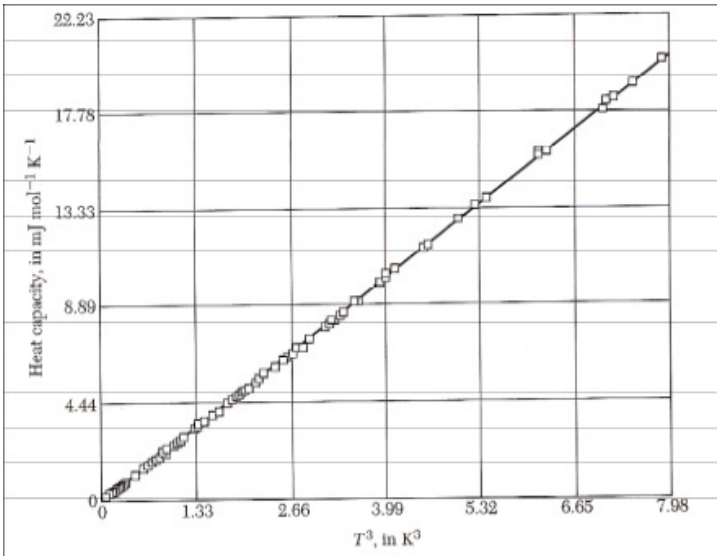


Abb. 13.70: Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität von Argon. Aus der Anpassung der experimentellen Daten an das Debye-Modell gelingt es, die Debye-Temperatur für festes Argon zu bestimmen.

hohe Werte und man kann als obere Grenze ($x = \infty$) einsetzen, was für das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^4 \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{4\,\pi^4}{15} \tag{13.62}$$

ergibt. Eingesetzt in Gl. 13.57 findet man:

$$\begin{aligned} C_V^{Debye} &= 9\,k_B \cdot N_A \frac{T_K^3}{\theta_D^3} \frac{4\,\pi^4}{15} \\ C_V^{Debye} &\approx \frac{T_K^3}{\theta_D^3} \end{aligned} \tag{13.63}$$

Im Vergleich zum Einstein-Modell (Gl. 13.54) ergibt sich ein leicht anderes Ergebnis. Abb. 13.70 zeigt, dass sich die Wärmekapazität von Argon bei tiefen Temperaturen tatsächlich proportional zu T_K^3, also gemäß dem Debye Modell, verhält. Wie man aus Abb. 13.61 erkennt ist die Annahme eines isotropen Festkörpers im Debye-Modell nur eine grobe Näherung. Abweichung zu den experimentellen Resultaten ergeben aus dieser vereinfachenden Sicht. Dennoch stellt man fest, dass die Temperaturentwicklung von C_V zufriedenstellend wiedergegeben wird.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Erklären Sie den Begriff Wärmekapazität!
2. Was versteht man unter molarer Wärmekapazität?
3. Wie arbeitet ein Kalorimeter?
4. Kennen Sie Anwendungen für Kalorimeter?
5. Was versteht man unter der Dulong-Petit Regel?
6. Unter welchen thermodynamischen Bedingungen kommt zu Abweichungen von der Dulong-Petit Regel?
7. Wo ist der Zusammenhang der Einsteinschen Theorie der Wärmekapazität zur Planckschen Strahlungsformel?
8. Welchen Unterschied gibt es zwischen der Einsteinschen und der Debyschen Behandlung der Wärmekapazität?

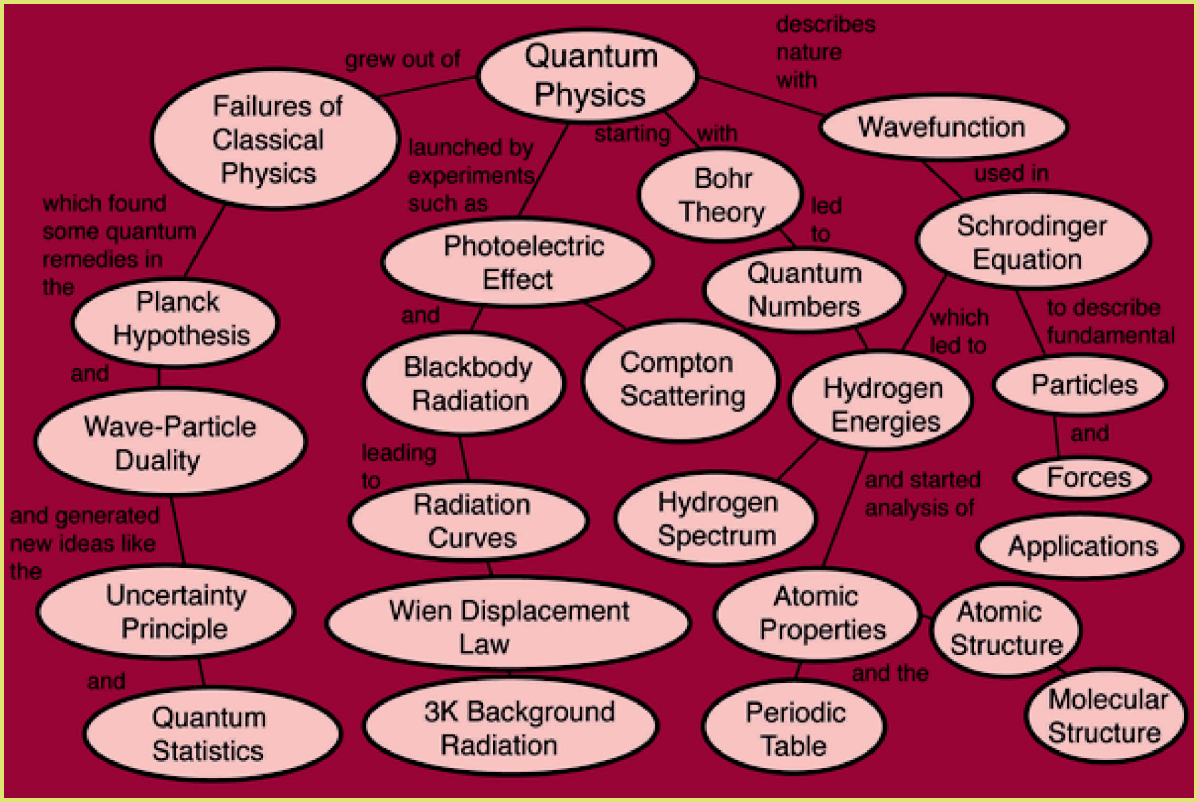


Abb. 13.71: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

- Eigenschaften eines Schwarzen Strahlers.
- Wiensches Verschiebungsgesetz (Gl. 13.1):

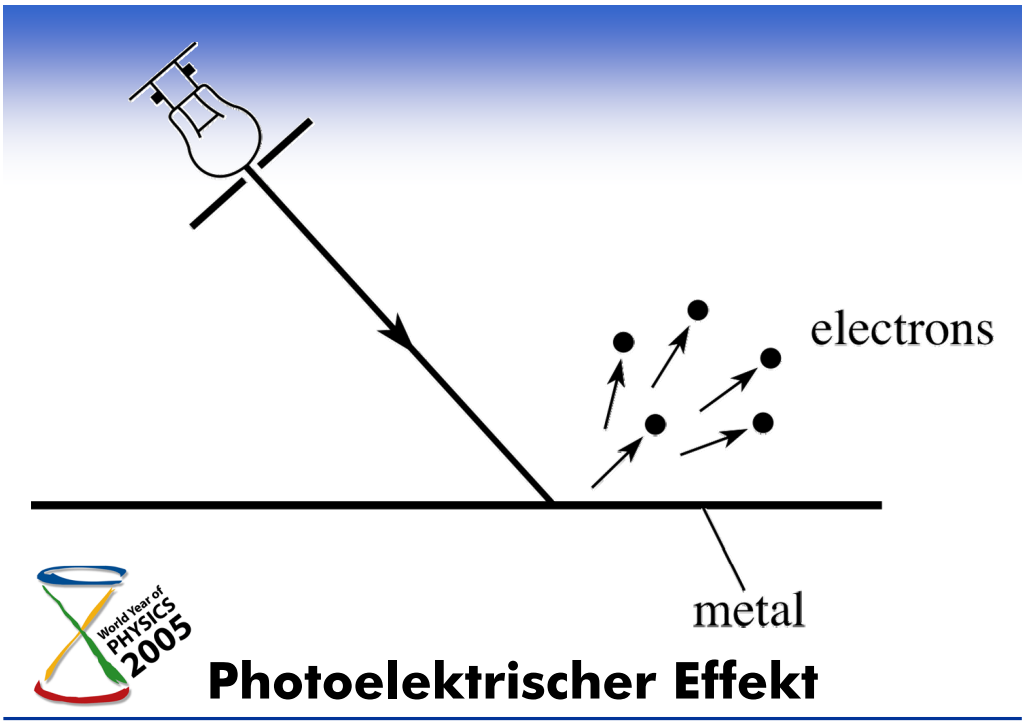
$$\lambda_{\max} \cdot T_K = b_\lambda$$

- Stefan-Boltzmann Gesetz (Gl. 13.2):

$$P_{EM} = \varepsilon_{th} \cdot \sigma_{SB} \cdot A_0 \cdot T_K^4$$

- Oberflächentemperatur der Sterne
- Ultraviolettkatastrophe

14 Photoelektrischer Effekt



Gelegentlich schloß ich den Funken B in ein dunkles Gehäuse ein, um die Beobachtungen zu erleichtern, und dabei bemerkte ich, daß die maximale Funkenlänge im Inneren des Gehäuses entschieden kürzer war als zuvor [**?**].

Heinrich Hertz, 1887

[1]Elektronen können durch Zufuhr an Energie aus einem Metall ausgelöst werden. Dies kann beispielsweise durch den Eintrag thermischer Energie erfolgen. Ein heißer Wolframfaden emittiert Elektronen. Dieses Phänomen nennt man den glühelektrischen Effekt, der von Guthrie 1873 erstmals beschrieben wurde [**?**]. Ein positiv aufgeladenes Elektroskop entlädt sich bei Annäherung eines geerdeten, glühenden Metalls. Bei einem negativ aufgeladenem Elektroskop geschah nichts. Guthrie schloss daraus, dass ein glühendes

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.



Abb. 14.1: Der glühelektrische Effekt (Edison- oder auch Richardson-Effekt) beschreibt die Emission von Elektronen aus einer geheizten Glühkathode.

Metall nur negative Ladung abgeben kann. 1880 meldete Edison auf der Grundlage dieses Phänomens ein Patent an. Die StromdichteElektrodynamik!Stromdichte[2] J_R der aus einem Metall bei hohen Temperaturen T_K emittierten Elektronen wird durch die Richardson-Dushman Gleichung [**?**] beschrieben.[3]

$$J_R = \frac{4\pi\, m_e}{h^3}(k_B T_K)^2 \exp\left(-\frac{W_A}{k_B \cdot T_K}\right) \tag{14.1}$$

wobei W_A die Austrittsarbeit für Elektronen aus dem Festkörper ist. Abb. 14.2 zeigt die Entwicklung der thermionischen Stromdichte als Funktion der Temperatur für verschiedene Austrittsarbeiten.

Die Glühemission aus Metallfäden hochschmelzender Metalle wird in der Technik zur Erzeugung freier Elektronen verwendet. Eingesetzt in Elektronenröhren (Abb. 14.1) können elektrische Signale verstärkt werden. Das Verfahren findet Anwendung in der Hochfrequenztechnik. Damit gelang es, neben Morsezeichen auch eine Ton und Bildübertragung zu realisieren. Kathodenstrahlröhren, auch Braunsche Röhren (Braun, 1896) genannt, siehe Abb. 14.3, nutzen den glühelektrischen Effekt, um mit Hilfe von Elektronenstrahlen Schmelz-, Verdampfungs- und Schweißvorgänge auszulösen [**?**]. Weitere Anwendungen sind der Einsatz in Elektronenmikroskopen (Kapitel *Materiewellen*) oder in älteren Fernsehern und Oszilloskopen.

Zeittafel des Photoeffekts

[2] *Lexikon:* Die elektrische Stromdichte kennzeichnet, wie dicht die Ladungsträger durch einen Leiter strömen. Die Einheit ist [A/m^2].

[3] The Nobel Prize in Physics 1928 was awarded to Owen Willans Richardson *for his work on the thermionic phenomenon and especially for the discovery of the law named after him.*

1805 William Wollaston entdeckt eine Reihe von Absorptionslinien im Sonnenspektrum.

1817 Joseph von Fraunhofer bestimmt 574 Absorptionslinien im Spektrum der Sonne, indem er die spektrale Auflösung seines optischen Instruments entscheidend verbesserte.

1839 Alexandre Edmond Becquerel entdeckt den nach ihm benannten Becquerel-Effekt: Man beobachtet das Auftreten einer Potentialdifferenz zwischen zwei gleichen Elektroden, die in einen Elektrolyten eintauchen und von denen eine belichtet wird. Besonders wirksam ist ultraviolettes Licht. Der Effekt ist besonders ausgeprägt bei Selen-Elektroden, sowie bei oxidierten, chlorierten oder jodierten Elektroden.

1887 Heinrich Hertz macht erste Beobachtungen zum Photoeffekt. Er stellte fest, dass ein geladenes Objekt seine Ladung leichter verliert, wenn es mit ultraviolettem Licht beleuchtet wird.

1889 Elster und Geitel weisen nach, dass man den Photoelektrischen Effekt auch mit sichtbarem Licht für bestimmte Amalgame beobachten kann, die Natrium, Kalium und Cäsium enthalten.

1889 Wilhelm Hallwachs ergänzt die Studien zum Photoeffekt.

1900 Phillip Lennard führt Messungen im Vakuum durch und zeigt, dass durch den Lichteinfall Elektronen emittiert werden. Seine Beobachtung: Elektronen werden mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus dem Metall emittiert, wobei die maximale kinetische Energie der Photoelektronen nicht von der Lichtintensität abhängt.

1905 Albert Einstein gibt eine theoretische Erklärung des Photoeffekts.[4]

1915 Robert Millikan bestimmt den Proportionalitätsfaktor im Einsteinschen Gesetz zum Photoeffekt und weist nach, dass es sich um die Plancksche Konstante handelt.

Ein anderes Verhalten beobachtet man, wenn man als Transportmechanismus, statt thermischer Energie, Licht verwendet. Im Jahr 1887 untersuchte Heinrich Hertz die Funkenbildung zwischen elektrisch geladenen Platten[5] und bemerkte, dass die Stärke und Anzahl der Funken zunahm, wenn die Metallflächen mit ultraviolettem Licht bestrahlt wurden [**?**]. Nur auf den ersten Blick scheint dieses Phänomen nichts mit der Physik eines schwarzen Strahlers zu tun zu haben.

[4] Jede der drei im Jahr 1905 erschienen Arbeiten beschäftigt sich mit einer Naturkonstanten. Dies sind wie hier die Plancksche Konstante h, die Boltzmann Konstante k_B (Brownsche Bewegung) und die Lichtgeschwindigkeit c (Spezielle Relativitätstheorie).

[5] *Lexikon:* Eine **Funkenstrecke** ist ein mit neutralen Gasmolekülen gefüllter Raum zwischen Elektroden, in dem aufgrund einer hohen elektrischen Spannung Gas ionisiert wird (Überschlagspannung). Eine Stoßionisationslawine führt in kurzer Zeit (ms) zu einer hohen Leitfähigkeit, der sich in einem Funken äußert.

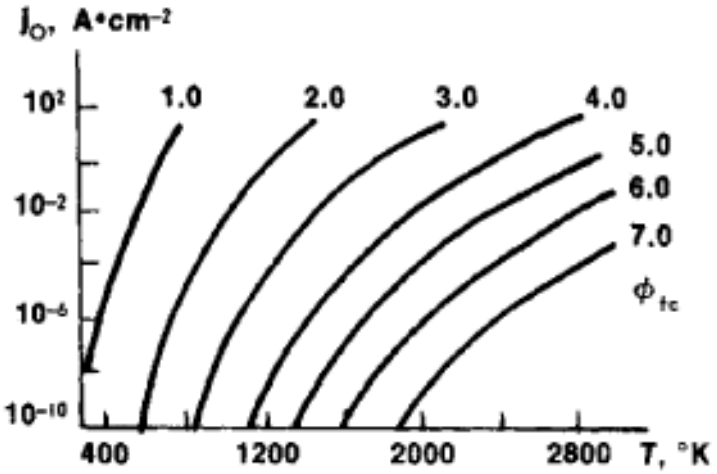


Abb. 14.2: Thermionische Sättigungsstromdichte bei unterschiedlichen Temperaturen und für ausgewählte Austrittsarbeiten, hier als ϕ_{tc} indiziert [**?**].

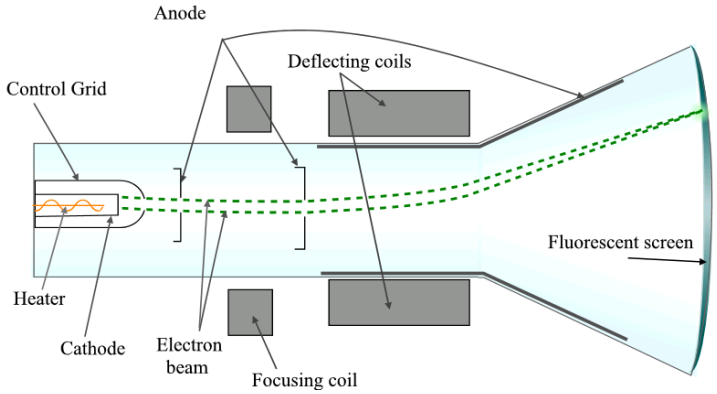


Abb. 14.3: Kathodenstrahlröhre mit elektromagnetischer Fokussierung und Ablenkung [**?**].

Trifft ein Lichtstrahl, also eine elektromagnetische Welle, auf eine Metalloberfläche können Elektronen von der Oberfläche ausgelöst werden, wenn ihre Energie hoch genug ist, um die bindenden Kräfte zu überwinden. Diese Energie ist die Austrittsarbeit eines Festkörpers W_A und stellt eine charakteristische Größe des untersuchten Metalls dar. Im Gegensatz zum glühelektrischen Effekt kommt eine Erwärmung des Metalls durch das Licht als Erklärung für das Auslösen der Elektronen nicht in Frage.

Die kinetische Energie der emittierten Elektronen kann mit einem Kondensator, bestehend aus zwei Metallplatten (Kathode[6] und Anode) bestimmt werden. Durch ein Vakuum wird verhindert, dass die Elektronen auf dem Weg mit Gasmolekülen stoßen und die Information über die Energie verfälscht wird. Zu Beginn der Untersuchungen hatte man vermutet, dass die Ladung an die umgebenden Gasmoleküle abgegeben wird [**? ?**]. Auch

[6] *Lexikon:* Eine **Kathode** ist eine Elektrode, an der einem System (Elektronenröhre, Gasentladungsröhre, Plasma Elektrolyt, ...) Elektronen zugeführt werden. Die Kathode ist die Gegenelektrode zur Anode. Zwischen Kathode und Anode bewegen sich Ionen oder Elektronen (Kationen zur Kathode, Anionen zur Anode).

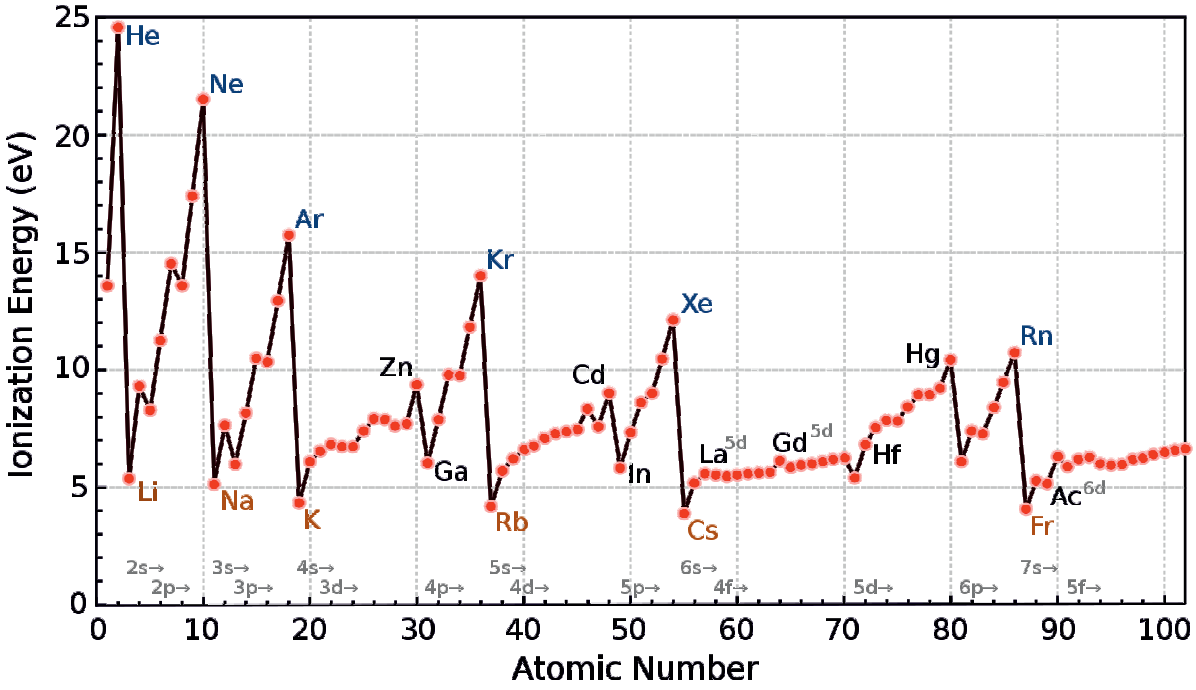


Abb. 14.4: Ionisationsenergien der Elemente im Periodensystem [**?**].

die Möglichkeit, dass Atome abgedampft werden, wurde diskutiert und verworfen. Um die Geschwindigkeit der Elektronen zu bestimmen, legt man ein elektrostatisches Gegenfeld an. Die Analyse kommt zu einem Ergebnis, dass man nicht mit den Erkenntnissen der klassischen Physik erklären kann. Bei Einstrahlung monochromatischem Lichts haben die Elektronen eine definierte kinetische Energie. Das Resultat widerspricht der Annahme einer breiten thermischen Energieverteilung nach Maxwell. Einstein[7] hat 1905 eine Arbeit zur Physik des Photoeffekts veröffentlicht [**?**] und mit seiner Theorie die Experimente von Hertz [**?**], Hallwachs [**? ?**] und Lenard [**?**][8] und erklärt.

Im Folgenden beschäftigen wir uns intensiv mit der Ablösung von Elektronen aus Atomen, Molekülen und Festkörpern. Um einen Eindruck zu erhalten, welche Energien typisch sind, betrachten wir vorab die elementspezifischen Ablöseenergien. Wir genau hinschaut eine gewisse Systematik, deren Ursprung durch das Pauli-Prinzip (Kapitel *Beyond Bohr*) erklärt wird.

Ein Elektron in Ruhe wird in einem Kondensator über eine Potenzialdifferenz von 1 Volt

[7] The Nobel Prize in Physics 1921 was awarded to Albert Einstein *for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect.*

[8] The Nobel Prize in Physics 1905 was awarded to Philipp Eduard Anton von Lenard *for his work on cathode rays.*

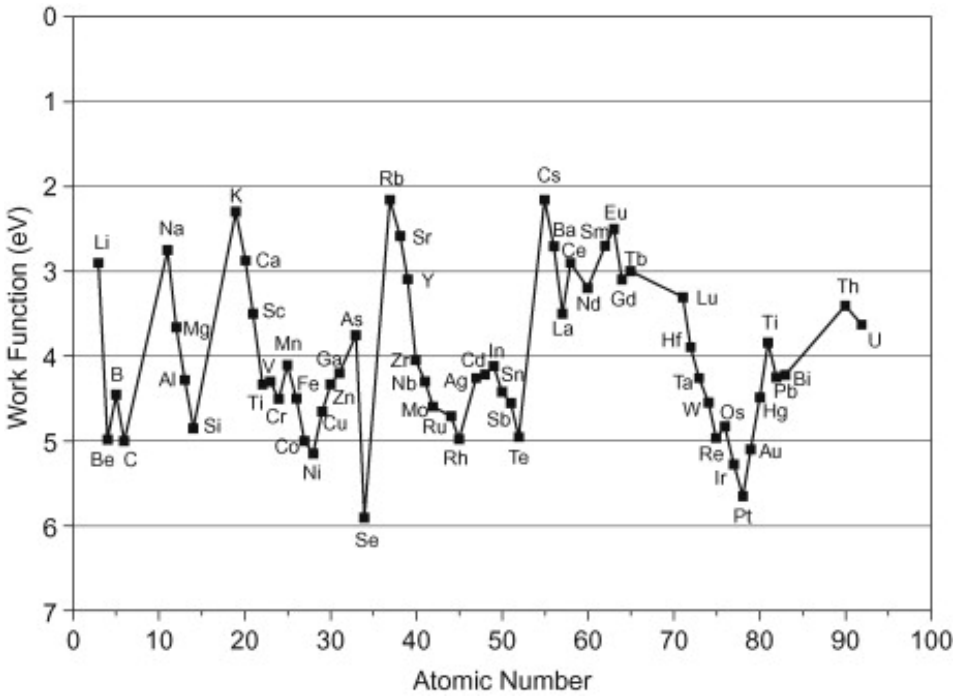


Abb. 14.5: Austrittsarbeiten aus dem Festkörper für die Elemente des Periodensystems [**?**].

beschleunigt. Aufgrund der Energieerhaltung gilt:

$$\begin{aligned} E^i_{kin} + E^i_{pot} &= E^f_{kin} + E^f_{pot} \\ E^i_{kin} + q \cdot U_i &= E^f_{kin} + q \cdot U_f \end{aligned} \tag{14.2}$$

wobei aufgrund der Anfangsbedingungen E^i_{kin} und $q{=}e$. Das elektrostatische Potenzial ist $E_{pot}{=}U{=}q \cdot V$. Damit ergibt sich für die kinetische Energie nach durchlaufen des Kondensatorfelds:

$$\begin{aligned} E^f_{kin} &= -q \cdot (V_f - V_i) \\ E^f_{kin} &= -q \cdot \Delta V \\ E^f_{kin} &= e \cdot \Delta V \\ E^f_{kin} &= (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (1\,\mathrm{V}) \\ E^f_{kin} &= 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \\ E^f_{kin} &= 1.0\,\mathrm{eV} \end{aligned} \tag{14.3}$$

Einheit Elektronenvolt: $1.0\,\mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$[9]

Es sei angemerkt,[10] dass der numerische Vorfaktor dem Wert der Naturkonstanten für die elektrische Ladung entspricht. In den folgenden Experimenten wird die Energie bestimmt, die benötigt wird, Elektronen aus einem Material abzulösen. Für Atome und

[10] $1\,\mathrm{keV}{=}10^3\,\mathrm{eV}$; $1\,\mathrm{MeV}{=}10^6\,\mathrm{eV}$; $1\,\mathrm{GeV}{=}10^9\,\mathrm{eV}$

Moleküle nennt man diese Energie die Ionisierungsenergie[11] I_P (Abb. 14.4) und für Festkörper die Austrittsarbeit[12] W_A (Abb. 14.5). Es fällt auf, dass bestimmte Elemente des Periodensystems besonders hohe bzw. besonders niedrige Ablöseenergien aufweisen. Dies sind die Edelgase mit Ionisationsenergien von bis zu I_P(He)=24 eV und die Alkalimetalle (z.B. I_P(Cs)=3.89 eV). Beim Vergleich von Ionisierungsenergie I_P und Austrittsarbeit W_A stellt man systematische Unterschiede fest. Generell ist die W_A stets geringer als das I_P.

[11] *Lexikon:* Die **Ionisierungsenergie** I_P ist die Energie, die man mindestens benötigt, um ein Atom oder ein Molekül in der Gasphase zu ionisieren.

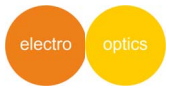
[12] *Lexikon:* Die **Austrittsarbeit** W_A ist die Arbeit (Energie), die mindestens aufgewandt werden muss, um ein Elektron aus einem Festkörper zu lösen. W_A ist abhängig von der Art des Festkörpers. Die Austrittsarbeit ist gering für die Alkalimetalle und fällt für alle anderen Metalle deutlich höher aus.

Inhalt

Photoelektrischer Effekt

- die lichtinduzierte Emission von Elektronen zeichnet sich durch besondere Eigenschaften aus
- Einsteinsche Gleichung erklärt den photoelektrischen Effekt
- Photoelektronenspektroskopie erlaubt Einblicke in die elektronische Struktur der Materie
- Experimente weisen nach, dass das menschliche Auge ein Quantendetektor für Licht ist

Kapitel 1
Experimente zum Photoeffekt



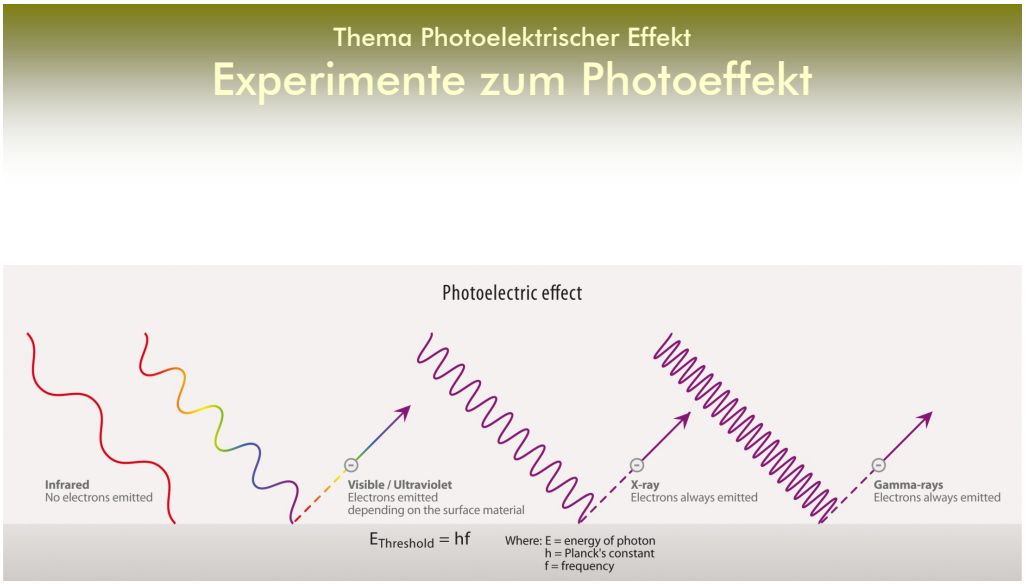
Kapitel 2
Einsteins Theorie zum Photoeffekt



Kapitel 3
Photonendetektor Auge



14.1 Experimente zum Photoeffekt



Angeregt durch die Versuche von Hrn. Hertz über die Wirkung des Lichtes auf den Inductionsfunken hatte ich vor einiger Zeit gezeigt, dass bei der Belichtung negativ electrischer, blanker Metallplatten mit geeignetem, ultravioletten Licht sich die negative Electricität den electrostatischen Kräften des Feldes folgend, zerstreut [**?** **?**].

Wilhelm Hallwachs

Experimente von Hallwachs

Die Ergebnisse im Rahmen von Messungen zum photoelektrischen Effekt sind nicht mit dem Wellencharakter von Licht erklärbar. Warum nicht? Wenn Lichtwellen von einer Oberfläche absorbiert werden, sollte kontinuierlich Energie aufgenommen werden. Nach einer gewissen Zeit sollte sich genug Energie akkumuliert haben und ein Elektron wird abgelöst.

Wie muss man sich das vorstellen?

Sehen Sie sich dazu den folgenden Film an.

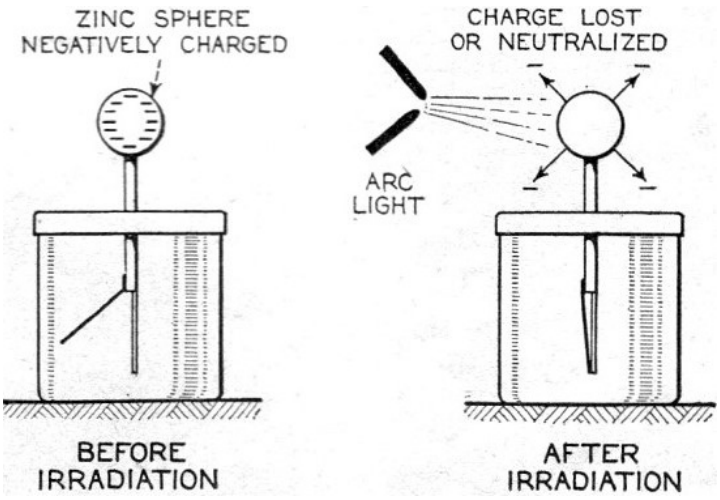


Abb. 14.6: Beim Hallwachs-Experiment wird eine Metallkugel mit einem Elektrometer verbunden. *Links:* Initial negativ aufgeladene Metallkugel bevor die Strahlung einwirkt. Die Abstoßung der Metallfolie des Elektroskop zeigt, dass die Kugel aufgeladen ist. *Rechts:* Wenn das Licht der Bogenentladung auf die Kugel einwirkt, entlädt sich das Elektroskop.

Link to video `Das Weihrauchfass Batafumeiro Santiago de Compostela`

Man erwartet also einen gewissen Zeitabstand zwischen dem Beginn der Lichteinwirkung und der Elektronenemission. Weiter sollte bei hoher Lichtintensität die Energie der Elektronen ansteigen, da mehr Energie eingekoppelt wird. Durch das Experiment werden diese Überlegungen nicht bestätigt.

Versuch einer klassischen Erklärung

Als Einstieg machen wir folgendes Experiment (Abb. 14.6): Eine Metalloberfläche, wie beispielsweise Zink,[13] wird mit einem Elektroskop verbunden und negativ aufgeladen. Für den Moment begnügen wir uns mit der unspezifischen Aussage, dass es geeignete und ungeeignete Lichtquellen für unsere Experimente gibt, ohne ihre besonderen Eigenschaften zunächst anzugeben. Soviel sei verraten. Wir verwenden Lichtquellen gleicher Leistung. Bestrahlt man das Metall mit einer geeigneten Lichtquelle, entlädt sich das Elektroskop, siehe Abb. 14.6, rechts. Ausgelöst durch das Licht verlassen Elektronen das Metall [**? ?**]. Ein Experiment durchgeführt mit einer positiv aufgeladenen Metalloberfläche liefert keinen Effekt, siehe Abb. 14.7, Mitte. Mit einer ungeeigneten Lichtquelle wird ebenfalls keine Entladung festgestellt. Dabei ist es egal, ob die Platte positiv oder negativ aufgeladen wurde, siehe Abb. 14.7, links.

[13] Um das Experiment erfolgreich vorführen zu können, sollte die Metallplatte mit Schmirgelpapier von seiner Oxidschicht befreit werden.

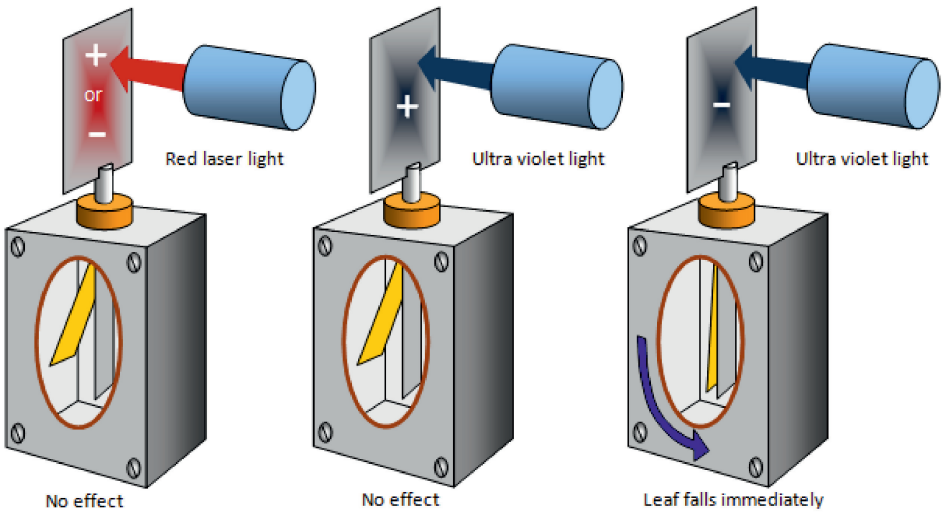


Abb. 14.7: Illustration des Hallwachs-Experiments zur Lichteinstrahlung auf ein aufgeladenes Elektroskop Einstrahlung von (*Links*) rotem Licht auf ein negativ aufgeladenes Elektroskop, (*Mitte*) blauem Licht auf ein positiv aufgeladenes Elektroskop, (*Rechts*) ultraviolettem Licht auf ein negativ aufgeladenes Elektroskop. Nur im letzten Experiment entlädt sich das Elektroskop.

Link to video `Photoelectric Effect`

Man kann sich überlegen, wie lange es dauern würde, bis soviel Energie akkumuliert ist, dass ein Elektron ein Atom bzw. die Metalloberfläche verlässt. Dazu machen wir zwei Abschätzungen:

- Nehmen wir ein Atom mit Radius r, dass wir mit einem Laser der Intensität I_L=150 W/cm^2 bestrahlen. Die Querschnittfläche des Atoms beträgt:

$$A_{at} = \pi \cdot r_{at}^2 \tag{14.4}$$

Angenommen, wir setzen ein Natriumatom (r_{Na}=0.1 nm) dem Licht für τ_1 Sekunden aus, dann ist die akkumulierte Energie

$$E_{at} = I_L \cdot A_{at} \cdot \tau_1 \tag{14.5}$$

Diese Energie ist notwendig, um die Emission zu ermöglichen und entspricht der Austrittsarbeit W_A. Für Natrium findet man einen Wert von W_A=2.3 eV=3.69 · 10^{-18} J. Einsetzen ergibt für die Zeitspanne, bis das Elektron das Metall verlässt:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{W_A}{I_L \cdot A_{at}} \\ \tau_1 &= \frac{3.69 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}}{(150\,\mathrm{W/cm^2}) \cdot (3.1415927 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{m^2})} \\ \tau_1 &= 0.08\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{14.6}$$

- Alternative betrachten wir den geometrischen Aufbau eines Metalls anhand eines kubischen Würfels. Die Einheitszelle mit Länge L_M enthält ein Atom und ein äußeres Elektron. Das Volumen ist $V_M = L_M^3$ und die Anzahl der Atome und Elektronen pro Einheitsvolumen ist:

$$V_M = \frac{m_M}{\rho_m}$$

Nimmt man eine gleichmäßige Dichte ρ_M (Na: $968\,\mathrm{kg/m^3}$) an, dann wird Licht über eine der Flächen A_M des Würfels absorbiert $A_M = L_M^2$. Die Masse des Natriumatoms ist $m_M = 3.8 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. Für die Zeitspanne, die man benötigt, damit es zur Photoemission kommt, ergibt sich in dieser Rechnung:

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \frac{W_A}{I_L \cdot A_M} \\
\tau_2 &= \left(\frac{W_A}{I_L}\right) \cdot \left(\frac{\rho_M}{m_M}\right)^{2/3} \\
\tau_2 &= \left(\frac{3.69 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}}{150\,\mathrm{W/cm^2}}\right) \cdot \left(\frac{968\,\mathrm{kg/m^3}}{3.8 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}}\right)^{2/3} \\
\tau_2 &= 0.02\,\mathrm{s}
\end{aligned} \tag{14.7}$$

Der Einwand, es könnte ja einzelne Atome geben, die überproportional Energie absorbieren, hilft nicht viel weiter. Aufgrund eines solchen Szenariums kann die Prozess nicht motiviert werden. Beide Abschätzungen ergeben, dass es ein leichtes wäre, die Zeitverzögerung zu bestimmen. Tatsächlich ist der experimentell ermittelte Wert deutlich geringer. Das ist auch ein Exkurs in Messtechnik. Lennard ermittelte eine untere Grenze von 0.2 s. Messungen aus dem Jahr 1928 ergeben Werte auf der Größenordnung von weniger als einer ns (10^{-9} s), wie Abb. 14.8 demonstriert [**?**]. Messungen, die 1967 durchgeführt wurden, ergaben, dass die Emission auf Zeitskalen kleiner als 10^{-13} s erfolgt [**?**]. Abb. 14.9 zeigt dieses Verhalten am Beispiel der zeitaufgelösten Antwort einer ultraschnell reagierenden Photozelle. Das Signal auf dem Oszillografen liefert eine obere Schranke für den Ablöseprozess. Das Photon führt zu einer steilen Flanke mit einer Anstiegszeit von $1.5 \cdot 10^{-10}$ s. Die aktuelle Forschung untersucht die Verzögerung in der photoinduzierten Tunnelionisation (Kapitel *Tunneleffekt*) inzwischen auf der Attosekunden-Zeitskala (10^{-18} s). Man spricht von Attoclock-Experimenten [**?**]. Die Emission erfolgt also mit kaum messbarer Zeitverzögerung.

Welche Vorhersagen würde die klassische Physik im Hinblick auf das Hallwachs-Experiment machen?

- Die Emission von Elektronen erfolgt bei Zuführung einer ausreichenden Energiemenge an Strahlung an den Festkörper.

- Bei hohen Lichtintensitäten sollte sich die kinetische Energie der Elektronen erhöhen.

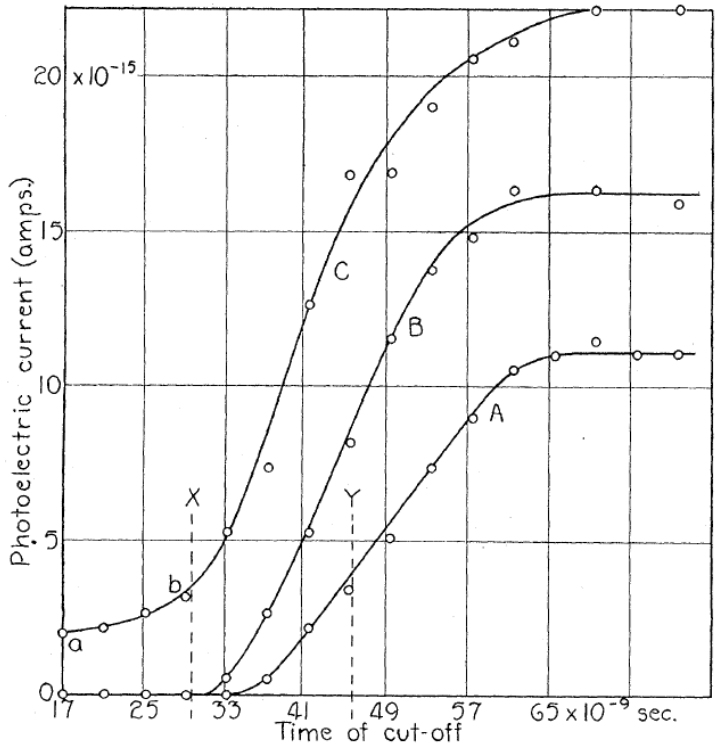


Abb. 14.8: Photoelektrischer Strom für verschiedene Zeiten nach der Zündung des Entladungsfunkens [**?**].

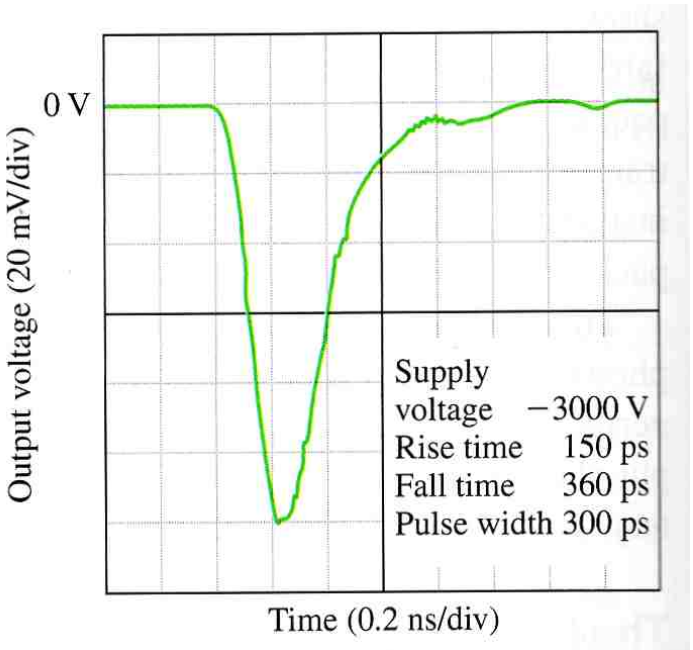


Abb. 14.9: Typischer Spannungspuls, wie man ihn mit einem modernen Photomultiplier beobachtet, wenn ein Photon auf die Vervielfacherdynade trifft. Technisch bedingt erreicht man Anstiegszeiten im sub-ns Bereich[**?**].

- Man erwartet keine Grenzfrequenz für die Auslösung von Elektronen. Das Experiment sollte bei Einstrahlung von Licht }textsfbeliebiger Wellenlänge funktionieren.

Betrachten wir ein Experiment mit Ultraviolettlicht an einer Natriumoberfläche. Die Absorption von $10^{-6}\,\mathrm{W/\,cm^2}$ führt zu einem messbaren Photostrom.

Beobachtungen

It is as if one dropped a plank into the sea from the height of 100 ft and found that the spreading ripple was able, after travelling 1000 miles and becoming infinitesimal in comparison with its original amount, to act upon a wooden ship in such a way that a plank of that ship flew out of its place to a height of 100 ft. How does the energy get from one place to the other?

Sir William Bragg

Man beobachtet folgende Phänomene:

1. Die Emission der Elektronen hängt von der Frequenz des verwendeten Lichts ab. Es gibt eine kurzwellige Grenzfrequenz.
2. Die Grenzfrequenz hängt vom betrachteten Metall der Kathode ab.
3. Bei monochromatischen Licht stellt man fest, dass die Elektronen eine maximale Energie aufweisen.
4. Oberhalb der kritischen Lichtfrequenz nimmt der Elektronenstrom mit der Lichtintensität zu. An der maximalen Energie der Elektronen ändert sich allerdings nichts.
5. Die Ausbeute an Elektronen ist direkt proportional zur Stärke der Lichtquelle. Verdopplung der Lichtintensität verdoppelt den Photostrom.
6. Die Elektronenemission erfolgt ohne messbare Zeitverzögerung.
7. Der Photostrom ändert sich nicht, wenn die Spannungsdifferenz ΔV positiv (Anode (+) vs Kathode (-)) ist. Auch eine Änderung der Spannung ändert nichts an der Stromstärke. Wenn ΔV negativ ist, verringert sich bei Erhöhung der Spannung der Photostrom und geht bei einem bestimmten Grenzspannung auf NULL.
8. Der Wert der Grenzspannung hängt nicht von der Lichtintensität ab.

Link to video `Photoelectric Effect Demonstration`

Zusammenfassend ergeben sich sich also drei Probleme, für die die klassische Physik keine befriedigende Antwort liefert:

- Das Problem der Lichtfrequenz: Unterhalb einer bestimmten Lichtfrequenz kommt es nicht zur Photoemission, egal wie hoch die Intensität ist.

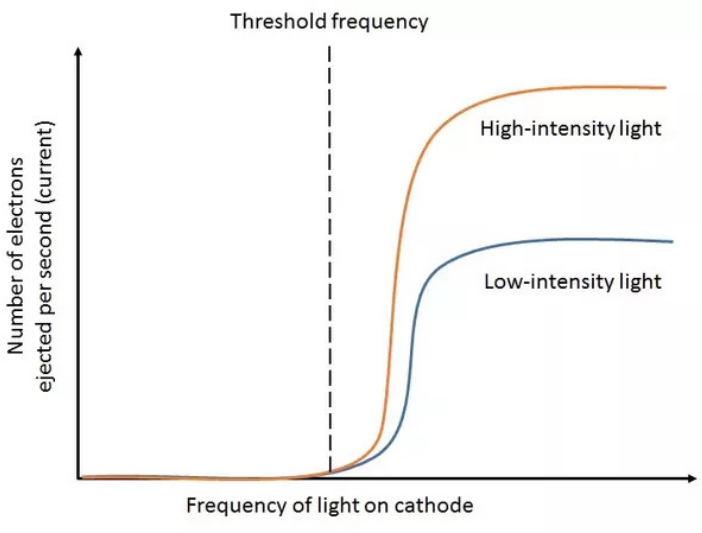


Abb. 14.10: Entwicklung des Photostroms als Funktion der Lichtfrequenz und der Intensität des Lichts.

- Das Problem der Lichtintensität: Die maximale kinetische Energie der emittierten Elektronen ist unabhängig von der Lichtintensität.

- Das Problem der Zeitverzögerung: Es gibt keinen feststellbaren Zeitabstand zwischen Beleuchtung und Photostrom.

Exemplarisch ist die Entwicklung des Photostroms ist in Abb. 14.10 für zwei unterschiedliche Lichtintensitäten dargestellt.

Wenn Sie dieses Kapitel durchgearbeitet haben, schauen Sie sich diese Abbildung nochmal genau an und überlegen, ob in dem Bild ein wichtiger Parameter möglicherweise nicht berücksichtigt wurde.

Die Experimente zeigen, dass die Ablösung des Photoelektrons, im Gegensatz zur thermionischen Emission, kein Temperatureffekt ist. Auch beim Abschalten der Lichtquelle versiegt der Photostrom sofort. Experimente zum Photoeffekt mit Hilfe von Sonnenlicht findet man in [**? ?**].

Gegenfeldmethode

Experimentell erfolgt die Messung der kinetischen Energie der Elektronen über die Gegenfeldmethode.[14] Abb. 14.11 zeigt den experimentellen Aufbau.

[14] *Lexikon:* Um die **Gegenfeldmethode** zu erläutern, denke man an folgende Analogie aus der Bewegung im Gravitationsfeld. Ein Strom identischer Murmeln bewegt sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit auf einer flexiblen in der Höhe einstellbaren Rampe. Am Ende der Strecke angekommen, fallen die Murmeln in ein Gefäß, sodass man anhand des Geräusches beim Fallen in einen

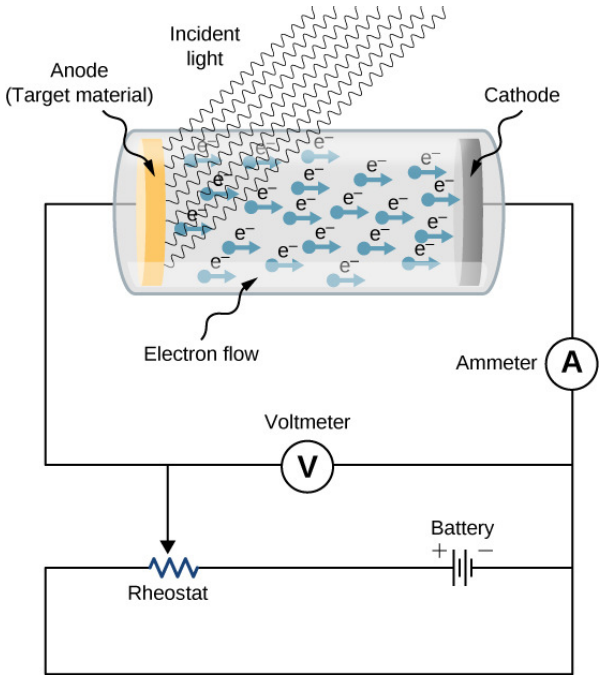


Abb. 14.11: Illustration der Gegenfeldmethode zur Bestimmung der Austrittsarbeit [**?**].

- Eine positiv geladene Anode saugt alle Photoelektronen zur Anode ab. Wenn alle Elektronen zur Anode kommen, erreicht man mit einer Erhöhung der Abzugsspannung keine weitere Erhöhung des Photostroms. Das Verhalten ist in Abb. 14.12, rechts zu erkennen. Die Kurven zeigen in diesem Bereich einen flachen Verlauf.

- Eine negativ aufgeladene Anode stößt die Elektronen ab. Allerdings erreichen Elektronen mit ausreichender Energie die Anode und ein Photostrom wird beobachtet. Die angelegte Spannung reicht nur aus, die niederenergetischen Elektronen auszubremsen. Erhöht man die Gegenspannung sinkt der Photostrom, bis er bei Erreichen einer Grenzspannung auf NULL abfällt. Alle Elektronen werden abgestoßen. Das ist das Verhalten, was man in Abb. 14.12, links beobachtet

Anhand des Energieerhaltungssatzes lässt sich das Verhalten verstehen. Der Nullpunkt der potenziellen Energie ist frei wählbar. Man wählt als Nullpunkt des Potenzials die Oberfläche der Kathode. Eine Photoelektron, dass aus der Kathode ausgeschlagen wird, hat dann eine anfängliche Gesamtenergie von:

$$E_i = E^i_{kin} + E^i_{pot} = E^i_{kin} + 0 = E^i_{kin} \tag{14.8}$$

Becher die Menge abschätzen kann. Wenn man das Ende der Rampe um h anhebt, verringert sich die Geräuschentwicklung, weil weniger Murmeln in das Becherglas fallen. Durch Ausprobieren finden wir eine kritische Höhe h_c, so dass darüber kein Geräusch aus dem Glas mehr zu hören ist. Knapp unterhalb h_c erreichen nur die schnellsten Murmeln das Ende der Bahn. Der Versuchsaufbau selektiert damit die schnellsten Murmeln aus. Unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit der schnellsten Murmeln beim Erreichen des kritischen Höhe fast NULL ist, kann man -ohne Berücksichtigung der Rotation- die potentielle Energie mit der anfänglichen kinetischen Energie gleichsetzen. Ein ähnliche Situation ergibt sich für die Bewegung von Elektronen in einem elektrischen Feld eines Kondensators.

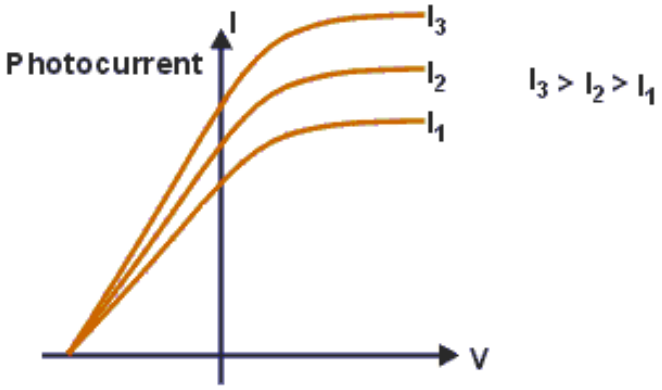


Abb. 14.12: Entwicklung des Photostroms als Funktion der Intensität I_i der verwendeten Lichtquelle. Man erkennt, dass die Grenzfrequenz nicht von der Intensität abhängt.

An der Anode ergibt sich eine kinetische Energie von

$$E_f = E^f_{kin} + + E^f_{pot} = E^f_{kin} - e \cdot (\Delta V) \tag{14.9}$$

Das Potenzial der Anode relativ zur Kathode ist dabei $-e \cdot (\Delta V)$. Da E_i=E_f findet man für die kinetische Energie der Elektronen, wenn sie an der Anode ankommen:

$$E^f_{kin} = E^i_{kin} + e \cdot (\Delta V) \tag{14.10}$$

Wenn ΔV positiv ist, erhöht sich die Geschwindigkeit der Elektronen und $E^f_{kin} > E^i_{kin}$. Ist ΔV negativ, werden die Elektronen abgebremst. Dennoch können Elektronen die Anode erreichen, wenn ihre anfängliche kinetische Energie hoch genug ist. Ein Elektron mit einer Anfangsenergie von E^i_{kin} wird auf NULL abgebremst, wenn die Potenzialdifferenz folgenden Wert erreicht:

$$\Delta V = -\frac{E^i_{kin}}{e} \tag{14.11}$$

Die schnellsten Elektronen mit Energie $E^{\max}_{kin}$ werden damit ausgebremst bei einer Potenzialdifferenz von

$$\Delta V_{\max} = -\frac{E^{\max}_{kin}}{e} \tag{14.12}$$

Über die angelegte Gegenspannung $\Delta V_{\max}$ kann also die maximale kinetische Energie der Photoelektronen bestimmt werden. Lennard stellte fest, dass der Wert von $\Delta V_{\max}$ unabhängig davon ist, welcher Lichtintensität verwendet wird. Nach der klassischen Interpretation - Elektronen werden durch das Licht aufgeheizt- sollte ein höherer Lichteinfall die kinetische Energie der Elektronen steigern. Das Experiment kann diese Annahme nicht bestätigen. Weiter stellt man fest, dass zwar die Lichtintensität die Höhe des Photostroms bestimmt, aber die zum Ausbremsen der Photoelektronen notwendig Gegenspannung aber identisch ist, siehe Abb. 14.10. An dieser Stelle sollte man sich klarmachen, dass eine Änderung der Lichtwellenlänge bei gleichbleibender Intensität Auswirkungen



Abb. 14.13: *FoxTrot* covers a wide range of subject matter, including spoofs of pop culture fads, nerd culture, complex math, and popular consumer products.

auf die Anzahl an Photonen hat. Bei geringerer Wellenlänge ist der Energiegehalt der Photonen höher und deshalb reichen weniger Photonen aus, um vergleichbare Lichtintensitäten zu erreichen.

Mit diesen Informationen versteht man wahrscheinlich den in Abb. 14.13 dargestellten cartoon.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Bei gleichbleibender Frequenz des Licht erhöht man die Intensität der Strahlung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?[15]

(a) Die Photonen bewegen sich schneller.

(b) Die Masse der Photonen erhöht sich.

(c) Die Energie der einzelnen Photonen erhöht sich.

(d) Es werden mehr Photonen pro Zeiteinheit angeboten.

[15] Antwort: (d)

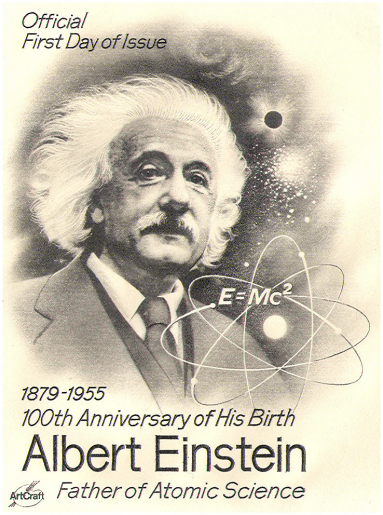
Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter thermionischer Emission?
2. Kennen Sie ein Gerät, dass thermionische Emission nutzt?
3. Erläutern Sie individuellen Beiträge von Heinrich Hertz, Wilhelm Hallwachs und Philipp Lenard zum Verständnis des Photoelektrischen Effekts!
4. Was versteht man im Zusammenhang mit dem Photoelektrischen Effekt unter dem Begriff Grenzfrequenz?
5. Skizzieren Sie, wie ein Experiment mit der Gegenfeldmethode durchgeführt wird!
6. Warum ist die unmittelbare Aussendung eines Elektrons beim photoelektrischen Effekt -klassisch betrachtet- überraschend?
7. Warum beobachtet man beim Photoeffekt nicht die Emission von Ionen?
8. Warum impliziert der photoelektrische Effekt, dass das Photon Teilchencharakter hat?

14.2 Einsteins Theorie zum Photoeffekt

Thema Photoelektrischer Effekt

Einsteins Theorie zum Photoeffekt



Es scheint mir nun in der Tat, daß die Beobachtungen über die *schwarze Strahlung*, Photolumineszenz, die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht und andere die Erzeugung bez. Verwandlung des Lichtes betreffende Erscheinungsgruppen besser verständlich erscheinen unter der Annahme, daß die Energie des Lichtes diskontinuierlich im Raume verteilt sei. Nach der hier ins Auge zu fassenden Annahme ist bei Ausbreitung eines von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahles die Energie nicht kontinuierlich auf größer und größer werdende Räume verteilt, sondern es besteht dieselbe aus einer endlichen Zahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können [**?**].

Albert Einstein 1905

Einstein hat seine Überlegungen zum photoelektrischen Effekt in drei Postulaten zusammengefasst:

- Licht der Frequenz ν_{ph} besteht aus diskreten Paketen der Energie $h \cdot \nu_{ph}$. Diese Lichtquanten breiten sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit c aus

- Photonen werden auf der Alles-oder-Nichts Basis emittiert oder absorbiert. Das Photon verliert seine gesamte Energie und verschwindet oder es verliert gar nichts und bewegt sich weiter. Materie kann ebenfalls nur ganzzahlige Lichtquantenpakete abgeben. Ein Elektron in einem Metall ist nicht in der Lage, eine ungeradzahlige Anzahl an Photonen aufzunehmen. Nur geradzahlige Lichtquanten werden absorbiert.

> Die übliche Auffassung, daß die Energie des Lichtes kontinuierlich über den durchstrahlten Raum verteilt sei, findet bei dem Versuch, die lichtelektrischen Erscheinungen zu erklären, besonders große Schwierigkeiten. ... Es scheint mir nun in der Tat, daß die Beobachtungen .... besser verständlich erscheinen unter der Annahme, daß die Energie des Lichtes diskontinuierlich im Raume verteilt sei. Nach der hier ins Auge zu fassenden Annahme ist bei Ausbreitung eines von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahles die Energie nicht kontinuierlich auf größer und größer werdende Räume verteilt, sondern es besteht dieselbe aus einer endlichen Zahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können [**?**].
>
> Albert Einstein

- Bei der Absorption eines Lichtquants von einem Metall wird die Energie auf ein Elektron übertragen.

Den letzte Punkt kann man sich wieder anhand eines Swimmingpools (*Dock-and-beach-balls* Analogie) verdeutlichen. Ein Stein wird in einen Pool geworfen. Dadurch erhöht sich die im Wasser gespeicherte Energie. Allerdings verteilt sich die Energie am Ende gleichmäßig auf alle Wassermoleküle. Kleine Wellen können sich ausbilden, aber die Energiemenge reicht nicht aus, das es spritzt. Aber angenommen, die Energie des Steins konzentriert einzig und allein auf einen Wassertropfen, dann kann der Tropfen aus dem Wasser an Land hüpfen. Analog soll es genauso bei der Absorption eines Photons durch ein Metall geschehen.

Die folgende Erklärung basiert auf der Annahme von Lichtwellen. Wie sich zeigt, kann man so das Phänomen Photoeffekt nicht erklären, siehe Abb. 14.14:[16]

[16] *Lexikon:* **Dock-and-beach-balls analogy**: If a single large wave were to shake the dock, we would expect the energy from the big wave would send the beach balls flying off the dock with much more kinetic energy compared to a single, small wave. This is also what physicists believed would happen if the light intensity was increased. Light amplitude was expected to be proportional to the light energy, so higher amplitude light was predicted to result in photoelectrons with more kinetic energy. Classical physicists also predicted that increasing the frequency of light waves (at a constant amplitude) would increase the rate of electrons being ejected, and thus increase the measured electric current. Using our beach ball analogy, we would expect waves hitting the dock more frequently would result in more beach balls being knocked off the dock compared to the same sized waves hitting the dock less often.

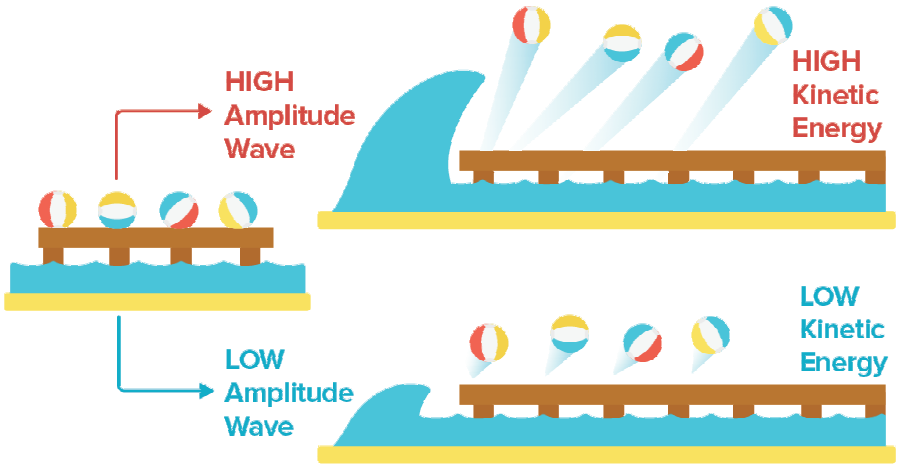


Abb. 14.14: Illustration der (nicht haltbaren) klassischen Vorstellung, warum es bei der Einstrahlung elektromagnetischer Wellen zur Emission von Teilchen kommt.



Abb. 14.15: World Year of Physics 2005

- Das Wellenmodell des Lichts sagt voraus, dass eine Erhöhung der Lichtamplitude die kinetische Energie der emittierten Photoelektronen erhöht, während bei höherer Frequenz des verwendeten Lichts der gemessene Elektronenstrom ansteigt.
- Die Experimente zeigen, dass das Erhöhen der Lichtfrequenz nur die kinetische Energie der Photoelektronen erhöht und eine größere Lichtamplitude nur den Strom ansteigen lässt.

In seiner Theorie des photoelektrischen Effekts greift Einstein auf die Lichtquantenhypothese von Planck zurück und gelangt zu einer konsistenten Beschreibung der Elektronenemission aus Festkörpern bei Einstrahlung von Licht. Eine zentrale Aussage ist, dass Lichtteilchen nur im Ganzen absorbiert werden können. Bruchteile eines Photons gibt es nicht! Die theoretische Erklärung hat zu weitreichenden Entwicklungen in Naturwissenschaft, *life sciences* und Technik geführt, siehe Abb. 14.15.[17]

[17]The World Year of Physics is a worldwide celebration of physics and its importance in our everyday lives. Physics not only plays an important role in the development of science and technology but also has a tremendous impact on our society. WYP aims to raise the worldwide awareness of physics and physical science. The United Nations has declared 2005 to be the International Year of Physics.

Link to video `International Year of Physics, 2005`

Führt man die Experimente zum Photoeffekt im Vakuum aus, ist die mittlere freie Weglänge der Elektronen groß gegen den Abstand von Kathode und Anode. Das erlaubt die kinetische Energie der Elektronen zu bestimmen. Dabei stellt man fest, dass eine Emission von Elektronen erst erfolgt, wenn eine bestimmte Grenzfrequenz überschritten wird. Weiter steigt E_{kin} oberhalb der kritischen Frequenz proportional zu ν. Das Verhalten wird gut durch eine einfache Gerade wiedergeben.

- Welche Bedeutung hat die Steigung der gefundenen Geraden?
- Hat der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse eine physikalische Bedeutung?

Die Gleichung

I spent ten years of my life testing that 1905 equation of Einstein's photoelectric effect, and contrary to all my expectations I was compelled in 1915 to assert its unambiguous experimental verification in spite of its unreasonableness, since it seemed to violate everything that we knew about the interference of light [**?**].

Robert Millikan

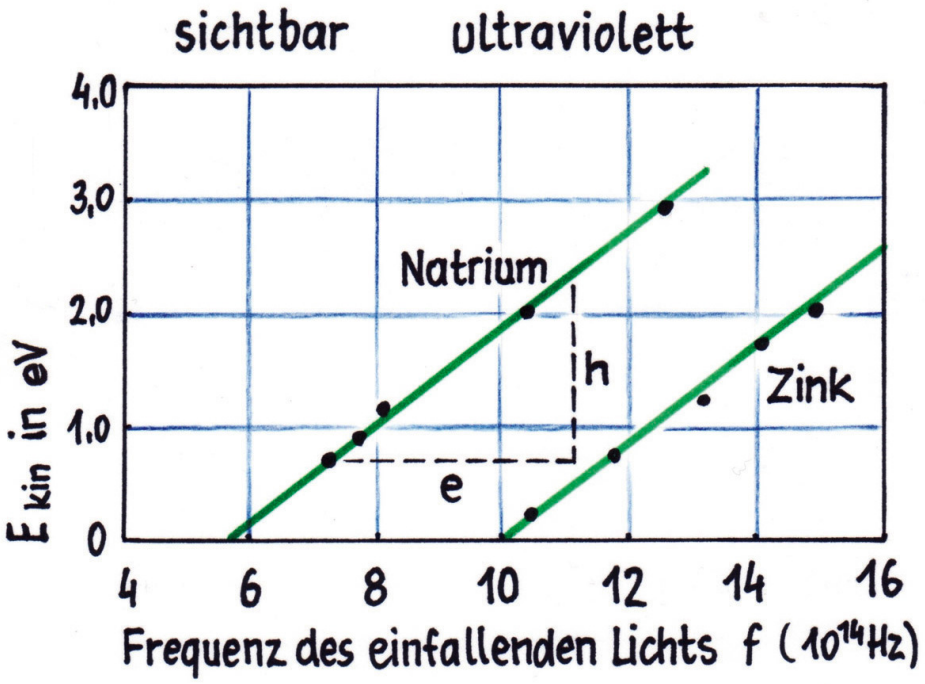
Die von Einstein gefundene Gleichung für die Kinetische Energie E_{kin} des Photoelektrons bei Einstrahlung von Licht der Photonenenergie $E_{ph} = h\dot{\nu}_{ph}$

$$E_{kin} = h\dot{\nu}_{ph} - W_A \tag{14.13}$$

wobei W_A die Austrittsarbeit aus dem Festkörper, basiert auf dem Energieerhaltungssatz und untermauert den Teilchencharakter von Licht. Der photoelektrische Effekt stellt einen direkten Zusammenhang zwischen der Energie eines Photons (Plancksche Hypothese $E_{ph} = h\nu$) und der kinetischen Energie des ausgelösten Elektrons E_{kin} her. Als Steigung der Geraden ergibt sich das Plancksche Wirkungsquantum h [**?**], wie Millikan durch eine Messung nachwies [**? ?**].[18] Die Austrittsarbeiten der Elemente waren damals noch nicht bekannt. Millikan bemühte sich, die Metalloberflächen gut zu präparieren, damit die Oberflächen nicht verschmutzten (zum Beispiel oxidierten) und dadurch die

This declaration coincides with the 100th anniversary of physicist Albert Einstein's *miraculous year*. In 1905, Einstein wrote three of his most famous scientific papers. These legendary articles provided the basis of three fundamental fields in physics: the theory of relativity, quantum theory and the theory of Brownian motion. The World Year of Physics (WYP 2005) is a worldwide celebration of physics and its importance in our everyday lives. Physics not only plays an important role in the development of science and technology but also has a tremendous impact on our society. WYP aims to raise the worldwide awareness of physics and physical science.

[18] The Nobel Prize in Physics 1923 was awarded to Robert A. Millikan *for his work on the elementary charge of electricity and on the photoelectric effect.*



© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG | Big Bang 7 ōbv

Abb. 14.16: Photoemission aus Natrium und Zink. Aufgetragen ist die kinetische Energie der Elektronen als Funktion der eingestrahlten Frequenz. Aus den experimentellen Daten kann die Plancksche Konstante h bestimmt werden, indem man den Anstieg entsprechend der Planckschen Gleichung auswertet.

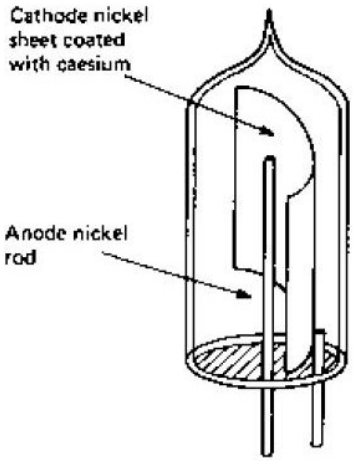


Abb. 14.17: Schematischer Aufbau einer Photozelle.

Messung verfälschten. Die Tab. 14.1 zeigt die Ergebnisse von Millikans Experimenten [**?**]. Bestimmen Sie anhand dieser Daten den Wert der Planckschen Konstanten und identifizieren Sie das in der Messung untersuchte Festkörpermaterial! Eines ist bemerkenswert! Durch die Bestimmung der Stefan-Boltzmann-Konstante aus experimentellen Daten, konnte Planck den Wert von h bestimmen. Sein Ergebnis stimmt gut mit dem Wert von h überein, den Millikan ableitete. Die Bestimmung erfolgte allerdings durch unterschiedliche Experimenten, nämlich einmal durch Emission und andererseits durch Absorption elektromagnetischer Strahlung. Dies deutet darauf hin, dass Quantisierung kein Zufall ist und nicht vom durchgeführten Experiment abhängt, sondern eine Eigenschaft des elektromagnetischen Feldes ist.

λ in nm	546	436	405	365	313	254
E_{kin} in eV	0.44	0.93	0.97	1.59	2.11	2.93

Tab. 14.1: Auszug aus der Messung, die Robert Millikan verwendete, um anhand des Photoeffekts das Plancksche Wirkungsquantum zu bestimmen [**?**].

Aus der Geradengleichung ergibt sich als weitere physikalische Größe die Austrittsarbeit für Elektronen aus einem Festkörper W_A. Anhand der Einsteinschen Gleichung zum Photoeffekt kann berechnet werden, ob es bei der Einstrahlung monochromatischen Lichts zur Emission von Elektronen kommt. Der durch die Einsteinsche Gleichung vorhergesagte lineare Zusammenhang zwischen Lichtfrequenz und Elektronenenergie bestätigt sich für alle Elemente des Periodensystems (Abb. 14.16). Jeder Festkörper zeichnet sich durch eine elementspezifische Austrittsarbeit aus. Für Alkalimetalle wie Natrium und Kalium ermittelt man beispielsweise geringe Bindungsenergien an den Festkörper. Ähnliches gilt auch für die Ionisationsenergien.

It was a marveous time to be alive.

Albert Einstein

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Welt der Halbleiter

LEDs emittieren Lichtquanten, wenn Elektronen in einer in Vorwärtsrichtung vorgespannten Halbleiterdiode einem Potenzial herunter purzeln. Kann man diesen Vorgang auch umkehren? Man sendet Licht geeigneter Frequenz auf eine umgekehrt vorgespannte LED (Abb. 14.18) und die Energie der Photonen reicht aus, dass die Elektronen die Potenzialhürde überwinden können und ein Strom fließt. Für eine grüne LED sollten blaue Photonen ausreichend Energie zur Verfügung stellen. Mit Farbfiltern könnte man den Arbeitsbereich abtasten.

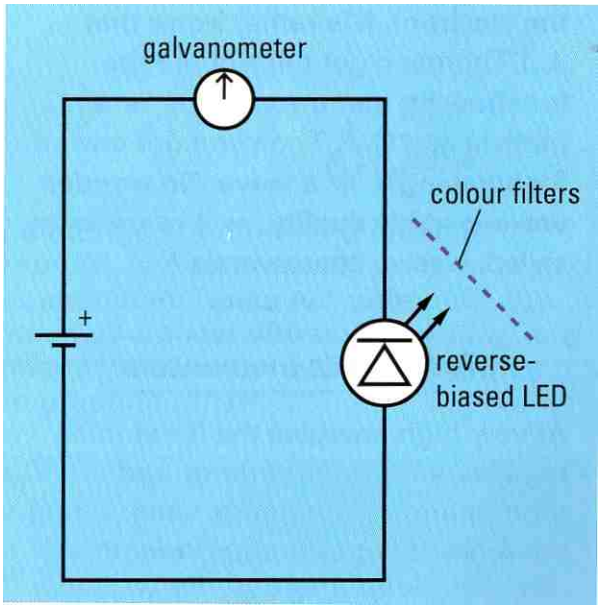


Abb. 14.18: Schaltung für eine LED zum Test des Photoeffekts [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Die Austrittsarbeit von Kupfer ist $W_A = 7.53 \cdot 10^{-19}$ J. Man beleuchtet die Oberfläche mit Licht der Frequenz $3 \cdot 10^{16}$ Hz. Ist die resultierende Photonenenergie höher als die Austrittsarbeit von Kupfer?

$$\begin{aligned} E_{ph} &= h\nu_{ph} = (6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}) \cdot (3 \cdot 10^{16}\,\mathrm{s^{-1}}) \\ E_{ph} &= 2.0 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Da $E_{ph} > W_A$ kommt es zur Emission von Elektronen aus der Kupferoberfläche. Zur Übung empfiehlt es sich, die Werte in eV umzurechnen.

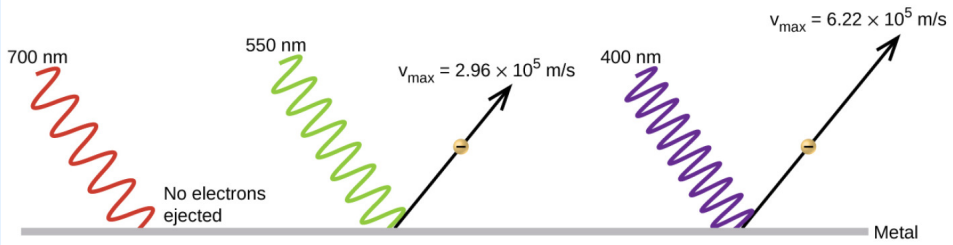
Aufgabe 2.2: Eine Metalloberfläche wird mit Licht der Wellenlängen λ_1=248 nm und λ_2=310 nm beleuchtet. Die maximalen Geschwindigkeiten der Photoelektronen, die diesen Wellenlängen entsprechen, verhalten sich wie $v_1 : v_2$=2:1. Wie hoch ist die Austrittsarbeit aus dem Metall?

$$\begin{aligned} E_{kin}^{\max} &= \frac{1}{2} m_e \cdot v_i^2 = h \cdot \nu_i - W_A \\ \frac{1}{2} m_e \cdot v_1^2 &= h \cdot \nu_1 - W_A \\ \frac{1}{2} m_e \cdot v_2^2 &= h \cdot \nu_2 - W_A \\ \frac{v_1^2}{v_2^2} &= \frac{h \cdot \nu_1 - W_A}{h \cdot \nu_2 - W_A} \\ W_A &= \frac{1}{3} \frac{4 \cdot \nu_1}{\nu_2} \\ W_A &= 5.86 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \\ W_A &= 3.66\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3: Eine Metalloberfläche (Austrittsarbeit W_A) wird mit Licht der Wellenlänge λ_1=200 nm und λ_2=150 nm bestrahlt. Die emittierten Photoelektronen werden mit einem Gegenfeld ausgebremst. Die benötigten Spannungen sind 1.68 V und 3.74 V. Ermitteln Sie aus diesen Daten den Wert der Planckschen Konstanten!

$$\begin{aligned} \frac{h \cdot c}{\lambda_1} &= e \cdot U_1 + W_A \\ \frac{h \cdot c}{\lambda_2} &= e \cdot U_2 + W_A \\ \frac{h \cdot c}{\lambda_1} - \frac{h \cdot c}{\lambda_2} &= e(U_1 - U_2) \end{aligned}$$

Abb. 14.19:



$$
\begin{aligned}
h &= \frac{e(U_1 - U_2)}{c} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \\
h &= \frac{(1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (1.68\,\mathrm{V} - 3.74\,\mathrm{V})}{2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}} \cdot \left(\frac{1}{200 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} - \frac{1}{150 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} \right) \\
h &= 6.60 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}
\end{aligned}
$$

Und welche Austrittsarbeit hat das Metall?

Aufgabe 2.4: Abb. 14.19 zeigt, dass Licht bestimmter Wellenlängen Elektronen aus einem Metall herauslösen kann. Wie groß ist die Austrittsarbeit?

$$
\begin{aligned}
E_{kin} &= E_{ph} - W_A \\
W_A &= E_{kin} - E_{ph} \\
W_A^{550} &= \frac{1}{2}\, m_e \cdot v_e^2 - \frac{h \cdot c}{\lambda} \\
W_A^{550} &= \frac{1}{2}\, (9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (2.96 \cdot 10^{5}\mathrm{m/s})^2 - \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{(550 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})} \\
W_A^{550} &= 3.22 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2.0\,\mathrm{eV} \\
W_A^{400} &= \frac{1}{2}\, (9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \cdot (6.22 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s})^2 - \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{(400 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})} \\
W_A^{400} &= 3.22 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2.0\,\mathrm{eV}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.5: Bei der Beleuchtung einer Metallplatte wird die Frequenz des eingestrahlten Lichts verdoppelt. Verdoppelt sich auch die kinetische Energie der Elektronen?[19]

Aufgabe 2.6: Wie nennt man ein Energiequantum Licht?[20]

(a) Pion

(b) Proton

(c) Photon

[19] Antwort: NEIN
[20] Antwort: (c)

(d) Positron

(e) Polariton

Aufgabe 2.7: Eine Metalloberfläche wird Sonnenstrahlung ausgesetzt. Die emittierten Elektronen haben[21]

(a) eine kinetische Energie, die geringer als ein maximaler Wert ist. Dieser hängt von der Frequenz der einfallenden Strahlung ab.

(b) eine kinetische Energie, die geringer als ein maximaler Wert ist. Dieser hängig von der Intensität der einfallenden Strahlung ab.

(c) eine kinetische Energie NULL.

(d) haben eine kinetische Energie, die der Energie von Photonen des einfallenden Lichts entsprechen.

[21] Antwort: (a)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wenn man ein Stück Metall schüttelt, fallen keine Elektronen heraus, obwohl sie sich frei bewegen können. Wenn man das Metall dagegen erhitzt, kann man Elektronen heraus kochen. Warum ist das so?

2. Beschreiben Sie die Merkmale des photoelektrischen Effekts, die nicht durch das Wellenmodell des Lichts erklärt werden können!

3. Welche Aspekte des photoelektrischen Effekts können ohne das Konzept Photon erklärt werden?

4. Welche Beziehung besteht zwischen der Wellenlänge der Lichtquelle und der Austrittsarbeit?

5. Erklären Sie, wie man die Austrittsarbeit in einem Experiment zum photoelektrischen Effekt bestimmt. Könnte man den Wert der Planckschen Konstante aus der Messung bestimmen?

6. Welche Aspekte des photoelektrischen Effekts lassen sich mit der klassischen Physik nicht erklären?

7. Der photoelektrische Effekt wird bei einem Metall beobachtet. Kann man daraus die Schlussfolgerung ziehen, dass der Effekt auch bei einem anderen Metall unter gleichen experimentellen Bedingungen beobachtet wird?

8. Die Metalle Natrium, Eisen und Molybdän haben Austrittsarbeiten von 2.5 eV, 3.9èV und 4.2 eV. Welches dieser Metalle emittiert Photoelektronen, wenn sie mit 400 nm Licht beleuchtet werden?

9. Ändert sich die Grenzfrequenz beim Photoeffekt, wenn die Ladung des Elektrons nicht e sondern $2\,e$ wäre?

10. Zeigen Sie, dass die Grenzfrequenz für den Photoeffekt $W_A \cdot h$ ist.

11. Kann man Photoelektronenspektroskopie auch mit einer breitbandigen Lichtquelle durchführen?

12. Ist sichtbares und ultraviolettes Licht die einzige Art elektromagnetischer Strahlung, die den photoelektrischen Effekt verursachen kann?

13. Geben Sie die Plancksche Konstante in der Einheit eV·s an.

14. Beim photoelektrischen Effekt ebenso wie beim Compton-Effekt wird auf das Elektron Energie übertragen. Worin besteht der konzeptionelle Unterschied?

15. Licht einer UV-Lampe trifft auf eine Metalloberfläche. Ist die Energie der Elektronen dann kontinuierlich oder quantisiert?

16. Wir kennen jetzt eine Reihe von Prozessen, die durch Photonen ausgelöst werden (Photoelektrischer Effekt, Wärmestrahlung, Compton-Streuung, Paarbildung, Elektron-Positron-Annihilation). Bei welchen dieser Prozesse gilt Impulserhaltung, Energieerhaltung, Massenerhaltung? Erhaltung der Anzahl an Photonen, Elektronen und Positronen?

14.3 Photoeffekt in Wissenschaft und Technik



Anwendungen[4LP]

Ein Beispiel aus der Welt des Films

Eine weitverbreitete Anwendung des photoelektrischen Effekts sind photoelektrische Zellen (Photozelle), die in ihrem Aufbau dem Experiment von Lenard ähneln. Abb. 14.17 zeigt den schematischen Aufbau der Vakuumröhre, in dem der Aufbau integriert ist. Um die Empfindlichkeit bei langen Wellenlängen zu erhöhen, ist die Oberfläche der Kathode mit Caesium (W_A=2.14 eV) beschichtet. Bei Lichteinfall kann über den Photoeffekt ein elektrischer Strom nachgewiesen werden. Bei einer analogen Filmvorführung wird der photoelektrische Effekts zur Erzeugung des Audiotons verwendet, siehe Abb. 14.20. Beim Lichttonverfahren fällt ein Lichtstrahl auf die Seite des Filmstreifens. Ist die Tonspur, die eine Breite von etwa 2.5 mm hat, an dieser Stelle transparent, fällt Licht auf die dahinterliegende Photozelle und erzeugt einen Photostrom. Über das Lochraster ist der Ton kodiert und wird parallel zum Bildsignal wiedergegeben, siehe Abb. 14.21. Der Film *Der Brandstifter* von 1922 war der erste Film mit solch einer integrierten Lichttonspur.[22]

[22]Die Erfinder des *Tri-Ergon* Verfahrens sind die deutschen Ingenieure Hans Vogt, Jo Benedict Engl und Joseph Massolle. Ihre Methode ermöglichte eine zeitliche Übereinstimmung von Bild und Ton

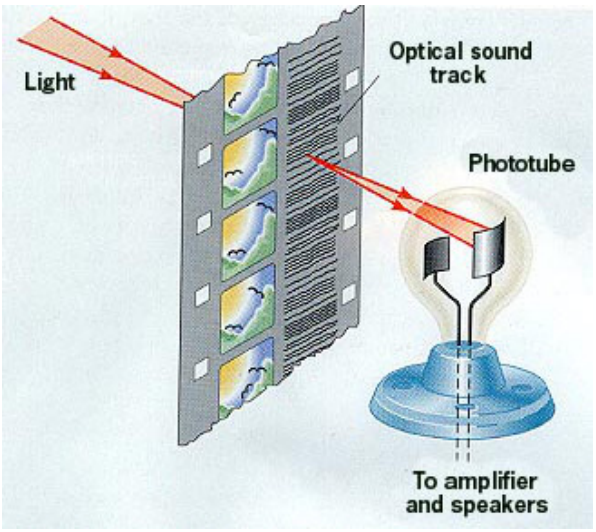


Abb. 14.20: Die Audiospur moduliert die Intensität des Lichts, die dem Ton entspricht, der bei der Herstellung des Films verwendet wurde.



Abb. 14.21: Ausschnitt aus einer 16 mm Filmrolle mit Tonspur (rechts) auf der Basis des Photoeffekts [**?**].

Hier weitere Anwendungen unter Verwendung von Photozellen

- Im einem Rauchmelder werden eine Lichtquelle und ein lichtempfindlicher Sensor verwendet, um einen Brand frühzeitig zu erkennen. Wenn Rauch in das Sensorgehäuse eindringt, führt Lichtstreuung zu Signalen auf dem Sensor, wodurch ein Alarm ausgelöst wird.

und geht damit weit über die Methode der Koppelung von Filmprojektor und Grammophon hinaus. Das *Tri-Ergon*-Verfahren beruht auf dem Prinzip der Umwandlung von Schallwellen in elektrische Impulse, die wiederum in eine Lichtspur transformiert und so auf dem Filmtonstreifen festgehalten werden. Beim Abspielen werden dann die auf dem Filmband festgehaltenen Signale in elektrische Impulse zurück verwandelt, die ihrerseits die schallerzeugende Membrane zum Schwingen bringen. Die Filmproduzenten sind zu diesem Zeitpunkt jedoch nicht an dem Verfahren interessiert, weniger aus technischen als vielmehr aus künstlerischen Gründen. Tatsächlich kann sich der *tönende Film* aus diesem Grund noch nicht durchsetzen.

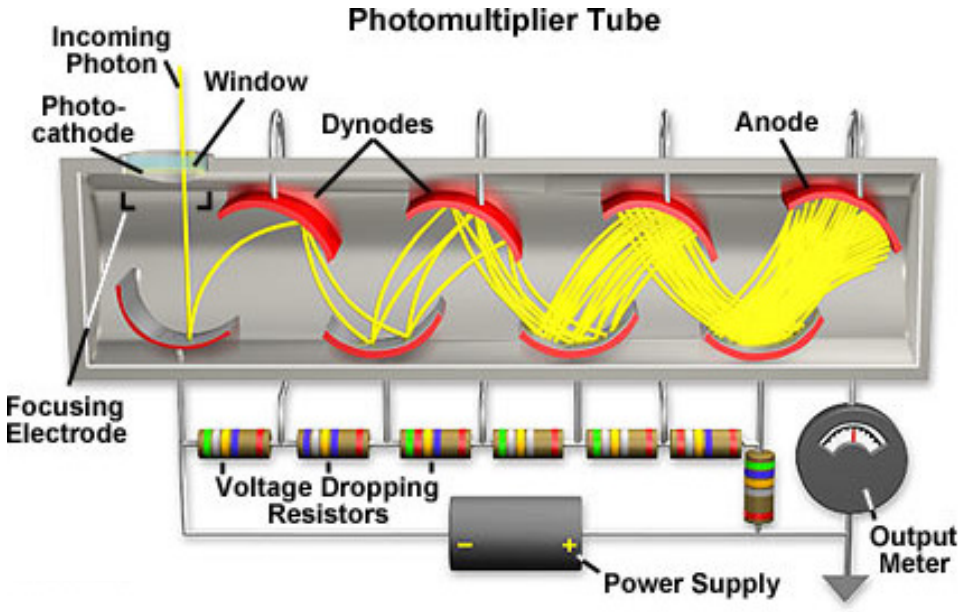


Abb. 14.22: Schematischer Aufbau eines Photomultipliers [**?**].

- Sicherheitssysteme verwenden Photozellen, um die Bewegung von Objekten zu erkennen. Dazu werden Lichtstrahlen ausgesendet und deren Reflexion gemessen. Ergeben sich Änderungen in der Intensität des reflektierten Lichts, kann man auf die Bewegung des Objekts oder die Anwesenheit von Personen schließen.

Ein Beispiel aus der optischen Sensorik

Photomultiplier sind wie Photozellen aufgebaut, haben jedoch mehrere Metallplatten, die man als Dynoden bezeichnet. Der schematische Aufbau ist in Abb. 14.22 gezeigt. Ein freigesetztes Elektron aus der Kathode trifft auf die erste Dynode und setzt MEHRERE Elektronen frei. Durch jede Dynode erhöht sich die Anzahl der Elektronen, so dass der elektrische Strom lawinenartig anwächst. Durch eine Kaskade von etwa 10 Dynoden vermag ein Photomultiplier einzelne zu Beginn erzeugte Photoelektronen über einen messbaren Stromimpuls nachzuweisen. Der Verstärkungsgrad beträgt etwa 10^6. Zur Beschaltung sind die Dynoden über eine Widerstandskette (1 MΩ zwischen den Platten) miteinander verbunden. Die Verstärkung des Photoelektronensignals durch die Dynoden ist angedeutet. Der nachfolgende weblink demonstriert die Wellenlängenabhängigkeit des photoelektrischen Effekt, wobei als Nachweis ein Photomultiplier verwendet wird.[23] Bei der Wahl des Materials für eine infrarotempfindliche Photokathode ist es hilfreich, wenn Elektronen schon mit Licht geringer Photonenenergie abgelöst werden können. Materialien mit geringer Austrittsarbeit sind gefragt. Zusätzlich führt nicht jedes eintreffende Photon automatisch zur Photoemission. Man quantifiziert diesen Effekt mit dem Begriff Quanteneffizienz. Die Werte bewegen sich zwischen 0.1-30%. Der Maximalwert liegt im

[23] Im Video wird im Bezug auf das detektierte Signal von Energie gesprochen. Tatsächlich ist der Photostrom gemeint.



Abb. 14.23: Das *Sudbury Neutrino Observatory* besteht aus einem Tscherenkow-Detektor, der Neutrinos detektiert, die bei der Fusion im Kern der Sonne entstehen. Im Jahr 2001 konnte das 40 ‚Jahre altes Rätsel der Sonnenneutrinos gelöst werden (Kapitel *Materiewellen*).

Sichtbaren bei etwa 30% .

Link to video `Photons 1959`

Ein Beispiel aus der Elementarteilchenphysik

In der Vorlesung *Relativistischer Dopplereffekt* wurde das Kamiokande-Experiment vorgestellt, mit dem die Sonnenneutrino-Oszillationen nachgewiesen wurden. Der erste Nachweis von Elektron-, Myon- und Tau-Neutrinos gelang am Sudbury Neutrino Observatory mit einem ähnlichen experimentellen Aufbau. Die Wechselwirkung der Neutrinos mit Materie ist allerdings äußerst gering, obwohl der Neutrinofluss auf der Erde etwa $10^{13}\,\mathrm{cm^{-2}{\cdot}s^{-1}}$ beträgt. Allerdings ist der Wechselwirkungsquerschnitt mit $10^{-43}\,\mathrm{cm^{-2}}$ äußerst gering. Daher sind erhebliche Mengen an Reaktionsmaterial (hier schweres Wasser D_2O) notwendig, um die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, die wenigen Ereignisse nachzuweisen. Das Experiment ist in einer Mine in einer Tiefe von zwei Kilometern aufgebaut. Der Neutrino-Detektor besteht aus einer transparenten Acrylkugel mit einem Durchmesser von 12 Metern und 1 000 t schweren Wassers, siehe Abb. 14.23. Als experimenteller Nachweis ist der mit einer geringen Wahrscheinlichkeit stattfindende Prozess betrachtet, die den Proton-Neutron Verbund im Wasserstoffisotop Deuterium aufbricht. Die bei der Reaktion ausgesendeten Lichtblitze werden in diesem Experiment über eine Kugel aus 9 600 Photomultipliern erfasst. Eintausendfünfzig 20-inch durchmessende Photomultiplier sind auch im Kamiokande-Experiment eingebaut. Abb. 14.24 gibt einen Eindruck



Abb. 14.24: *Hey, could you make me a 25-inch photomultipier tube?* Nobelpreisträger Masatoshi Koshibas Anfrage an Teruo Hiruma, Präsident von Hamamatsu Photonics [**?**].

über die Größe der einzelnen Detektoren.[24]

Ein Beispiel aus der Dosimetrie

Wenn ein energetisches Teilchen oder ein Hochenergiephoton in Materie einschlägt, kann es einen Teil oder auch seine gesamte Energie an ein Elektron abgeben. Das Elektron kann in einem transparenten Kristall, wie beispielsweise mit Thallium versetzes Natriumjodid einen für das Auge sichtbaren Lichtblitz erzeugen. Diese Lichterzeugung kann man beobachten und man nennt dieses Phänomen Szintillation. Dies erlaubt den Einschlag einzelner energetischer Teilchen und Photonen zu bestimmen. Darüber hinaus ist die Stärke der Lichterzeugung proportional zur Energie der Teilchen. Der Photomultiplier ist ein effektives Instrument, um solche Szintillationsereignisse nachzuweisen. Man nennt das Instrument einen Szintillationsdetektor, siehe Abb. 14.25.

Ein Beispiel aus der Solartechnologie

The silicon solar cell may mark the beginning of a new era, leading eventually to the realization of one of mankinds most cherished dreams - the harnessing of the almost limitless energy of the sun for the uses of civilization.

The New York Times, 1954

[24] The Nobel Prize in Physics 2002 was divided, one half jointly to Raymond Davis Jr. and Masatoshi Koshiba *for pioneering contributions to astrophysics, in particular for the detection of cosmic neutrinos* and the other half to Riccardo Giacconi *for pioneering contributions to astrophysics, which have led to the discovery of cosmic X-ray sources.*

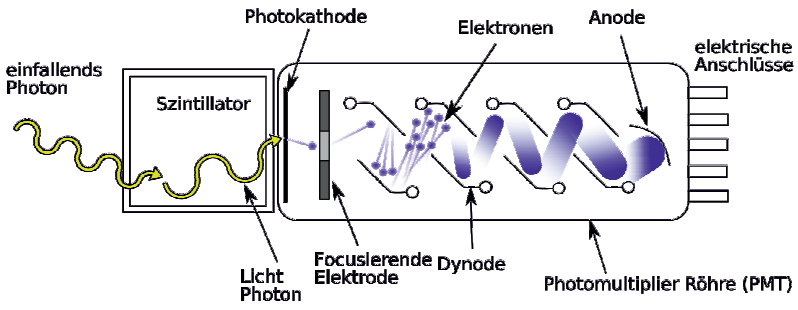


Abb. 14.25: Prinzip eines Szintillationsdetektors [**?**].

Zeittafel der Photovoltaik

1839 Alesandre Edmond Becquerel (Vater von Henri Becquerel[25]) findet, dass Metallelektronen in einem Elektrolyd bei Lichteinfall einen elektrischen Strom erzeugen.

1873 Willoughby Smith stellt einen ungewöhnlich hohen photoelektrischen Effekt bei Selen fest.

1883 Charlkes Fritts baut aus Selen die erste Solarzelle.

1904 Philipp Lenard führt Experimente zum photoelektrischen Effekt im Vakuum durch.

1941 Vadim Lashkaryov entdeckt *p-n* Übergänge in Cu_2O and Ag_2S.

1946 Russell Ohl entwickelt die moderne Halbleitersolarzelle mit Sperrschicht.

1948 Kurt Lehovec liefert eine Erklärung für den photovoltaischen Effekt [**?**].

1954 Die Bell Laboratorien stellen die erste einsatzfähige Photovoltaikzelle vor.

1957 Mohamed M. Atalla entwickelt in den Bell Laboratories den Prozess der Siliziumoberflächenpassivierung durch thermische Oxidation. Dieser Prozess ist seitdem entscheidend für die Effizienz von Solarzellen.[26]

[25] The Nobel Prize in Physics 1903 was divided, one half awarded to Antoine Henri Becquerel *in recognition of the extraordinary services he has rendered by his discovery of spontaneous radioactivity*, the other half jointly to Pierre Curie and Marie Curie *in recognition of the extraordinary services they have rendered by their joint researches on the radiation phenomena discovered by Professor Henri Becquerel.*

[26] *Lexikon:* Die bekanntesten Solarzellen nutzen *p-n*-Übergänge in Silizium. Andere mögliche Typen sind organische und farbstoffsensibilisierte Solarzellen, Perowskit-Solarzellen und Quantenpunkt-Solarzellen. Die beleuchtete Seite einer Solarzelle hat im Allgemeinen einen transparenten leitenden Film, damit Licht in das aktive Material eindringen kann und Ladungsträger erzeugt. Typischerweise werden dafür Filme mit hoher Transmission und hoher elektrischer Leitfähigkeit wie Indium-Zinn-Oxid, leitfähige Polymere oder leitfähige Nanodraht-Netzwerke verwendet.

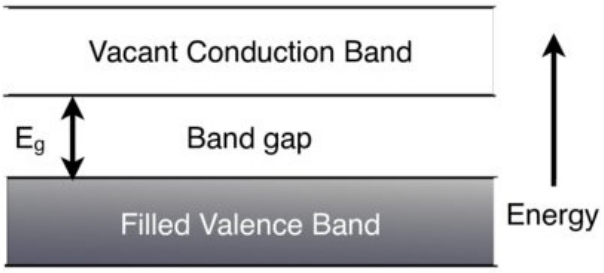


Abb. 14.26: Bandschema eines Halbleiters mit Valenzband, Leitungsband und der für Halbleiter und Isolatoren typischen Bandlücke.

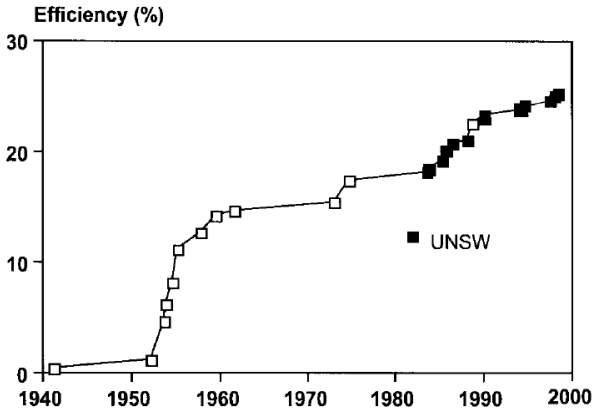


Abb. 14.27: Steigerung der Effizienz von Silizium-Solarzellen zwischen 1940 und 2000 [**?**].

1958 Durch den Einbau von Solarzellen in den Vanguard I-Satelliten gewinnen Solarzellen erheblich an Bedeutung.

2015 Erik Yevgeniv entwickelt Solarstrom produzierende Fensterjalousien.

2016 Bertrand Piccard und Andre Borshberg umrunden im Solarflugzeug *Solar Impulse 2* die Erde.

Eine spannende Anwendung des photoelektrischen Effekts ist der Einsatz in der Photovoltaik. In Solarzellen kommen hauptsächlich Halbleitermaterialien zum Einsatz. Abb. 14.26 zeigt die vereinfachte Bandstruktur eines Halbleiters. Im Gegensatz zum bisher behandelten so genannten äußeren Photoeffekt (Freisetzung von Elektronen ins Vakuum) wird beim hier genutzten inneren Photoeffekt das Elektron nicht bis zum Vakuumniveau angehoben, sondern in einen gebundenen Energiezustand des Festkörpers, der sich im Vergleich zum Ausgangszustand durch eine stark erhöhte Leitfähigkeit auszeichnet. Im Halbleiter ist dies der Unterschied zwischen Valenz- und Leitungsband. Abb. 14.27 zeigt die Fortschritte am Beispiel von Silizium-Solarzellen. Nach dem Modell von Shockley-Queisser ist die maximale Effizienz bei der Energieumwandlung in der Photovoltaik für eine Solarzelle mit einem pn Übergang 33.7%, wenn man eine Bandlücke des Halbleiters von 1.34 eV annimmt. Für die Charakterisierung werden die Solarzelle mit einem

Standardspektrum AM 1.5[**?**][27] bestrahlt und die Effizienz mit dem Shockley-Queisser Modell[28] verglichen. Solarzellen, deren Kurzschlussstrom (J_{sc}) geringer ausfällt, absorbieren das eingestrahlte Licht nur unvollständig oder generieren nicht genug Ladungsträger. Weitere Probleme sind Rekombination von Ladungsträgern an Grenzflächen oder ein parasitärer Widerstand ($V_{oc} \cdot FF$).[29] Abb. 14.28 zeigt, wie sich gängige Versionen von Solarzellen in dieses Analyseschema einordnen. Monokristalline Silizium-Solarzellen (Effizienz 25.6%) haben Verluste durch die Rekombination von Ladungsträgern. Im Gegensatz haben einkristalline Dünnschicht-GaAs-Solarzellen (28.8%) nur geringe Verluste durch Rekombination, wobei die Effizienz durch eine verbesserte Lichtabsorption erhöht werden könnte. Abb. 14.29 zeigt den Einsatz von Halbleiter-Photozellen am Beispiel einer Solaranlage. Im All wurden Solarzellen zuerst auf Vanguard I und dann auf den Explorer Satelliten eingesetzt. Abb. 14.30 zeigt den Satelliten Explorer 6, der 1959 gestartet wurde.

Das Überschreiten des Shockley-Queisser Grenzwerts ist eine Herausforderung und wirft die Frage auf: Kann die Energie, die in Solarzellen als Wärme verloren geht, minimiert werden? Zwei Strategien, Multiplikation der Ladungsträger [**? ?**] und Extraktion heißer Ladungsträger [**?**], werden verfolgt. Ladungsträgermultiplikation findet statt, wenn Photonen vom Material mit einer Energie absorbieren, die mindestens doppelt so groß ist wie die Bandlücke. Der zugehörige Prozess nennt sich inverse Auger-Emission und er er-

[27] In 1982, the American Society for Testing and Materials (ASTM) adopted consensus standard solar terrestrial spectra (ASTM E891-82, E892-82) to provide standard spectra for photovoltaic (PV) performance applications. These spectra have been also used for other applications such as solar energy systems, fenestration, and materials degradation. These reference spectra were recomputed and the standards revised in 1987. The International Standards Organization (ISO) and International Electrotechnical Commission (IEC) adopted these spectra into spectral standards ISO 9845-1 and IEC 60904-3. These reference spectra are current as of 2002, even though they are based upon spectral solar radiation models and information on atmospheric attenuation from the 1980s. We summarize important issues concerning the definition of atmospheric parameters, spectral range, accuracy and resolution, and documentation of the standards. We suggest substantial improvements to meet the current and future needs of the various technologies using the reference spectra. Modern terrestrial spectral radiation models and better knowledge of atmospheric physics and prevailing radiometric quantities in the natural environment are used to develop suggested revisions to update the reference spectra. These revisions extend and improve the documentation of the hemispherical (global) tilted reference spectrum with minor modifications. They also provide a more realistic clear sky direct normal spectrum for the intended applications. The revised reference spectra would include more detailed and reliable spectral information from the UV (280nm) to the near infrared (4000nm). The amplitude of the proposed hemispherical tilted reference spectrum differs very little from the current standard hemispherical tilted spectrum. Conversely, the proposed direct normal reference spectrum is substantially more energetic than the current standard spectrum, and is typical of a cleaner atmosphere where solar applications can be deployed more advantageously.

[28] *Lexikon:* Die Effizienz einer Solarzelle ergibt sich aus der Shockley-Queisser Kurve, siehe Abb. 14.31) [**?**]. Das Shockley-Queisser-Limit ist der maximale theoretische Wirkungsgrad einer Solarzelle, wobei der einzige Verlustmechanismus die Strahlungsrekombination in der Solarzelle ist. Er liefert eine Effizienz von 30% bei einer Photonenenergie von 1.1 eV. Die Berechnung erfolgte unter der Annahme eines 6 000 K Schwarzkörperspektrums als Annäherung an das Sonnenspektrum. Das Shockley-Queisser Limit ist grundlegend für die Erzeugung von Solarenergie mit Photovoltaikzellen.

[29] V_{oc}: Leerlaufspannung, FF: Füllfaktor

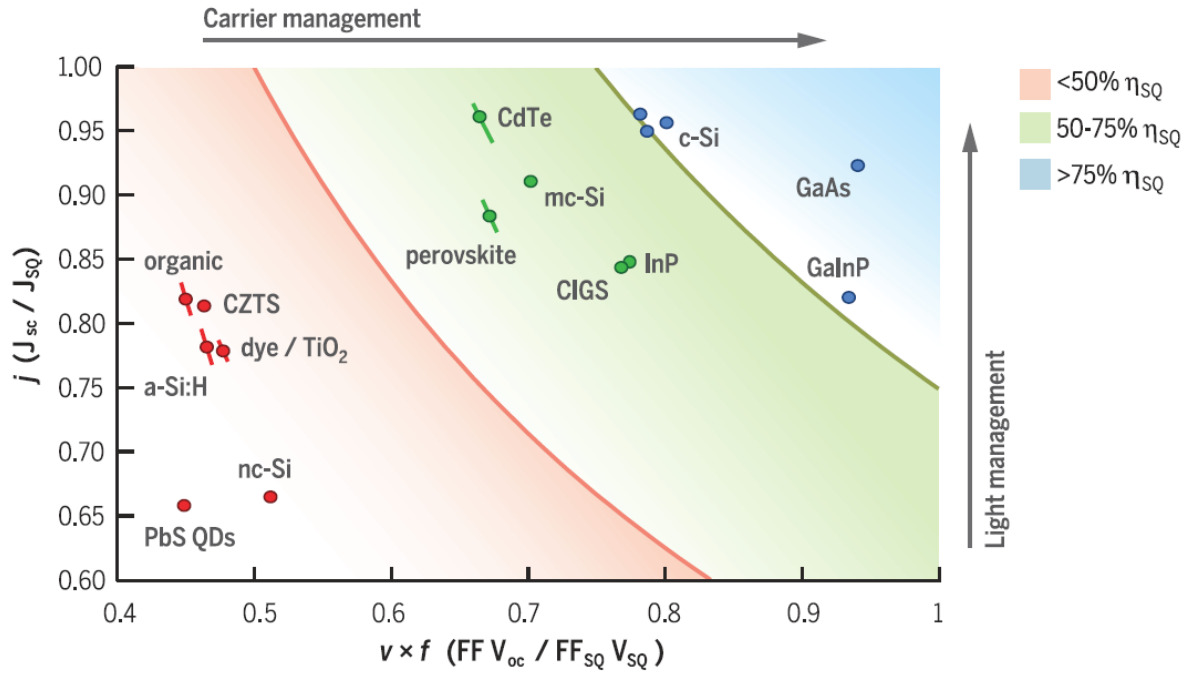


Abb. 14.28: Limitierende Prozesse in Photovoltaik-Materialien und der Vergleich zum Shockley-Queisser Modell. Eine effiziente Solarzelle absorbiert das gesamte einfallende Licht (*light management*) und erzeugt in effektiver Weise elektrische Ladungsträger (*carrier management*). Die Daten zeigen, ob ein bestimmtes Material ein besseres Lichtmanagement, ein besseres Trägermanagement oder beides erfordert. Die Farben entsprechen Zellen, die <50% (rot), 50 bis 75% (grün) oder >75% (blau) der Shockley-Queisser Grenze (J_{SQ}, V_{SQ}, FF_{SQ}) erreichen [**?**].

zeugt zusätzliche Ladungsträger oberhalb der Bandkante. Theoretisch ist eine Erhöhung der Effizienz auf 44% möglich. Bei der Extraktion heißer Ladungsträger versucht man photoangeregte Ladungsträger einzufangen, bevor diese ihre überschüssige Energie als Wärme abgeben. Hier erwartet man Wirkungsgrade von bis zu 67%.

Studenten bauten im Jahr 2003 ein Solarauto (Nuna 2, Länge: 5 m Breite: 1.8 m Gewicht: 300 kg), das eine Spitzengeschwindigkeit von 170 Kilometer pro Stunde erreichte. Das Solarauto war mit 3000 Solarzellen mit einer Gesamtfläche von 9 m^2 ausgestattet. Im Jahr 2003 gewann das Team mit Nuna 2 den *World Solar Challenge* in Australien, als es eine Strecke von 3010 Kilometer in 31 Stunden bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 92 km/h zurücklegte. Den Strom für den Elektromotor lieferten Gallium-Arsenid-Solarzellen (Effizienz 24.3%), welche die Europäische Weltraumbehörde für ihre Satelliten entwickelt hatte.

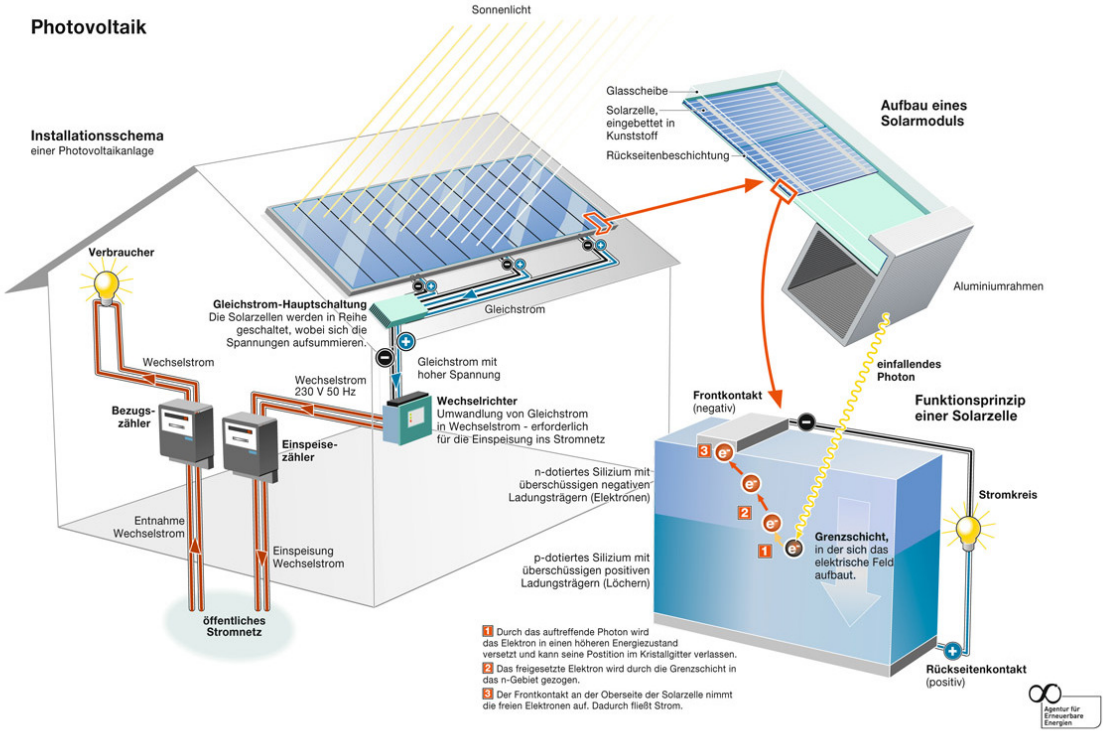


Abb. 14.29: Aufbau und Funktionsweise einer Photovoltaikanlage

Ein Beispiel aus der Chemie

An dieser Stelle eine erweiterte Betrachtung des Photoeffekts im Zusammenhang mit photochemischen Reaktionen. Jedem ist bestimmt schon mal aufgefallen, dass Farben mit der Zeit verblassen und Plastik spröde wird, siehe Abb. 14.32. Bei Objekten, die dem Wetter oder der Waschmaschine ausgesetzt sind, könnte man vorbringen, dass Umwelteinflüsse verantwortlich sind. Im eigenen Studierzimmer greift eine solche Argumentation nicht, denn auch Poster zeigen ein solches Verhalten. Betrachtet man ältere Farbplakate, wird man feststellen, dass die Blautöne weniger stark verblasst sind. Dies liegt daran, dass die rote und grünen Farbstoffe kurzwellige Photonen absorbieren (Vorlesung *Schrödingergleichung*). Die hohe Photonenenergie führt zu licht-induzierter Fragmentation, da die einzelnen Molekülgruppen in den komplexen Molekülen oft nur schwache Bindungen untereinander haben. Hochenergetische Photonen lösen diese chemische Reaktionen aus. Verstärkend kommt hinzu, dass blaue Farbstoffe kurzwelliges Licht reflektieren, wodurch sich die effektive Reaktionsrate verringert. Lichtinduzierte Prozesse müssen deshalb zum Schutz von Gemälden auch in Museen berücksichtigt werden.

Eine eindrucksvolle Demonstration der Auswirkungen des Photoelektrischen Effekts ist die Photochemische Reaktion von H_2 und Cl_2 in einen verschlossenen Quarzglas [**?**].

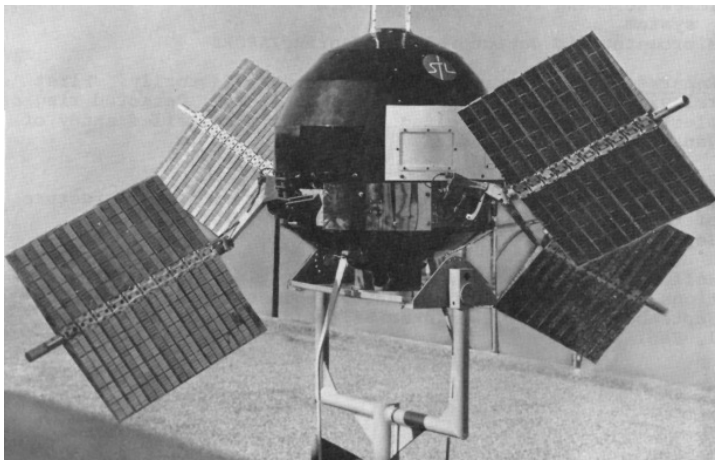


Abb. 14.30: Photo des Satelliten *Explorer 6*, der im Jahr 1959 gestartet wurde. Vier Solarzellen dienten im Orbit zum Wiederaufladen der Batterien [**?**].

Beleuchtet man den Quarzzylinder von außen mit ultraviolettes Licht, wird die Reaktion ausgelöst:

$$1/2H_2 + 1/2Cl_2 \rightarrow HCl \tag{14.14}$$

Die Reaktion verläuft folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned} Cl_2 + h \cdot \nu &\rightarrow 2\,Cl \\ Cl + H_2 &\rightarrow HCl + H \\ H + Cl_2 &\rightarrow HCl + Cl \end{aligned} \tag{14.15}$$

Die Reaktion wird kann nur mit ultraviolettem Licht eingeleitet werden. Die Photonenenergie muss ausreichen, um die Chlor-Chlor Bindung aufzubrechen. Die Wasserstoff-Wasserstoff Bindungsenergie beträgt 436 kJ/mol und die Chlor-Chlor Bindungsenergie 243 kJ/mol. Dies entspricht Photonenenergien von 5.3 eV (275 nm) bzw. 2.51 eV (492 nm).

Link to video *Photochemical Reaction of Hydrogen and Chlorine*

Ein Beispiel aus der Medizin

Die roten Blutkörperchen von Neugeborenen haben eine verkürzte Lebensdauer, wodurch die Anzahl der Hämoglobinmoleküle, die abgebaut werden müssen, steigt. In vielen Fällen ist dies mehr, als die Leber des Kindes in diesem Entwicklungsstadium verarbeiten kann. Infolgedessen sammelt sich Bilirubin - ein wasserunlösliches Abbauprodukt des Hämoglobins - in der Haut und den Schleimhäuten an und verursacht eine gelbliche Färbung. Die Phototherapie, die den Photoeffekt ausnutzt, kommt zum Einsatz, wenn der Bilirubinwert bei der Neugeborenen-Gelbsucht einen Grenzwert überschritten hat. Ab bestimmten Konzentrationen kann der ansonsten normale Bilirubin-Anstieg im Blut

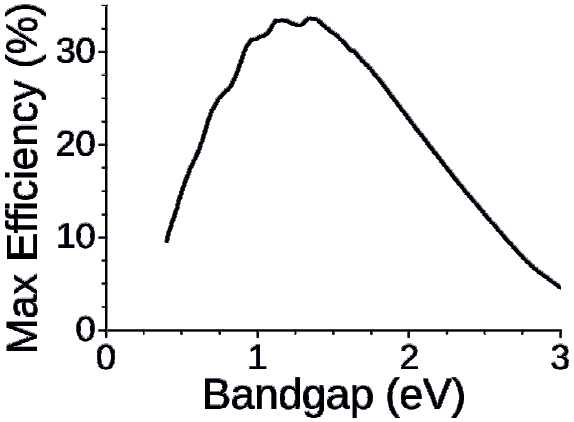


Abb. 14.31: Die Shockley-Queisser-Grenze gibt eine Obergrenze für den Wirkungsgrad an, mit dem Solarzellen Licht der Sonne in elektrische Energie umwandeln können. In der zugehörigen Veröffentlichung der Autoren [**?**] wurde das für die Berechnung zugrunde liegende Sonnenspektrum durch ein Schwarzkörperspektrum bei 6000 K angenähert [**?**].



Abb. 14.32: Verblichenes Hinweisschild auf die Hansestadt Rostock auf der Autobahn A20.



Abb. 14.33: Neugeborenes unter einer Phototherapie-Lampe. Der Säugling, liegt für die Behandlung, wie auf einer Sonnenbank, nur mit einer Windel bekleidet, unter der Blaulicht-Lampe [**?**].

nämlich schädliche Auswirkungen auf das Gehirn haben. Zur Behandlung wird blaues Licht mit einer Wellenlänge von etwa 455 nm eingesetzt, siehe Abb. 14.33. Durch die eingestrahlte Lichtenergie wird in der Haut des Neugeborenen eingelagertes wasserunlösliches (indirektes) Bilirubin in ein wasserlösliches Isomer, das sogenannte Lumirubin umgewandelt. Dieses wird anschließend über die Gallenflüssigkeit und die Nieren ausgeschieden.

Nuklearer Photoeffekt

Der Photoeffekt tritt nicht nur bei Elektronen des Atoms auf, sondern spielt auch in der Kernphysik eine wichtige Rolle. Beim so genannten Kernphotoeffekt sind zwei Reaktionspfade von Bedeutung. Nach der Absorption eines hochenergetischen γ-Photons durch den Atomkern

1. wird ein Neutron emittiert (γ-n-Reaktion)
2. wird ein Proton emittiert (γ-p-Reaktion)

Die Energie des Photons muss dabei mindestens der Bindungsenergie des am schwächsten gebundenen Nukleons entsprechen. Über den Massendefekt lässt sich die Bindungsenergie des Nukleons berechnen. Ein Beispiel ist die (γ-n)-Reaktion am Deuteriumkern

$$ {}^{2}_{1}H + \gamma \rightarrow {}^{1}_{1}H + n \tag{14.16}$$

Konzeptionell gibt es einen engen Zusammenhang zwischen dem photoelektrischen Effekt und dem Compton-Effekt (siehe Vorlesung *Materiewellen*). Gemeinsam ist, dass durch die Wechselwirkung von Licht und Materie ein Elektron abgelöst wird. In beiden Fällen ergibt sich die Energie der Elektronen aus dem Energieerhaltungssatz. Während beim Photoeffekt die gesamte Energie des Photons auf das emittierte Elektron übertragen wird, wird beim Comptoneffekt nur ein Teil der Energie des einfallenden Röntgenphotons an das Elektron abgegeben, siehe Abb. 14.34. Obwohl Einstein seine Theorie schon 1905 formulierte, wurden seine Arbeiten erst allgemein akzeptiert, nachdem Bothe und Geiger in einem Experiment zum Compton-Effekt sowohl das gestreute Photon UND das zugehörige Elektron nachwiesen [**?**]. Eine erhebliche Bedeutung haben der Compton- und der Photoeffekt bei der Wechselwirkung energetischer Strahlung mit Gewebe. Im Röntgen- und γ-Bereich bis etwa 1 MeV (λ_γ=1 pm) dominieren diese Prozesse im Zusammenhang mit Strahlungsschäden durch Licht. Oberhalb 1 MeV überwiegt der Prozess der e^-e^+ Paarerzeugung (siehe Vorlesung $E = mc^2$). Die Entwicklung der Reaktionsquerschnitte mit der Photonenenergie in Blei ist in Abb. 14.35 dargestellt. Man erkennt, dass der Querschnitte bei einer Energie von 2 MeV ein Minimum aufweist. Bei dieser Energie ist die Absorption von Strahlung minimal. Mehr dazu in den Kapiteln *Röntgendiagnostik* und *Strahlentherapie*.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, das Licht sowohl einen Wellen- als auch einen Teilchencharakter aufweist. Der Wellencharakter überwiegt, wenn Absorptions- und Emissionsprozesses keine Rolle spielen. Der Teilchencharakter tritt in den Vordergrund, wenn

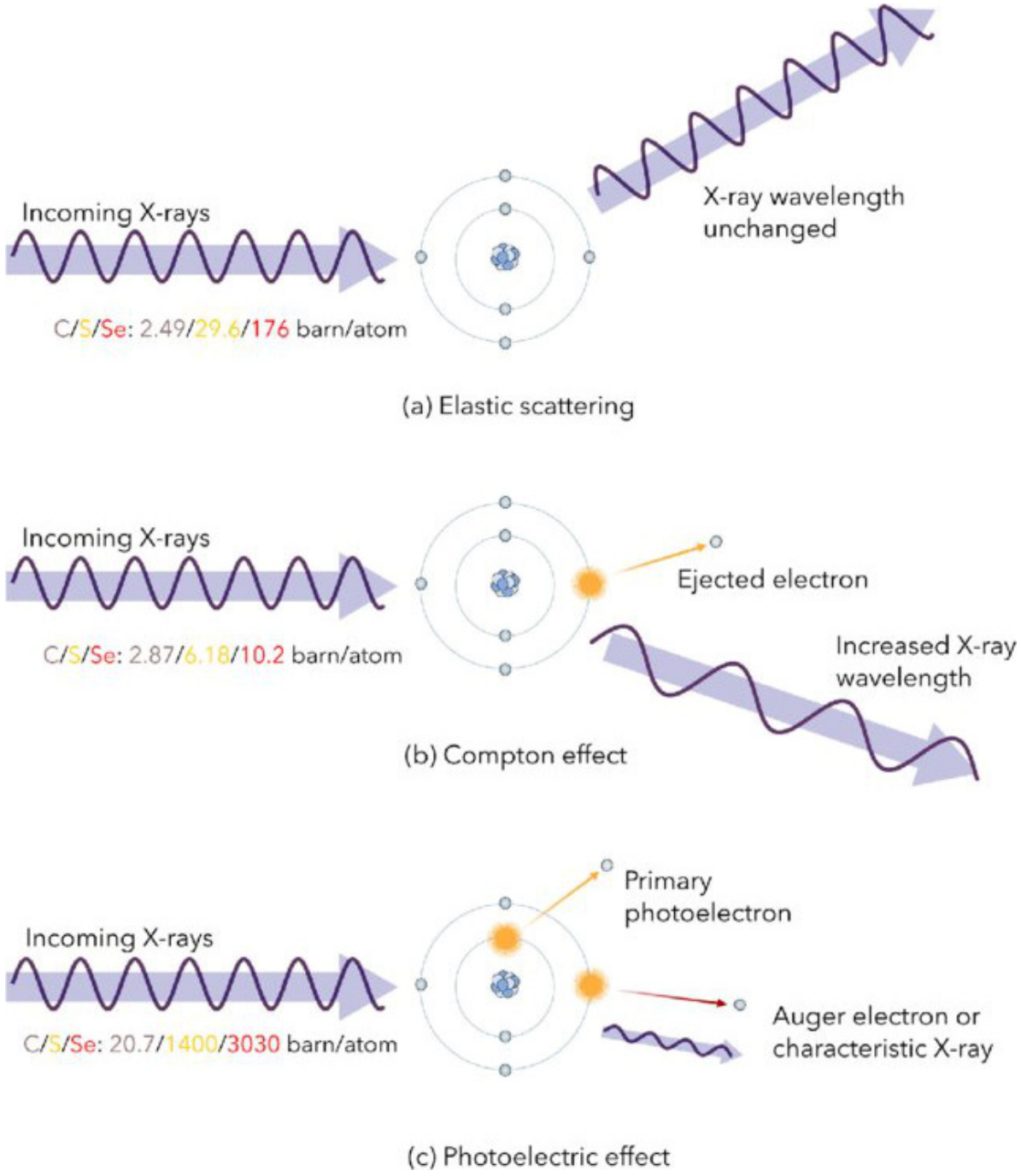


Abb. 14.34: Prozesse, die bei der Wechselwirkung energetischer Photonen mit Materie relevant sind. *Oben:* Elastische Streuung von Licht, also ohne Energieübertrag; *Mitte:* Compton-Effekt; *Unten:* Photoelektrischer Effekt; Für noch höhere Photonenenergien kommt noch Paarerzeugung zum Tragen [**?**].

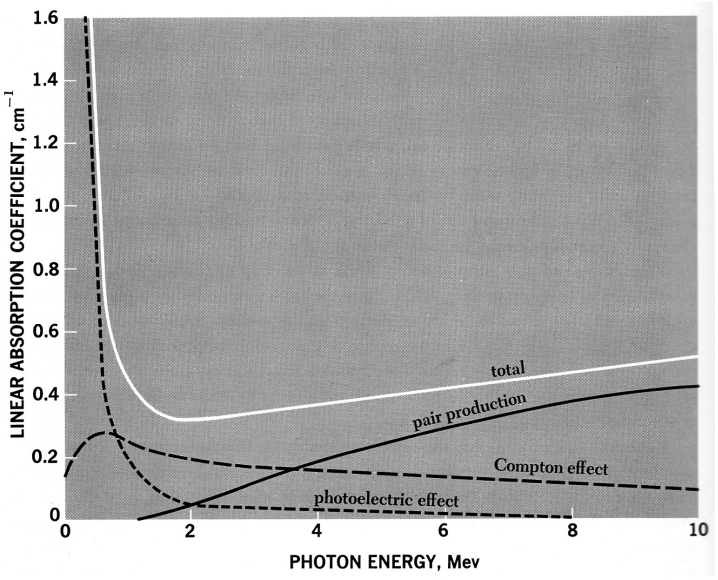


Abb. 14.35: Absorptionskoeffizienten für die Wechselwirkung von Photonen mit Blei. Die drei in Frage kommenden Prozesse spielen in unterschiedlichen Energiebereichen eine Rolle [**?**].

es zur Wechselwirkung mit der Materie kommt. Als Ergänzung noch ein kurzer historischer Aufriss des Welle-Teilchen Konzepts.

Zeittafel zum Welle-Teilchen Dualismus

- Francesco Maria Grimaldi (1665) discovered the phenomenon of light diffraction and pointed out that it resembles the behavior of waves. Soon after Christian Huygens established the wave theory of light and announced the Huygens principle.

- Fresnel asserted that light waves have an extremely short wavelength and mathematically proved light interference. Thomas Young calculated the wavelength of light from an interference pattern, thereby not only figuring out that the wavelength is $1\,\mu$m or less, but also having a handle on the truth that light is a transverse wave.

- In 1864 James Clerk Maxwell predicted the existence of electromagnetic waves and out of his prediction came the concept of light being an electromagnetic wave.

- The dual nature of light as both a particle and a wave has been proved by Einstein who believed light is a particle called photon and the flow of photons is a wave. The main point of the light quantum theory is that energy of light is related to its oscillation frequency. Einstein maintained that photons have energy equal to the Planck constant times oscillation frequency, and this photon energy is the height of the oscillation frequency while the intensity of light is a flow of photons. The

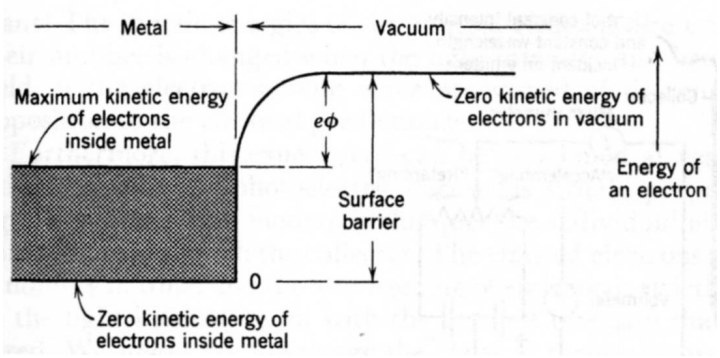


Abb. 14.36: Energieverhältnisse an der Oberfläche eines Metalls[**?**].

various properties of light, which is a type of electromagnetic wave, are due to the behavior of photons.

Photoelektronenspektroskopie^{4LP}

Eine wichtige Bedeutung hat der Photoeffekt für die Erforschung der kondensierten Materie. Photoelektronenspektrometer sind die Arbeitspferde zur Bestimmung der elektronischen Struktur von Atomen, Molekülen bis hin zum Festkörper. Die Experimente werden dabei mit Laser- und Synchrotronstrahlung (Kapitel *Der Zerfall des Myons* und *Laser*) als Lichtquellen für monochromatische Strahlung durchgeführt. Um die Informationen, die man anhand des Photoeffekts über den Festkörper erhält, einzuordnen zu können, ist es notwendig vorzugreifen und ein paar wesentliche Begriffe aus der Festkörperphysik vorzustellen.

Bislang haben wir nur das am lockersten gebundene Elektron im Festkörper betrachtet. Tatsächlich können aufgrund der Energieerhaltung bei ausreichender Photonenenergie auch Elektronen aus stärker gebundenen Niveaus abgelöst werden. Damit erhält man Erkenntnisse über die elektronische Struktur der Materie indem hochenergetische Photonen die Besetzung der Energiezustände abtasten. Beispielhaft betrachten wir ein vereinfachtes Bild der elektronischen Struktur eines Metalls, siehe Abb. 14.36.[30] Das Konzept orientiert sich am Modell des *particle-in-a-box* aus der Vorlesung *Schrödingergleichung*. In der Vorlesung zum Aufbauprinzip (*Beyond Bohr*) werden Regeln (u.a. das Pauli-Prinzip) vorgestellt, die die Besetzung der Energieniveaus bestimmen. Danach besetzen die Elektronen Gruppen von Energiezustände bis zu einer bestimmten Energie. Dies ist die Fermi-Energie ε_F, die für ein Metall identisch ist mit der Austrittsarbeit W_A. Aufgrund der enormen Anzahl an Elektronen in einem Festkörper, sind die Abstände der Energieniveaus so gering (*Stichwort:* Avogadrozahl), dass man in diesem Zusammenhang den Begriff Energiebänder[31] verwendet. Entsprechend ihrer Bindungsenergie erhalten die

[30] In der Abbildung ist $W_A{=}e \cdot \phi$ die Austrittsarbeit aus dem Festkörper.

[31] *Lexikon:* In einem Festkörper sind die Elektronen in **Energiebändern** angeordnet. Das energetisch höchste besetzte Niveau wird durch die so genannte **Fermi-Energie** ε_F charakterisiert. Diese entspricht nicht in jedem Fall der Austrittsarbeit W_A, wie die Abbildung zeigt, sondern hängt davon ab, ob es sich um ein Metall, einen Halbleiter oder einen Isolator handelt.

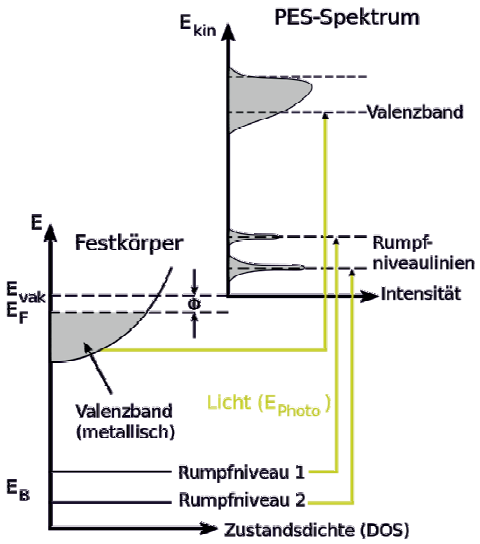


Abb. 14.37: Ablösung von Elektronen aus dem Valenzband und den Rumpfniveaus mit enrgiereichem Licht und resultierendes Kinetische Energie der Photoelektronen.

Photoelektronen bei Einstrahlung monochromatischen Lichts eine für ihren Zustand charakteristische kinetische Energie. Grob betrachtet geben die Photoelektronen Auskunft darüber, ob ein bestimmter Energiezustand im Festkörper besetzt ist. Die Intensität des Photosignals zeigt, wie viele Elektronen sich im diesem Zustand befinden.

Es ist allgemein üblich, die potentielle Energie eines Teilchen im feldfreien Raum mit E_{pot}=0.0 eV anzusetzen. Diese Zuweisung führt dazu, dass ein anziehendes Potenzial zu einer negativen potenziellen Energie führt. Ich kann mir vorstellen, dass man sich an negative potenzielle Energien erst mal gewöhnen muss. In der modernen Physik ist diese Wahl des Energienullpunkts aber gang und gäbe. Denken Sie daran, dass sowohl E_{pot} als auch E_{kin} nur relative und keine absoluten Energiewerte sind, siehe auch Vorlesung *Beobachter*.

Erhöht man die Frequenz des eingestrahlten Lichts erhöht, lässt sich die Schwelle für die Emission von Elektronen bestimmen. Tiefer gebundene Elektronen können erst ausgelöst werden, wenn die Frequenz des Lichts soweit erhöht wird, dass die Photonenenergie mindestens die Bindungsenergie dieser Elektronen erreicht. Änderungen im Photostrom geben damit Hinweise auf tiefer gebundene Elektronen. Diese Methode erlaubt eine Abtastung der elektronischen Struktur eines Festkörpers.

Eine andere Methode zur Analyse der Elektronen-Bindungsverhältnisse ist die Messung der kinetischen Energie der Elektronen bei Einstrahlung von monochromatisiertem Röntgenlicht hoher Frequenz (Hohe Photonenenergie), beispielsweise aus einer Synchrotron-Strahlungsquelle (siehe Vorlesung *Zerfall des Myons*). Die kinetische Energie kann über die Ablenkung in einem elektrischen oder magnetischen Feld oder anhand der Flugzeit zum Detektor bestimmt werden. Wie an Abb. 14.37erkennt, können damit sowohl das Leitungsband als auch die fest gebundenen Rumpfniveaus in einer einzigen Messung spektroskopiert werden. Die Entwicklung dieser experimentellen Methode geht auf

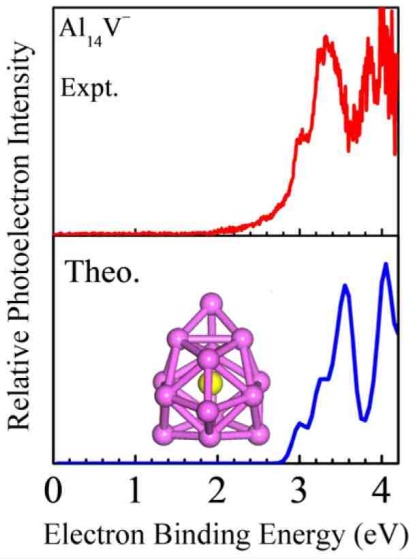


Abb. 14.38: Der Vergleich des Photoelektronenspektrums von $Al_{14}V^-$ mit der Theorie zeigt, dass das Vanadiumatom immer eine bestimmte Position besetzt [**?**].

Manne Siegbahn[32] zurück .

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Welt der Nanoteilchen

In unserer Arbeitsgruppe *Cluster und Nanoteilchen* beschäftigen wir uns unter Anderem mit der Erforschung der elektronischen Struktur von Nanoteilchen. Das im Experiment gemessene Photoelektronenspektrum eines Nanoteilchens (links auf der Folie, grau) mit einer bestimmten Anzahl an Atomen liefert der Theorie Hinweise auf die geometrische Struktur. Dazu werden Elektronenspektren für unterschiedliche Geometrien der Nanopartikel berechnet und mit der Messung verglichen, siehe Abb. 14.38. Die Abbildung zeigt, wie empfindlich das Elektronenspektrum auf die Anordnung der Atome ist. Im Vergleich von Experiment und Theorie wird die geometrische Struktur des Clusters geklärt [**?**].

Ein Beispiel aus der Festkörperphysik

Photoelektronenspektroskopie mit Röntgenstrahlung ist eine oberflächenempfindliche Spektroskopie zur Untersuchung der physikalischen Eigenschaften von Materialien. Die Methode liefert Informationen aus einer bestimmten Oberflächenschicht. Die Eindringtiefe hängt dabei von der Photonenenergie ab und weist -abhängig vom Element- bei

[32] The Nobel Prize in Physics 1981 was divided, one half jointly to Nicolaas Bloembergen and Arthur Leonard Schawlow *for their contribution to the development of laser spectroscopy* and the other half to Kai M. Siegbahn *for his contribution to the development of high-resolution electron spectroscopy.*

einer bestimmten Photonenenergie ein so genanntes Cooper-Minimum auf [**?**]. Bei dieser Wellenlänge dringt das Licht nur wenig in die Oberfläche ein. Diesen Effekt kann man ausnutzen, um die Oberflächenempfindlichkeit zu erhöhen. Die Photoemission aus einem Festkörper kann als ein Dreistufenschritt angesehen werden. (i) Photoabsorption und Freisetzung des Photoelektrons (ii) Reaktion der Atome auf die Ionisation. (iii) Transport zur Oberfläche. Bei allen diesen Schritten wird das gesamte Elektronensystem beeinflusst und es ergeben sich eine Vielzahl an Phänomenen, die eine Fülle an Informationen über das Material und die auftretenden physikalischen Effekte liefern. Der Auger-Effekt ist dabei einer der möglichen Prozesse: Wird ein Rumpfelektron infolge eines Photoabsorptionsprozesses aus einer der inneren Schalen emittiert, wird das frei gewordene Bindungsniveau durch ein weniger stark gebundenes Elektron wieder besetzt. Die dabei freiwerdende Bindungsenergie kann in Form eines Röntgenphotons abgeführt werden (charakteristische Röntgenstrahlung(, Kapitel *Röntgen*). Ob dieser Prozess, stattfindet hängt von der Ordnungszahl[33] Z ab. Es stellt sich heraus, dass die Röntgenemission bei hohen Z dominiert. In den leichteren Elementen wird dagegen die Energie dagegen strahlungslos auf ein anderes Elektron übertragen, das den Festkörper mit einer charakteristischen kinetischen Energie verlässt. Diese hängt von den Bindungsenergien der beteiligten Niveaus ab. Die so erzeugten Elektronen nennt man Auger-Elektronen. Der Vorgang wird als innerer Photoeffekt bezeichnet, weil man sich den Prozess auch so vorstellen kann: Die frei werdende Energie wird als (virtuelles) Röntgenphoton abgestrahlt. Gleichzeitig absorbiert das Atom dieses Photon wieder und es kommt zur Auger-Emission.

Ein Beispiel aus der Chemie

Warum ist die Analyse der Photoemission auch unter dem Namen ESCA (Elektronenspektroskopie für die chemische Analyse) bekannt? Tatsächlich geben die Photoelektronen anhand der gemessenen Bindungsenergie Informationen über die Bindungsverhältnisse preis. Da kernnahe Elektronen zu schmalbandigen Signalen im Energiespektrum führen, kann man die energetische Lage der Rumpfniveaus als empfindliche Sensoren für die chemische Umgebung verwenden. Man nennt diesen Effekt die chemische Verschiebung (chemical shift) [**?**]. Die Ursache ist, dass durch die Stärke der chemischen Bindung, die im wesentlichen die Valenzelektronen betrifft, die Abschirmung der Kerne verändert wird. Dadurch verschiebt sich die Elektronenbindungsenergie des betrachteten Niveaus. Als Faustregel kann man sich merken: Eine Erniedrigung der Elektronenladung erhöht die Bindungsenergie der Elektronen; eine Erhöhung senkt die Bindungsenergie. In Lithium ist beispielsweise der Kern durch die beiden inneren Elektronen und das Valenzelektronen abgeschirmt (siehe Kapitel *Beyond Bohr*). Kommt es zur Oxydation, reduziert sich die Abschirmung, weil Elektronendichte infolge der chemischen Bindung an das Sauerstoffatom abgegeben wird. Als Folge erhöht sich die Bindungsenergie der

[33] *Lexikon:* Die **Ordnungszahl** gibt die Anzahl der Protonen in einem Atomkern und bestimmt, wo ein chemisches Elements in das Periodensystem der Elemente eingeordnet wird.

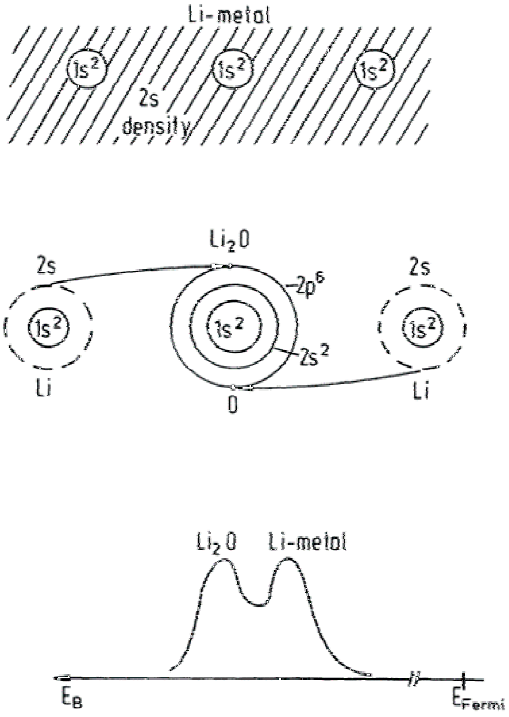


Abb. 14.39: Illustration zum Phänomen der Chemischen Verschiebung.

Rumpfniveaus. Abb. 14.39 illustriert den Effekt.

Ein weiteres Beispiel aus der Festkörperphysik

Wie genau sind die Aussagen über die Bindungsenergien, die man mit der Photoelektronenspektroskopie machen kann? Abschließend deshalb noch ein Wort zur Energieauflösung von Photoelektronenspektrometern. Eine Möglichkeit, die Bindungsenergie zu bestimmen, ist die Analyse der kinetischen Energie der Elektronen im Feld eines Kondensators. Die höchste Energieauflösung wird mit Kugelkondensatoren (Hemisphärische Analysatoren) erreicht. Abb. 14.40 zeigt den Aufbau eines solchen Instruments. Die erreichbare Energieauflösung in der Photoelektronenspektroskopie am Festkörper liegt im Bereich von meV. Dazu ein Beispiel aus dem Bereich supraleitender Materialien. Um Übergang in den supraleitenden Zustand unterhalb einer bestimmten Sprungtemperatur kommt es zur Bildung von so genannten Cooper-Elektronen-Paaren. Diese bewirken eine Energielücke in der Elektronenzustandsdichte an der Fermikante. Mit Hilfe der Photoelektronenspektroskopie konnte diese Energielücke experimentell nachgewiesen werden [**?**], siehe Abb. 14.41.

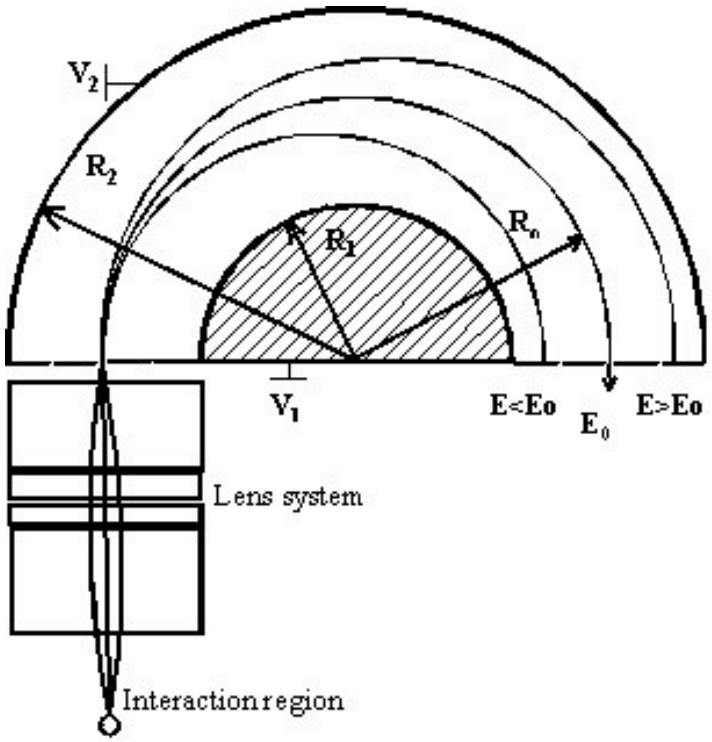


Abb. 14.40: Hemisphärische Analysatoren werden verwendet, um die Energie der Photoelektronen zu bestimmen. Der Analysator separiert die kinetische Energie durch zwei Halbkugeln mit angelegten Spannungen V_1 und V_2. Durch die Potenzialverhältnisse fliegen Photoelektronen unterschiedlicher Energie auf räumlich unterschiedlichen Bahnen. Elektronen mit der Energie E_0 folgen der zentralen Flugbahn und treten durch einen Schlitz aus dem Analysator aus. Elektronen mit niedrigerer oder höherer Energie als E_0 gelangen nicht durch den Schlitz. Durch Änderung der Spannungen an den Halbkugeln verschiebt sich der Wert von E_0 und so kann man die Ausbeute an Photoelektronen als Funktion ihrer kinetischen Energie bestimmen. Am Ende der Messung erhält man das Photoelektronenspektrum. In modernen Hemisphärischen Analysatoren ersetzt ein ortsempfindlicher Detektor den Austrittsschlitz.

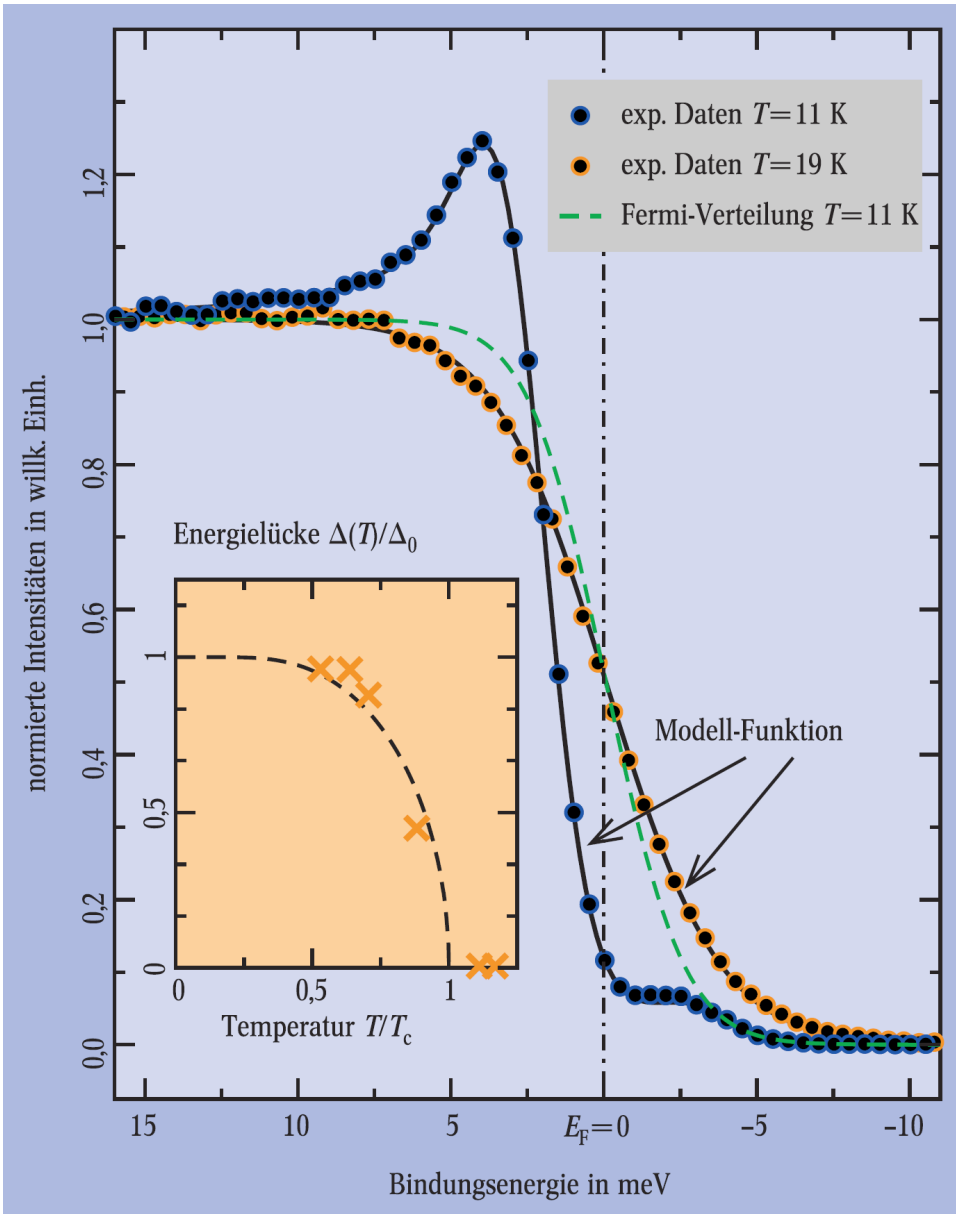


Abb. 14.41: Temperaturabhängigkeit der Photoemission eines konventionellen Supraleiters. Unterhalb der Sprungtemperatur T_c wechselt das Metall in den supraleitenden Zustand. Oberhalb von T_c=17.1 K (rote Punkte, T=19 K) entspricht der Verlauf einer konstanten metallischen Zustandsdichte, die durch die Fermi-Verteilung abgeschnitten wird. Unterhalb von T_c (blaue Punkte, T=11 K) erkennt man charakteristische Merkmale der Supraleitung. Der Einschub zeigt die theoretische (gestrichelt) und experimentelle Temperaturabhängigkeit der Energielücke $D(T)$ in reduzierten Einheiten (Kreuze) [**?**]

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Warum ist hochfrequente elektromagnetische Strahlung gefährlicher als langwelligere elektromagnetische Strahlung?[34]

(a) Photonen mit längerer Wellenlänge haben geringere Photonenenergie und können daher Materialien durch den photoelektrischen Effekt merklich schädigen.

(b) Photonen mit längerer Wellenlänge haben eine größere Photonenenergie und können daher Materialien durch den photoelektrischen Effekt merklich schädigen.

(c) Photonen mit höherer Frequenz haben eine geringere Photonenenergie und können daher Materialien durch den photoelektrischen Effekt merklich schädigen.

(d) Photonen mit höherer Frequenz haben eine höhere Photonenenergie und können daher Materialien durch den photoelektrischen Effekt merklich schädigen.

Aufgabe 3.2: In welcher Weise nutzen Solarzellen den photoelektrischen Effekt?[35]

(a) Eine Solarzelle wandelt alle Photonen, die sie absorbiert, unter Ausnutzung des photoelektrischen Effekts in elektrische Energie um.

(b) Eine Solarzelle wandelt alle Elektronen, die sie absorbiert, unter Ausnutzung des photoelektrischen Effekt in elektrische Energie um.

(c) Eine Solarzelle absorbiert die Photonen mit weniger Energie als die Energielücke des Materials der Solarzelle und wandelt sie mithilfe des photoelektrischen Effekts in elektrische Energie um.

Aufgabe 3.3: X-rays of wavelength 0.82 Å fall on a metal plate. Find the wavelength associated with the photoelectrons emitted. Neglect the work function of the metal.[36]

[34] Antwort: (d)
[35] Antwort: (a)
[36] Answer: 0.0997 Å

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Warum verursacht UV-Licht im Gegensatz zu sichtbarem Licht einen Sonnenbrand?

2. Warum ist ultraviolettes Licht gefährlicher für die Haut als sichtbares Licht?

3. Wie arbeitet ein Photomultiplier?

4. Warum komme in der Elementarteilchenphysik Detektoren auf der Basis der Photoeffekts zum Einsatz?

5. Bei der Entwicklung eines Kamerafilms verwendet man als Beleuchtung rotes Licht. Warum?

6. Sonnenstudios verwenden *sicheres* UV mit einer längeren Wellenlänge als das UV im Sonnenlicht. Dieses *sichere* UV hat eine ausreichende Photonenenergie, um die Bräunung auszulösen. Kann die Strahlung Zellschäden verursachen und bei längerer Exposition Krebs auslösen?

7. Welchen Anforderungen würden Sie an eine Solarzelle stellen?

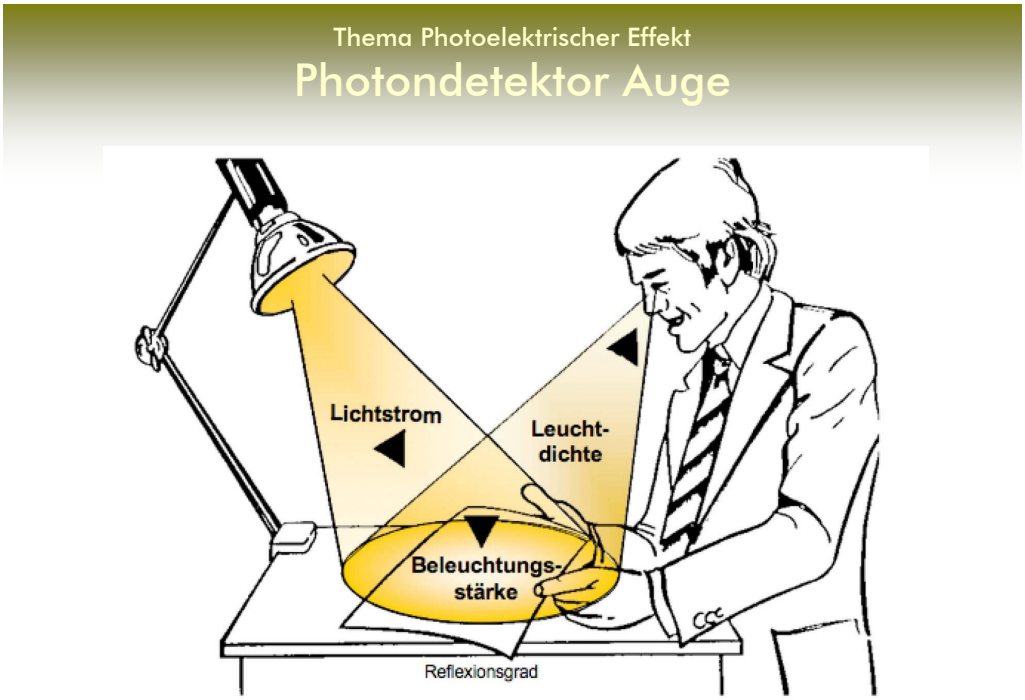
8. Was verstehen Sie unter Photochemie?

9. Welche Möglichkeiten gibt es, die Energie der Photoelektronen zu ermitteln?

10. Welche Informationen erhält man über die Photoelektronenspektroskopie an Festkörpern?

11. Man kann Wärme in Form von Infrarotstrahlung spüren, wenn eine Atombombe in 75 km Höhe detoniert. Die starke Röntgenstrahlen merken Sie dagegen nicht. Warum?

Photondetektor Auge[4LP]



Photon is a photon is a photon s a photon

frei nach Gertrude Stein, 1913[37]

Über welche Entfernungen können Menschen optische Signale wahrnehmen?

Die Frage ist nicht einfach zu beantworten. Wenn man atmosphärische Gegebenheiten wie Nebel, Staub und Luftverschmutzung außer acht lässt, ist die Bestimmung der Wahrnehmungsschwelle auch ein physiologisches Problem. Dazu passt ein Artikel aus der Ostsee Zeitung, siehe Abb. 14.3. Denken Sie, dass die im Beitrag aufgestellte Behauptung haltbar ist? Nehmen wir als Beispiel [**?**] die Betrachtung eines leuchtschwachen Sterns, den man als kleinen weißen Punkt wahrnimmt. Die Intensität der Lichtquelle (hier der Polarstern) ist so gering, dass die Körnigkeit des Lichts zu Tage tritt. Abb. 14.42 zeigt eine Simulation, die verdeutlicht, in welcher Weise die Lichtquanten auf der Netzhaut auftreffen würden. Der kreisförmige Bereich zeigt den Bereich der Fovea vergrößert mit der dichten Packung von Zäpfchen. Die schwarzen Punkte zeigen die Auftreffpunkte der Photonen. Alle 100 ms (typisches Informationsintervall auf neuronaler Ebene) treffen

[37]Im Original: *Rose is a rose is a rose is a rose*

einige Tausend Photonen auf die Netzhaut. Einzelne Photonen können mit den lichtempfindlichen Molekülen wechselwirken. Bei einer Absorption des Photons reagiert das Molekül und isomerisiert. Bei diesem Prozess kommt es zu einer Umlagerung der Molekülverbände. Dieser Vorgang löst nach einer Anzahl weiterer verstärkender Prozesse einen Nervenimpuls aus, der an das Gehirn weitergeleitet wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass wenige Photonen zu einem Nervenimpuls an das Gehirn führen, ist gering, da die photoinduzierte Isomerisation nur in etwa 10% der Absorptionsvorgänge tatsächlich ausgelöst wird. Hinzu kommt, dass die photoaktivierten Moleküle möglicherweise weit voneinander entfernt sind. Die optische Wahrnehmung eines schwach leuchtenden Objekts setzt sich damit zusammen aus wenigen Informationsfetzen, wobei auch eine Rolle spielt, dass die Ereignisse innerhalb des Zeitintervalls für die neuronale Verarbeitung erfolgen müssen. Es ist bemerkenswert, dass man trotzdem solche Lichtobjekte wahrnimmt. Man bedenke, dass das Gehirn die Informationen aus einem Muster scheinbar willkürlich photoaktivierter Moleküle extrahieren muss. Weiter erfolgt die optische Bilderfassung nicht durch ein fest verankertes Teleskop, sondern durch ein Lebewesen, das versucht, ein Objekt zu fixieren. Sakkaden spielen hier eine Rolle. Das sind ruckartige Muskelbewegungen mit einer Frequenz von etwa 5 Hz, die den bewegen. Dadurch treffen die Photonen auf jeweils andere Bereiche der Fovea. Es ist eine spannende Frage, wie es das Gehirn es schafft, aus diesen Informationssprenkeln einen nachhaltigen Wahrnehmungseindruck zu generieren.

Abstandsgesetz

Es ist deshalb sinnvoll, sich mit der Physik des Sehens auseinanderzusetzen. Dabei konzentrieren wir uns nur am Rande auf das optischen Abbildungssystem (Vorlesung *Optik*). Im Wesentlichen betrachten wir den Nachweis durch die Lichtrezeptoren auf der Retina. Tatsächlich werden die Nervenimpulse der optischen Wahrnehmung durch den Photoeffekt ausgelöst. Zunächst muss man klären, unter welchen Bedingungen das Auge empfindlich reagiert. Dazu gehören die Lichtverhältnisse und die verwendete Wellenlänge. Die zugrundeliegende Fragestellung ist daher, wie Menschen und Tiere Farben und Helligkeiten wahrnehmen. Es wird gezeigt, dass im Folgenden physiologische Aspekte eine wichtige Rolle spielen.

Die Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) wirbt in diesem Zusammenhang mit dieser Bemerkung: Nein, hier wurde nicht vergessen das Bild einzufügen.[38] Was Sie sehen, ist die typische Innenansicht eines Photometrie-Labors, kurz bevor eine Messung beginnt. Vielleicht erahnen Sie das schwache Glimmen der Diode eines Messgeräts in der Ecke links unten?

Lexikon: Die **Candela** (cd) ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strah-

[38] https://www.ptb.de/cms/en/research-development/research-on-the-new-si/countdown-zum-neuen-si/die-candela.html Da man tatsächlich nichts erkennt, habe ich auf die Abbildung verzichtet

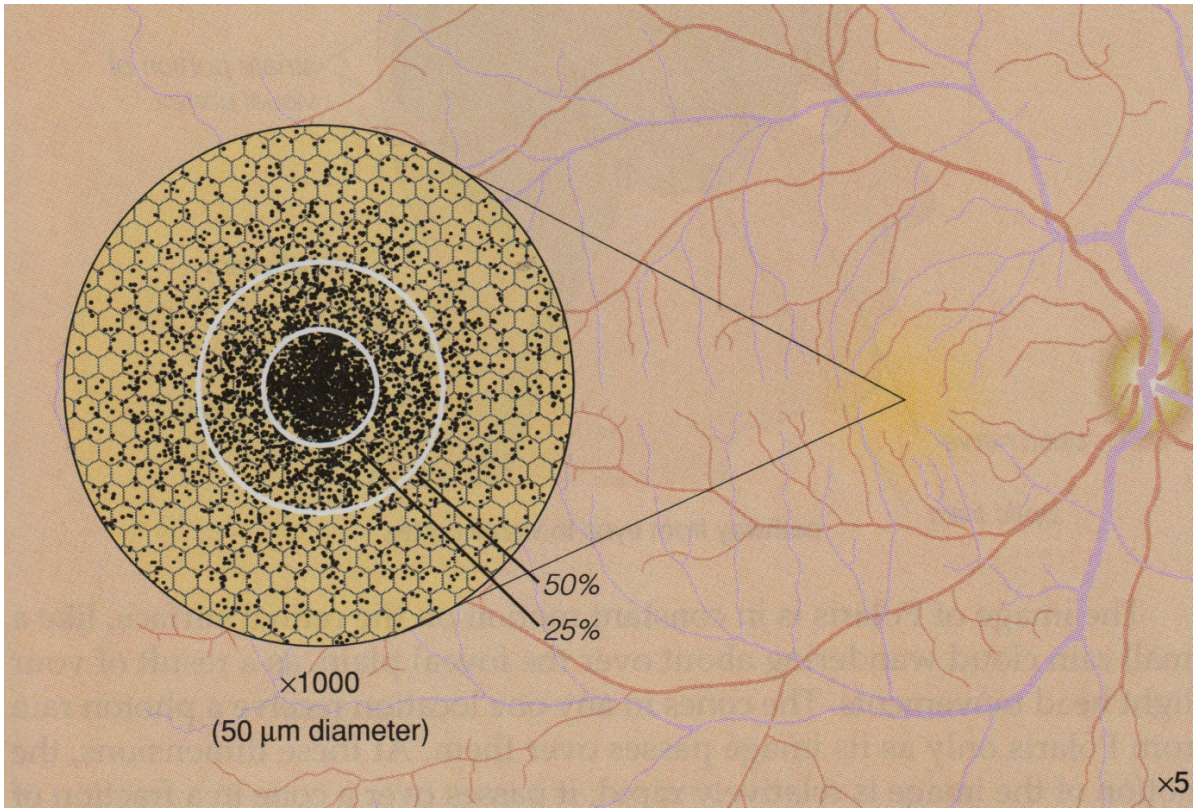


Abb. 14.42: Simulation von Photonen aus Richtung des Polarsterns kommend auf das Gebiet der Fovea (gelber Fleck) der Netzhaut. Der kreisförmige Bereich auf der linken Seite zeigt dieses Gebiet vergrößert, wodurch die dicht gepackte sechseckige Anordnung der Photorezeptoren erkennbar wird. Die verstreuten schwarzen Punkte zeigen das Auftreffen einzelner Photonen. Alle 0.1 s (kürzestes Zeitintervall für die neuronale Verarbeitung von Informationen) treffen etwa 6 000 Photonen des Polarsterns im optischen Spektralbereich auf der Netzhaut auf [**?**].

lungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1/ 683 Watt durch Steradiant beträgt.

Das die Definition der SI-Einheit Candela, wie sie bis Mai 2019 verwendet wurde.[39] In der Vorlesung *Schwarze Strahler* hatten wir die Hefner Kerze als historische Lichtstärkeneinheit kennengelernt. Eine Hefnerkerze (1 HK) entspricht etwa 0.9 cd. Trotz zahlreicher Studien konnte die Untergrenze der menschlichen Sehfähigkeit lange nicht mit Sicherheit bestimmt werden. Aus Untersuchungen weiß man, dass dunkel-adaptierte Versuchsper-

[39] *Lexikon:* Die heutige gültige etwas sperrigere Definition lautet: Die Candela (cd) ist die SI-Einheit der Lichtstärke in einer bestimmten Richtung. Sie ist definiert, indem für das photometrische Strahlungsäquivalent K_{cd} der monochromatischen Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz der Zahlenwert 683 festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit $\mathrm{lm\,W^{-1}}$, die gleich $\mathrm{cd\,sr\,W^{-1}}$ oder $\mathrm{cd\,sr\,kg^{-1}m^{-2}s^3}$ ist, wobei das Kilogramm, der Meter und die Sekunde mittels h, c und $\Delta\nu_{Cs}$ definiert sind

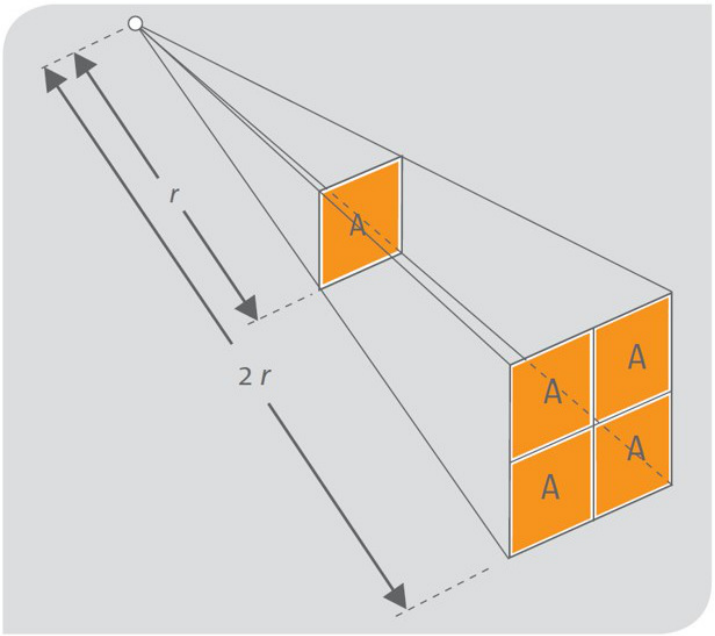


Abb. 14.43: Illustration des Quadratischen Abstandsgesetzes.

sonen Lichtblitze wahrnehmen können, die aus fünf bis sieben Photonen bestehen. Ob allerdings ein einzelnes Photon vom Auge nachgewiesen wird, ist erst seid kurzem geklärt.

The human eye is very sensitive but can we see a single photon? The answer is that the sensors in the retina can respond to a single photon. However, neural filters only allow a signal to pass to the brain to trigger a conscious response when at least about five to nine arrive within less than 100 ms. If we could consciously see single photons we would experience too much visual noise in very low light, so this filter is a necessary adaptation, not a weakness.

Philip Gibbs, 1996

Um die Empfindlichkeit des menschlichen Auges in Bezug auf eine weit entfernte Lichtquelle abzuschätzen, benötigen wir einen Ausdruck, der die Intensität einer isotrop abstrahlenden Strahlungsquelle, in einer gewählten Entfernung R angibt (Abb. 14.43). Beispiele sind Sonnen und radioaktive Proben. Die Abhängigkeit wird durch das Quadratische Abstandsgesetz[40] (Kapitel *Strahlentherapie*) beschrieben.

$$I(R) \approx 1/R^2 \tag{14.17}$$

[40] *Lexikon:* **Quadratisches Abstandsgesetz:** Man betrachte eine punktförmige Strahlungsquelle und setze einen kleinen Ausschnitt einer Kugelschale in Beziehung zur ganzen Kugelfläche. Der Flächenausschnitt ist eine Probefläche, die in einem bestimmten Abstand von der Quelle Energie (z.B. über Strahlung) aufnimmt. Die Probefläche kann die Öffnung eines Messgerätes oder auch ein Hautbereich sein. Die Größe der Fläche bleibt stets gleich. Die zugehörige Kugelfläche ist die Oberfläche auf die im selben Abstand Strahlung einfällt.

Welche Lichtmenge trifft auf die Retina und kann man das in Anzahl an Photonen angeben? Dazu machen wir folgende Überlegung. Aus welcher Entfernung ist es möglich, das Licht einer brennenden Kerze wahrzunehmen? Hier gehen die Meinungen weit auseinander und schwanken zwischen 4 und 40 km [**?**]. Nehmen wir mal 40 km an. Die Lichtemission der Kerze schätzen wir grob mit 1 W ab. Dann vergleichen wir die Oberfläche der Kugelschale A_{40km} mit der Fläche der weit geöffneten Augenpupille (Radius $r_{Pupille}$=4 mm).

$$\begin{aligned} P_{Auge} &= \frac{A_{Pupille}}{A_{40km}} \cdot P_{Kerze} \\ P_{Auge} &= \frac{\pi \cdot r_{Pupille}^2}{4\,\pi r_{40km}^2} \cdot P_{Kerze} \\ P_{Auge} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{(4 \cdot 10^{4}\,\mathrm{m})^2} \cdot P_{Kerze} \\ P_{Auge} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}}{1 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}} \cdot (1\,\mathrm{W}) \\ P_{Auge} &= 2.5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{W} = 2.5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J/s} \end{aligned} \tag{14.18}$$

Die Lichtmenge, die das Auge trifft, ist so gering, dass die Körnigkeit des Lichts zutage tritt. Die Photonen treten durch die Pupille ins Auge ein und treffen auf die Retina.

Link to video *Your Eyes*

Von Zapfen und Stäbchen

As it is almost impossible to conceive each sensitive point of the retina to contain an infinite number of particles, each capable of vibrating in perfect unison with every possible undulation, it becomes necessary to suppose the number limited, for instance to the three principal colors.

Thomas Young, 1807

Welche Strahlung wird vom Auge registriert?

Strahlung aus unterschiedlichen Spektralbereichen trifft auf das Auge, wird aber nur zu einem geringen Anteil von den Photorezeptoren auf der Retina nachgewiesen.

- Radio- und Mikrowellen durchdringen den Körper praktisch ohne Wechselwirkung.
- Strahlung im tiefen Ultraviolett[41] (λ <400 nm) wird von der Hornhaut absorbiert und gelangt nicht auf die Retina (Abb. 14.46)

[41] UVA: 400-320 nm; UVB: 320-280 nm; UVC: 280-100 nm



» Lampenwechsel auf der Greifswalder Oie

Dieses Licht strahlt 48 Kilometer

Greifswald – Leuchtturm-Wärter – das war einmal. Auf den Leuchtturm der Insel Greifswalder Oie in der Pommerschen Bucht steigt Tino Chust (43) nur ab und zu für einen Funktions-Check und wie hier zum Lampenwechsel. Der Mann ist Kommunikationselektroniker beim Wasser- und Schifffahrtsamt Stralsund. Beim letzten Besuch gab es für das 48 Meter hohe Leuchtfeuer eine neue Halogenmetalldampflampe mit 2000 Watt Leistung. Deren Licht ist noch in 48 Kilometern Entfernung zu sehen. Als letzter Wärter hatte Heinz Mai 1978 den 1855 erbauten Turm verlassen. Foto: Dietmar Lilienthal

Abb. 14.44: Artikel aus der Ostsee Zeitung vom 17. Februar 2015.

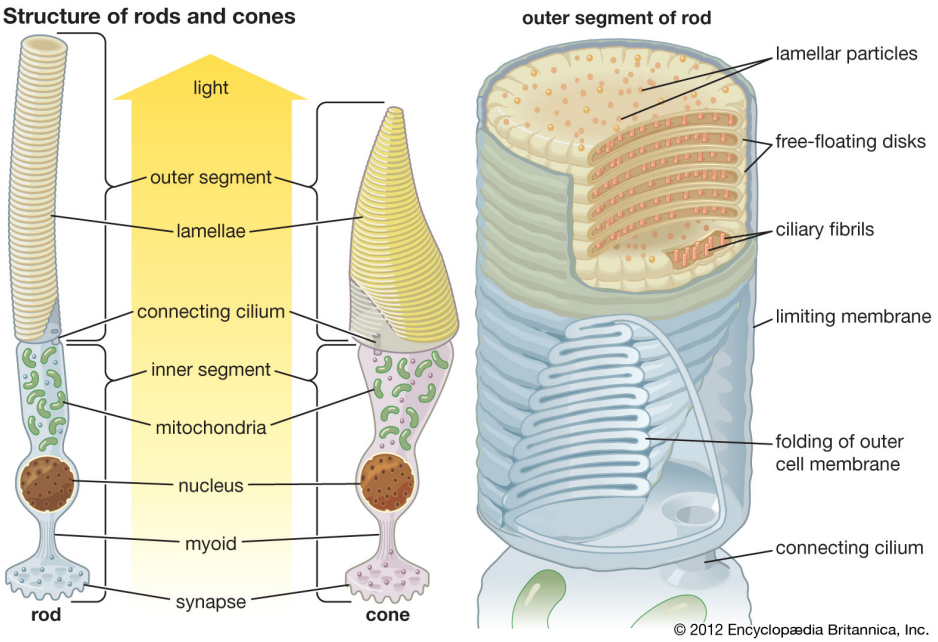


Abb. 14.45: Stäbchen und Zapfen sind lichtempfindliche Zellen, die sich in der Netzhaut des Auges befinden. Das äußere Segment enthält den Phototransduktionsmechanismus, d.h. die Überführung eines Reizes elektromagnetischer Strahlung in einen zellulären Effekt.

- Röntgenstrahlung wird von den leichten Elementen (H, C, O, N) und Molekülen wie Wasser kaum absorbiert. Das Auge nimmt diese Art von Strahlung nicht wahr.
- Die Photodetektoren im Auge weisen Licht nur im engen spektralen Bereich (VIS: 400-700 nm) nach.

Bei welcher Wellenlänge ist die Empfindlichkeit des Auges am höchsten?

Auf der Retina des Auges findet man zwei unterschiedliche Arten von Wahrnehmungsrezeptoren. Dies sind die Zäpfchen und Stäbchen. Die Zäpfchen sind für die Wahrnehmung von Farben verantwortlich. Man unterscheidet S-, M- und L-Zäpfchen.[42] Diese sind in unterschiedlichen Wellenbereichen (S: short, M: medium, L: long wavelengths) empfindlich. Die Abbildung 14.47 zeigt die zugehörigen Empfindlichkeitskurven. Die Kurven weisen bei bestimmten Wellenlängen Maxima auf. Beispielsweise liegt das Maximum der M-Zapfen bei 534 nm. Das Maximum der Stäbchen, die für das Sehen bei geringer Helligkeit dienen, findet man dagegen bei 498 nm. Abb. 14.49 zeigt die Empfindlichkeit des Auge bei Tag und bei Nacht. Eingezeichnet sind die Wellenlängen üblicher Laserpointer. Man erahnt wohl, warum man grüne Laserpointer -obwohl gleiche Leistung- als greller

[42] *Lexikon:* Die **Zapfen** (engl. *cones*) sind Sinneszellen der Netzhaut, mit der wir farbiges Licht wahrnehmen. Sie dienen als Photorezeptoren des Sehens bei Tageslicht. Die **Stäbchen** (engl. *rods*) sind Sinneszellen, mit denen wir vornehmlich bei Dämmerung und bei Nacht unsere Umgebung wahrnehmen. Im jedem Auge gibt es etwa 110 Millionen Stäbchen und 6 Millionen Zapfen. Abb. 14.45 zeigt den Aufbau der Photorezeptoren.

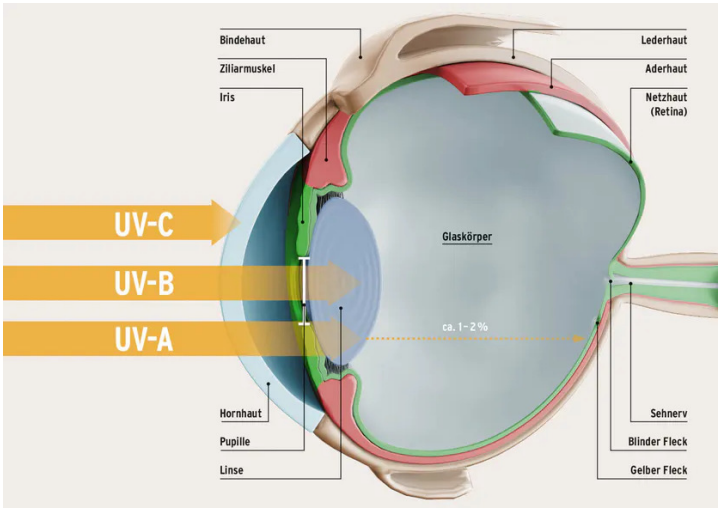


Abb. 14.46: Transmission von UVA-Strahlung durch den Augapfel kann sich nachteilig auf die Netzhaut auswirken. Die Absorption von UVB und UVC Strahlung dagegen kann Auswirkungen nur die Linse und die Hornhaut haben [**?**].

empfindet. Hat dieses unterschiedliche Verhalten bei Tag und bei Nacht Auswirkungen auf unsere Wahrnehmung der Umwelt?

Die Anzahl und die Spektralkurven der Zapfen sind bei allen Lebewesen unterschiedlich. Abb. 14.50 zeigt im Vergleich zum Menschen die Wellenlängenbereiche, in denen ein Europäischer Star Licht wahrnimmt. Abb. 14.51 zeigt weitere Beispiele. Auffallend ist die starke UV[43]-Empfindlichkeit von Insekten. Nutzt man das aus? Der Einsatz von UV-Lichtquellen in Bäckereien im Sommer ist ihnen sicherlich schon mal aufgefallen (Abb. 14.52).

Auf den vorherigen Folien waren die einzelnen Kurven jeweils auf ihr MAXIMUM normiert. Trägt man dagegen die Empfindlichkeiten auf und wichtet sie mit ihrer ANZAHL der Zapfen auf der Retina (Abb. 14.48), stellt man fest, dass insbesondere die S-Zapfen einen vergleichsweise geringen Beitrag zum Farbsehen aufweisen. Man betrachte dazu nochmal Abb. 14.47. Mit einem Anteil von 63% sind die L-Zapfen am häufigsten auf der Retina zu finden. Im Wesentlichen bestimmen die M- und L-Zapfen die Empfindlichkeit der Farbwahrnehmung. Anhand der Empfindlichkeitskurven schätzen Sie bitte ab, bei welcher Wellenlänge die Empfindlichkeit des Auges ein Maximum erreicht. Die Skalierung mit der Anzahl verbirgt, dass die S-Zapfen tatsächlich am empfindlichsten sind (Abb. 14.53). Das würde man aufgrund der Wellenabhängigkeit des Photoeffekts auch erwarten.

[43] UV: ultraviolet

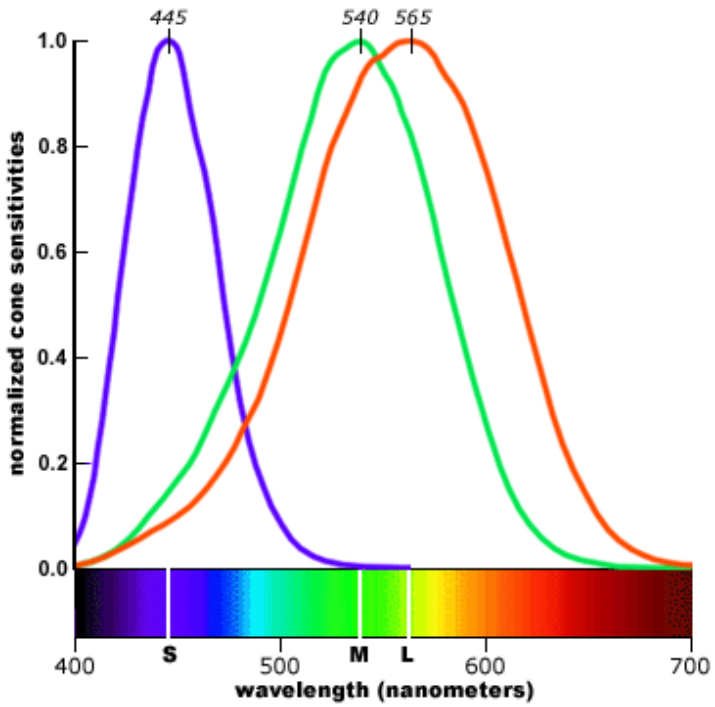


Abb. 14.47: Photosensitivität des Zapfen 1: Normalisierte Empfindlichkeitskurven der Zapfen.

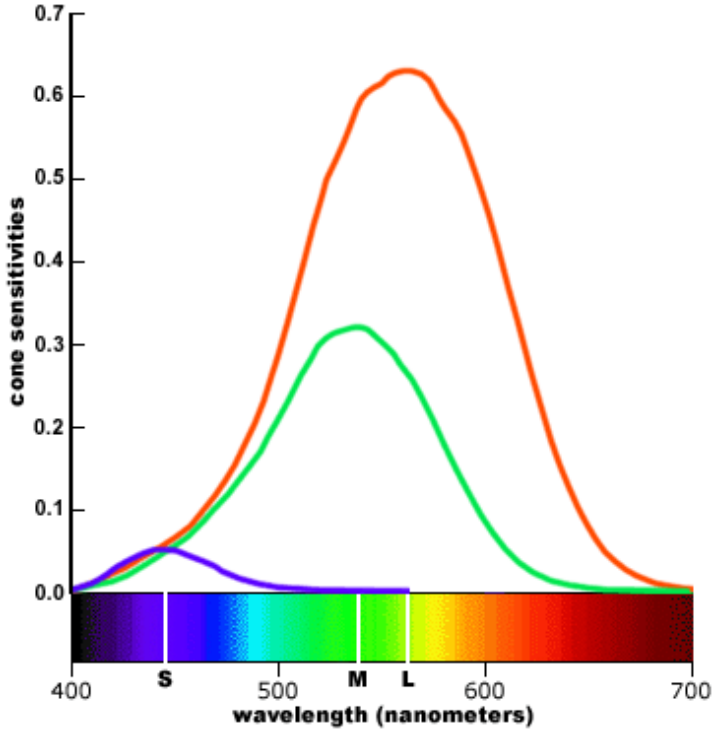


Abb. 14.48: Photosensitivität des Zapfen 2: Nach Anzahl gewichtete Empfindlichkeitskurven der Zapfen.

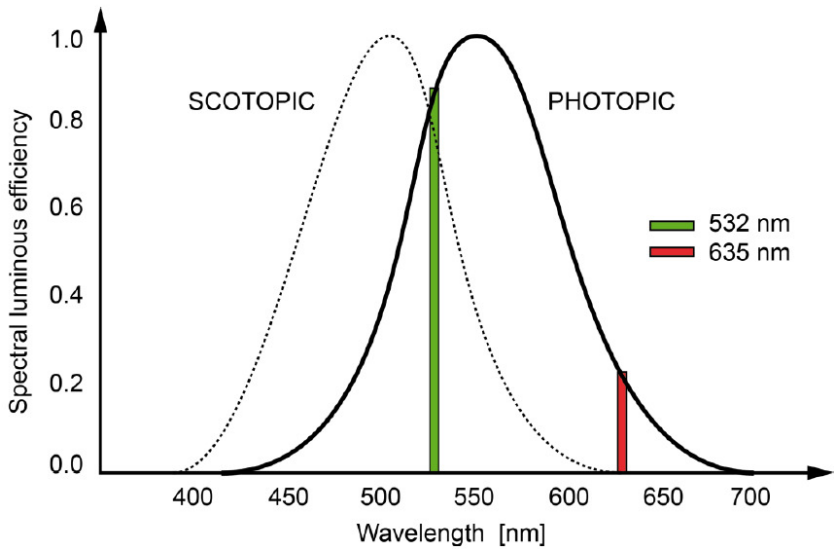


Abb. 14.49: Empfindlichkeitsspektrum des Auges bei dunkel adaptierten (*scotopic*) und guten (*photopic*) Lichtbedingungen. Die grünen und roten Spitzen veranschaulichen Wellenlängen von Laserpointern gleicher Energie [**?**].

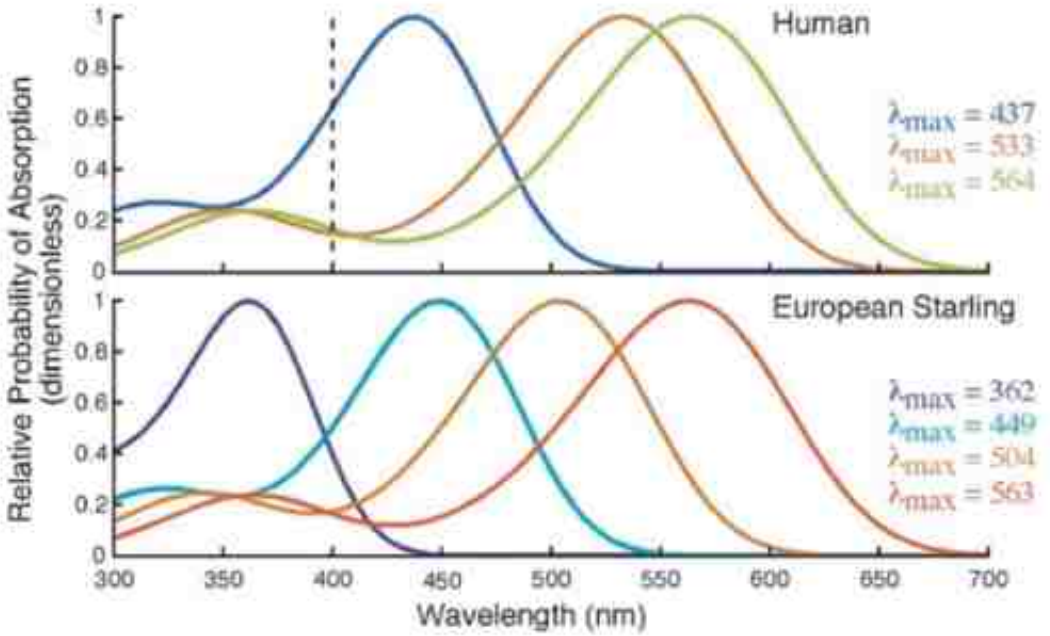


Abb. 14.50: Absorptionsspektren der drei Zapfentypen des menschlichen Auges im Vergleich zu den vier Typen von Photorezeptoren des europäischen Stars [**?**].

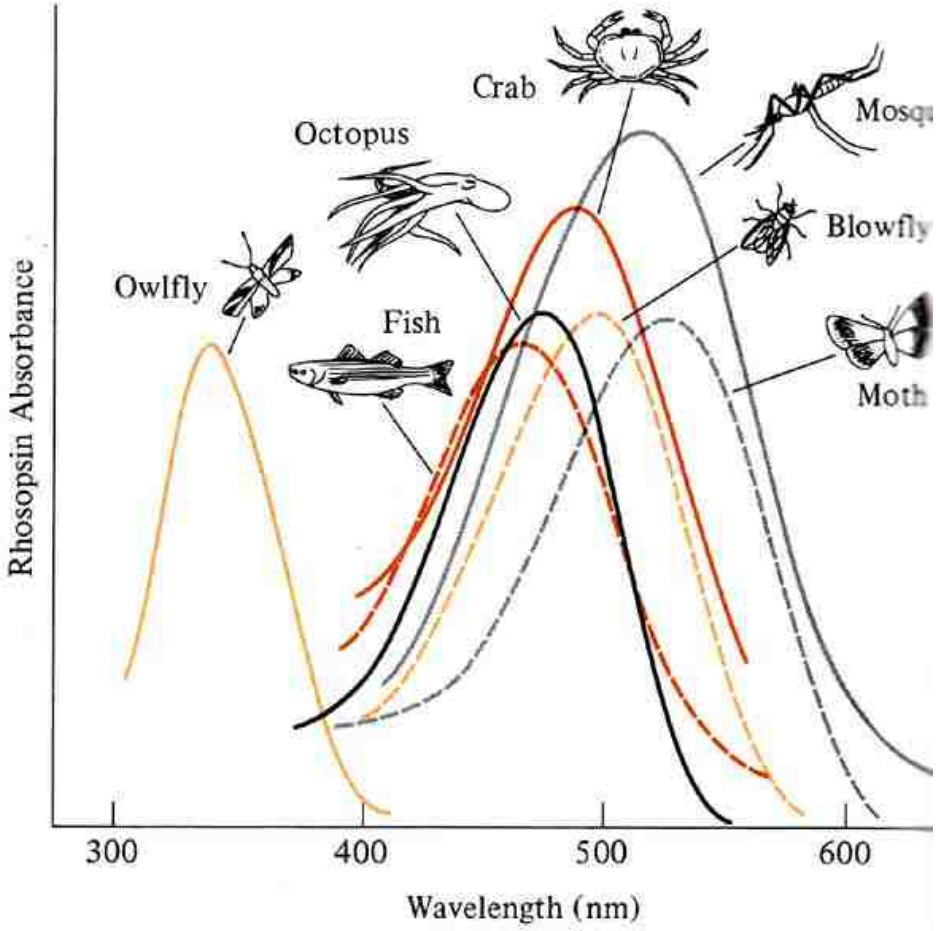


Abb. 14.51: Spektrale Empfindlichkeit der Augen unterschiedlicher Tiere.



Abb. 14.52: Flystopper: Professional insect killer.

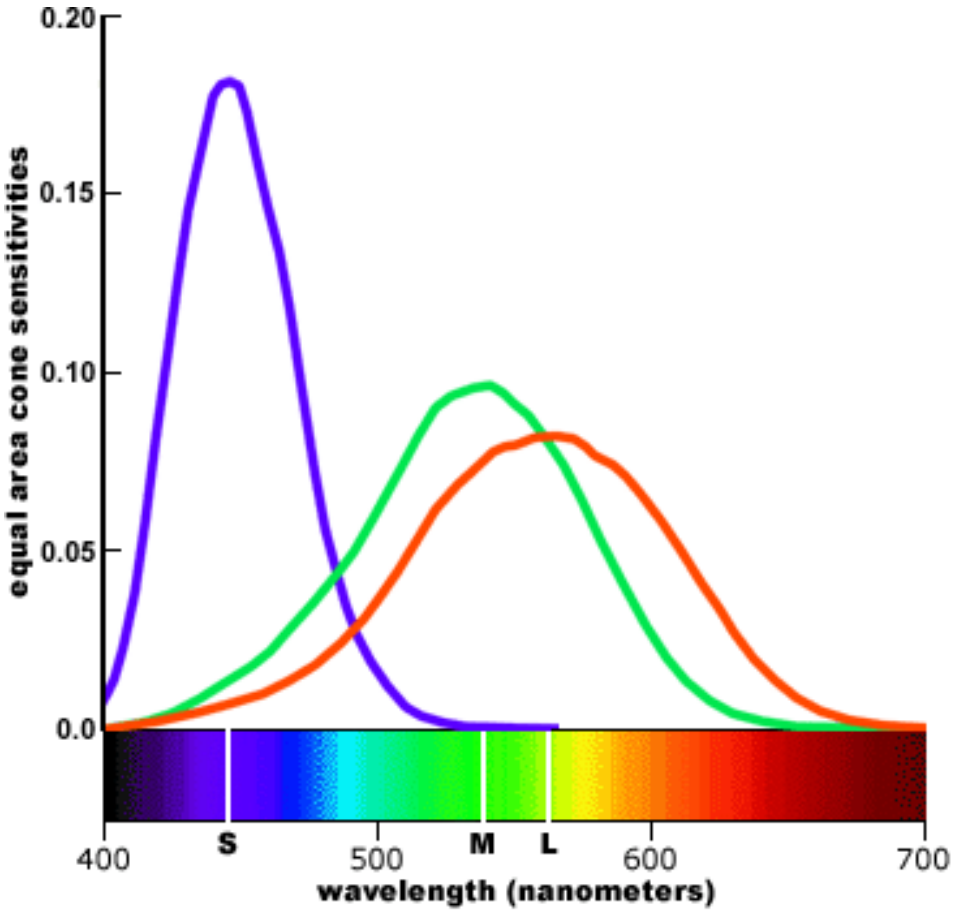


Abb. 14.53: Photosensitivität des Zapfen 3: Zapfenempfindlichkeit gewichtet nach der aktiven Fläche der Repetoren.

Kohlrausch-Knick

Berücksichtigt man diese Erkenntnisse, kann man absolute spektral aufgelöste Empfindlichkeitskurven bestimmen, siehe Abb. 14.55.[44] Hier zeigt sich, dass das Maximum der Farbwahrnehmung bei einer Wellenlänge von 555 nm liegt. Sehen Sie den Zusammenhang zur Sonne als Schwarzem Strahler? Wenn nicht, berechnen Sie aus der Oberflächentemperatur der Sonne (6 800 K) das zugehörige Intensitätsmaximum nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz. Deutlich, um einen Faktor 100 empfindlicher sind die Stäbchen, siehe Abb. 14.54. Man beachte die logarithmische Skala der Ordinate. Hier liegt das Maximum bei 505 nm. Bei Übergang vom Farb- zum Schwarz-Weiss Sehen (Stichwort: Kohlrausch-Knick[45]) sorgt diese Verschiebung dazu, dass das Gehirn die

[44] Die CIE 1931 und CIE 1978 Farbraum sind Definitionen für die quantitative Verbindung zwischen den Wellenlängen des sichtbaren Spektrums und der vom Menschen physiologisch wahrgenommenen Farbe.

[45] *Lexikon:* Beim **Kohlrausch-Knick** handelt es sich um ein Abknicken in der Dunkeladaptationskurve des Auges, hervorgerufen durch den Übergang vom Zapfen- zum Stäbchen-Sehen (Abb. 14.56). Bei plötzlicher Dunkelheit adaptieren die Zapfen schneller als die Stäbchen. Sie erreichen jedoch nicht

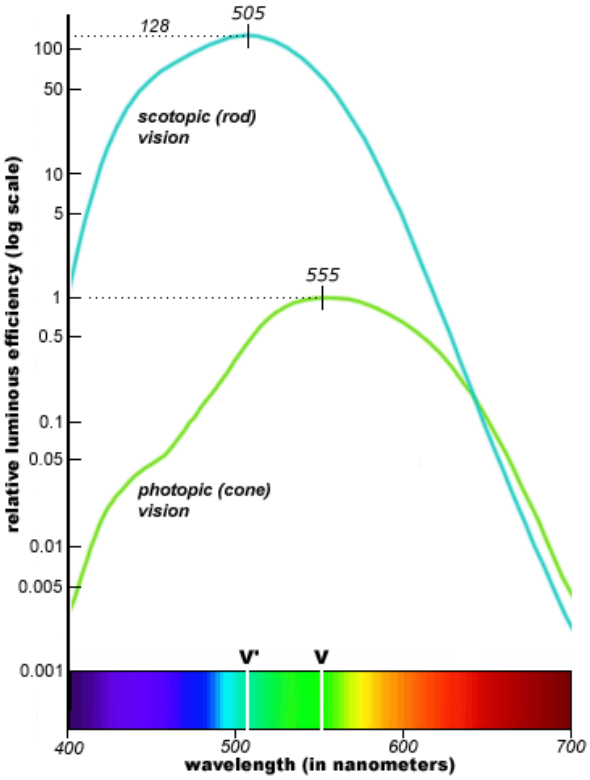


Abb. 14.54: Vergleich der Empfindlichkeiten von Zapfen und Stäbchen über den sichtbaren Spektralbereich.

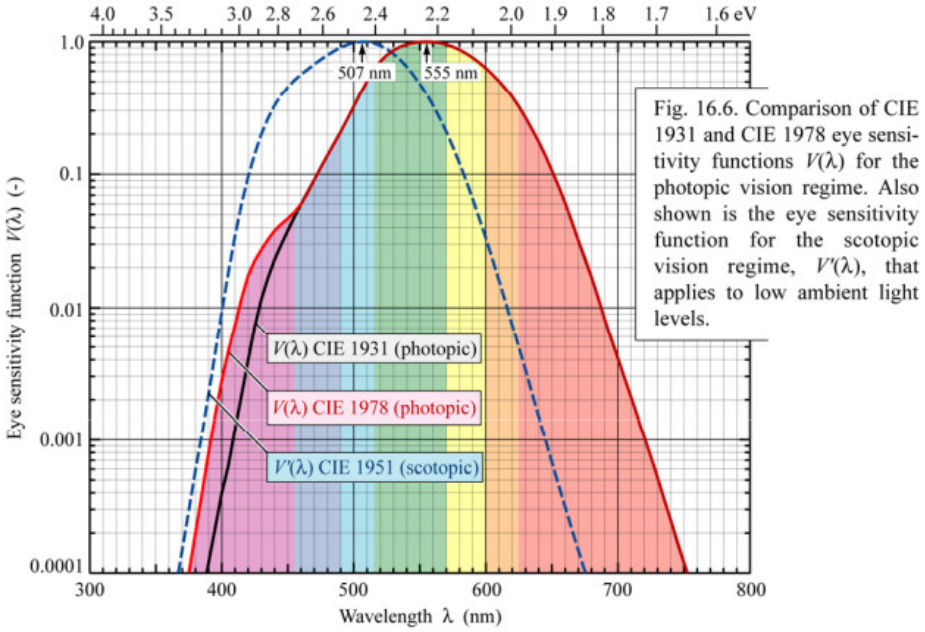


Abb. 14.55: Wie Abb. 14.49, hier allerdings aufgetragen auf einer logarithmischen Empfindlichkeitsskala. Vergleich der Empfindlichkeitskurven $V(\lambda)$ von CIE 1931 und CIE 1978 für das photopische Sehen. Ebenfalls gezeigt ist die Empfindlichkeitskurve für das skotopische Sehen $V'(\lambda)$ (CIE 1951).

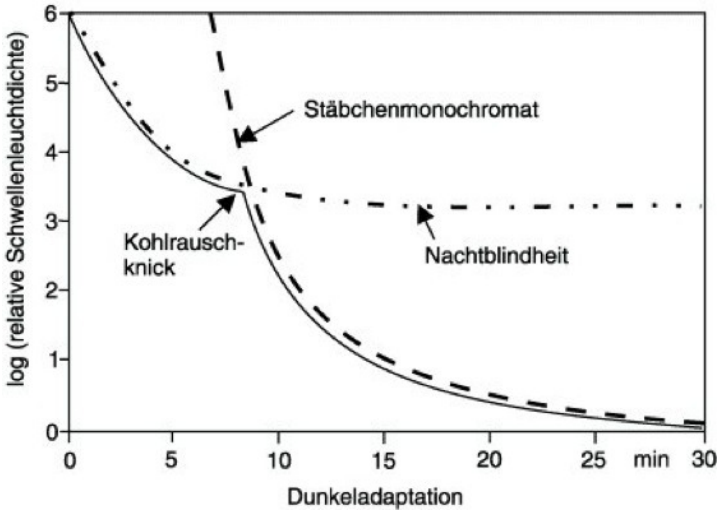


Abb. 14.56: Der Kohlrausch-Knick bezeichnet den Übergang von der Zapfen- zur Stäbchenadaptation des Auges. Im zeitlichen Verlauf der Adaptation zeigt sich bei diesem Übergang ein Knick in der Empfindlichkeitskurve.

Dunkelheit mit einem leichten Blaustich versetzt. Bemerkenswert ist außerdem, dass die Empfindlichkeit des menschlichen Auges nahezu fünf Größenordnungen umfasst. Ähnliches gilt im Übrigen für die akustische Wahrnehmung.

Ein Ausflug in die Physiologie

Damit stellt sich die Frage: Wie wandelt der Mensch physikalische Reize in physiologische Signale um? Solche Überlegungen führen neben dem Weber-Fechner Gesetz auf das Gesetz von Stevens [**? ?**], auf dass wir an dieser Stelle kurz eingehen wollen. Im Modell von Stevens erfolgt die Reizübertragung nach einem Potenzgesetz:

$$\mathcal{R} = k_{\mathcal{R}} I^k \tag{14.19}$$

wobei $k_{\mathcal{R}}$ eine Konstante ist, die im Weiteren keine Rolle mehr spielt. Wichtig ist im hier betrachteten Zusammenhang nur der Exponent, der angibt, wie physikalische Reize über die Sensoren (Sinne, Haut,...) vom Gehirn verarbeitet werden. Es stellt sich heraus, dass alle Reizempfindungen wie Wärme, akustischer Schall und auch die Wahrnehmung von Helligkeit dem Stevenschen Gesetz folgen, wobei der Exponent eine Aussage darüber ist, wie eine Steigerung des physikalischen Reizes die Stärke der physiologisches Signale beeinflusst. Bei der Wahrnehmung der Länge ist der Exponenten gleich 1.0 und es ergibt sich eine lineare Beziehung zwischen der physikalischen Größe des Stimulus und der wahrgenommenen Größe. Abb. 14.57 demonstriert das Gesetz von Stevens an

die gleiche Empfindlichkeit. Man sieht deshalb zunächst mit den Zapfen. Erst wenn die Stäbchen eine höhere Empfindlichkeit als die Zapfen aufweisen, spricht man vom Stäbchensehen. Diese Zeitverzögerung bezeichnet man als Kohlrausch-Knick.

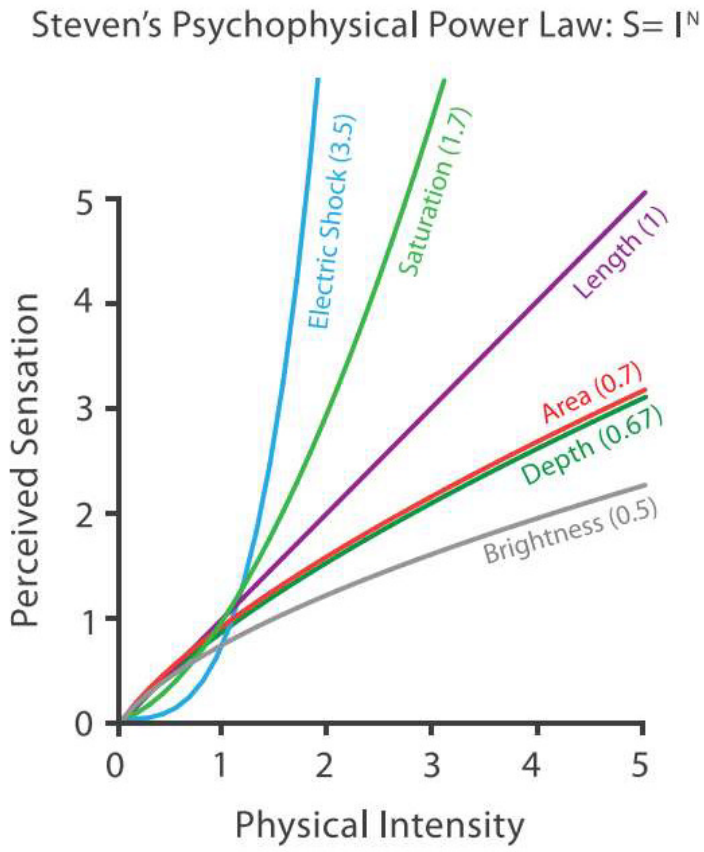


Abb. 14.57: Potenzgesetz von Stevens für unterschiedliche physiologische Reize [**?**].

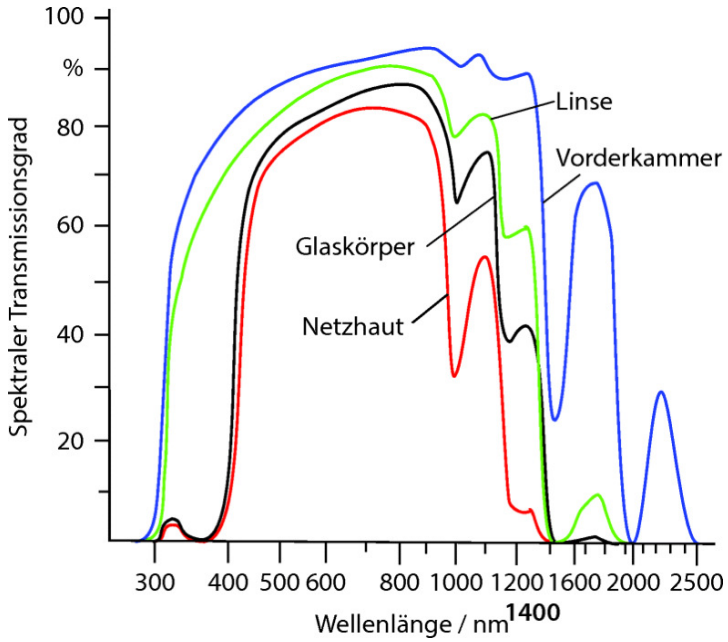


Abb. 14.58: Transmission von optischer Strahlung im menschlichen Auge [**?**].

Beispielen physiologischer Reize. Man erkennt, dass der Mensch bei bestimmten physikalischen Reizen wie einem elektrischem Stromschlag ($k_{\mathcal{R}}$=3.5) empfindlich auf geringste Steigerungen der externen Reizquelle reagiert, während beispielsweise das Helligkeitsempfinden (punktförmige Lichtquelle: $k_{\mathcal{R}}$=0.5) weniger stark reagiert. Die Natur hat hier und bei der akustischen Wahrnehmung (Lautstärke: $k_{\mathcal{R}}$=0.67) eher auf Dynamik (Größenordnungen) optimiert. Man stellt fest, dass die Natur bei der Wahrnehmungsschwelle von Schall (physiologische Schwelle $20 \cdot 10^{-6}$ Pa) als auch beim Sehen tatsächlich die physikalischen Grenzen ausgelotet.

Wahrnehmungsschwelle

Bei der weiteren Betrachtung sollte man berücksichtigen, dass es durch den Aufbau des Auges aus Hornhaut, Linse und Kammerwasser zu Verlusten kommt. Abb. 14.58 zeigt spektral aufgelöst, wie die einzelnen Elemente im Auge die Transmission beeinflussen. Die Abschätzung gibt also eine obere Grenze für die Empfindlichkeit der Wahrnehmung an. Wellenlängen von etwa 510 nm (grünes Licht) werden bei Nacht von den Stäbchen im Auge mit hoher Effizienz nachgewiesen.Die Reizschwelle liegt dabei bei einem Energieeintrag von:

Reizschwelle des Auges bei 510 nm: $E_{th} = 4 \cdot 10^{-17}$ J

Zum Vergleich berechnen wir die Energie eines 510 nm Photons, also im Maximum der Empfindlichkeit des Dunkelsehens (Abb. 14.55):

$$E_{ph} = h \cdot \nu_{ph} = h\frac{c}{\lambda_{ph}} = 3.89 \cdot 10^{-19}\,\text{J} \tag{14.20}$$

Den gefundenen Wert vergleichen wir mit der Empfindlichkeitsangabe des Kerzenexperiments und kommt auf folgenden Anzahl an Photonen N_{ph}:

$$N_{ph} = \frac{E_{th}}{E_{ph}} = \frac{4 \cdot 10^{-17}\,\text{J}}{3.89 \cdot 10^{-19}\,\text{J}} = 100 \tag{14.21}$$

Nach dieser Abschätzung reichen also nur etwa 100 Photonen aus, um einen Reizimpuls im Gehirn zu erzeugen. Die Körnigkeit des Lichts wird also vom Auge wahrgenommen. Wer hätte das gedacht? Nun müssen wir uns genauer um den Aufbau der Retina kümmern, insbesondere um die Verteilung von Stäbchen und Zapfen auf der Netzhaut. Die für das empfindlichere Nachtsehen verantwortlichen Stäbchen (Helligkeit) sind im Gegensatz zu den Zapfen (Farbsehen) über die gesamte Retina nahezu homogen verteilt, siehe Abb. 14.59. Das lässt vermuten, dass jeweils nur ein Photon von einem der Photorezeptoren nachgewiesen wird. Erste Untersuchungen in diese Richtung wurden durchgeführt [**?**]. Wie jüngste Messungen belegen, ist das Auge tatsächlich in der Lage, einzelne Photonen nachzuweisen:

Direct detection of a single photon by humans [?]: Despite investigations for over 70 years, the absolute limits of human vision have remained unclear. Rod cells respond

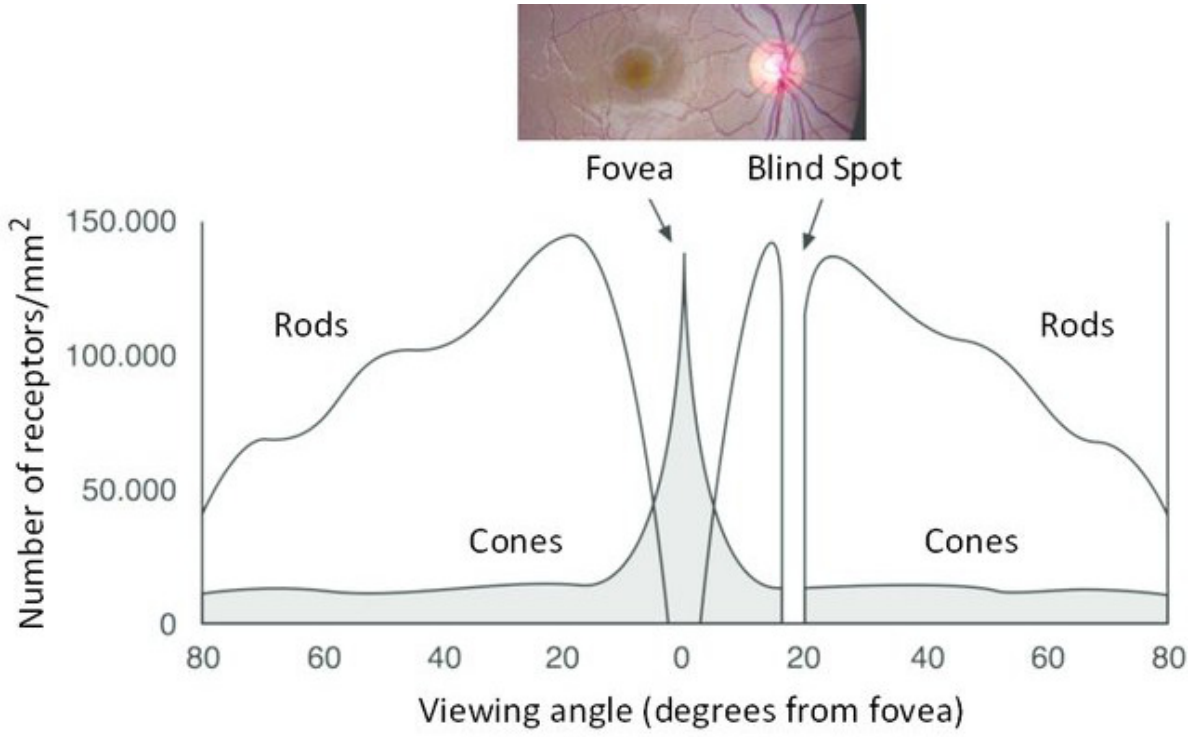


Abb. 14.59: Dichte retinaler Stäbchen und Zapfen. Die Netzhaut ist über dem Dichtediagramm angezeigt [**?**].

to individual photons, yet whether a single-photon incident on the eye can be perceived by a human subject has remained a fundamental open question. Here we report that humans can detect a single-photon incident on the cornea with a probability significantly above chance. This was achieved by implementing a combination of a psychophysics procedure with a quantum light source that can generate single-photon states of light. We further discover that the probability of reporting a single photon is modulated by the presence of an earlier photon, suggesting a priming process that temporarily enhances the effective gain of the visual system on the timescale of seconds.

Das Messprinzip basiert auf der Erzeugung von verschränkten Photonen (siehe das EPR Paradoxon in der Vorlesung Vorlesung *Tunneleffekt*). Im Versuch wurde jeweils eines der Photonen zum Auge der Versuchsperson geleitet, während das andere gleichzeitig auf einen Detektor traf. Bei dem Versuch mussten die Probanden in einem vorgegebenen Zeitintervall entscheiden, ob ein Photon aufblitzte. Mehr als 30 000 Durchgänge wurden ausgewertet und zeigten mit statistischer Signifikanz, dass einzelne Photonen vom menschlichen Auge wahrgenommen werden können. Wer hätte gedacht, dass das Auge ein extrem empfindlicher Quantendetektor ist?

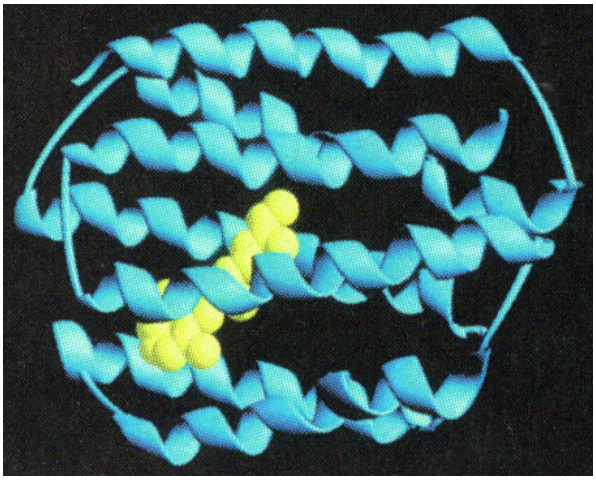


Abb. 14.60: Die Grundlage des Sehens ist die Erkennung einzelner Photonen durch speziell angepasste Moleküle in den Stäbchen und Zapfen des Auges. Im Rhodopsinmolekül (blau) befindet sich ein Molekül namens Retinal (gelb). Ein einzelnes Photon der richtigen Energie bewirkt eine Formänderung des Retinalmoleküls. As Folge passt es nicht mehr in den Rhodopsinkäfig. Das Rhodopsin reagiert, indem es ebenfalls seine Struktur ändert und das Retinal ausstößt. Diese Strukturänderung führt zu einem elektrischen Signal in einer Nervenfaser. Leicht unterschiedliche Versionen dieser Moleküle sind auf unterschiedliche Photonenenergien und damit auf unterschiedliche Lichtfarben abgestimmt [**?**].

Anwendungen

Ein Ausflug in die Tierwelt

Die Natur hat es also verstanden, die Leistungsfähigkeit des menschlichen Sehorgans zu maximieren.[46] Trotzdem gibt es Tiere, die beispielsweise bei Nacht noch besser sehen. Woran liegt das? Wahrscheinlich ist Ihnen schon mal aufgefallen, dass bei Blitzlichtaufnahmen manche Tiere keinen Rote-Pupillen-Effekt[47] zeigen.

Nachtaktive Tiere müssen unter stark licht-reduzierten Bedingungen sehen können. Die Sensitivität der Wahrnehmung muss deshalb so hoch wie möglich sein. Eine Möglichkeit die Effizienzerhöhung ist die Vergrößerung der Sensorfläche. In der Photographie nennt

[46] *Lexikon:* **Rhodopsin** ist ein Chromoprotein auf der Netzhaut des Auges, das Lichtsignale in elektrische Impulse umsetzt, siehe Abb. 14.60. Das Molekül kommt in vielen Organismen (Bakterien, Wirbeltiere) vor. Bei Tieren und dem Menschen wird es bei schwachem Lichtverhältnissen benötigt. Sie bilden das äußere Segment der lichtempfindlichen Stäbchen.

[47] *Lexikon:* Bei einer Blitzlichtaufnahme sind die Pupillen aufgrund der in der Regel schlechten Lichtverhältnisse geweitet (maximal 8 mm). Wenn das Gesicht eines Menschen mit einem Blitzlicht von vorn fotografiert wird, dann gelangt ein Teil des Lichts durch die Pupille in das Auge. An der von den roten Blutäderchen durchsetzten Netzhaut wird das Licht reflektiert und führen zum **Rote-Augen Effekt**.



Abb. 14.61: Pupille einer Eule.

man diesen Parameter die $f^\sharp$-Zahl:

$$f^\sharp = \frac{f_{lens}}{d_{pupil}} \tag{14.22}$$

wobei f_{lens} die Fokuslänge und d_{pupil} die Öffnung der Linse ist. Bei gleicher Fokuslänge bedeutet das, dass eine größere Pupille für höhere Lichtausbeute, eine geringere $f^\sharp$-Zahl bedeutet. Das menschliche Auge hat eine $f^\sharp$-Zahl von 2.1, während nachtaktive Tiere einen Wert von 0.95 erreichen. Deshalb haben insbesondere Eulen besonders große Pupillen (Abb. 14.61). Eine weitere Möglichkeit der Effizienzerhöhung ist die Reflexion des Lichts an einer Schicht hinter der Retina, siehe Abb. 14.62. Auf dem Rückweg kann das Licht ein zweites Mal mit dem Photorezeptor wechselwirken. Der bei Wildtieren vorhandenen Reflektor sorgt für die weiß leuchtenden Augen, wenn die Tiere von Scheinwerfern angestrahlt werden.

Wildtiere nutzen außerdem den Effekt der Fluoreszenz[48] (Vorlesung *Moleküle*), um die Nachweiseffizienz zu steigern. Abb. 14.63 veranschaulicht das zugehörige Energieschema. Dabei wird ein höher energetisches Photon (ultravioletter Spektralbereich) von einem Farbstoff, genannt Riboflavin (Abb. 14.64), absorbiert. Im Ultravioletten haben die Photorezeptoren nur eine geringe Empfindlichkeit. Das angeregte Molekül sendet nach kurzer Verzögerung (ns) ein niederenergetischeres Photon aus, das im Maximum der Empfindlichkeitskurve der Rezeptoren liegt. Diese Erweiterung des effektiven Wellenlängenbereichs steigert das Nachtsehen.

[48] *Lexikon:* **Fluoreszenz** ist die spontane Emission von Licht,beim Wechsel eines elektronisch angeregten Moleküls zurück in einen niederenergetischeren Zustand. Dieser Vorgang wird in der Regel dadurch eingeleitet, dass ein höherenergetisches Photon ein Molekül anregt. Durch Relaxationsprozesse wird Energie in Schwingungs- und Rotationsfreiheitsgraden des Moleküls gespeichert. Dieser Energieverlust äußert sich bei der Emission dadurch, dass das Photon eine geringere Photonenenergie (längere Wellenlänge) hat. Während die Emission durch Fluoreszenz auf einer Zeitskala von ns stattfindet, kann sie bei der **Phosphoreszenz** auch manchmal erst Stunden später erfolgen. Die Ursache ist, dass ein Wechsel des angeregten Systems in einen niederenergetischeren Zustand aufgrund von **Auswahlregeln** nahezu unmöglich ist (Kapitel *Beyond Bohr*). Phosphoreszierende Materialien (Kristalle, die Fremdatome enthalten) werden für Leuchtzeiger bei Uhren, oder Lichtschaltern verwendet.



Abb. 14.62: Reh im Dunkeln mit Blitzlicht photographiert. In den Augen von nachtaktiven Tieren (Katzen und andere fleischfressende Säugetiere, Nagetiere, Nachtschwalben, Schlangen, Kröten, Tiefseefische) befindet sich hinter der Netzhaut eine reflektierende Schicht. Licht, das die Netzhaut passiert hat, wird reflektiert und beleuchtet nochmals die Netzhaut. Reflektiertes Licht gelangt nach außen und erzeugt die leuchtenden Augen, wenn man die Tiere nachts mit einer Lichtquelle anstrahlt.

Vision using multiple distinct rodopsins in deep-sea fishes [?]: Vertebrates are typically thought to have a consistent system for processing light, in which multiple cone opsins permit color vision during the day, but a single rod opsin provides only monochrome vision in the dark. Musilova et al. analyzed more than 100 deep-sea fish genomes and found a previously unknown proliferation of rod opsin genes that generate rod opsin photopigments that are tuned to different wavelengths of light. These receptors may allow the fish to perceive bioluminescent signals that pervade their deep-sea environment. These results reveal a previously undescribed visual system that allows for color vision in the dark.

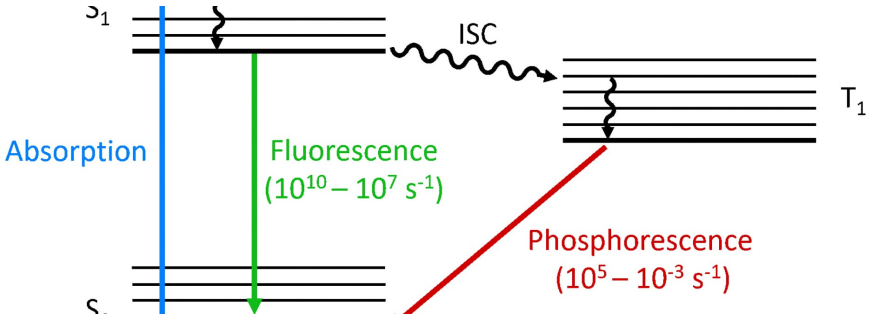


Abb. 14.63: Bei der Absorption von Photonen durch ein Molekül treten Phänomene der Fluoreszenz und Phosphoreszenz auf, wobei Licht geringerer Wellenlänge emittiert wird. Die zugehörigen Lebensdauern der angeregten Zustände sind dabei deutlich unterschiedlich.

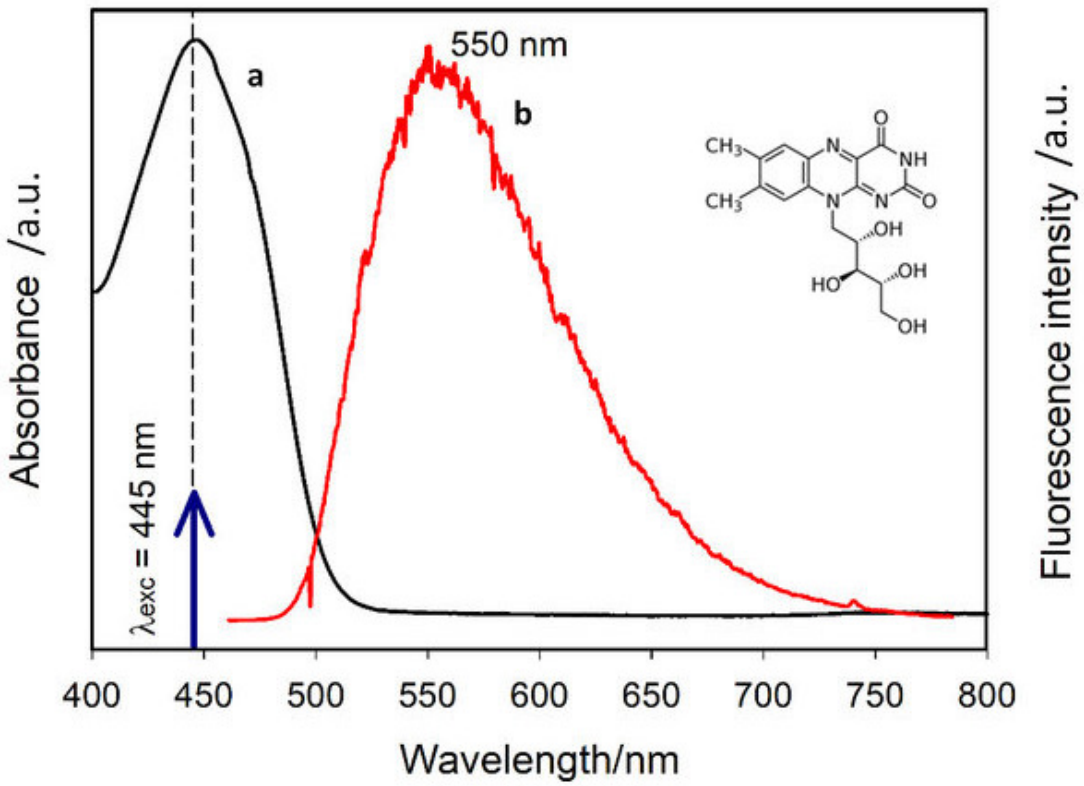


Abb. 14.64: (a) Absorptionsspektrum von Riboflavin, gelöst in Wasser. (b) Regt man das Molekül mit Licht kurzer Wellenlänge (vertikaler Pfeil bei 445 nm) an, fängt es an zu leuchten. Das Fluoreszenzspektrum ist im Vergleich zur Anregungswellenlänge zu längeren Wellenlängen verschoben. Angegeben ist weiter die chemische Formel des Moleküls [**?**].

Abschließend zeigt Abb. 14.65 einen Überblick über die physikalisch-physiologischen Vorgänge und gibt ein Beispiel für unsere Wahrnehmung von Farben.

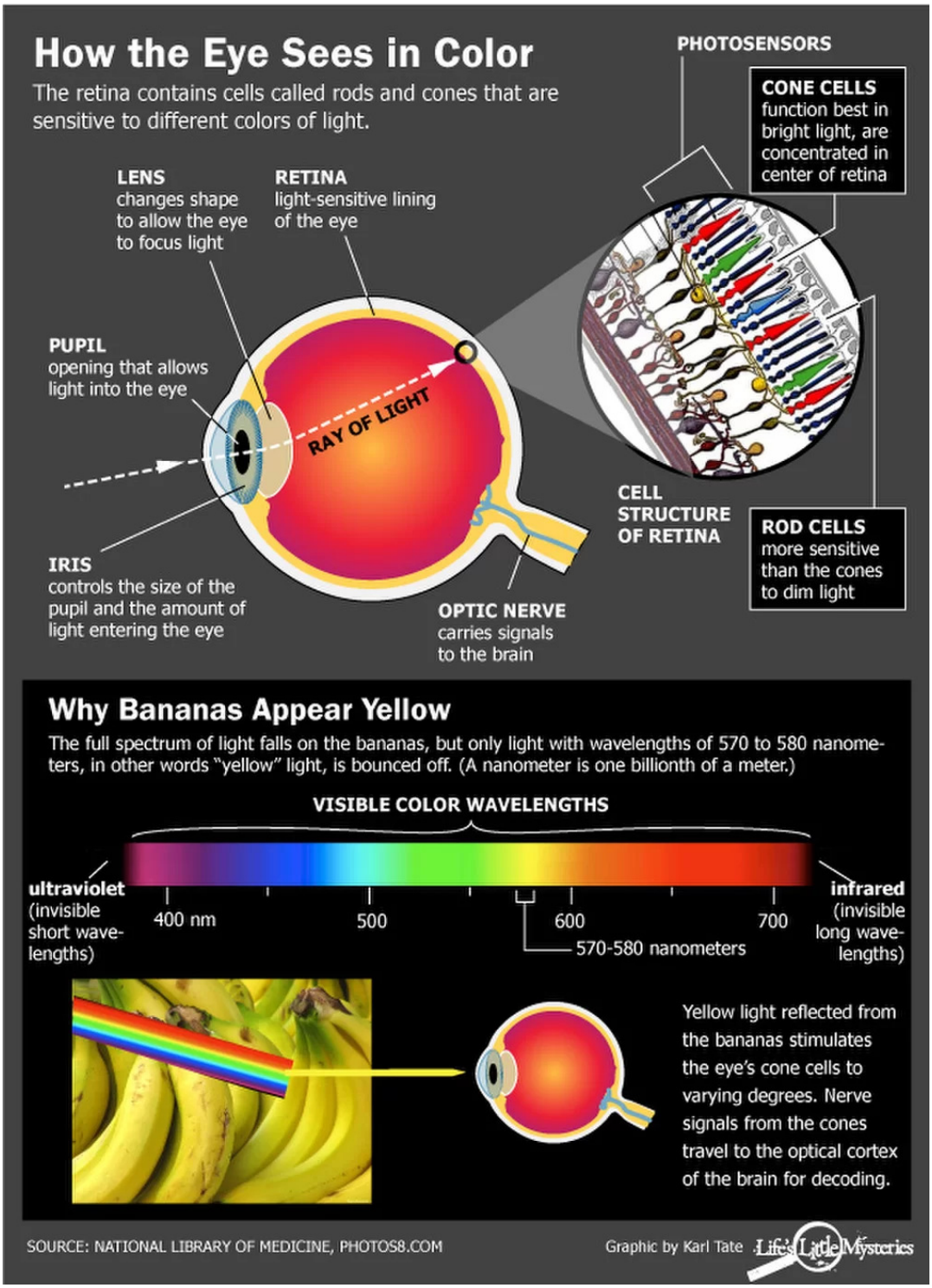


Abb. 14.65: Wie das Auge Farben sieht.

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Berechnen Sie den Ausdruck $h \cdot c$ unter Verwendung der Einheit eV.

$$\begin{aligned} h \cdot c &= (6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}) \cdot \frac{1\,\mathrm{eV}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \\ h \cdot c &= 1.24 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV \cdot m} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2: Was ist eine typische Wellenlänge für optische Strahlung? Eine Lichtquelle liefert eine Intensität von $I_0 = 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}$. Wie viele Photonen erreichen die Netzhaut?

Das Auge hat beim Farbsehen seine größte Empfindlichkeit bei einer Wellenlänge von etwa 550 nm. Die zugehörige Photonenenergie ist:

$$\begin{aligned} E_{ph} &= h \cdot \nu \\ E_{ph} &= \frac{h \cdot c}{\lambda} \\ E_{ph} &= \frac{1.24 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV \cdot m}}{550 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}} \\ E_{ph} &= 2.3\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

Die Fläche der Pupille ist, bei einem typischen Durchmesser von 6 mm, Das sind etwa A_0=$3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2}$. Die Anzahl der Photonen N_{ph} ist damit

$$\begin{aligned} N_{ph} &= \frac{I_0 \cdot A_0}{E_{ph}} \\ N_{ph} &= \frac{(3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}) \cdot (3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2})}{2.3 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J})} \\ N_{ph} &= 2.5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s^{-1}} \end{aligned}$$

Selbst für solch eine schwache Lichtquelle ist die Anzahl der emittierten Photonen immer noch erheblich und die Körnigkeit des Lichts nicht auflösbar.

Aufgabe 4.3: Die Intensität der Sonnenstrahlung in der oberen Atmosphäre beträgt etwa $1390\,\mathrm{W/cm^2}$. Wie viel Sonnenenergie absorbiert die Erde pro Sekunde?

Der Erdradius beträgt 6400 km. Das ergibt eine der Sonne zugerichtet Oberfläche von

$$A_{\earth} = \pi \cdot R_{\earth}^2 = \pi \cdot (6.8 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m})^2 = 1.3 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^2}$$

Das resultiert in einem Energieeintrag von

$$E_{\earth} = (1.39 \cdot 10^{3}\,\mathrm{W/m^2 \cdot s^{-1}}) \cdot (1.3 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^2}) = 1.8 \cdot 10^{17}\,\mathrm{J}$$

Von diesen 180 000 TW erreicht etwa die Hälfte die Erdoberfläche. Zum Vergleich war unser Verbrauch im Jahr 2005 etwa 16 TW. Solarenergie ist also ein interessanter Energielieferant.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter dem Quadratischen Abstandsgesetz?
2. Wie hoch ist die Solarkonstante von Jupiter?
3. Welche Funktion hat die Pupille?
4. Wie nimmt das Auge Farben wahr?
5. Liegt es an der Menge oder der Empfindlichkeit, dass die Gesamtheit der blauen Zapfen deutlich weniger Licht, im Vergleich zu den grünen und roten Zapfen nachweisen?
6. Wie reagiert das Auge auf Dunkelheit?
7. Was versteht man unter dem Kohlrausch-Knick?
8. Was besagt das Gesetz von Stevens?
9. Wie sind Stäbchen und Zapfen auf der Netzhaut verteilt?
10. Kennen Sie Tiere, die nur Schwarz-Weiß sehen können?
11. Eine Zigarette wird in einer Entfernung von 500 m angezündet. Schätzen Sie die Rate ab, mit der Photonen auf die Retina treffen!
12. Der Photoelektrische Effekt greift bei kurzen Wellenlängen. Warum können wir trotzdem ultraviolettes Licht nicht wahrnehmen?
13. Was versteht man unter dem Rote-Pupillen Effekt?
14. Wie erhöhen Tiere ihre Sehfähigkeit?
15. Wenn man mit einer Taschenlampe in den Himmel leuchtet, würde es jemand in einer anderen Galaxie bemerken?

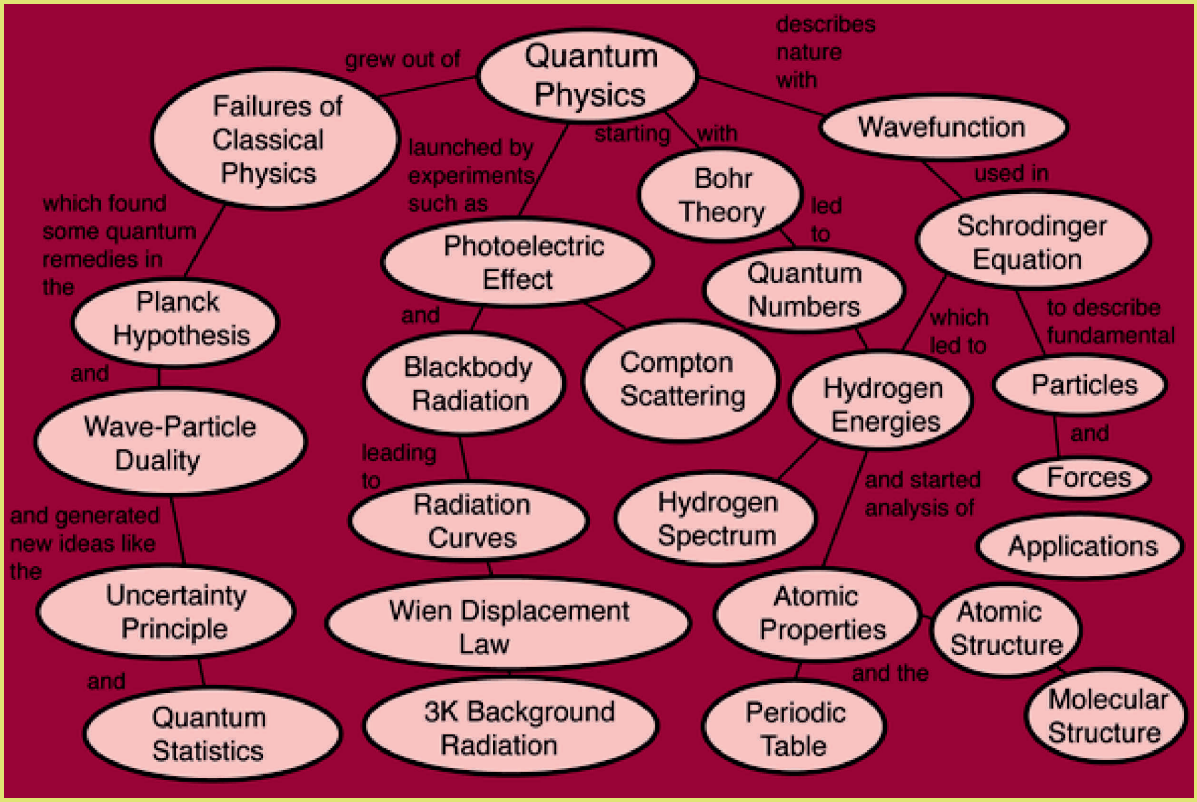


Abb. 14.66: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

- Experiment von Hallwachs
- Quantenphysikalische Phänomene bei der Photoemission
- Ionisationspotenzial und Austrittsarbeit
- Einsteinsche Gleichung zum Photoelektrischen Effekt (Gl. 14.13)

$$E_{kin} = h\nu_{ph} - W_A$$

- Gegenfeldmethode und Grenzfrequenz
- Bedeutung des Photoeffekts im Röntgen- und γ-Bereich
- Quadratisches Abstandsgesetz (Gl. 14.17)

$$I(R) \approx 1/R^2$$

15 Der Weg zum Atom



Und haben's schon mal ein Atom g'sehn, Herr Kollege?

Ernst Mach fragt Ludwig Boltzmann [**?**]

[1]Was sind Atome? Diese Frage beschäftigt die Forschung seid langem und oft lagen die Forscher falsch - so auch William Thomson auch bekannt unter dem Namen Lord Kelvin mit seinem Vortex-Atommodell: Ein Tornado scheint trotz seiner hohen Dynamik ein Objekt mit einer außergewöhnlichen Dauerhaftigkeit zu sein. Man denke an den großen roten Fleck auf Jupiter. Dieser Riesentornado hat, siehe Abb. 15.1, seid wir ihn mit Teleskopen beobachten, Größe und Form beibehalten. Die Vorstellung von äußerst stabilen Wirbeln in Flüssigkeiten veranlasste Lord Kelvin zu der Frage: Könnten nicht Atome auch Wirbel in einem Äther sein, der den Raum durchdringt? Sie erinnern sich

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

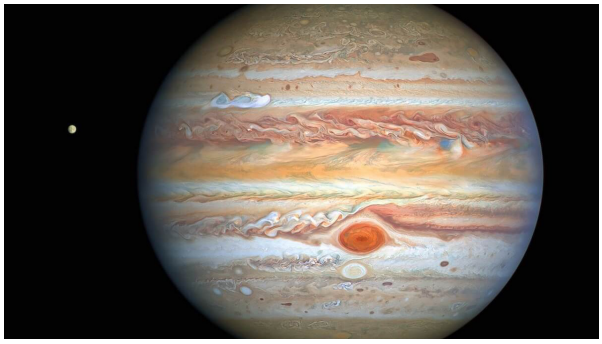


Abb. 15.1: Photo des Planeten Jupter. Der Große Rote Fleck des Jupiters ist ein Sturmgebiet mit einem Durchmesser von rund 16 000 Kilometern. Seid mehr als 200 Jahren tobt dieser Sturm genau an dieser Stelle und ein Ende ist nicht abzusehen.

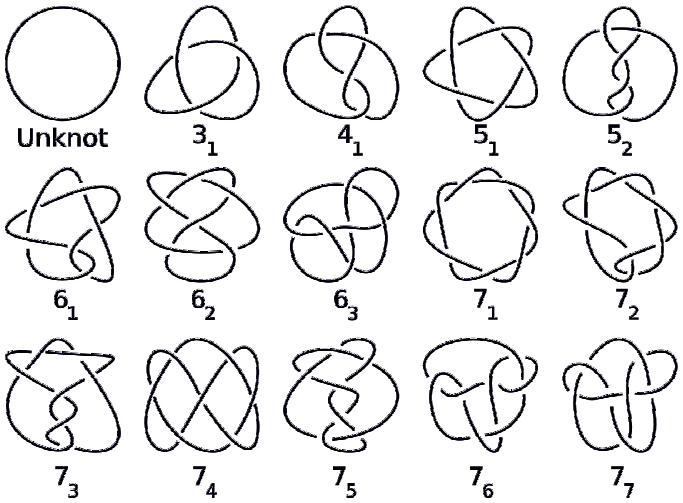


Abb. 15.2: Die Vortex-Theorie des Atoms von William Thomson (Lord Kelvin) war der Versuch zu erklären, warum es in der Natur nur eine geringe Anzahl unterschiedlicher Elemente gab. Das Modell basiert auf der Idee von stabilen, verknoteten Wirbeln [**?**].

sicherlich an die Ausführungen zum *Äther* in der Speziellen Relativitätstheorie. Kelvins Hypothese [**?**] wurde durch Arbeiten von Helmholtz beeinflusst [**?**], der erkannte, dass man Wirbel als Endlosschleifen ansehen kann. Daraus wurde die Idee entwickelt, dass man jedem chemischen Element eine ganz bestimme Art von Knoten zuordnen könne (Abb. 15.2). Knoten könnten zu einer Vielzahl von quasi-stabilen *Molekülen* aggregieren. Wasserstoff entsprach dem Kreisknoten und Kohlenstoff, in Unkenntnis der anderen Elementen, der Knoten 3_1. Wie sich herausstellte, war das Modell nicht haltbar. Das Vortex-Atommodell hatte dennoch Auswirkungen. Sie war die Initialzündung für die Knotentheorie als Forschungsgebiet der Topologie. Frühe Arbeiten zur Selbstorganisation von Materie stammen von Alferd Mayer, der im Jahr 1878 untersuchte, wie sich schwimmende Magnete ordnen [**? ? ?**], siehe Abb. 15.3. J. J. Thomson verwendete zwischen 1897 und 1907 Mayers Ergebnisse zur Klärung der Konfigurationregeln der Elektronen in seinem Atommodell.

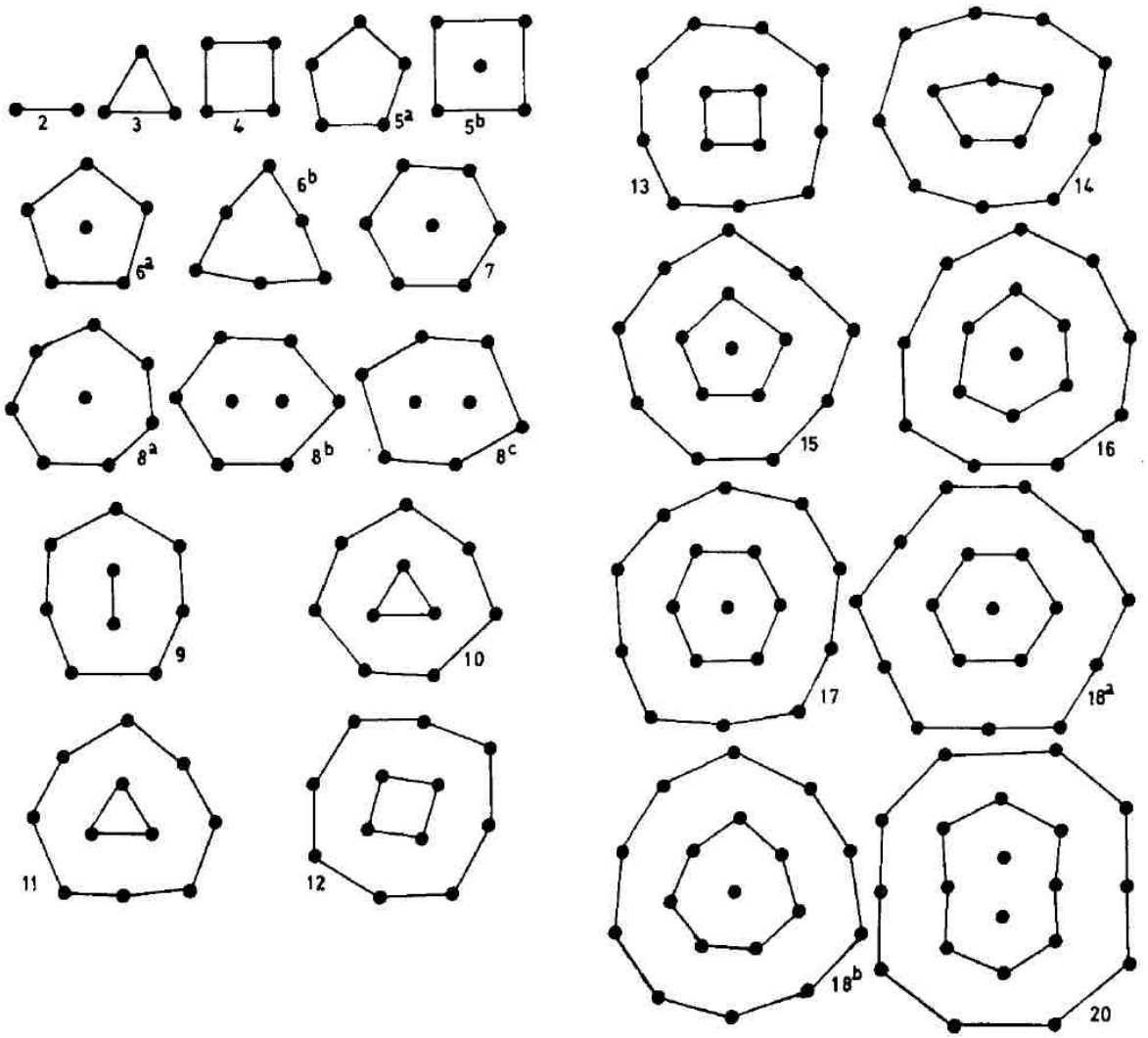


Abb. 15.3: August Mayers Konfigurationen schwimmender Magnete [**?**].

Housten, we have a problem! Diese Meldung machte die Brennstoffzelle[2] von einem Moment zu anderen berühmt. Am 11. April 1970 explodierte auf dem Weg zum Mond ein Sauerstofftank an Bord von Apollo 13 und unterbrach damit die Stromproduktion an Bord. Man erfuhr, dass eine Brennstoffzelle aus Sauerstoff und Wasserstoff elektrischen Strom erzeugt. Nützlicher Nebeneffekt, das Endprodukt ist Trinkwasser für die Astronauten.

[2] *Lexikon:* Eine **Brennstoffzelle** nutzt die chemische Energie von Wasserstoff oder einem anderen Brennstoff, um sauber und effizient Strom zu erzeugen. Wenn Wasserstoff der Grundstoff ist, sind Strom, Wasser und Wärme die einzigen Produkte. Brennstoffzellen können in einer Vielzahl von Anwendungen eingesetzt werden, beispielsweise als Notstromaggregat. Der Einsatz von Brennstoffzellen hat Vorteile gegenüber herkömmlichen verbrennungsbasierten Technologien. Bei der Umwandlung in elektrische Energie zeichnen sie sich durch einen hohen Wirkungsgrad aus. Abb. 15.11

Aristoteles war es, der die Ideen von Demokrit zu unteilbarer Atome verwarf und es damit fast 2000 Jahre verhinderte, dass in dieser Weise über die Natur der Materie nachgedacht wurde. Johannes Kepler dachte nach Beobachtung der Struktur von Eisflocken erstmals wieder in diese Richtung. Der Astronom vermutete dahinter einen Aufbau aus kleinsten Teilchen, idealerweise Kugeln.

Da stets, wenn es zu schneien beginnt, die ersten Schneeflocken die Figur von sechsstrahligen muss es eine bestimmte Ursache dafür geben. Denn es wäre Zufall, warum fallen sie nicht fünfstrahlig oder siebenstrahlig, warum immer sechsstrahlig?

Johanns Kepler (1611)

Erste experimentelle Hinweise auf die atomare und molekulare Struktur der Materie stammen aus der Chemie und sind zusammengefasst in den stöchiometrischen Gesetzen.[3] Die Untersuchungen ergaben, dass alle Stoffe zusammengesetzt sind aus wenigen Basissubstanzen. Diese stellten sich im Nachhinein als die 92Elemente im Periodensystem heraus.Die kleinste Stoffmenge, die die chemischen Eigenschaften eines Elements zeigt, nennt man Atom. Moleküle sind komplexere Substanzen, zusammengesetzt aus Elementen und gebunden durch attraktive Kräfte. Die Gesetze von Gay-Lussac, Dalton und Avogadro geben weitere Informationen über die Elemente und die Chemie der Stoffe.

Das Atom als kleinste chemische Einheit kann noch weiter separiert werden. Der Versuch zur Reibungselektrizität (Carl Wilcke, 1757) zeigt, dass man Elektronen auf einen anderen Stoff übertragen kann. Die elektrische Ladung verursacht Kräfte und spielt deshalb für die Elemente eine wichtige Rolle. Da die Atome normalerweise keine elektrischen Effekte zeigen, muss ein Atom genau so viele positive wie negative Ladungen aufweisen. Die Faradayschen Gesetze zeigen, dass Ladungen in elementaren Einheiten existiert. Warum? Die elektrolytisch[4] abgeschiedenen Stoffmengen stehen in einem festen Verhältnis zur transportierten Ladung. Das deutet stark darauf hin, dass alle bei der Elektrolyse beteiligten Atome eine definierte Ladungsmenge transportieren.

Link to `Triboelectricity`

Scientists often set the stage for their most productive advances by first developing simple models, even when sophisticated first-principles tools are available. These models usually originate from the necessity to explain experimental observations. If the models

[3] *Lexikon:* Die **Stöchiometrischen Gesetze** beruhen auf der Erfahrungen, dass in jeder Reaktion die chemischen Elemente erhalten bleiben und die Gesamtmasse der Substanzen konstant bleibt.

[4] *Lexikon:* Ein **Elektrolyt** ist ein Flüssigkeit, die einen elektrischen Strom leitet. Die **Elektroden** bezeichnen die Metallplatten, die in den Elektrolyten getaucht werden und den elektrischen Kontakt der Elektrolytflüssigkeit zur Spannungsquelle herstellen. Die **Elektrolyse** ist die Dissoziation der Moleküle in der Flüssigkeit, wenn ein elektrische Strom fließt. Als **Anode** und **Elektrodynamik!Kathode** bezeichnet an die positive und negativ geladenen Elektroden. Die **Ionen** sind die geladenen Atome und Moleküle. Sie sind die Träger des elektrischen Stroms zwischen Anode und Kathode. Ionen, die sich in Richtung Anode bewegen nennt man **Anionen**; Ionen, die sich in Richtung Kathode bewegen **Kationen**.

are robust, then a variety of data fall into place, and successful predictions are made. If a model is correct, it is eventually found to be consistent with or derivable from fundamental theory. The Bohr model for atoms is a prime example. Ernest Rutherfords experiments showed that J. J. Thomson's plum pudding model of an atom, consisting of a positive spherical pudding embedded with negative electron plums, had to be replaced by Rutherford's nuclear picture, and subsequent optical data led to the Bohr model. Eventually quantum theory confirmed that the Bohr model is an excellent rudimentary representation for an atom. Although it has been superseded by more elaborate quantum theoretical approaches, this model is still taught to students of atomic physics because of the physical insight one gains by using the Bohr picture of an atom [**?**].

Die Summe der Dinge ist unbegrenzt, und sie alle können sich ineinander verwandeln. Das alles beinhaltet sowohl das Leere als auch das Ganze. Die Welten entstehen, wenn Atome in die Leere fallen und miteinander interagieren; und aus ihrer Bewegung, wenn sie an Masse zunehmen, entsteht die Substanz der Sterne.

Leukipp, 5. Jahrhundert v. Chr.

Überlegungen in Richtung heutiger Atommodelle gehen auf Leukipp und Demokrit (500 v. Chr.) zurück. Nach den Vorstellungen der beiden Philosophen besteht die Welt aus Materie und leerem Raum, wobei sich Materie nicht beliebig aufteilen lässt. Die kleinste Entität ist ein Objekt namens Atom. Im Jahr 1825 stellte der Arzt William Prout die nach ihm benannte Proutsche Hypothese auf, dass alle chemischen Elemente aus dem leichtesten Stoff, nämlich Wasserstoff aufgebaut sind. Er nannte dieses fundamentale Teilchen Protyle.[5]

Eines der ersten realistischen Atommodelle wurde vom Chemiker John Dalton im Jahr 1808 vorgeschlagen, siehe Abb. 15.4:

- Materie ist zusammengesetzt aus unteilbaren kleinsten Bausteinen.
- Alle Atome eines Elements sind identisch.
- Unterschiedliche Elemente haben eine andere Größe und Masse.
- Stoffe sind zusammengesetzt aus Elementen in definierten Verhältnissen.
- Chemische Reaktionen führen zu einer Neuzusammensetzung der reagierenden Atome.

Daltons Vorstellungen wurden durch das Periodensystem der Elemente (Mendelejew 1869) bestätigt. In der nächsten Vorlesung wird das Bohrsche Atommodell als Erweiterung vorgestellt. Die Bohrsche Theorie (1913) ist in der Lage, die grundlegenden Eigenschafen des Wasserstoffatoms zu erklären. Die Grundlage für die Modelle von Dalton und

[5] Prouts Hypothese hatte Einfluss auf Ernest Rutherford, dem es im Jahr 1917 gelang, Wasserstoffkerne aus Stickstoffatomen mit α-Teilchen herauszuschlagen. Man vermutete deshalb, dass die Kerne aller Elemente aus Wasserstoffkernen bestehen. In Anlehnung an die Proutsche Hypothese und das Wort Protyle[6] schlug Rutherford vor, diese elementaren Teilchen als Protonen zu bezeichnen.

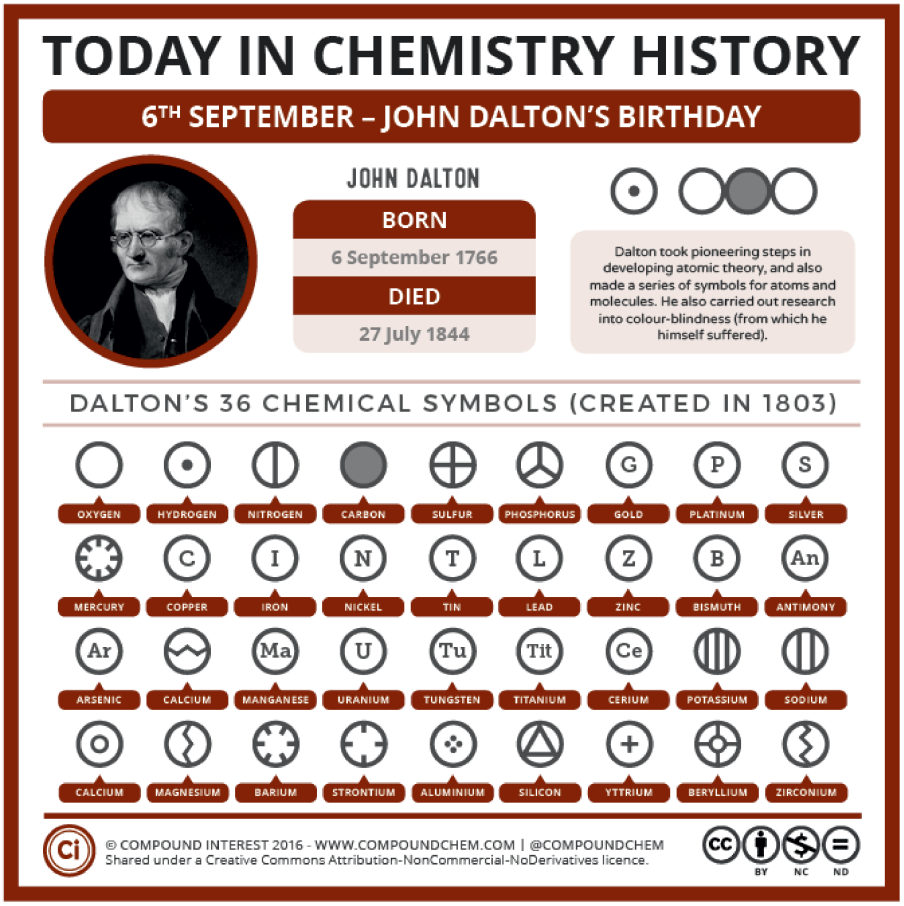


Abb. 15.4: Auswahl von Elementsymbolen nach Dalton. Dalton war der Erste, der Symbole verwendete, um Elemente in verkürzter Weise darzustellen. Daltons Symbol für ein Element repräsentierte sowohl das *Element* selbst als auch *EIN Atom dieses Elements*.

Bohr sind Schlüsselexperimente, die Hinweise darauf geben, dass Materie aus kleinsten elementaren Bausteinen aufgebaut ist:

- Michael Faradays Experimente zur Elektrolyse, die zeigten, dass Atome positive und negative Ladungen beinhalten und die Ladungen stets in Einheiten einer elementaren Ladung auftreten.

- J. J. Thomsons Untersuchungen zu Kathodenstrahlen, siehe Abb. 15.5, die zur Entdeckung des Elektrons führte und damit einen Hinweis auf die Substruktur der Materie lieferte.

- Robert A. Millikan Experiment mit geladenen Öltröpfchen, in dem der Wert der Elementarladung bestimmt wurde,

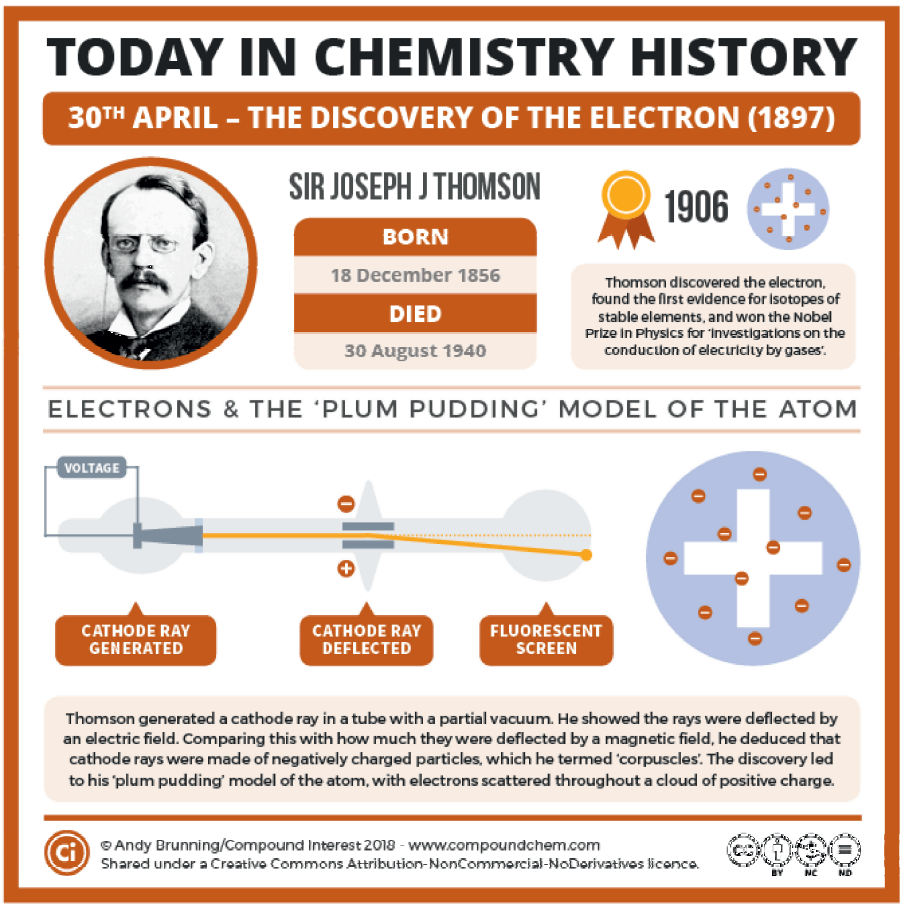


Abb. 15.5: Die Entdeckung des Elektrons durch J.J. Thomson.

- Das Phänomen der Brownschen Molekularbewegung
  Link to video `Mouvement brownien et molécules`

- Die Ultrazentrifugenexperimente von Svedberg[7] zur Bestimmung der Masse von Kolloiden und Biomolekülen wie Hämoglobin.

- Die Streuexperimente von Ernest Rutherford,[8] siehe Abb. 15.6, die die Struktur des Atoms klärte.

- Der Nachweis von Linienstrahlung durch Johann Balmer

- Die Beobachtung von Absorptionsbanden im Spektrum der Sonne durch Joseph von Fraunhofer

[7] The Nobel Prize in Chemistry 1926 was awarded to The (Theodor) Svedberg *for his work on disperse systems.*

[8] The Nobel Prize in Chemistry 1908 was awarded to Ernest Rutherford *for his investigations into the disintegration of the elements, and the chemistry of radioactive substances*

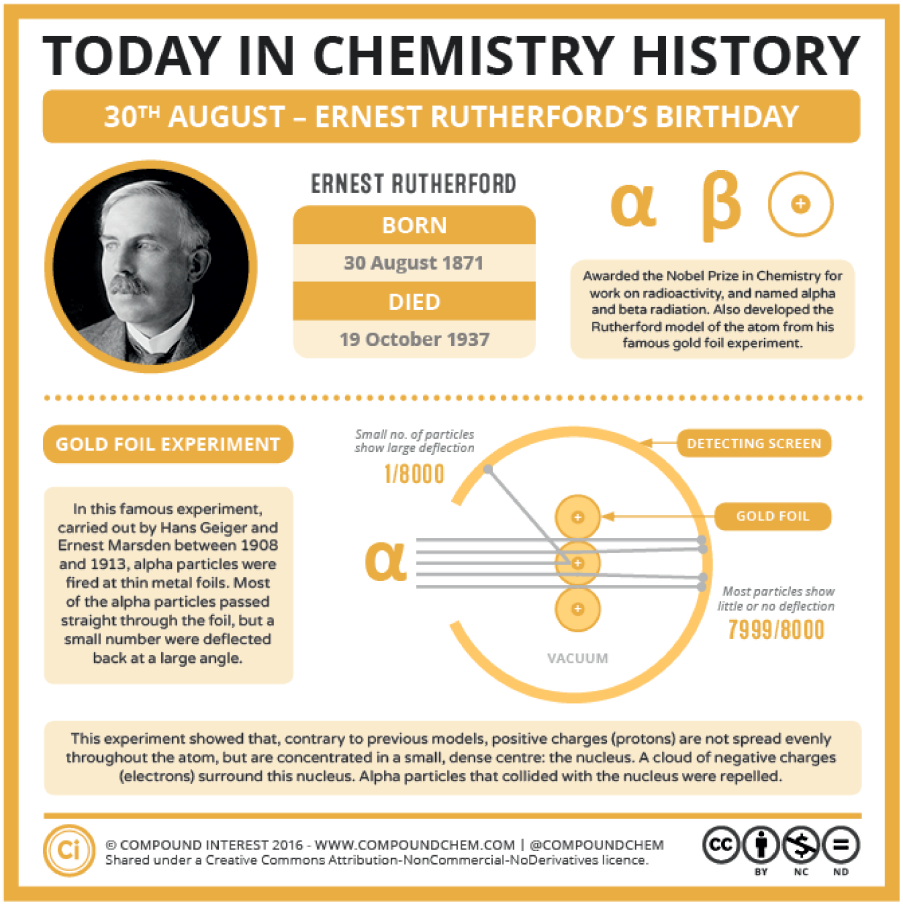


Abb. 15.6: Die Entdeckung der Struktur des Atomkerns durch Ernest Rutherford.

- Die Flammenproben Experimente von Robert Bunsen und Gustav Kirchhoff
- Der Franck-Hertz Versuch[9]

It might interest you to know that when we made the experiments that we did not know Bohr's theory. We had neither read nor heard about it. We had not read it because we were negligent to read the literature well enough - and you know how that happens. On the other hand, one would think that other people would have told us about it. For instance, we had a colloquium at that time in Berlin at which all the important papers were discussed. Nobody discussed Bohr's theory. Why not? The reasons is that fifty years ago, one was so convinced that nobody would, with the state of knowledge we had at that time, understand spectral line emission, so that if somebody published a paper about it, one assumed, *Probably it is not right.* So we did not know it. But we made that

[9] The Nobel Prize in Physics 1925 was awarded jointly to James Franck and Gustav Ludwig Hertz *for their discovery of the laws governing the impact of an electron upon an atom.*

experiment (and got the result that confirmed Bohr's theory) because we hoped that if we found out where the borderline between elastic and inelastic impact lies ... only one line might appear. But we did not know whether that would be so, and we did not know whether at all an emission of an atom is of such a type that one line alone can be emitted and all the energy can be used for that purpose. The experiment gave it to us, and we were surprised about it. But we were not surprised after we read Bohr's paper later, after our publication.

James Franck, 1961[10]

Bei der Elektrolyse wird durch einen elektrischen Strom Masse bewegt. Die Experimente ergeben einen definierten Zusammenhang zwischen der Ladungsmenge und dem Massentransport, der durch die Faradayschen Gesetze charakterisiert wird. Als Ladungsträger werden von Thomson (1897) unter anderem Elektronen identifiziert [**?**], wobei sich herausstellt, dass Ladungen nur als Vielfache einer elementaren Ladungseinheit vorkommen (Millikan 1910) [**?**]. Ein Vorläuferexperiment wurde von Thomson und Wilson durchgeführt:

C. T. R. Wilson hat gezeigt, dass Wassertropfen leichter auf negativ geladenen Teilchen kondensieren als auf positiv elektrifizierten. Die Größe dieser Tropfen und damit ihr Gewicht kann durch Messung der Fallgeschwindigkeit bestimmt werden. Halten wir über den Tropfen einen positiv elektrifizierten Körper; dann werden die Tropfen, da sie negativ elektrifiziert sind, von der positiven Elektrizität angezogen. Die nach unten gerichtete Kraft wird verringert, und die Tropfen werden nicht so schnell fallen wie ohne elektrische Anziehung. Wenn wir die elektrische Anziehung so einstellen, dass die Aufwärtskraft auf jeden Tropfen gleich dem Gewicht des Tropfens ist, werden die Tropfen überhaupt nicht fallen, sondern wie Mohammeds Sarg[11] zwischen Himmel und Erde schweben bleiben. Wenn wir dann die elektrische Kraft so einstellen, dass die Tropfen im Gleichgewicht sind und weder fallen noch steigen, wissen wir, dass die Aufwärtskraft auf jeden Tropfen gleich dem Gewicht des Tropfens ist [**?**].

Ein letzter Hinweis auf die Existenz von Atomen ergibt sich aus der Analyse der Brownschen Bewegung im Rahmen der Thermodynamik (Einstein 1905) [**?**].

The old fighter against atomistics, Wilhelm Ostwald, told me once that he had been converted to atomistics by the complete explanation of Brownian motion.

Arnold Sommerfeld auf dem 70. Geburtstag von Albert Einstein (1949)

[10] Excerpt from a recordings of J. Franck, made in connection with a film on the Franck-Hertz experiment at Educational Services, Inc., Watertown, Massachusetts, in January, 1961.

[11] Nach einer europäischen Legende, die der islamischen Tradition fremd ist, wurde der Sarg des Propheten Mohammed (Mahomet) mit Magneten in der Mitte seines Grabes aufgehängt. Anscheinend war diese Geschichte in England gut genug bekannt, dass Thomson sich ganz beiläufig darauf beziehen konnte.

Unklarheit existiert lange Zeit über die Substruktur des Atoms. Die Antwort ergibt sich aus Experimenten von Millikan und Rutherford. Weiter zeigen sich in den optischen Spektren der Elemente Besonderheiten, die erste Einblicke in die Rolle der Quantisierung im Atom gewähren.

Bei der Aufklärung der Atomaufbaus spielten α- ($^{2+}$He) und β-Teilchen (e^+, e^-) eine wichtige Rolle, da sie geeignet sind, das Innere des Atoms zu erkunden. In diesem Zusammenhang wurden Ansätze, wie das Pflaumenkuchen-Modell von J. J. Thomson diskutiert. Durch Rutherford (1909-1913) wird in Streuexperimenten mit α-Teilchen die Verteilung der unterschiedlichen Ladungen im Atom geklärt.[12] Die positive Ladung ist in einem kleinen Raumgebiet konzentriert, während sich die Elektronen in einem größeren Bereich um den Kern gruppieren. Der Atomkern beinhaltet 99.98% der Masse und hat selbst nur einen Volumenanteil von 10^{-12}. An der Absorption und Emission der Atome im sichtbaren Spektralbereich sind die Elektronen beteiligt. Schließlich findet man, dass Atome in Stößen mit Elektronen nur diskrete Energiemengen aufnehmen (Franck und Hertz 1914) [**?**].

Grenouille aber roch alles wie zum ersten Mal. Und er roch nicht nur die Gesamtheit dieses Duftgemenges, sondern er spaltete es analytisch auf in seine kleinsten und entferntesten Teile und Teilchen.

aus *Das Parfüm* (Patrick Süskind, 1985)

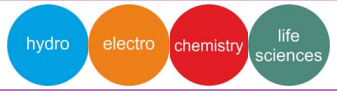
[12] Streuexperimente haben eine lange Tradition in der Physik. Die ersten Messungen mit beschleunigten Teilchen (Protonen) wurden 1932 von Cockcoft und Watson durchgeführt [**? ?**].

Inhalt

Der Weg zum Atom

- Faradaysche Gesetze
- atomare Struktur der Materie
- frühe Atommodelle
- Linienstrahlung der Atome
- Absorption durch Atome
- Quantisierung im Franck-Hertz Versuch

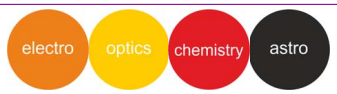
Kapitel 1
Quantisierung der Ladung



Kapitel 2
Atommodelle



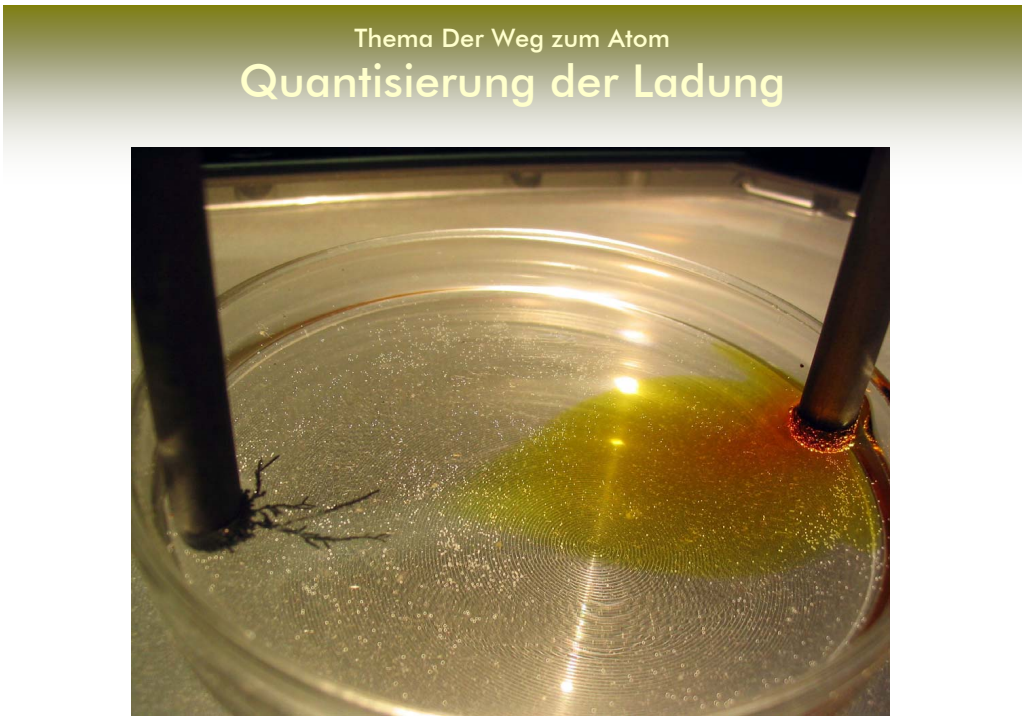
Kapitel 3
Emission & Absorption von Licht durch Atome



Kapitel 4
Franck-Hertz Versuch



15.1 Quantisierung der Ladung



Elektrolyse[4LP]

Although we know nothing of what an atom is, yet we cannot resist forming some idea of a small particle, which represents it to the mind; and though we are in equal, if not greater, ignorance of electricity, so as to be unable to say whether it is a particular matter or matters, or mere motion of ordinary matter, or some third kind of power or agent, yet there is an immensity of facts which justify us in believing that the atoms of matter are in some way endowed or associated with electrical powers, to which they owe their most striking qualities, and amongst them their mutual chemical affinity [**?**].

Michael Faraday 1839

Eine wichtige Erkenntnisse zum Verständnis von Elektrizität und Magnetismus war, dass Atome Ladungen tragen und der elektrische Strom einen atomaren Ursprung hat. Im Jahr 1874 schlug G. J. Stoney den Namen Elektron als Maßstab für die elektrische Ladung vor. Das Elektron sollte Teil eines Maßsystems Natürlicher Einheiten werden. Die Erfindung der Batterie durch Volta im Jahr 1800 war ein wichtiger Schritt hin zu reproduzierbaren experimentellen Bedingungen. Die Batterie lieferte kontrollierte Potenzialdifferenzen und war gut geeignet, um den Einfluss elektrischer Ströme zu untersuchen. Um

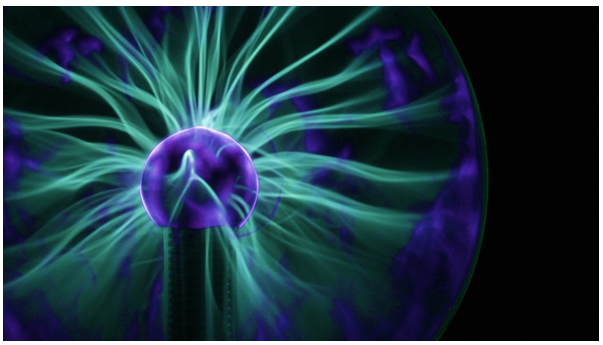


Abb. 15.7: Magische Plasmakugel für €19. Ein Plasma ist ein ionisiertes Gas, das, da elektrisch leitend, besondere Eigenschaften besitzt.

die Dynamik der Entwicklung hervorzuheben, muss man bedenken, dass nur zwei Monate vergingen, bis man feststellte, dass ein elektrischer Strom Wasser in seine Bestandteile Wasserstoff und Sauerstoff separierte. Dieser Prozess ist unter dem Namen Elektrolyse[13] bekannt. Die Experimente von Faraday zeigen, dass die fundamentalen Bausteine der Materie eine Ladung q_e tragen. Zunächst muss geklärt werden,

- wie die Ladungen im Atom vorliegen?
- ob die Ladungsmenge q_e beliebige kleine Werte annehmen kann?
- wer die Träger der elektrischen Ladung sind?
- ob sich aus den Messungen Hinweise auf eine Substruktur des Atoms ergeben?

In Experimenten findet man Atome in unterschiedlichsten Ladungszuständen. Ein Beispiel sind Plasmen, siehe Abb. 15.7. Eine wichtige, scheinbar banale Erkenntnis in Bezug auf die Struktur der Materie ist, dass Atome NEUTRAL sind. Man bedenke aber, dass schon ein geringer Ladungsüberschuss zu enorm starken elektrischen Feldern führt. Den Wert kann man leicht bestimmen, da das elektrische Feld außerhalb einer homogen geladenen Metallkugel mit Radius r identisch mit dem einer Punktladung q_e ist, an dem die gesamte Ladungsmenge konzentriert ist:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{q_e}{r^2} \tag{15.1}$$

Setzt man für r den Bohrradius (Kapitel *Bohrsches Atommodell*) ein und die Elementarladung e für q_e, ergibt sich ein elektrisches Feld von $5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{V/m}$. Zu Vergleich herrschen bei Gewittern elektrische Feldstärke von typisch $10^6\,\mathrm{V/m}$.

Elektrolytische Dissoziation[4LP]

Zufällig stieß er auf Galvanis Buch über den Strom und die Frösche. Galvani hatte abgetrennte Froschschenkel mit zwei unterschiedlichen Metallen verbunden, und sie hatten

[13] *Lexikon:* **Elektrolyse** bezeichnet die Aufspaltung einer chemischen Verbindung durch den Einsatz von elektrischem Strom. Durch die Elektrolyse werden die in der Molekülen enthaltenen Atome voneinander getrennt.



Abb. 15.8: Leben und Werk von Svante Arrhenius.

gezuckt wie lebendig. Lag das nun an den Schenkeln, in denen noch Lebenskraft war, oder war die Bewegung von außen gekommen, aus dem Unterschied der Metalle, und von den Froschteilen bloß sichtbar gemacht? Humboldt beschloss es herauszufinden. Er zog sein Hemd aus, legte sich aufs Bett und wies einen Diener an, zwei Aderlasspflaster auf seinen Rücken zu kleben. Der Diener gehorchte, Humboldts Haut warf zwei große Blasen. Und jetzt solle er die Blasen aufschneiden! Der Diener zögerte, Humboldt musste laut werden, der Diener nahm ein Skalpell. Es war so scharf, dass der Schnitt kaum schmerzte. Blut tropfte auf den Boden. Humboldt befahl, ein Stück Zink auf eine der Wunden zu legen. Der Diener fragte, ob er Pause machen dürfe, ihm sei nicht wohl. Humboldt bat ihn, sich nicht dumm anzustellen. Als ein Silberstück die zweite Wunde berührte, ging ein schmerzhaftes Pochen durch seine Rückenmuskeln, bis hinauf in den Kopf. Mit zitternder Hand notierte er: Muscularis cucularis, Hinterhauptbein, Stachelfortsätze des Rückenwirbelbeins. Kein Zweifel, hier wirkte Elektrizität. Noch einmal das Silber! Er zählte vier Schläge, in regelmäßigem Abstand, dann wichen die Farben aus den Gegenständen [**?**].

Daniel Kehlmann - Die Vermessung der Welt (2005)

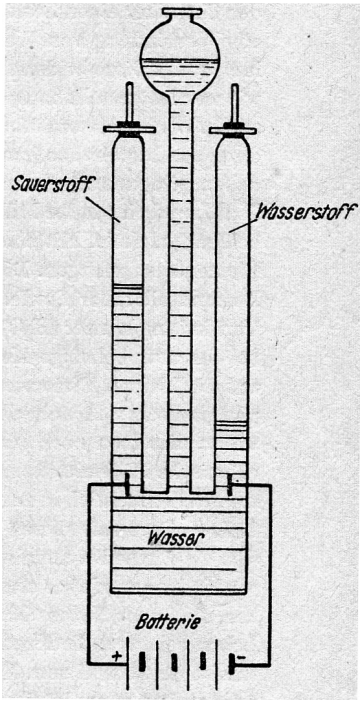


Abb. 15.9: Der Hoffmannsche Zersetzungsapparat besteht aus zwei untereinander verbundenen Glasröhren, die mit Wasser gefüllt sind und oben durch einen Absperrhahn verschlossen sind. In jeder der Röhren befinden sich Platinbleche, an die eine Gleichspannung angelegt wird. Führt man den Versuch durch, beobachtet man, dass sich Gase bilden. In der einen Röhre ist die Gasmenge doppelt so groß wie in der Anderen. Es handelt sich um Sauerstoff (links) und Wasserstoff (rechts) [**?**].

Nach den Vorstellungen der Chemie des 18. Jahrhunderts war Wasser ein Grundbaustein der Materie. Diese Auffassung änderte sich durch die Forschung von Arrhenius (Abb. 15.8), der 1887 die elektrolytische Dissoziation entdeckte und damit Wasser in kleinere elektrisch geladenen Bestandteile, genannt Elektrolyte, zerlegen konnte.[14] Der Hoffmannsche Wasserzersetzungsapparat beispielsweise, siehe Abb. 15.9 besteht aus zwei untereinander verbundenen Glasröhren. In jede der Röhren ist ein Metalldraht mit einem Platinplättchen eingeschmolzen. Füllt man Wasser ein und legt eine Spannung an die Elektroden an, kommt es zu einer Gasentwicklung. Man kann nachweisen, dass es sich um Wasserstoff und Sauerstoff handelt. Wasser lässt sich also in kleinere Einheiten zerlegen. Wichtig waren diese Arbeiten, weil sie erstmals den Zusammenhang zwischen elektrischen Phänomen und Materie herstellten. Ein weiteres Beispiel für eine elektrolytische Dissoziation ist die Reaktion:

$$\mathrm{HCl} \rightarrow \mathrm{H}^+ + \mathrm{Cl}^- \tag{15.2}$$

[14] The Nobel Prize in Chemistry 1903 was awarded to Svante Arrhenius *in recognition of the extraordinary services he has rendered to the advancement of chemistry by his electrolytic theory of dissociation*

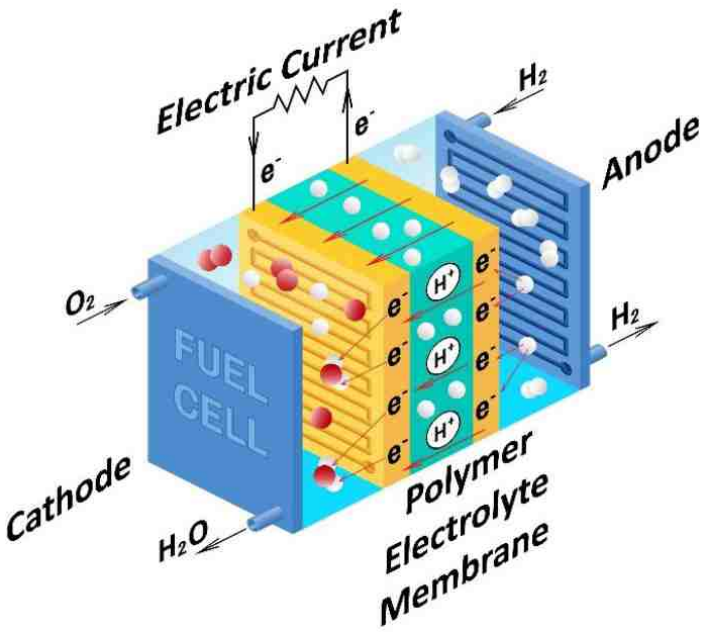


Abb. 15.10: Brennstoffzellen erzeugen aus Wasserstoff und Sauerstoff Strom und thermische Energie. Zum Betrieb benötigt man Reaktionsbeschleuniger (Katalysatoren). Die Katalysatoren sorgen dafür, dass die zugeführten Gase elektrische Ladungsträger freisetzen. Wasserstoffmoleküle zerfallen an der Anode zunächst in Wasserstoffatome und es bilden sich durch Elektronenabgabe Wasserstoff-Ionen (H^+). Die freigesetzten Elektronen fließen über einen Leiter (Verbraucher) zur Kathode, wo sich Sauerstoffanionen (O_2^-) bilden. Die an der Anode gebildeten Wasserstoff-Ionen gelangen durch den Elektrolyten zur Kathode und bilden dort unter Freisetzung thermischer Energie Wasser[**?**].

Die erste Brennstoffzelle wurde im Jahr 1838 von Christian Friedrich Schönbein und parallel von Sir William Grove entwickelt. Technologisch hat dieses Verfahren erhebliche Bedeutung, wie die Beispiele Elektrolyseur und Brennstoffzelle (Abb. 15.10) zeigen.

Das Wasser ist die Kohle der Zukunft. Die Energie von morgen ist Wasser, das durch elektrischen Strom zerlegt worden ist. Die so zerlegten Elemente des Wassers, Wasserstoff und Sauerstoff, werden auf unabsehbare Zeit hinaus die Energieversorgung der Erde sichern.

aus Jule Verne, Die geheimnisvolle Insel, 1875

In its search to develop electric power through chemical reactions, Allis-Chalmers in 1951 began research on fuel cells. In October 1959 near West Allis, Wisconsin, this fuel cell tractor plowed a field of alfalfa with a double-bottom plow. This tractor has 1,008 fuel cells joined in 112 units of 9 cells each arranged in four banks that produced power

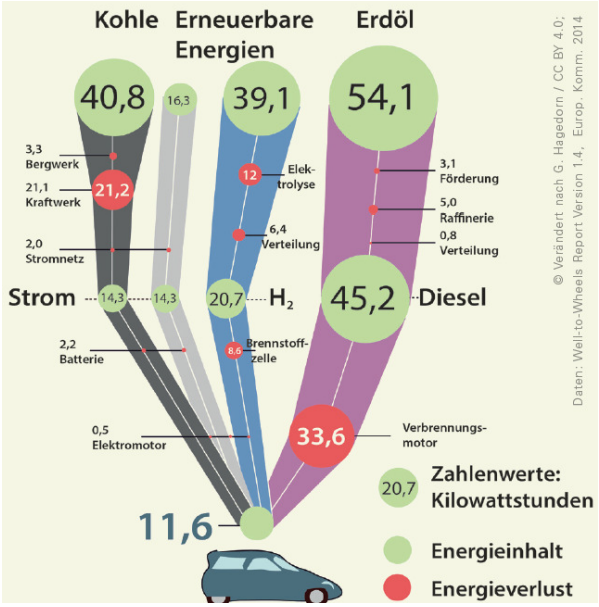


Abb. 15.11: Energiewandlung von Rohstoff zu einer Energiemenge von 11.6 kWh. Diese Energie ist notwendig um mit einem Auto 100 km weit zu fahren. Je Größe der Einkreisungen, desto größer sind die Verluste. In Brennstoffzellenautos wird Wasserstoffgas unter einem Druckt bei 700 bar gespeichert. So hat Wasserstoff eine 200-mal höhere Energiedichte als Lithium-Ionen-Batterien.[a] Gewicht von Gas und Drucktanks sind geringer als das einer Batterie mit vergleichbaren Energiespeicher. Bei der Brennstoffzelletehnologie muss allerdings zuerst Wasserstoff elektrolytisch erzeugt werden, der dann in der Brennstoffzelle elektrische Energie erzeugt. Daher ist der Wirkungsgrad um einen Faktor zwei bis drei niedriger als beim Batteriefahrzeug [**?**].

[a] Moderne Autos verwendeten Akkus mit Lithium-Ionen-Technologie und können derzeit nur rund 0.12 kWh/kg speichern. Ein Kilogramm Benzin oder Diesel enthält dagegen rund 12 kWh/kg an nutzbarer chemischer Energie

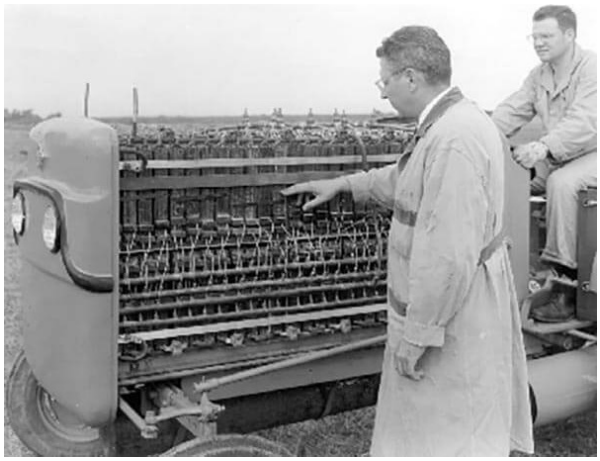


Abb. 15.12: Allis-Chalmers begann 1951 mit der Erforschung von Brennstoffzellen. Der auf dem Photo abgebildete Traktor verfügt über 1008 Brennstoffzellen, die Strom für einen 20 PS Gleichstrommotor erzeugen.

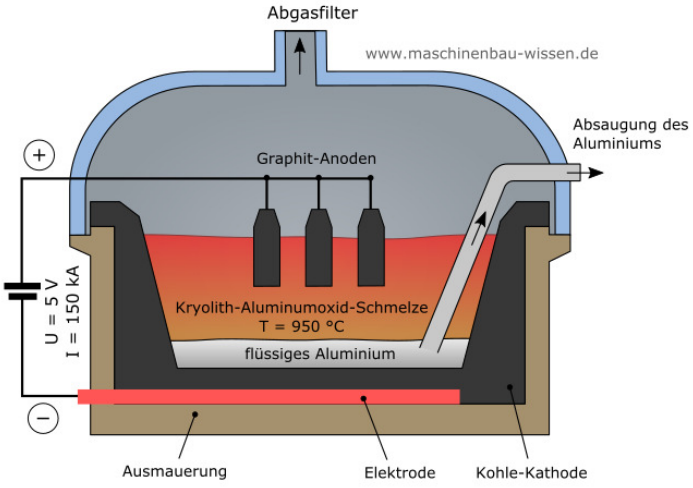


Abb. 15.13: Herstellung von Aluminium durch das Verfahren der Schmelzflusselektrolyse. Dabei wird Aluminiumoxid mit Kryolith (Na_2NaAlF_6) zusammengebracht und verschmolzen. Kryolith dient dazu, den Schmelzpunkt auf 690 K herabzusetzen [**?**].

to run a standard Allis-Chalmers 20 horsepower dc motor (Abb. 15.12).

Betrachtet man die elektrische Leitfähigkeit ρ_e von Wasser, findet man einen Wert von

$$\rho_e = 2.3 \cdot 10^5 \Omega \cdot \mathrm{m} \tag{15.3}$$

Wasser ist also ein extrem schlechter Leiter für den elektrischen Strom. Durch Elektrolyte reduziert sich ρ_e in charakteristischer Weise. Die Methode der elektrolytischen Dissoziation hat deshalb Bedeutung für die Erforschung der Eigenschaften der Materie. Durch Elektrolyse gelang es Davy im Jahr 1807 Natrium und Kalium zu isolieren. Später gelang es ihm weitere Elemente zu identifizieren: Kalzium, Strontium, Barium, Magnesium, Bor, Chlor und Jod. Die Arbeiten von Humphry Davy haben maßgeblichen Einfluss gehabt auf die Entwicklung der Forschungsrichtung Elektrochemie [**?**]. Chemisch betrachtet ist die Elektrolyse ein Verfahren, bei dem eine Redoxreaktion,[15] wie zum Beispiel

$$CuCl_2 \rightarrow Cu^{2+} + 2\,Cl^- \tag{15.4}$$

mit Hilfe elektrischer Energie ausgelöst wird. Die Elektrolyse wird unter anderem zur Gewinnung von Metallen wie Aluminium verwendet, siehe Abb. 15.13.

[15] *Lexikon:* Eine **Redoxreaktion** ist eine chemische Reaktion, bei der Elektronen auf einen anderen Reaktionspartner übertragen werden ($A \rightarrow A^+ + e^-$; $B + e^- \rightarrow B^-$; $A + B \rightarrow A^+ + B^-$). Werden Redoxreaktionen von außen erzwungen, spricht man von Elektrolyse. Redoxreaktionen sind von grundlegender Bedeutung in der Chemie. Beispiele sind Stoffwechsel- und Verbrennungsvorgänge.

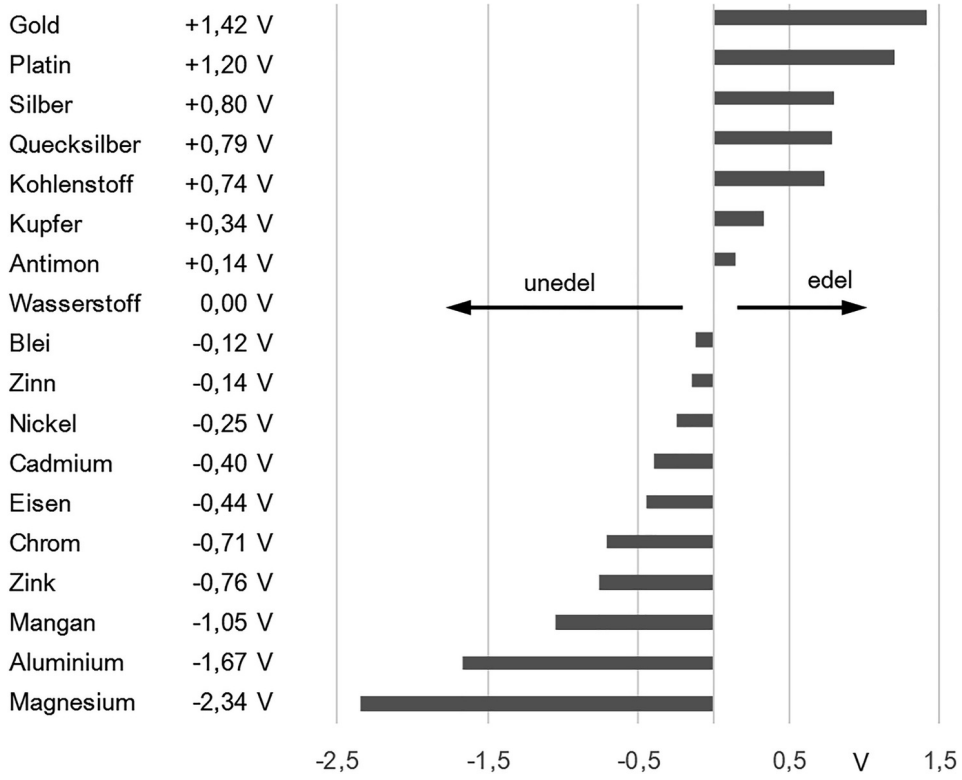


Abb. 15.14: Der Potentialunterschied zwischen den unterschiedlichen Metallen wird als elektrochemische Spannungsreihe bezeichnet. Die Metalle sind nach ihrem elektrischen Potential im Vergleich zu Wasserstoff geordnet. Wasserstoff hat dabei den Wert NULL. Je negativer das elektrochemische Potential, desto unedler, je positiver das Potential, desto edler ist das Metall.

Anwendungen 1^{4LP}

Ein Beispiel aus der Galvanik

$$\mathrm{CuSO_4} \rightarrow \mathrm{Cu^{2+}} + \mathrm{SO_4^{2-}} \tag{15.5}$$

Verkupfern ist ein Prozess, der zur Oberflächenbeschichtung dient. Physikalisch unterliegen mit der Dissoziation des Moleküls die einzelnen Bestandteile dem Einfluss des elektrischen Feldes $E_e = U_e/\,\ell$, wobei U_e die Spannung am Netzteil und ℓ der Abstand der Elektroden ist. Der Wert der elektrostatischen Beschleunigung a hängt von der Ladung q und der Masse m_{ion} des Moleküls ab

$$a = \frac{q}{m_{ion} \cdot \ell} \cdot U_e \tag{15.6}$$

Es sei an dieser Stelle schon mal darauf hingewiesen, dass der Ausdruck q/m, das Ladung-zu-Masse Verhältnis im Weiteren eine wichtige Rolle spielen wird.

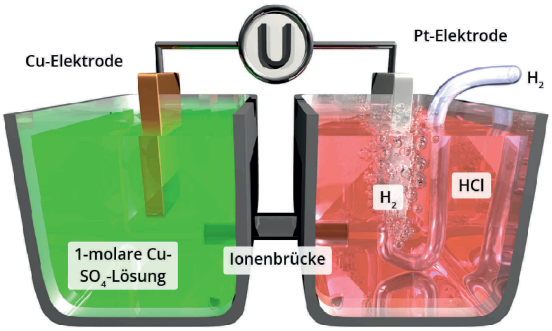


Abb. 15.15: Bestimmung des Normalpotenzials eines Metalls (Kupfer, links) in Bezug auf Wasserstoff (rechts).

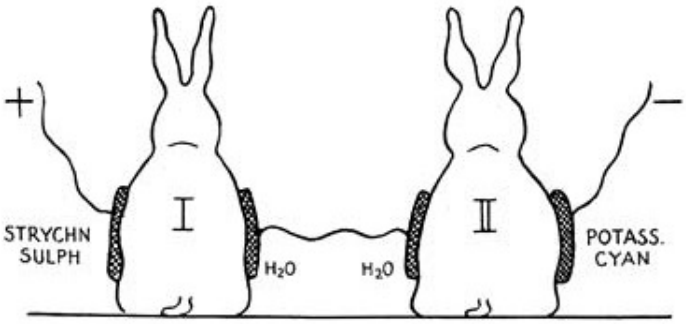


Abb. 15.16: Leducs Kanninchenexperiment.

Ein Beispiel aus der Medizin

Elektrische Felder können verwendet werden, um Substanzen in die Haut zu transportieren.[16] Beim Leducschen Versuch im Jahr 1905 (Abb. 15.16) werden zwei Kaninchen durch Elektroden galvanisch verbunden. Das linke Kaninchen wird durch ein in Strychninsulfat getränktes Pflaster mit dem Pluspol, das rechte Kaninchen durch ein in Kaliumcyanid getränktes Pflaster mit dem Minuspol verbunden. Beide Substanzen sind hochgiftig. Ist die linke Elektrode positiv und die andere Elektrode negativ, fließt Strom ohne medizinische Wirkung durch die Kaninchenkörper. Dreht man die Polarität der Batterie um, sterben die Kaninchen durch Strychnin beziehungsweise durch Zyanid. Ursache ist die Elektrochemische Spannungsreihe[17] (Abb. 15.14), die im ersten Fall verhindert, dass

[16] *Lexikon:* Unter **Iontophorese** versteht man das Einbringen von Ionen in Gewebe mit Hilfe eines elektrischen Gleichstroms. Die Eindringtiefe und die transportierte Stoffmenge hängen von den Parametern des elektrischen Feldes (Stromdichte, Einwirkdauer, Elektrodengröße, Ladung des zu transportierenden Stoffes) insbesondere jedoch von der Leitfähigkeit und der Struktur des zu durchdringenden Gewebes ab. Der Leducsche Kaninchenversuch mit Strychnin im Jahr 1900 gilt als erster Beweis für die Möglichkeit, mit Hilfe eines elektrischen Stroms, Stoffe durch die Haut zu transportieren.

[17] *Lexikon:* Das Potenzial zwischen einer negativ geladenen Elektrode und dem mit positiven Metallionen angereicherten Elektrolyten ist nicht messbar. Messen kann man aber das Potenzial zwischen zwei Elektroden. Um die relativen Potenzialen verschiedener Metalle zu vergleichen, führt man eine Messung unter Standardbedingungen durch. Als Gegenelektrode dient eine von H_2 umspülte Platin-Elektrode, auf deren katalytisch wirksamen Oberfläche das H_2-Gas zu atomarem Wasserstoff

Element	Wasserstoff	Sauerstoff	Chlor	Jod	Blei	Zinn	Silber
relative Masse	1	8	36	125	104	58	108
atomare Masse	1	16	36	125	208	116	108

Tab. 15.1: Elektrolytische Bestimmung der relative Masse der Elemente, bestimmt unter Bedingungen gleicher Ladungsmenge [**?**].

das Gift in die Körper eindringt (Strychnin positiv, Zyanid negativ). Bei gewechselter Polarität werden die Stoffe von den Elektroden elektrisch abgestoßen und gelangen in die Körper. Leduc konnte damit nachweisen, dass der elektrische Strom die tödlichen Ionen lieferte. Wichtig für uns ist, dass der Versuch die Effekte der Polarität der Ladung demonstriert.

Faradaysche Gesetze^{4LP}

Zur Zeit Faradays war es nicht möglich, die Ladung zu bestimmen, die durch einen Elektrolyten fließt. Was ging, war den Strom konstant zu halten. Die Ladungsmenge ist dann das Produkt aus Strom und Zeitspanne. Wenn man den GLEICHEN Strom eine GLEICHE Zeitspanne durch verschiedene Elektrolyten leitet, ist die Ladungsmenge in ALLEN Fällen identisch. Durch Bestimmung des Gewichts der freigesetzten Elemente fand Faraday heraus, dass das Verhältnis der Gewichte eng verbunden war mit den atomaren Massen, wie Tabelle 15.1 demonstriert. Die einfachen Verhältnisse sind ein Hinweis auf die Existenz von Atomen und einer damit verbundenen elektrischen Ladung. Als es dann später gelang, die Ladungsmenge exakt zu bestimmen, konnte man beispielsweise den Wert zur Erzeugung von einem Mol Wasserstoff angegeben. Es sind 96 485 C. Diese Ladungsmenge auch wird benötigt, um z.B. 107.88 g an Silber abzuscheiden. Es ergibt sich also ein direkter Zusammenhang zur Avogadro-Konstanten. Darüber hinaus kann man vermuten, dass es eine elementare Ladungseinheit gibt.

Der Zusammenhang zwischen Elektrizität und Massentransport durch Ionen werden in den Faradayschen Gesetzen zusammengefasst.

- Erstes Faradaysches Gesetz: Die Stoffmenge, die an einer Elektrode abgeschieden wird, ist proportional der transportierten elektrischen Ladung.

$$m_{elektrolyt} \approx Q_e \tag{15.7}$$

- Zweites Faradaysches Gesetz: Die durch eine bestimmte Ladungsmenge abgeschiedene Masse $m_{elektrolyt}$ ist proportional zum Atomgewicht des abgeschiedenen Elements (Molmasse $m_{mol} = m/\ N_A$) und umgekehrt proportional zu seiner Wertigkeit

dissoziiert, siehe Abb. 15.15. Führt man eine solche Messung unter diesen Bedingungen für die Elemente durch, erhält man durch einen Vergleich die **Elektrochemische Spannungsreihe**, siehe Abb. 15.14.



Abb. 15.17: Photo einer Aurealis Borealis.

z_W.

$$m_{elektrolyt} \approx \frac{m_{mol}}{z_W} \tag{15.8}$$

Aus der Überlegung, welche Ladungsmenge notwendig ist, um ein Mol ($1.0\,N_A$) eines Stoffes unter Berücksichtigung seiner Wertigkeit abzuscheiden,

$$Q_e = z_W \cdot e \cdot N_A \tag{15.9}$$

kommt man auf die Faraday-Konstante:

Faraday-Konstante: $F_F = e \cdot N_A = 96\,485\,\mathrm{As/\,mol}$

Fasst man das erste und zweite Faradaysche Gesetz zusammen und berücksichtigt den Zusammenhang zwischen elektrischem Strom I_e, Zeitdauer t und Ladungsmenge

$$Q_e = I_e \cdot t = z_W F_F \tag{15.10}$$

ergibt sich das Faraday Gesetz der Elektrolyse:

$$m_{elektrolyt} = \frac{I_e \cdot t}{F_F} \frac{m}{z_W} \tag{15.11}$$

Aus der Gleichung kann berechnet werden, wie lange es dauert, um eine bestimmte Masse m eines Stoffes bei einer gegebenen Stromstärke elektrolytisch abzuscheiden ist. Folgende Erkenntnisse kann man aus den Experimenten von Faraday ziehen:

- Es gibt Atome.
- Elektrische Ladungen haben etwas mit Atomen zu tun.
- Es gibt zwei unterschiedliche Arten von Ladungen.
- Elektrizität ist nicht kontinuierlich, sondern körnig.

Weitere Experimente Faradays konzentrierten sich auf die Stromleitung im Grobvakuum. Beispiel für durch solche Bedingungen ausgelöste Naturphänomene sind Blitze und Polarlichter (Abb. 15.17). Abb. 15.18 zeigt ein Beispiel für eine Glimmentladung [**?**]. Hierbei stellte sich heraus, dass

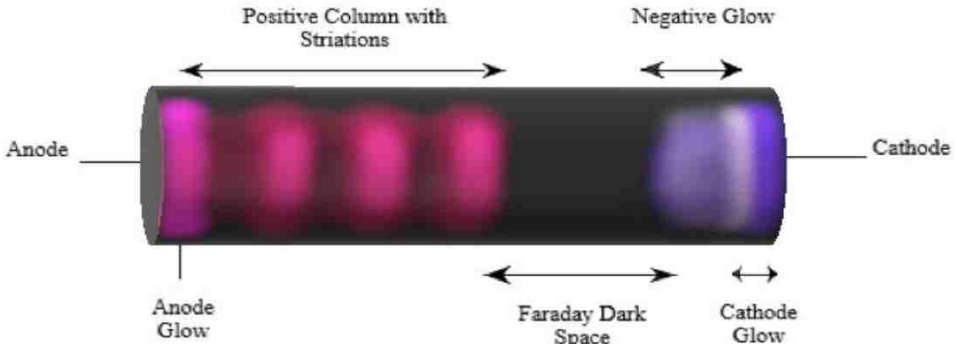


Abb. 15.18: Zuordnung der Entladungsbereiche einer Glimmentladung [**?**].

- elektrischer Strom, der bei geringem Druck durch ein Gas fließt, eine elektrische Entladung erzeugt.
- die Farbe der Entladung von der Gassorte abhängt.
- es unabhängig von der Gasart zu einer Leuchterscheinung an der negativen Elektrode kommt.

Man erkennt, dass hier eine Verbindung gezogen wird zwischen der elektrischen Ladung und einer Eigenschaft des Atoms, nämlich seiner Wertigkeit. Bei der Elektrolyse werden Stoffe in kleinere Einheiten geteilt, die eine Ladung tragen. Wie sich später durch Messungen von Millikan herausstellte [**?**], entspricht diese einem Vielfachen der Elementarladung. Damit ergibt sich ein Zusammenhang zum Aufbau der Materie. Weiter verknüpft das Faradaysche Gesetz die Disziplinen Physik und Chemie. Mit Hilfe der Werte für die Elementarladung und der Avogadro-Konstanten kann man die Wechselwirkung zwischen Elektron und Atom grob abschätzen. Aus der Abschätzung der Größe der Atome von r_{atom}=0.1 nm ergibt einen Potenzielle Energie von $-k_C \cdot e^2/r_{atom}$=14.4 eV zwischen positiver und negativer Ladung. Das ist die Energie, die bei der Wechselwirkung von Atomen untereinander eine Rolle spielt, wenn die Wechselwirkung über Elektronen stattfindet. Daraus kann man den Schluss ziehen, dass 10 eV die relevante Energieskala für die Chemie ist.

Link to video `Counting Electrical Charges In Motion 1960`

Anwendungen 2^{4LP}

Ein Beispiel aus der Chemie

Eine Anwendung der elektrolytischen Dissoziation ist das Verfahren der Elektrophorese, siehe Abb. 15.19.[18] Die in den Untersuchungen betrachteten Biomoleküle, wie beispiels-

[18] The Nobel Prize in Chemistry 1948 was awarded to Arne Tiselius *for his research on electrophoresis and adsorption analysis, especially for his discoveries concerning the complex nature of the serum proteins*

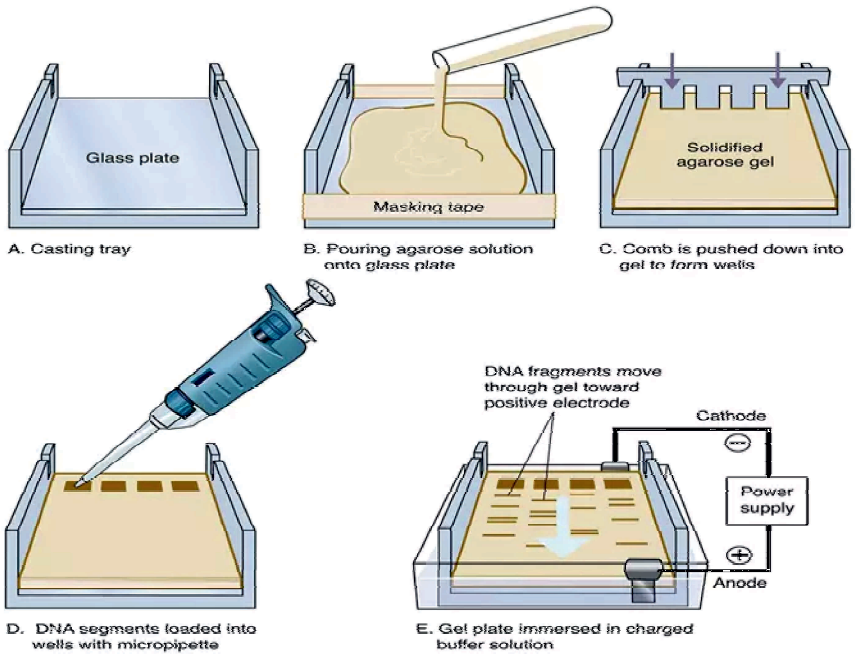


Abb. 15.19: Elektrophorese wird verwendet, um RNA-, Protein- oder DNA-Moleküle basierend auf ihrer elektrischen Ladung und Größe zu trennen. Eine elektrische Spannung bewegt die Moleküle mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten je nach Größe und Ladungszustand [**?**].

weise Proteine, liegen dabei in unterschiedlichen Ladungszuständen vor. Im elektrischen Feld E_e bewegen sich die Ionen, wobei die Bewegungsrichtung durch die Polarität bestimmt wird

$$F_e = \pm q_e \cdot E_e \tag{15.12}$$

Der Transport wird dabei beeinflusst durch die Stokessche Reibung in der laminaren Strömung, wobei die Reibungskraft F_R von der Viskosität der Flüssigkeit η_{fl}, der Radius $r_{particle}$ und der Geschwindigkeit $v_{particle}$ der als kugelförmig angenommenen Ladungsträger abhängt

$$F_R = 6\,\pi \cdot \eta_{fl} \cdot r_{particle} \cdot v_{particle} \tag{15.13}$$

In der Flüssigkeit stellt sich quasi sofort ein Gleichgewicht der Kräfte ein, sodass man die Geschwindigkeit der Moleküle als konstant ansehen kann.

$$v_{particle} = \frac{q_e \cdot E_e}{6\,\pi \cdot \eta_{fl} \cdot r_{particle}} \tag{15.14}$$

Anhand der *Reisegeschwindigkeit* können die einzelnen Bestandteile identifiziert werden. Allerdings ergibt sich ein Problem, dass aus Ladung und Größe resultiert. Ein 2-fach geladenes Molekül mit doppeltem Radius ($2\,r_{particle}$) bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit wie ein einfach geladenes Molekül mit Radius ($r_{particle}$).

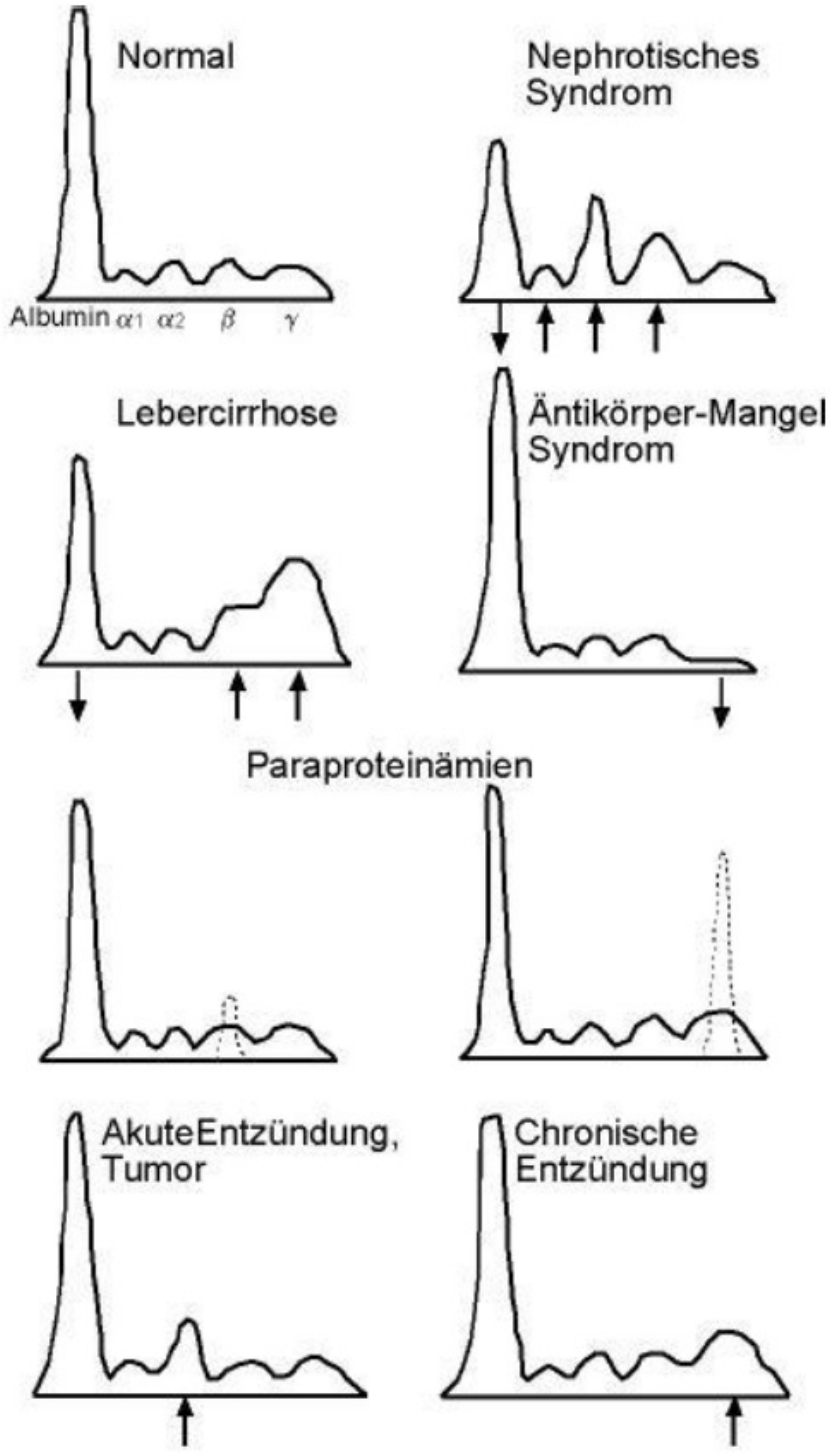


Abb. 15.20: Densitogramme von Blutseren unterschiedlicher Pathoproteinämien. Pathoproteinämien sind krankhaft veränderte Eiweißstrukturen oder Änderungen der Konzentration einzelner Plasmaproteine. Eine Abweichung des Elektrophorese-Profils von der Norm ist ein diagnostisches Merkmal zur Erkennung von Erkrankungen.

Die wichtigste Anwendung der Elektrophorse in der Medizin ist die elektrophoretische Untersuchung der Eiweißstoffe des Blutes. Mit Hilfe der Elektrophorese können bis zu 40 Proteine im menschlichen Blut identifiziert werden. Die Methode ist geeignet, Änderung im Anteil von Eiweißstoffen nachzuweisen. Die Produktion von Eiweißstoffen entarteter Zellen lassen Rückschlüsse auf unterschiedliche Krankheitszustände zu, siehe Abb. 15.20.

Kathodenstrahlen

The electrical matter consists of particles, extremely subtle [**?**].

Benjamin Franklin (1750)

The detection of cathode rays was a by-product of the investigation of the discharge of electricity through rarefied gases. The latter phenomenon had been studied since the early eighteenth century. By the middle of the nineteenth century it was known that the passage of electricity through a partly evacuated tube produced a glow in the gas, whose color depended on its chemical composition and its pressure. Below a certain pressure the glow assumed a stratified pattern of bright and dark bands. During the second half of the nineteenth century the discharge of electricity through gases became a topic of intense exploratory experimentation, primarily in Germany. In 1855 the German instrument maker Heinrich Geißler (1815-1879) manufactured improved vacuum tubes, which made possible the isolation and investigation of cathode rays. In 1857 Geisslers tubes were employed by Julius Plücker (1801-1868) to study the influence of a magnet on the electrical discharge. He observed various complex and striking phenomena associated with the discharge. Among those phenomena were a *light which appears about the negative electrode* and a fluorescence in the glass of the tube. [**?**]

Eine Glimmentladung kann wie folgt charakterisiert werden. Zwischen Kathode zur Anode kann man acht Plasmabereiche beobachten:

1. An der Kathode der Aston-Dunkelraum. Er ist dünn, aber bei Verwendung von Edelgasen oder Wasserstoff als Entladungsgas gut sichtbar.

2. Daran an schließt sich eine feine rötlich leuchtende Lichtschicht, die man als Kathodenglimmhaut bezeichnet.

3. Es folgt eine lichtschwache Zone (Hittorf- oder Crookes-Dunkelraum, kathodischer Dunkelraum).

4. Das negative Glimmlicht grenzt sich deutlich vom Hittorf-Dunkelraum ab. Hier kommt es zu einem Spannungsabfall (Kathodenfall).

5. Die anschliessende lichtarme Zone ist der Faraday-Dunkelraum.

6. Dann folgt die Positive Säule.[19] Abhängig von den Druckverhältnissen und dem Entladungsgas können Lichtschichten beobachtet werden.

7. Anodisches Glimmlicht

8. Vor der Anode findet man den Anoden-Dunkelraum.

Je nach dem Maß der Verdünnung in den Geißlerschen bezw. Hittorfschen Röhren treten als Begleiterscheinungen durchgehender elektrischer Entladungen an den beiden Polen, dem positiven, der Anode, und dem negativen, der Kathode, verschiedene Lichterscheinungen auf (s. Glimmlicht). Während das Anodenlicht nach Art einer Strömung den Krümmungen des Rohrs folgt, bildet das negative Licht, Kathodenlicht, eine Strahlung, welche von zwischengebrachten Körpern Schatten entwirft. Bei Verdünnungen der Luft unter 0.001 mm Druck fehlt das positive Licht, während aus der Kathode in zu ihrer Oberfläche senkrechter Richtung Strahlen hervorbrechen, welche die Glasoberfläche überall, wo sie dieselbe treffen, in grüne Fluoreszenz versetzen. Crookes hat durch solche Strahlen mechanische Wirkungen, Bewegungen von Flügelrädchen in der Röhre erzeugt. Die Kathodenstrahlen zeigen im Fokus einer konkaven Kathode Wärmewirkungen, werden vom Magnet abgelenkt, und zwar in verschiedenem Maß, so daß sie durch diese Ablenkung in eine Art Spektrum verschiedenartiger Kathodenstrahlen zerlegt werden können; sie treten [**?**] durch Metallbleche in die freie Luft aus, in welcher sie nach kurzem Wege unter diffuser Zerstreuung verschwinden, sie pflanzen sich in Räumen mit höchstverdünnter Luft ungehindert fort, deren Verdünnung ihre Entstehung nicht mehr gestattet, weil die elektrische Entladung aufhört. Die Strahlen zeigen photographische und andre chemische Wirkungen. Die von den Strahlen getroffene Glaswand fluoresziert in apfelgrünem Licht und sendet ihrerseits die das Glas durchsetzenden Röntgenstrahlen (s.d.) aus. Der getroffene Teil der Glaswand erweist sich negativ elektrisch, die übrige Röhrenwand positiv, die Strahlen sind die Träger negativer von der Kathode fortströmender Ladungen und werden von genäherten negativ geladenen Körpern abgestoßen. Auf den Erscheinungen der beiderlei Ablenkungen, der elektromagnetischen und der statisch-elektrischen, beruht die Bestimmung sowohl der je nach dem Potentialunterschied verschiedenen Geschwindigkeiten, als auch der konstanten Ladungen und Massen von kleinsten Teilchen, Elektronen (s.d.), deren Transport als das Wesen der Kathodenstrahlen zu betrachten ist. Als sekundäre Kathodenstrahlen bezeichnet man die von Tagnac entdeckte Strahlung blankpolierter Metallflächen, welche von Kathodenstrahlen getroffen werden, als Kanalstrahlen eine den Kathodenstrahlen entgegengesetzt gerichtete Strahlung von positiver Ladung, welche aus einer durchlöcherten, mit Rohransatz versehenen Kathode austritt. Die dieser Strahlung entsprechenden positiv geladenen Teilchen besitzen erheblich größere Massen und kleinere Geschwindigkeiten [**?**].

Die experimentelle Entwicklung der Vakuumtechnologie geht auf Heinrich Geißler und Julius Plücker zurück [**?**], die es schafften, den Druck in einem Glaskolben merklich zu

[19] *Lexikon:* Die **Positive Säule** ist der sich selbst neutralisierende Teil einer Gasentladung. In diesem Bereich, siehe Abb. 15.18 sind Elektronenstoßionisation und Teilchendiffusion im Gleichgewicht. Die positive Säule liefert bei Leuchtröhren den Hauptanteil an der Lichtemission.

reduzieren. Dabei wurden folgende Beobachtungen gemacht, wenn man im Kolben eine Entladung zündet:

- Bei der Reduzierung des Gasdrucks in der Glasröhre verschwand das Leuchten des Gases und gleichzeitig verstärkte sich die Lichtemission an der Kathode.

- Wenn die Lichtemission unter bestimmten Druckverhältnissen die Glaswände erreichte, beobachtet man ein grünes Aufleuchten an dieser Stelle.

Entdeckung des Elektrons

When Crookes shot 10 000 volts of electricity through the tube, he witnessed a stunning and unexpected result: The tube glowed fluorescent green. Intrigued, he analyzed the mysterious energy flow and eventually deduced that the energy (composed of the yet-to-be discovered electrons) usually traveled in straight lines and applied pressure on anything in its path [**?**].

Zwei Experimente von Crookes zu Kathodenstrahlen zeigen, dass es sich bei Kathodenstrahlen nicht um elektromagnetische Wellen, sondern um materielle Teilchen handelt [**?**].[20]

- Die Strahlen werden in einer Vakuumröhre durch einen Glühfaden erzeugt und in Richtung der Kathode beschleunigt. Ein Metallkreuz, als Hindernis auf dem Weg, liefert ein Schattenbild auf einem Phosphorschirm, siehe Abb. 15.21. Der Versuch zeigt, dass es sich um Teilchen handelt, die sich auf geraden Bahnen bewegen. In der Vakuumröhre wird also ein Teilchenstrahl erzeugt, der sich in Anwesenheit eines elektrischen Feldes von der Kathode zur Anode bewegt.

- Im zweiten Experiment konnte gezeigt werden, dass ein mechanischer Impuls übertragen wird. Die Teilchen treffen auf dem Weg von der Kathode zur Anode auf ein leicht drehbar gelagertes Paddelrad und setzen es in Bewegung. Durch Umpolung der Spannung kann die Richtung der Drehbewegung gesteuert werden.

Welche Schlüsse kann man aus den Beobachtungen von Crookes ziehen?

- In der Vakuumröhre gibt es einen elektrischen Stromfluss, wobei in diesem Zusammenhang Kathodenstrahlen erzeugt werden.

- Die Strahlen können durch elektrische oder magnetische Felder beeinflusst werden und verhalten sich so, als wären sie negativ aufgeladene Teilchen.

[20] Die frühen Experimente von Hittorf (1869) und Crookes (1879) zeigten, dass, bei einem niedrigem Druck, Kathodenstrahlen emittiert werden. Deren Natur wurde kontrovers diskutiert. Crookes und die Mehrzahl der britischen Physiker hielt sie für einen *Strom von Molekülen*, während man in Deutschland die Meinung vertrat, dass es sich um eine Art elektromagnetische Strahlung handelte.

- Kathodenstrahlen können aus jedem Metall erzeugt werden. Auch die Eigenschaften der Teilchen sind unabhängig vom Kathodenmaterial.

- Die Kathodenstrahlen üben einen Impuls auf Objekte aus und übertragen damit Energie. Beispielsweise leuchten dünne Metallfolien, mit Kathodenstrahlen beschossen, rot auf.

Am Beispiel der Kathodenstrahlen kann man exemplarisch darstellen, wie schwer es den Forschern damals gegangen ist, ihre Beobachtungen zu erklären. Crookes vermutet, dass die Moleküle in dem Gas mit den Wänden der Glasröhre stoßen, sich auf bislang unbekannte Weise negativ aufgeladen werden, dann vom Potenzial der Kathode abgestoßen werden und mit hoher Geschwindigkeit durch die Kammer fliegen. Diese negativen Moleküle bewegen sich entlang einer geraden Linie, tragen Impuls und Energie, werden von magnetischen Feldern abgelenkt und verursachen die Fluoreszenz, wenn sie mit den Glaswänden stoßen. Crookes Theorie wurde schnell wieder verworfen. Man fand, dass die Teilchen ohne abgelenkt zu werden eine Entfernung von einem Meter zurücklegten ohne abgelenkt zu werden. Aus der kinetischen Theorie der Gase (Kapitel *Thermodynamik*) kann man aber die mittlere freie Weglänge eines Moleküls bei den herrschenden Druckverhältnissen berechnen. Hier ergibt sich ein Wert von nur wenigen Millimetern. Später fand man sogar, das die Kathodenstrahlen mikrometerdicke Metallfolien durchqueren können. Auf den ersten Blick schien Ansatz von Crook also geeignet, aber die gemachten Beobachtungen standen nicht im Einklang mit der Theorie. Möglicherweise handelt es sich bei den Kathodenstrahlen um elektromagnetische Wellen. Licht breitet sich gradlinig aus, trägt Impuls und Energie, kann Fluoreszenz anregen und durchdringt dünne Folien. Das einzige Problem lag in der Beobachtung, dass das Ausbreitung der vermeintlichen Lichterscheinung durch ein Magnetfeld beeinflusst wird. Aus heutiger Sicht ein Killerargument, aber zur damaligen Zeit war die Theorie von Maxwell noch frisch und es war nicht auszuschließen, dass es elektromagnetische Strahlung geben könnte, die anders als sichtbares Licht auf magnetische Felder reagiert. Beide Theorien wurden heftig diskutiert und die Kontroverse verdeutlicht die Philosophie des Erkenntnisgewinns in den Naturwissenschaften.

Link to video `Crookes Railway Tube`

On this view we have in the cathode rays matter in a new state, a state in which the subdivision of matter is carried very much further than in the ordinary gaseous state: a state in which all matter ... is of one and the same kind [**?**].

J.J. Thomson, 1897

Es war J.J. Thomson, der herausfand, dass Röntgenstrahlung geeignet ist, ein aufgeladenes Elektroskop zu entladen. Es schloss daraus, dass die Strahlung die Moleküle der Luft ionisierte und dadurch die Luft elektrisch leitend wird. Das bedeutet, dass die Moleküle in geladene Fragmente zerfallen. Man bedenke, dass man bis zu diesem Zeitpunkt solch eine Ladungstrennung nur in der Elektroyse (z.B. $NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-$), also in

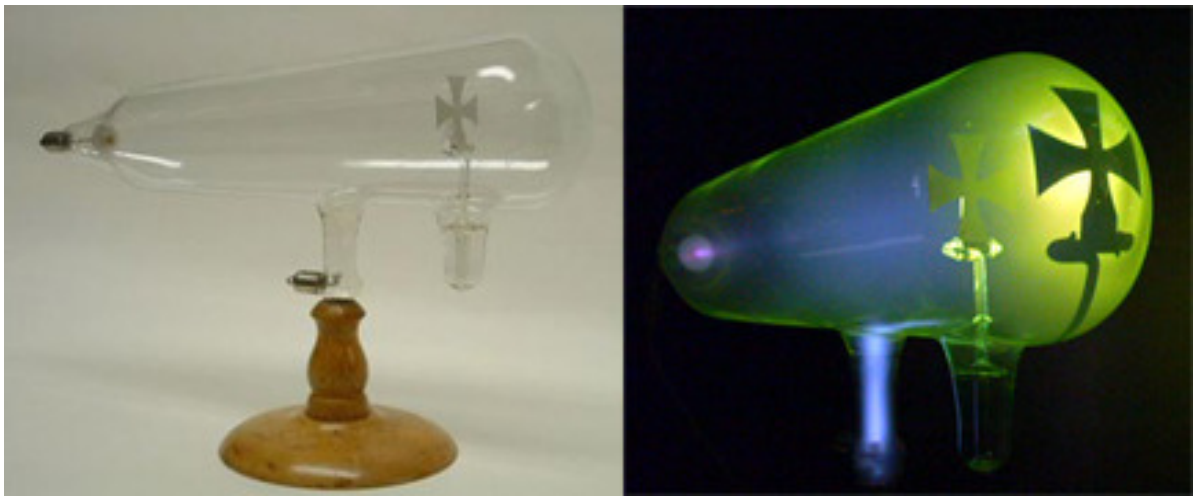


Abb. 15.21: Die Crookes-Hittorf Röhre ist eine elektrische Vakuum-Entladungsröhre mit deren Hilfe die Kathodenstrahlen entdeckt wurden [**?**].

Flüssigkeiten beobachtet hatte. Moleküle tun sich also scheinbar zusammen und beinhalten Ladungen. Es war nur noch ein kleiner aber wichtiger Schritt zur Erkenntnis, dass so ein Verhalten auch für die Atome selbst gilt. Hinweise waren beispielsweise die Ionisation von atomarem Helium durch Röntgenstrahlung. Wie man mittlerweile weiß, handelt es sich bei den von Geissler und Crooke betrachteten Teilchen um Elektronen. Diese sind extrem klein ($2.8 \cdot 10^{-15}$m) und es ist erstaunlich, dass man Experimente durchführen kann, die die Eigenschaften einzelner Elektronen offenlegen. J.J. Thomson konnte 1887 demonstrieren, dass alle Atome negativ geladene subatomare Teilchen (Elektronen)[21] enthalten.

Link to simulation `Bestimme mit Hilfe des Experimentes e/m`

I believe there are 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366 231 425 076 185 631 031 296 protons in the universe and the same number of electrons.[22]

Arthur Eddington, 1938

Spezifische Ladung

I can see no escape from the conclusion that (cathode rays) are charges of negative electricity carried by particles of matter [**?**].

[21] Der Name Elektron geht auf G. J. Stoney zurück, der 1891 den Begriff prägte.

[22] In der Astrophysik ist die Eddington-Zahl ($136 \cdot 2^{256} = 1.57 \cdot 10^{79}$) die Anzahl der Protonen im beobachtbaren Universum. Aktuelle Schätzungen gehen von etwa 10^{80} Protonen aus. Eddington versuchte die für die Atomphysik wichtige Feinstrukturkonstante mit der Anzahl der aller Protonen zu verbinden. Der aktuelle Wert ist nicht 1/136 sondern 1/137.036. Klar ist mittlerweile, dass die Feinstrukturkonstante NICHT der Kehrwert einer ganzen Zahl ist.

J.J. Thomson (1897)

Die Experimente von J.J. Thomson können wie folgt zusammengefasst werden

- Kathodenstrahlen übertragen Energie, Impuls und Masse.
- Unabhängig vom Material werden stets dieselben Eigenschaften bei den Katodenstrahlen festgestellt.
- Kathodenstrahlen durchdringen dünne Metallfolien.
- Die Teilchen der Kathodenstrahlung sind negativ geladen.
- Die Kathodenstrahlen der Elemente sind ununterscheidbar und kommen somit in allen Atomen vor. Es liegt nahe zu vermuten, dass es sich hier um subatomare Teilchen handelt.

Mit Hilfe elektrischer und magnetischer Ablenkfelder gelang es ihm eine wichtige physikalische Größe zu bestimmen [**?**]. Diese ist die spezifische Ladung, das Verhältnis zwischen Ladung und Masse (q/m). Thomsons Ergebnis war für alle überraschend.[23] Das Verhältnis, was er für die Kathodenstrahlen erhielt war um mehr als DRI Größenordnungen geringer im Vergleich zu Studien im Rahmen der Elektrolyse. Daraus ergeben sich zwei mögliche Erklärungen: Die Elektronenladung ist deutlich geringer als die Ladung des ionisierten Atoms oder die Masse des Elektrons ist merklich geringer im Vergleich zum Atom. Für das Elektron und andere Elementarteilchen ergaben sich q/m-Werte von

Ladung-zu-Masse Verhältnis des Elektrons: $q_e/m_e = -1.76 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$

Ladung-zu-Masse Verhältnis des Protons: $q_e/m_p = -9.57 \cdot 10^{7}\,\mathrm{C/kg}$

Ladung-zu-Masse Verhältnis des Myons: $q_e/m_{myon} = -8.52 \cdot 10^{8}\,\mathrm{C/kg}$

Oben ist der heute akzeptierte q/m-Wert für Wasserstoff angegeben. Thomson fand $10^{11}\,\mathrm{C/kg}$. Im Vergleich zum q/m-Wert von $10^{8}\,\mathrm{C/kg}$, der sich aus der Elektrolyse für Wasserstoff ergab, wurde klar, dass Thomson ein Teilchen entdeckt hatte, dass 1000-mal leichter war als das leichteste Atom! Da der Wert von q/m für das Elektron darüber hinaus unabhängig vom Material der verwendeten Elektrode war, ergab sich die wichtige Erkenntnis:

Elektronen sind fundamentale Bausteine JEDES Atoms.

[23] Praktisch zeitgleich bestimmte Wiechert ebenfalls das e/m-Verhältnis. Er nannte die Teilchen das *elektrische Atom.*

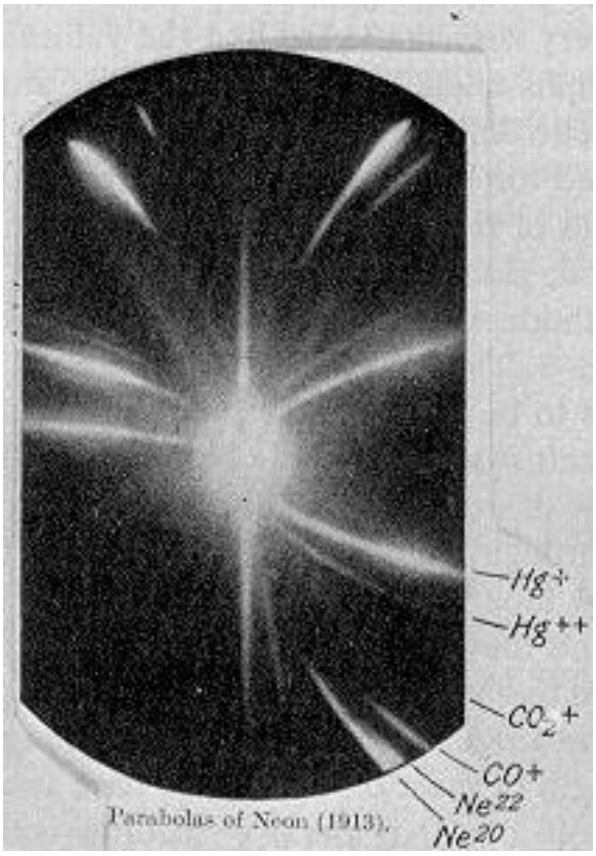


Abb. 15.22: Thomson interpretierte die Spuren als Isotope des Elements Neon. Die Spur bei der Masse 20 ist, genauso wie bei Masse 22, einfach ionisiertes Neon. Die beiden Neonisotope sind chemisch identisch, aber unterschiedlich in ihrer Masse. Es sei angemerkt, dass Isotope radioaktiver Elemente bereits von Soddy entdeckt worden waren. Thomsons Resultat war der erste Beweis dafür, dass nicht-radioaktive Element Isotope haben können [**?**].

Bainbridge-Methode

Alle Methoden zur Bestimmung von q/m nutzen elektrische und magnetische Felder. Das war die experimentelle Idee, den Thomson verwendete, um die Geschwindigkeit der Elektronen zu bestimmen [**?**] Der Aufbau von Bainbridge verwendet einen großen Glaskörper, der sich zwischen zwei Magnetspulen befindet, siehe Abb. 15.25. Elektronen einer bekannter kinetischer Energie werden tangential in den Glaskörper eingeschossen. Um die Bahn der Elektronen sichtbar zu machen, ist der Glaskolben mit etwas Helium gefüllt.

Link to video `Electrons in a Uniform Magnetic Field 1959`

Obwohl damit nur das Ladung-zu-Masse Verhältnis bestimmt ist, gestattet der Wert unterschiedliche Elementarteilchen zu vergleichen.

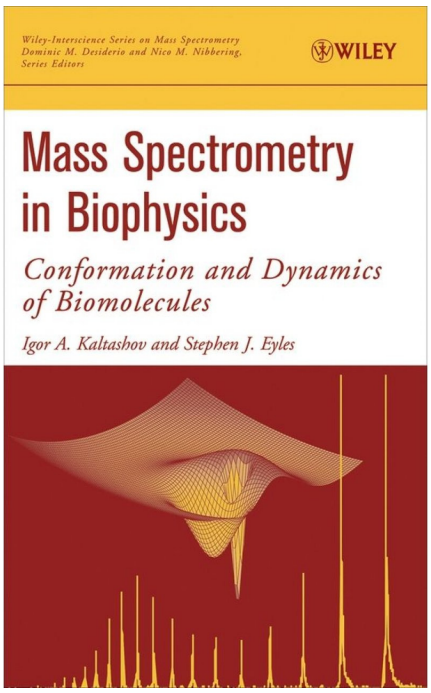


Abb. 15.23: Ref. [?]

Ladung-zu-Masse im Vergleich: Proton-zu-Elektron: $q_e/m_p = -1836 \cdot (q_e/m_e)$

Ladung-zu-Masse im Vergleich: Myon-zu-Elektron: $q_e/m_p = 207 \cdot (q_e/m_e)$

Aus diesen Vergleichen geht hervor, dass das Proton 1836-mal und das Myon 207-mal schwerer ist als das Elektron. Der m/e-Wert für das Wasserstoffion ist nur $10^{-8}\,\mathrm{kg/C}$. Diese Analyse gibt einen ersten Hinweis darauf, dass es sich beim Elektron um ein extrem leichtes Teilchen handeln könnte. Der so ermittelte Wert für das q/m Verhältnis lässt sich im übrigen schon aus dem Faradayschen Gesetz ableiten. Faraday erkannte, dass eine Ladungsmenge von etwa 10^5 Coulomb pro Mol notwendig ist, um Metalle mit einfach geladenen Ionen zu galvanisieren. Die Rechnung ergibt einen Wert, der schon gut mit dem heutigen Wert der Elementarladung übereinstimmt:

$$\begin{aligned} q &= \frac{10^5\,\mathrm{C/mol}}{N_A} \\ q &= \frac{10^5\,\mathrm{C/mol}}{6.02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}} \\ q &= 1.67 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \end{aligned} \tag{15.15}$$

In einem von Tolman und Stewart im Jahr 1916 durchgeführten Experiment [?] wurde bewiesen, dass Ladungsträger in einem Leiter mit den zuvor in Kathodenstrahlen entdeckten Elektronen identisch waren. Das Konzept freier Elektronen in einem Leiter ist eine wesentliche Erkenntnis der Elektrodynamik und das Tolman-Stewart-Experiment demonstriert dies auf grundlegende Weise.

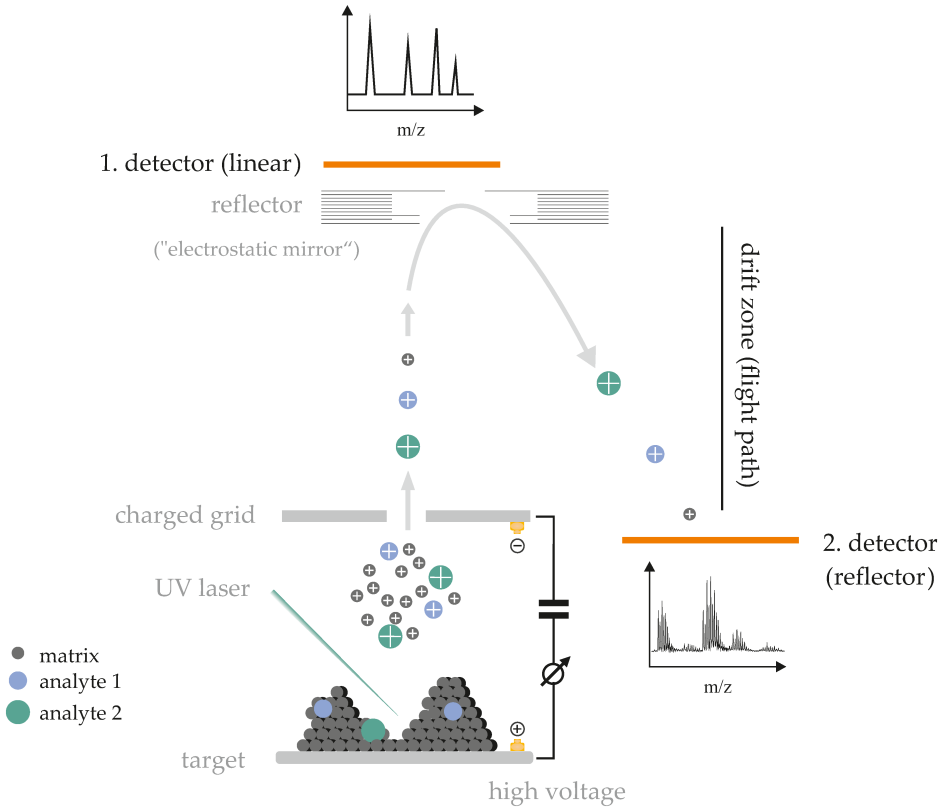
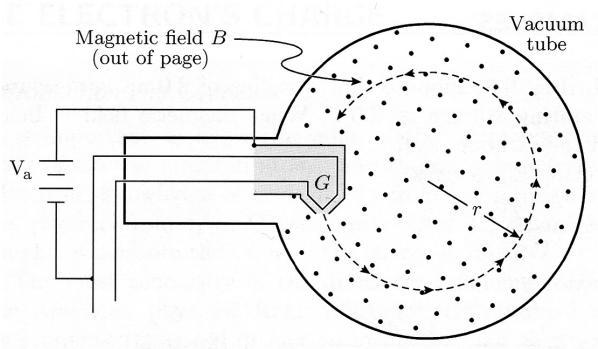


Abb. 15.24: In der Massenspektrometrie ist *Matrix-Assisted Laser Desorption and Ionisation* (MALDI) eine Ionisationstechnik, die Laserlicht verwendet, um große Moleküle aus einer Matrix mit minimaler Fragmentierung herauszulösen, um ihre chemische Zusammensetzung zu bestimmen [**?**].

Abb. 15.25: Bainbridge-Aufbau zur Bestimmung von e/m. Eine auf einem bestimmten Potenzial (Spannung V_a) liegende Elektronenkanone (G) liefert schnelle Elektronen. Im evakuierten Glaszylinder (vacuum tube) bewegen sich die Elektronen aufgrund eines externen Magnetfeldes auf einer Kreisbahn mit Radius r [**?**].



Proton-electron mass ratio from laser spectroscopy of HD^+ at the part-per-trillion level [?]: Recent mass measurements of light atomic nuclei in Penning traps have indicated possible inconsistencies in closely related physical constants such as the proton-electron and deuteron-proton mass ratios. These quantities also influence the predicted vibrational spectrum of the deuterated molecular hydrogen ion (HD^+) in its electronic ground state. We used Doppler-free two-photon laser spectroscopy to measure the frequency of the v=0 → 9 overtone transition (v, vibrational quantum number) of this spectrum with an uncertainty of 2.9 parts per trillion. By leveraging high-precision ab initio calculations, we converted our measurement to tight constraints on the proton-electron and deuteron-proton mass ratios, consistent with the most recent Penning trap determinations of these quantities. This results in a precision of 21 parts per trillion for the value of the proton-electron mass ratio.

The experiments discussed in this paper were undertaken in the hope of gaining some information as to the nature of the Cathode Rays. The most diverse opinions are held as to these rays; according to the almost unanimous opinion of German physicists they are due to some process in the ether to which -inasmuch as in a uniform magnetic field their course is circular and not rectilinear- no phenomenon hitherto observed is analogous: another view of these rays is that, so far from being wholly etherial, they are in fact wholly material and that they mark the paths of particles of mutter charged with negative electricity. It would seem at first sight that it ought not to be difficult to discriminate between views so different, yet experience shows that this is not the case, as amongst the physicists who have most deeply studied the subject can be found supporters of either theory [**?**].

J. J. Thomson (1897)

Anwendungen 3^{4LP}

Ein Beispiel aus der Massenspektrometrie

Eine Anwendung der Methode der q/m-Bestimmung erlaubte J.J. Thomson ein weiteres Phänomen der Materie aufzulösen, nämlich dass die Elemente aus unterschiedlichen Isotopen zusammengesetzt sind (Vorlesung *Kerne*). Isotope[24] sind Atome mit einer bestimmten Anzahl an Protonen, aber einer unterschiedlichen Anzahl an Neutronen. Dadurch ändert sich die Masse bei gleicher Ladung. Durch seine Technik gelang es ihm, Isotope des Edelgases Neons nachzuweisen. Abb. 15.1 zeigt sein experimentelles Resultat.

Die auf dieser Methode aufbauende Massenspektrometriee spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen der Physik, Chemie, *life sciences* (Abb. 15.23) und der Materialforschung. Abb. 15.24 zeigt, wie MALDI[25] die Flugzeit-Massenspektroskopie nutzt, um

[24] The Nobel Prize in Chemistry 1921 was awarded to Frederick Soddy *for his contributions to our knowledge of the chemistry of radioactive substances, and his investigations into the origin and nature of isotopes.*

[25] MALDI: Matrix-Assisted Laser Desorption and Ionization

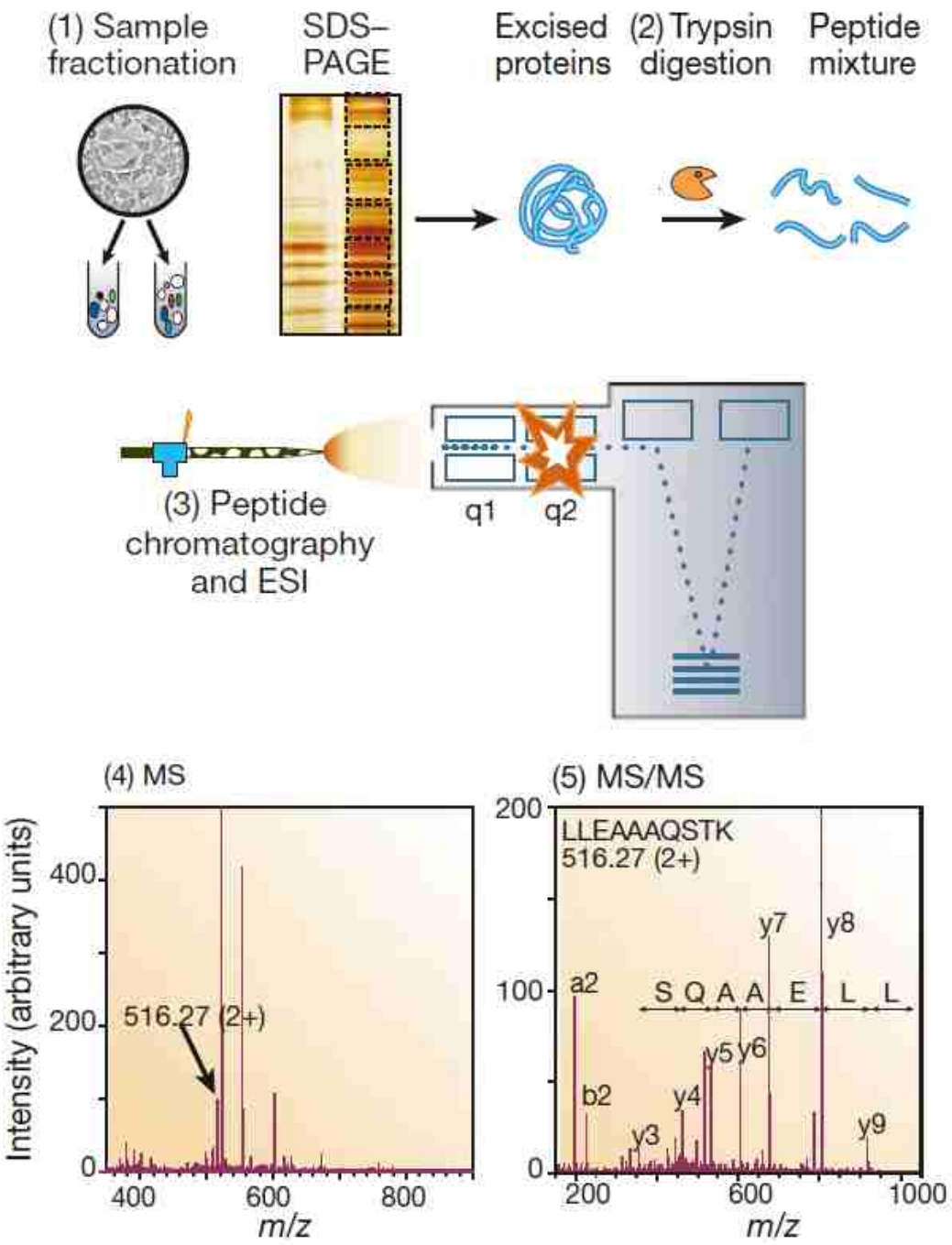


Abb. 15.26: Ein Proteomik-Experiment wird in mehreren Teilschritten durchgeführt. Zunächst werden die Proteine analysiert und mittels biochemischer Fraktionierung aus dem Gewebe isoliert. Im nächsten Schritt werden die Proteine enzymatisch zu Peptiden abgebaut. Danach werden die Peptide mit eineer Elektrospray-Ionenquelle in kleine, hoch geladene Tröpfchen zerstäubt und die Massenverteilung mit Hilfe eines Massenspektrometer analysiert. Die resultierenden Spektren werden zur Identifizierung mit Datenbanken abgeglichen [**?**].

strukturelle Informationen von Biomolekülen zu sammeln.[26] Eine wichtige Anwendung der Massenspektrometrie ist die Erforschung des Proteoms, genannt Proteomik. Im Gegensatz zu einer Genexpressionsanalyse[27] unter Verwendung von Oligonukleotiden Chips (Transkriptomik)[28], geht die Proteomik auf die Ebene der Genprodukte. Das Proteom beinhaltet die Gesamtheit aller in einer Zelle unter bestimmten Bedingungen vorliegenden Proteine. Abb. 15.26 verdeutlicht, welche Teilschritte notwendig sind, um solche Untersuchungen durchzuführen. Die Methode charakterisiert Proteinaktivitäten, Interaktionen und subzelluläre Verteilungen, die Proteinzusammensetzung von Organellen, und dient der systematischen Aufklärung von Protein-Protein-Wechselwirkungen und der Kartierung von Protein-Phosphorylierung als Reaktion auf einen äußeren Reiz. Die auf Massenspektrometrie basierende Proteomik hat vielfältige biologische Anwendungen. In bahnbrechenden Studien wurde es verwendet, um den Inhalt subzellulärer Strukturen und Organellen zu entschlüsseln und so Informationen über die Lokalisierung von Proteinen in Zellen und Gewebe zu erhalten. Weiter können Strukturmerkmale höherer Ordnung von Proteinkomplexen erkannt werden, einschließlich der Ausrichtung und Stöchiometrie der Untereinheiten.

[26] The Nobel Prize in Chemistry 2002 was awarded *for the development of methods for identification and structure analyses of biological macromolecules* with one half jointly to John B. Fenn and Koichi Tanaka *for their development of soft desorption ionisation methods for mass spectrometric analyses of biological macromolecules* and the other half to Kurt Wüthrich *for his development of nuclear magnetic resonance spectroscopy for determining the three-dimensional structure of biological macromolecules in solution.*

[27] Die Genexpressionsanalyse untersucht die Umsetzung der genetischen Information mit Hilfe molekularbiologischer und biochemischer Methoden.

[28] Das Transkriptom ist die Summe aller zu einem bestimmten Zeitpunkt in einer Zelle transkribierten, das heißt von der DNA in RNA umgeschriebenen Gene.



1 Nachweis des Interferenzeffekts an einzelnen Elektronen (Jönsson 1961)

2 Experimente zum freien Fall (Galilei um 1600)



3 Öltröpfchen Experiment (Millikan 1910)

4 Aufspaltung von Sonnenlicht mit Hilfe eines Prismas (Newton 1665)

5 Nachweis der Interferenz von Licht (Young 1801)

6 Torsionsbalkenexperiment zur Wägung der Erde (Cavendish 1798)

7 Messung des Erdumfangs (Eratosthenes 300 v. Chr)

8 Experimente mit Körpern auf einer schiefen Ebene (Galilei 1600)

9 Streuexperimente am Atomkern (Rutherford 1911)

10 Foucaultsches Pendel (1851)

Millikan-Versuch

Mr. Harvey Fletcher and myself, who have worked together on these experiments since December 1909 have studied in this way between December and May from one to two hundred drops which had initial charges from 1 to 150 and made from oil, mercury and glycerine and found in every case the original charge on the drop to be an exact multiple of the smallest charge which we found that the drop caught from the air [**?**].

Robert Millikan (1910)

Im Millikan-Experiment wird der Wert der Elementarladung nun tatsächlich bestimmt. Die Messung erfolgt mit Hilfe kleiner Tropfen, die sich, elektrisch aufgeladen, im Feld eines Kondensators bewegen. Die auftretenden Tropfenladungen häufen sich bei ganzzahligen Vielfachen einer Ladung mit dem Wert $(1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})$. Die Auswertung ergibt:

- Es gibt eine kleinste elektrische Ladung.

  Elektrische Elementarladung $e = 1.602 \cdot 10^{19}\,\mathrm{C}$

- Alle beobachteten Ladungsmengen sind Vielfache dieser Elementarladung e.

- Die elektrische Ladung ist eine quantisierte physikalische Größe.

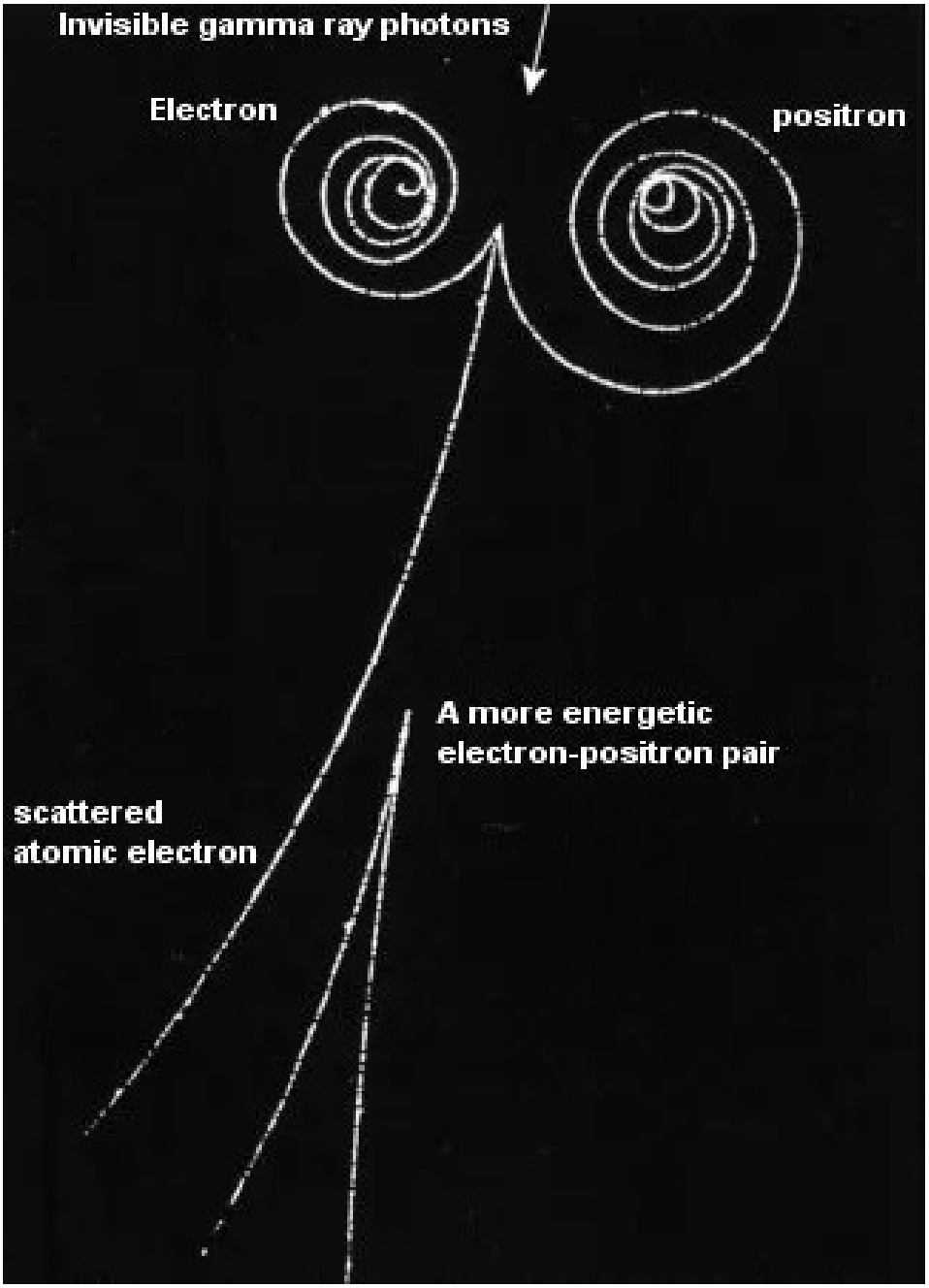


Abb. 15.27: Beispiel für Spuren geladener Teilchen in einer Blasenkammer. Hochenergetische γ-Photonen treten in die Kammer ein. Da die Lichtquanten ungeladen sind, hinterlassen sie keine ionisierenden Spuren und sind daher nicht sichtbar. Eines der Photonen wechselwirkt mit einem niederenergetischen Positron und in der Reaktion werden ein Elektron und ein Positron erzeugt. Das Magnetfeld in der Kammer bewirkt, dass die geladenen Teilchen, je nach Ladungszustand, gekrümmten Bahnen folgen. Der Radius der Kurven gibt Hinweise auf die Energie der Teilchen. Je größer der Radius der Kurve, desto höher die Energie. Unten im Bild zerfällt ein weiteres Photon in ein hochenergetisches Elektron-Positronpaar.

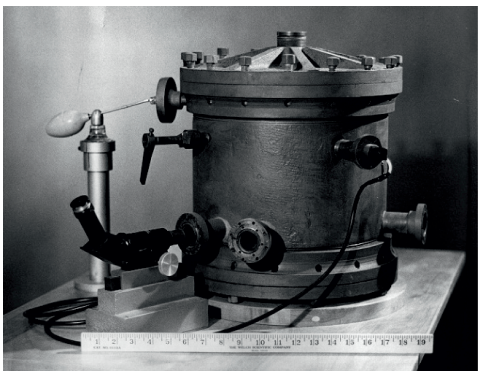


Abb. 15.28: Photo des experimentellen Aufbaus, mit dem Millikan sein Öltröpfchenexperiment durchführte [**?**].

- Der Wert der Elementarladung stimmt mit Ladung eines einwertigen Ions überein.

Historisch gesehen sieht man schon in der Knotenregel[29] von Kirchhoff das Konzept der Erhaltung der Ladung.

Der Ladungserhaltungssatz ist entscheidender Baustein bei der Analyse von Experimenten in der Teilchenphysik.[30] Er unterbindet Reaktionen der Form

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow p + n \\ p + n &\rightarrow p + n + \pi^+ \end{aligned}$$

lässt aber folgende Reaktionenpfade zu,[31] siehe auch Abb. 15.27:

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow p + p + p + \overline{p} \\ e^+ + e^- &\rightarrow \mu^+ + \mu^- \\ \gamma &\rightarrow e^+ + e^- \end{aligned}$$

Warum merkt man im Alltag nichts von der Ladungsquantisierung? Die einzelne Elementarladung ist klein gegenüber der Anzahl der Ladungsträger beim Messen eines elektrischen Stroms. Das fällt im normalen Haushalt gar nicht auf.

Im Experiment (Abb. 15.28) werden, statt Wassertropfen, Öltropfen verwendet, da diese nur langsam verdampfen. Die Masse der Tropfen ist damit über längere Zeit nahezu konstant.

Perhaps these numbers have little significance to the general reader who is familiar with no electrical units save those in which his monthly light bills are rendered. If these latter seem excessive, it may be cheering to reflect that the number of electrons contained in the quantity of electricity which courses every second through a common sixteen-candle-power electric-lamp filament, and for which we pay 1/ 100,000 of 1 cent, is so large that

[29] *Lexikon:* **Kirchhoffsche Knotenregel:** An jedem Stromverzweigungspunkt (Knoten) ist die Summe der zufließenden gleich der Summe der abfließenden Ströme.

[30] Wie viele Erhaltungssätze kennt die Physik?

[31] $\overline{p}$ ist das Antiproton.

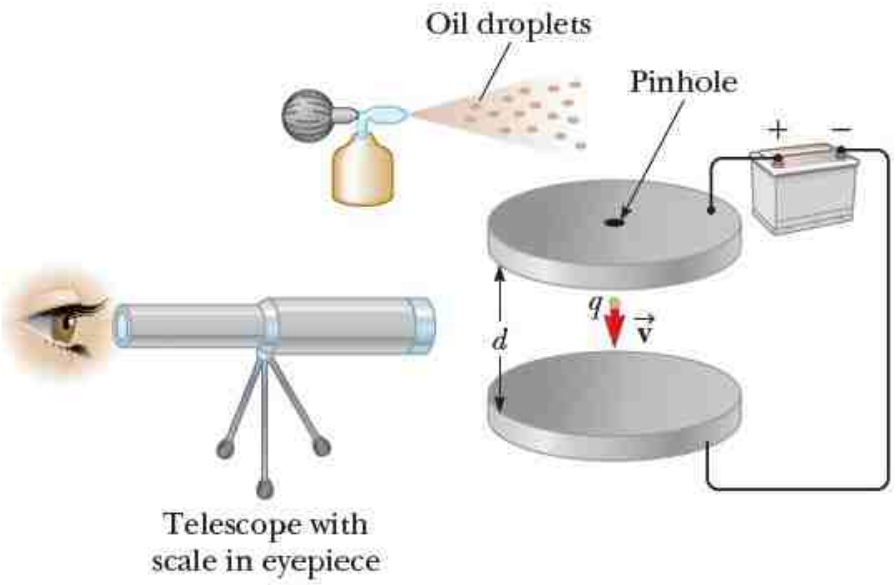


Abb. 15.29: Schematischer Aufbau des Millikan Experiments zur Bestimmung der Elementarladung [**?**].

if all the two and one-half million inhabitants of Chicago were to begin to count out these electrons and were to keep on counting them out each at the rate of two a second, and if no one of them were ever to stop to eat, sleep, or die, it would take them just twenty thousand years to finish the task [**?**].

Robert Millikan (1924)

Die Bestimmung der Masse der Tröpfchen war die eigentliche Herausforderung für Millikan, denn der Mikrometer-Durchmesser der Tropfen erlaubte es dem Forscher nicht, die Masse exakt mit Hilfe der bekannten Dichte zu bestimmen. In der Messprozedur nutzte er statt statischer Bedingungen, die Bewegung der Teilchen in der Luft aus. Indem er die Tröpfchen im elektrischen Feld langsam auf und ab bewegte, erhielt er über die Stokessche Reibung (Viskosität) zusätzliche Informationen, die eine genauere Analyse erlaubten. Damit war es ihm möglich, die Ladungsmenge auf den Öltröpfchen mit einer Genauigkeit von $\pm 0.1\%$ anzugeben.

Link to video `Millikan's oil drop experiment`

Link to video `The Millikan Experiment 1959`

Bei der Auswertung des Millikan-Experiments, siehe Abb. 15.29, müssen unterschiedliche Kräfte berücksichtigt werden (siehe Kapitel *Mechanik* und *Hydrodynamik*).

- Aufgrund der Gravitationskraft F_g fallen die kugelförmigen Öltröpfchen (Radius

$r_{droplet}$, Dichte $\rho_{droplet}$)

$$F_g = m_{droplet} \cdot g = \frac{4}{3}\pi\, r_{droplet}^3 \cdot \rho_{droplet} \cdot g \tag{15.16}$$

- Die Tröpfchen erfahren in der Luft eine Auftriebskraft $F_{Auftrieb}$

$$F_{Auftrieb} = \frac{4}{3}\pi\, r_{droplet}^3 \cdot \rho_{air} \cdot g \tag{15.17}$$

- Man kann die Bewegung der Tropfen als laminare Umströmung deuten. In sofern muss man die Stokessche Reibung F_{Stokes} (Gl. 15.13) berücksichtigen.
- Die Öltröpfchen sind geladen und reagieren auf das elektrische Feld E_e des Kondensators (Gl. 15.12), wobei sich E_e aus der angelegten Spannung U_e und dem Abstand der Kondensatorplatten d berechnet.

Schaltet man das elektrische Feld des Kondensator zunächst aus, tragen nur die Gewichtskraft, die Reibung und der Auftrieb bei

$$F_{Stokes} = F_g - F_{Auftrieb} \tag{15.18}$$

$$6\pi\, \eta_{air} \cdot v_{droplet} \cdot r_{droplet} = \frac{4}{3}\pi\, r_{droplet}(\rho_{droplet} - \rho_{air}) \cdot g \tag{15.19}$$

Damit lässt aus einer Messung der Sinkgeschwindigkeit der Tropfenradius bestimmen.

$$r_{droplet} = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta_{air} \cdot v_{droplet}}{(\rho_{droplet} - \rho_{air}) \cdot g}} \tag{15.20}$$

Im nächsten Versuchsschritt schaltet man das elektrische Feld an und sorgt dafür, dass die Tröpfen schweben. Unter diesen Bedingungen spielen die dynamischen Beiträge keine Rolle mehr und das Kräftegleichgewicht ergibt sich aus Gravitation, Auftrieb und Coulombkraft

$$F_e = F_g - F_{Auftrieb} \tag{15.21}$$

$$q_{droplet}E_e = \frac{U_e}{d} = \frac{4}{3}\pi\, r_{droplet}(\rho_{droplet} - \rho_{air}) \cdot g \tag{15.22}$$

Durch Umstellung erhält man die Ladung auf dem Tropfen

$$q_{droplet} = \frac{4}{3}\frac{\pi\, r_{droplet}(\rho_{droplet} - \rho_{air}) \cdot g \cdot d}{E_e} \tag{15.23}$$

Die Auswertung der Experimente zeigt, dass die Öltropfen Vielfache einer Elementarladung e tragen, siehe Abb. 15.30 [**?**]. Das Experiment von Millikan belegt, dass die elektrische Ladung quantisiert ist. Gibt es einen Unterschied zwischen dem Wert von positiver und negativer Ladung? Wenn der Unterschied $|e^+| + |e^-|$ größer als $2 \cdot 10^{-18}$

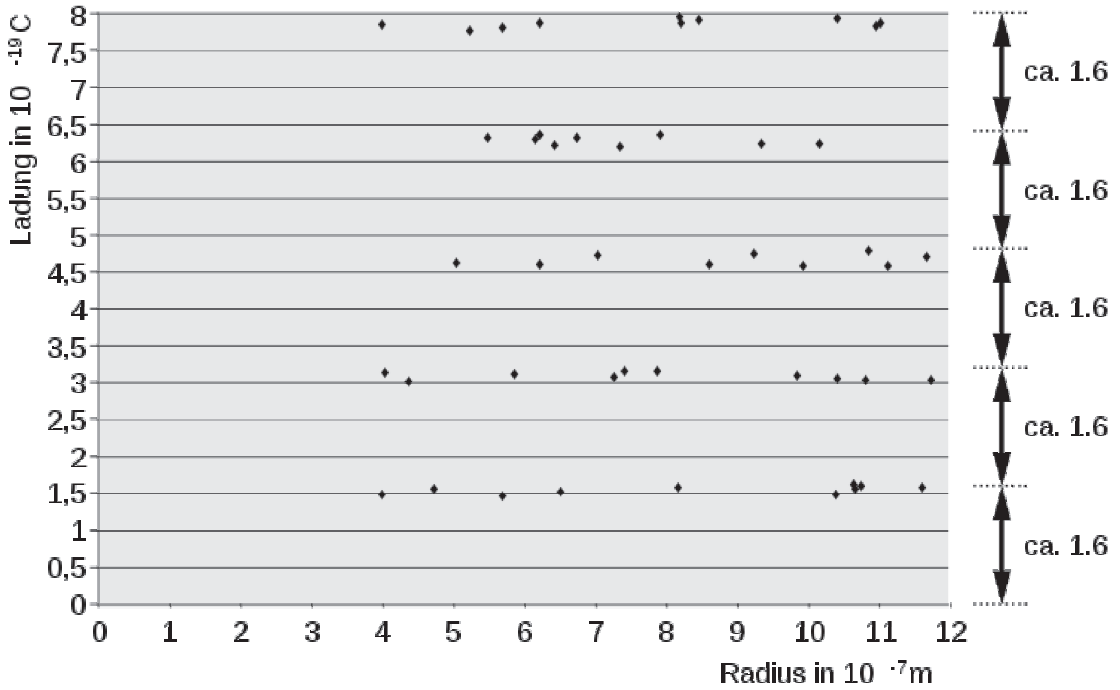


Abb. 15.30: Ergebnisse zur Bestimmung der Elementarladung mit Hilfe des Öltröpfchen-Versuchs nach Millikan [**?**]

wäre, könnte man die Expansion des Universums allein aufgrund elektrostatischer Kräfte erklären [**?**]. Hochgenaue Experimente [**?**] haben nachgewiesen, dass der Unterschied deutlich geringer ist, nämlich $10^{-21}e$ oder $1.6 \cdot 10^{-40}$ C!

Die Masse der die Becquerelstrahlen bildenden Elektronen ist von der Geschwindigkeit abhängig; die Abhängigkeit ist genau darstellbar durch die Abrahamsche Formel. Es ist demnach die Masse der Elektronen rein elektromagnetischer Natur [**?**].

Kaufmann 1902

Mit diesem Wert für die Elementarladung e lässt sich die Masse von Elektron und Proton aus der spezifischen Ladung $(q_e/\, m_e)$ berechnen. Die Masse des Protons entspricht dabei nahezu der Masse des Wasserstoffatoms.

Masse des Elektrons: $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg

Masse der Protons: $1.673 \cdot 10^{-27}$ kg

A Stringent Limit on a Drifting Proton-to-Electron Mass Ratio from Alcohol in the Early Universe [**?**]**:** The standard model of physics is built on the fundamental constants of nature, but it does not provide an explanation for their values, nor require

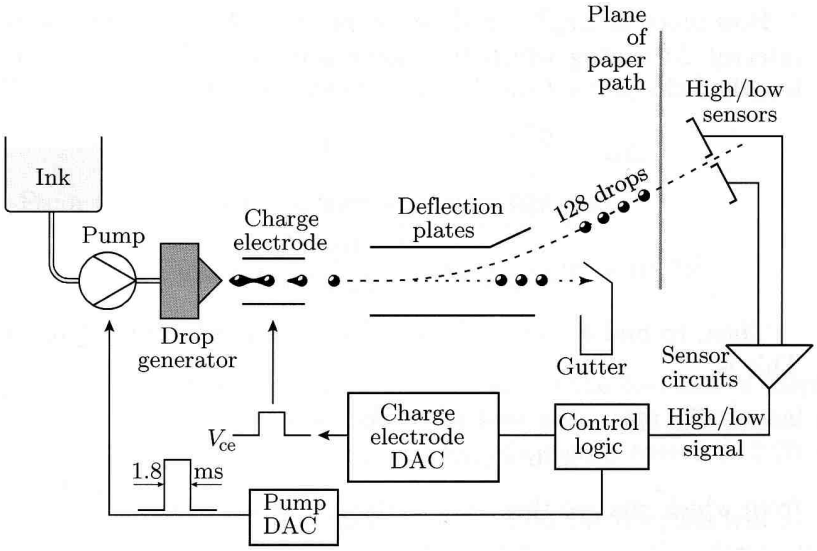


Abb. 15.31: Arbeitsweise eines Tintenstrahldruckers. Für den Betriebsind ein Tropfengenerator, eine elektrische Ansteuerung, sowie Ablenkungsplatten notwendig [**?**].

their constancy over space and time. Here we set a limit on a possible cosmological variation of the proton-to-electron mass ratio μ by comparing transitions in methanol observed in the early universe with those measured in the laboratory. From radio-astronomical observations of PKS1830-211, we deduced a constraint of $\Delta\mu/\mu=(0.0\pm1.0)\cdot10^{-7}$ at redshift z=0.89, corresponding to a look-back time of 7 billion years. This is consistent with a null result.

Anwendungen 4^{4LP}

Ein Beispiel aus der Technik

Tintenstrahldrucker arbeiten mit elektrischer Ablenkung von Mikroteilchen. Im Druckerkopf werden die Tintenpartikel elektrostatisch aufgeladen und durch die elektrischen Felder so abglenkt, dass auf dem Papier Buchstaben und Symbole erscheinen. Abb. 15.31 zeigt Aufbau und Arbeitsweise eines Tintenstrahldruckers. Etwa 10^5 Tröpfchen treffen pro Sekunde auf das Papier und etwa 100 Tropfen sind erforderlich für einen Buchstaben. Der Tropfendurchmesser beträgt etwa 60 μm bei einem Gewicht von 10^{-10} kg. Eine Ladungsmenge zwischen 50 und 1000 fC wird auf die Tropfen gebracht, wobei die angelegte Spannung die abgeschiedene Ladungsmenge kontrolliert. Mit einer Geschwindigkeit von etwa 20 m/s durchqueren die Tropfen die Kondensatorplatten (Länge 1 cm, Plattenabstand 1-2 mm), werden abgelenkt und treffen auf das Papier.

Table I. Kaufmann's original (1901) data.[41]

Data point(i)	$\bar{z}$	$\bar{y}$	$\beta = v/c$	$\frac{e}{m_{total}} \times 10^{-7}$(exp.)	$\frac{(e/m)i}{(e/m)5}$ (exp.)	$\frac{e}{m_{total}} \times 10^{-7}$(calc)	$\frac{(e/m)i}{(e/m)5}$ (calc)	$[(1-\beta_i^2)/(1-\beta_5^2)]^{1/2}$
1	0.271	0.0621	0.945	0.63	0.481	0.524	0.403	0.539
2	0.348	0.0839	0.907	0.77	0.588	0.775	0.597	0.683
3	0.461	0.1175	0.864	0.975	0.744	1.010	0.778	0.819
4	0.576	0.1565	0.827	1.17	0.893	1.163	0.895	0.911
5	0.688	0.198	0.787	1.31	1.000	1.299	1.000	1.000

Abb. 15.32: Tabelle aus der Originalarbeit von Kaufmann, die nachwiesen, dass der Wert der elektrischen Ladung nicht von der Geschwindigkeit des Ladungsträgers abhängt [**?**].

Ein Beispiel aus der Elementarteilchen

Eine Untersuchung zum Nachweis von Quarks[32] nutzt Tintenstrahltechnik [**?**]. Dabei wurden unterschiedlich geladene Tropfen im Vakuum durch Kondensatorplatten fallen gelassen. Wenn die Ladung ein vielfaches von e ist, beobachtet man am Detektor voneinander getrennte Einschläge. Wenn dagegen die Ladung auf den Tropfen fraktioniert ist, dann laden auch Tropfen zwischen den Streifen. Im Experiment fallen Tetraethylenglycol-Tropfen (Masse: 16 g, Durchmesser 30 μm) mit einer Geschwindigkeit von 8.6 m/s eine Strecke von 22 m, bei einer Länge der Kondensatorplatten von 3 m. An den 3 cm voneinander entfernten Platten liegt eine Spannung von 20 kV an. Nach Durchqueren des Kondensator fallen die Tropfen nach 15 m bevor der Detektor die Ablenkung nachweist. Sehen Sie konzeptionelle Unterschiede zum Thomson-Experiment. Die Studie ergab keine Hinweise auf freie Quarks.

Zusammenfassend lässt sich anhand der vorgestellten Untersuchungen feststellen:

- Das Millikan-Experiment ist ein weiterer Nachweis für die Existenz des Elektrons.
- Alle Elektronen verhalten sich in den Experimenten gleich und sind also identisch.
- Elektron hat von allen bekannten massebehafteten Teilchen die geringste Masse.
- Die Masse und die Ladung des Elektrons sind eindeutig und es handelt sich nicht um gemittelte Werte.
- Die vorgestellten Experimente belegen, dass das Atom eine Substruktur hat.
- Das Elektron trägt nur mit einem geringen Teil zur Masse des Atoms bei.

[32] *Lexikon:* Die Theorie der **Quarks** postuliert Elementarteilchen mit einer Ladung von $\pm e/3$ und $\pm 2e/3$. Protonen und Neutronen bestehen aus je drei Quarks. Quarks konnten bislang noch nie isoliert (fraktionierte Ladung) beobachtet werden. Quarks verletzten damit nicht die Ladungsquantisierung.

Zum Abschluss dieses Kapitel noch der Hinweis die Experimente von Kaufmann, die im Rahmen der Vorlesung $E = mc^2$ vorgestellt wurden und sich damit beschäftigten, wie sich die Masse für einen ruhenden Beobachter erhöht,wenn sich die Geschwindigkeit der Elektronen der Lichtgeschwindigkeit nähert:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{15.24}$$

Die in diesem Zusammenhang wichtige Erkenntnis war, dass der Wert der Elementarladung e nicht geschwindigkeitsabhängig ist und die Verringerung im Verhältnis q/m allein auf die Änderung der Masse zurückzuführen ist. Abb. 15.32 zeigt die Daten aus der Veröffentlichung [**?**].

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Die Erkenntnis von J. J. Thomson, dass die Teilchen der Kathodenstrahlung fundamentale Bestandteile der Atome fußt auf der experimentellen Beobachtung, dass[33]

(a) die Partikel negativ geladen sind.

(b) sich die Partikel, unabhängig vom Kathodenmaterial, alle gleichen.

(c) ihre Masse deutlich geringer ist als Wasserstoff.

(d) sie dünne Folien durchdringen.

Aufgabe 1.2: Ein Elektron durchquert das elektrische Feld eines Plattenkondensators (Potenzialdifferenz ΔV, Plattenabstand d=5 mm, Länge ℓ=30 mm). Ein senkrecht dazu stehendes magnetisches Feld (B_M=1 mT, Länge ℓ=30 mm) überlappt das Kondensatorfeld. Ohne elektrisches Feld, d.h. ΔV=0 V, wird das Elektron um Δy=2 mm abgelenkt. Welche Spannung am Plattenkondensator ist notwendig, damit das Elektron ohne Ablenkung durch die Anordnung fliegt?

Der Einfachheit nehmen wir an, dass sich die Felder auf den Bereich des Kondensators beschränken. Da das Elektron geradeaus fliegen soll, kompensiert die elektrische F_e die magnetische Kraft F_M.

$$\begin{aligned} F_e &= F_M \\ e \cdot (\Delta V) &= e \cdot E_e \cdot d = e \cdot v_e \cdot B_M \end{aligned}$$

Für die Lösung benötigt man die Geschwindigkeit v_e des Elektrons. Im Magnetfeld bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn mit Radius r. Am Ende des Kondensator hat das Elektron eine Ablenkug von Δy erfahren. Aus einer geometrischen Betrachtung ergibt sich nach Pythagoras:

$$\begin{aligned} r^2 &= (r - \Delta y)^2 + \ell^2 \\ r^2 &= r^2 - 2\,r \cdot \Delta y + (\Delta y)^2 + \ell^2 \\ r &= \frac{(\Delta y)^2 + \ell^2}{2\,\Delta y} \\ r &= \frac{(0.002\,\mathrm{m})^2 + (0.03\,\mathrm{m})^2}{2 \cdot (0.002\,\mathrm{m})} \\ r &= 0.226\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

[33] Antwort: (b)

Die Geschwindigkeit v_e ergibt sich damit mit

$$\begin{aligned} v_e &= \frac{e \cdot r \cdot B_M}{m_e} \\ v_e &= \frac{(1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (0.226\,\mathrm{m}) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}}{9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} \\ v_e &= 4 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Das notwendige elektrische Feld ist daher

$$\begin{aligned} E_e &= v_e \cdot B_M \\ E_e &= 4 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T} \\ E_e &= 4 \cdot 10^4\,\mathrm{V/m} \end{aligned}$$

Damit kann man die notwendige Spannung ΔU_e am Kondensator ausrechnen

$$\begin{aligned} \Delta U_e &= E_e \cdot d \\ \Delta U_e &= 4 \cdot 10^4\,\mathrm{V/m} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\ \Delta U_e &= 200\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Der hier gerade durchgeführte Versuch beschreibt eine Versuchsanordnung mit einem Wienfilter, dass in der Massenspektrometrie ebenfalls zum Einsatz kommt.

Hätte man relativistisch rechnen müssen?

Aufgabe 1.3: Ein Öltröpfchen mit einer Nettoladung q_{drop} wird mit Hilfe eines Kondensators in der Schwebe gehalten. Die Stärke des Kondensatorfeldes E_K beträgt:

$$E_K = \frac{81\,\pi}{7} \cdot 10^5\,\mathrm{V/m}$$

Stellt man das Kondensatorfeld ab, beschleunigt der Tropfen und fällt nach kurzer Zeit mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v{=}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s}$. Wie hoch ist die Nettoladung auf dem Öltröpchen?

Für die Lösung der Aufgabe benötigt man Angaben über die Dichte des Öls ($\rho_{oil}{=}900\,\mathrm{kg/m^3}$) und die Viskosität der Luft ($\eta_{air} = 1.8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N{\cdot}s/m^2}$). Beim Fall des Tröpfchens halten sich Schwerkraft und die viskose Reibung die Waage, während beim Schweben die elektrische Kraft die Schwerkraft kompensiert. Man berechnet die Kräftegleichgewichte und löst die Gleichungen nach dem Radius r_{oil} auf. Wie man erkennt, kann man so den

Radius des Tröpfchens aus der Berechnung eliminieren.

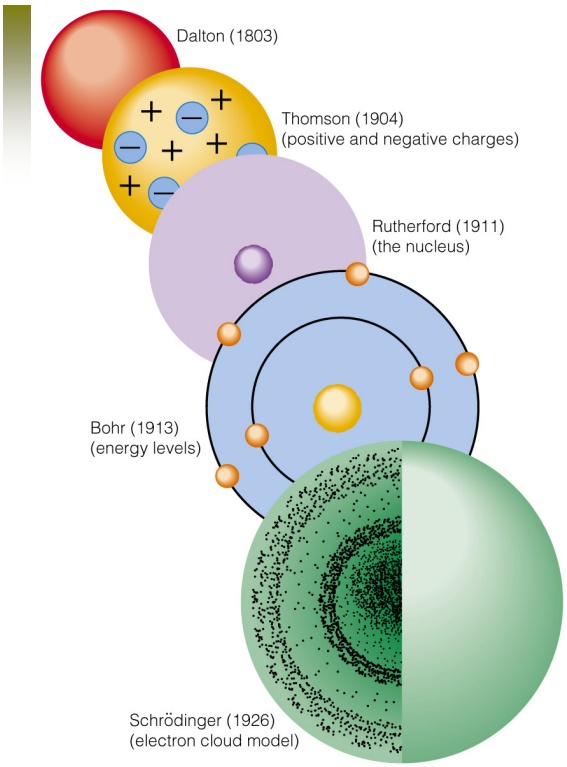
$$\begin{aligned}
q_{drop} \cdot E_K &= \frac{4}{3}\pi \cdot r_{drop}^3 \cdot \rho_{oil} \cdot g \\
r_{drop}^3 &= \frac{3\, q_{drop} \cdot E_K}{4\, \rho_{oil} \cdot g} \\
6\,\pi \cdot \eta_{air} \cdot r_{drop} \cdot v_{drop} &= \frac{4}{3}\pi \cdot r_{drop}^3 \cdot \rho_{oil} \cdot g \\
r_{drop}^2 &= \frac{18\,\pi \cdot \eta_{air} \cdot v_{drop}}{4\, \rho_{oil} \cdot g} \\
q_{drop} &= \frac{4\,\pi \cdot \rho_{oil} \cdot g}{3\, E_K} \left(\frac{9\, \eta_{air} \cdot v_{drop}}{2\, \rho_{oil} \cdot g} \right)^{3/2} \\
q_{drop} &= 8 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = 5 \cdot e
\end{aligned}$$

Es befinden sich also fünf Elementarladungen auf dem Öltröpfchen.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Nennen Sie unterschiedliche Hinweise für die Existenz von Atomen!
2. Warum kann man Atome nicht mit einem Mikroskop beobachten?
3. Warum beobachtet man an einer Batterie eine Potenzialdifferenz zwischen den beiden Polen?
4. Was versteht man unter elektrolytischer Dissoziation?
5. Wie lautet das Faradaysche Gesetz der Elektrolyse?
6. Warum leiten Gase bei geringem Druck elektrischen Strom besser als Gase bei hohem Druck?
7. Welche Bedeutung haben die Faradayschen Gesetze für die Aufklärung der Struktur der Materie?
8. Beschreiben Sie, was passiert, wenn man in einer Elektronenröhre
   - die Heizspannung erhöht.
   - die Beschleunigungsspannung herauf setzt.
   - durch ein Leck Luft in die evakuierte Röhre eindringt.
   - die Spannung umpolt.
   - von Gleichspannung auf Wechselspannung wechselt.
   - den Abstand von Anode und Kathode verringert.
9. Welche Hinweise gibt es, dass Kathodenstrahlen Energie und Impuls übertragen?
10. Welche Argumente hatte Thomson, zu behaupten, dass es sich bei Kathodenstrahlen um negativen Ladungen handelt?
11. Wie funktioniert die Bainbridge-Methode zur Bestimmung von e/m?
12. Beschreiben Sie wesentliche Merkmale eines Massenspektrometers!
13. Im Praktikum bestimmen die Studenten e/m mit Abweichungen von 50%. Wie sicher kann man sein, dass es sich um ein und dasselbe Teilchen handelt?
14. Gibt es Teilchen, die nur einen Bruchteil der Elektronenladung tragen?
15. Quarks sind geladene Teilchen. Kann man das q/m-Verhältnis von Quarks mit Thomsons Methode der elektrischen Ablenkung bestimmen?
16. Was würde passieren, wen der Wert der Elementarladung deutlich größer wäre?

15.2 Frühe Atommodelle



Thema Der Weg zum Atom
Frühe Atommodelle

Das Innere des Atoms ist so leer wie das Weltall.

Philipp Lenard

I am now convinced that we have recently become possessed of experimental evidence of the discrete or grained nature of matter, which the atomic hypothesis sought in vain for hundreds and thousands of years. The isolation and counting of gaseous ions, on the one hand, which have crowned with success the long and brilliant researches of J.J. Thomson, and, on the other, agreement of the Brownian movement with the requirements of the kinetic hypothesis, established by many investigators and most conclusively by J. Perrin, justify the most cautious scientist in now speaking of the experimental proof of the atomic nature of matter, The atomic hypothesis is thus raised to the position of a scientifically well-founded theory, and can claim a place in a textbook intended for use as an introduction to the present state of our knowledge of General Chemistry.

Wilhelm Ostwald, Outlines of Chemistry, 1913

Modelle, wie das Teilchenmodell der Chemie[34] erheben grundsätzlich nicht den Anspruch auf eine vollständige Beschreibung, sondern sind Versuche, in einem gewissen Rahmen, die physikalisch-chemische Wirklichkeit abzubilden. Forschung ist deshalb ein stetiger Erkenntnisgewinn, der dazu da ist, unsere Vorstellung über die Natur immer weiter zu verfeinern. Die im Laufe der letzten zwei Jahrhunderte vorgestellten Atommodelle sind ein gutes Beispiel diesen Prozess zu illustrieren.[35]

Existieren Atome und wie sind sie aufgebaut?

Frühe Experimente aus der Chemie (Massenerhaltung, Periodensystem der Elemente) und der Thermodynamik (Brownsche Molekularbewegung) geben Hinweise auf die Struktur. Beispielsweise liefert das Periodensystem der Elemente Hinweise darauf, dass das Atom eine Substruktur haben könnte. Wenn jedes chemische Element ein fundamentales Teilchen ist, dann gibt es allein deswegen schon 92 davon. Das ist nicht unmöglich, aber es sind verdächtig viele. Hinzu kommt, dass Gruppen dieser fundamentalen Teilchen ähnliche chemische Eigenschaften aufweisen. Schließlich klären die Experimente von Rutherford die innere Struktur (Abb. 15.33). Damit wird der Grundstein gelegt für die Arbeiten von Bohr (Kapitel *Bohrsches Atommodell*) und Schrödinger (Kapitel *Wellenfunktion*), die zu unserem heutigen Verständnis der Struktur der Atome geführt haben.

Like everyone, I'm made of atoms -which are so tiny and numerous that I inhale gaziollions of them with each breath. Some stay for a while and become a part of me. The atoms I exhale are breathed in by other people and a tiny bit of me becomes part of them. Air in the atmosphere constantly recycles, which means the atoms that I inhale include atoms exhaled by people from all over the world, who then become part of me. How awesome, cuz in this sense, we're all one.

Georgia Hernandez, grandniece of Paul Hewitt [**?**]

Größe der Atome

Ein wichtiger Schritt zum Verständnis des Atoms ist die Avogadro-Konstante:

Avogadro-Konstante $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

[34] i) Die Teilchen eines reinen Stoffes sind identisch und unterscheiden sich von den Teilchen anderer Stoffe, beispielsweise in Größe oder Masse. ii) Die Teilchen bewegen sind aufgrund ihrer Temperatur. Damit können allgemeine Aussagen zu Druck, Temperatur, Aggregatzustand und Diffusion gemacht werden.

[35] Für Robert Boyle (1627-1691) war ein Element eine reine Substanz, die mit keinem bekannten chemischen Mittel in einfachere Substanzen zerlegt werden kann. Hinter seiner Vorstellung des Baus der Materie stecken allerdings noch alchemistische Wurzeln.

include the possibility that the part of ξ thus arising is not negligible we might have defined $\phi(\nu)$ rather differently as the excess at emission of the internal kinetic energy over the mean value ξ. In that case some of the other conclusions would require reconsideration. Also, the results which have been given are not easily harmonized with the values of the specific heats of bodies at low temperatures. For these reasons, the formulation outlined above is to be taken as illustrative rather than final. Another direction in which it is practically certain that the foregoing theory is too much simplified is in the assumption of only one critical frequency ν_0. I hope to be able to return to the discussion of these questions later.

Palmer Physical Laboratory,
Princeton, N. J.

LVII. *The Structure of the Atom.* *By* Sir Ernest Rutherford, *F.R.S., Professor of Physics, University of Manchester* *.

THE present paper and the accompanying paper by Mr. C. Darwin deal with certain points in connexion with the "nucleus" theory of the atom which were purposely omitted in my first communication on that subject (Phil. Mag. May 1911). A brief account is given of the later investigations which have been made to test the theory and of the deductions which can be drawn from them. At the same time a brief statement is given of recent observations on the passage of α particles through hydrogen, which throw important light on the dimensions of the nucleus.

In my previous paper (*loc. cit.*) I pointed out the importance of the study of the passage of the high speed α and β particles through matter as a means of throwing light on the internal structure of the atom. Attention was drawn to the remarkable fact, first observed by Geiger and Marsden †, that a small fraction of the swift α particles from radioactive substances were able to be deflected through an angle of more than 90° as the results of an encounter with a single atom. It was shown that the type of atom devised by Lord Kelvin and worked out in great detail by Sir J. J. Thomson was unable to produce such large deflexions unless the diameter of the positive sphere was exceedingly small. In order to account for this large angle scattering of α particles, I supposed that the atom consisted of a positively charged nucleus of small dimensions

* Communicated by the Author.
† Proc. Roy. Soc. A. lxxxii. p. 495 (1909).

Abb. 15.33: Erste Seite des Papiers von Ernest Rutherford, in dem er sein Atommodell vorstellt [**?**].

Avogadro vermutete, dass die Teilchen in einem Gas deutlich kleiner sind, als der Abstand der Partikel untereinander. Die Teilchen bilden auch Verbünde, genannt Moleküle. Avogadro formulierte im Jahr 1811 ein Prinzip, das es erlaubte, die relativen Massen von Atomen und Molekülen unterschiedlicher chemischer Substanzen zu vergleichen:

Gase haben bei gleichen Temperatur und Druckbedingungen,
sowie bei gleichem Volumen die gleiche Anzahl elementarer Einheiten.

Erkennen sie den Zusammenhang zum Idealen Gasgesetz?[36] Die Avogadro-Hypothese gestattet es, unter standardisierten Bedingungen, die relativen Massen der Moleküle durch Wiegen einer Gasmenge zu messen. Standardbedingungen für 1 Mol sind beispielsweise ein Druck von 1 bar, eine Temperatur von 0 °C und ein Volumen von 22 Litern. Hat 1 Mol O_2 und 1 Mol N_2 eine Masse von 32 bzw. 28 g, dann ist nach der Avogadro-Hypothese das Verhältnis der Molekülmassen von Sauerstoff und Stickstoff 32/28 oder 8/7.

Man kann versuchen, die Größe der Atome mit einem einfachen Tropfenexperiment abzuschätzen. Eine geeignete Substanz ist Stearinsäure, die bei Raumtemperatur eine ölige Flüssigkeit ist. Die Säure wird in einer leicht verdunstenden Flüssigkeit (Pentan) gelöst. Dann wird ein einzelner Tropfen ($0.01\,cm^3$) der resultierenden Lösung auf eine Wasseroberfläche getropft. Der Tropfen (0.05% Stearinsäure in Pentan) breitet sich aus und das Pentan verdunstet. Was zurückbleibt ist eine Monolage der Stearinsäure auf der Wasseroberfläche. Das Experiment ergibt pro Tropfen eine Fläche von $33\,cm^2$. Das effektive Säurevolumen ist $5 \cdot 10^{-6}\,cm^3$. Berechnet man die dazugehörige Schichtdicke der Monolage, ergibt sich ein Wert von $1.5 \cdot 10^{-9}\,m$ und damit eine grobe Abschätzung für die Größe von Atomen.

Eine weitere Möglichkeit, die Größe der Atome zu ermitteln, ergibt sich anhand der Van-der-Waals Zustandsgleichung für molekulare Gase (Kapitel *Thermodynamik*):

$$\left(p + \frac{a_{vdW}}{V_{mol}^2}\right) \cdot (V_{mol} - b_{vdW}) = R_G \cdot T_K \tag{15.25}$$

wobei p der Druck, T_K die Temperatur und V_{mol} das Molvolumen ist. Die Konstante b_{vdW} beinhaltet das Eigenvolumen V_{atom} der Atome:

$$b_{vdW} = 4\,N_A \cdot V_{atom} \tag{15.26}$$

und $a_{molecule}$ bezeichnet den Eigendruck der wechselwirkenden Atome. Durch Bestimmung von p und V_{mol} bei unterschiedlichen Temperaturen kann b_{vdW} bestimmt werden und liefert über das atomare Volumen einen Wert für die Größe einzelner Atome:

$$V_{atom} = \frac{b_{vdW}}{4\,N_A} \tag{15.27}$$

[36] Schauen Sie aus Spaß mal in folgenden Artikel [**?**]

Eine Analyse des Wärmetransports oder der Viskosität von Gasen, also bei einem Temperatur- oder Geschwindigkeitsgradienten liefert über die Ermittlung von Stoßquerschnitten ebenfalls Werte für die Größe von Atomen. Atome sind allerdings keine harten Billardkugel, sondern wechselwirken miteinander. Daher ergeben sich in Abhängigkeit der verwendeten Methoden geringfügig unterschiedliche Werte.

Erkenntnisse der Chemie

Robert Boyle hat sich als einer der ersten mit dem Prinzip der Massenerhaltung beschäftigt. In Experimenten, bei denen er Zinn und Blei in einem geschlossenen Behälter erhitzte, beobachtete Boyle nach Öffnen des Gefäßes eine Massenzunahme, weil er die durch die thermische Energie ausgelöste chemische Reaktion der erhitzen Metalle mit der Luft und insbesondere dem damals noch nicht bekanntem Sauerstoff (Nachweis 1772) unterschätzte. Wenn beispielsweise Eisenwolle erhitzt wird, verbindet sie sich mit dem Sauerstoff der Umgebungsluft. Dadurch kam er in seinen Untersuchungen zu Resultaten, die ihn zu falschen Schlussfolgerungen in Bezug auf die Massenerhaltung in chemischen Reaktionen führte.

Die chemischen Grundgesetze beschreiben, wie sich Materie zusammensetzt und nach welchen Prinzipien chemische Reaktionen ablaufen. Grundlage ist die die atomistische Natur der Materie:

- Bei einer chemischen Reaktion bleibt die Gesamtmasse der beteiligten Stoffe unverändert. Die Summe der Massen der Reaktionsprodukte ist gleich der Summe der Massen der Ausgangsstoffe (Prinzip der Massenerhaltung, Lavoisier 1789), see Abb. 15.34.[37]

- Elemente in einer bestimmten chemischen Verbindung kommen immer im gleichen Massenverhältnis vor (Gesetz der konstanten Proportionen, Proust).

- Bilden Elemente miteinander Verbindungen, so stehen die Massenverhältnisse mit denen die Elemente in diesen Verbindungen auftreten, zueinander im Verhältnis ganzer Zahlen (Gesetz der mutiplen Proportionen, Dalton).

Formt man aus zwei Elementen eine chemische Verbindung, so erfolgt die Reaktion stets mit gleichen Massenverhältnissen. Bildet man beispielsweise das Molekül CO aus Kohlenstoff (C) und Sauerstoff (O), so benötigt man ein Massenverhältnis von 3:4, also:

$$(3\text{g Kohlenstoff}) + (4\text{g Sauerstoff}) \rightarrow (7\text{g Kohlenmonoxid})$$

[37] Eine eindruckvolle Demonstration dieses Gesetzes ist Volta's Pistole. Sie besteht aus einem Messingrohr, das mit einer Mischung aus Sauerstoff und einem brennbaren Gas (z.B. Wasserstoff)) gefüllt ist. Das Ende des Pistolenlaufs wird mit einem Korken verschlossen und das Gemisch mit einem Funken gezündet, der von einer Leidener FlascheEletrodynamik!Leidener Flasche oder einer Wimshurstmaschine an die isolierte Elektrode abgegeben wurde. Die resultierende Explosion führt zu einem Knall und der Korken schiesst heraus. Volta's Pistole ist eine Abwandlung des Eudiometers, eines Instruments zur Prüfung der *Güte* der Luft [**?**].

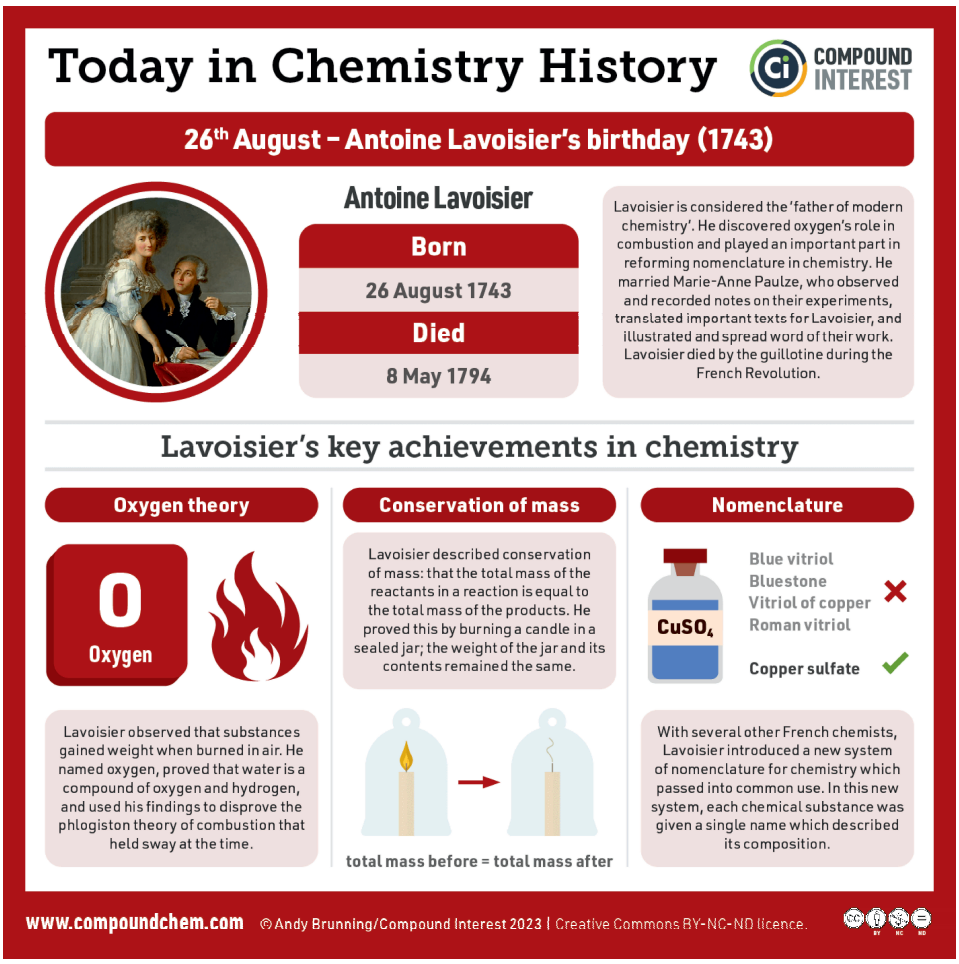
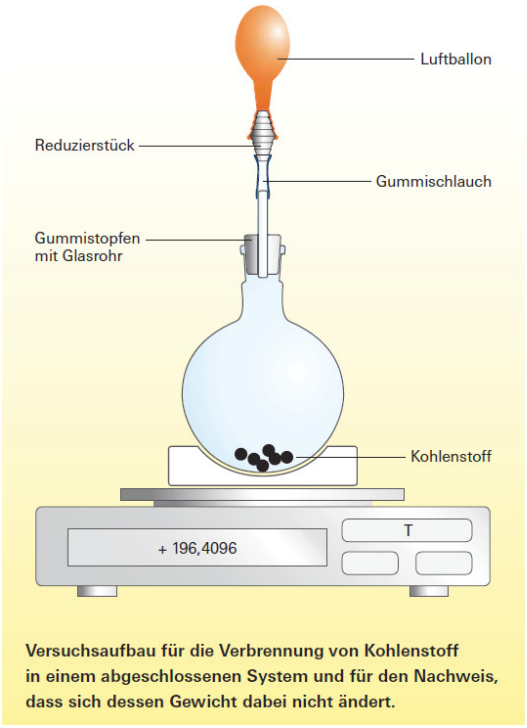


Abb. 15.34: Antoine Lavoisier (1743-1794)

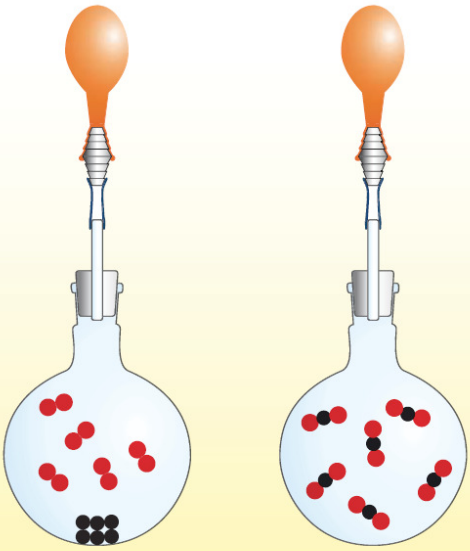
Zugabe von weiterem Kohlenstoff erhöht nicht die Menge an CO! Nimmt man ein Massenverhältnis von 3:8, kann man in einer geeigneten Reaktion die gesamte Stoffmenge in CO_2 umwandeln.[38] Abb. 15.35 zeigt ein Beispiel für den Nachweis, dass es in einer chemischen Reaktion nicht zu einem Massenverlust kommt [**?**]. Scheint trivial, aber. . . [39]

[38] Tatsächlich war Sauerstoff für die Chemiker zur Zeit von Dalton ein Problem, da man O_2 als Atom ansah und sich die Reaktionsprodukte CO, CO_2 usw. auf der Grundlage dieser Annahme nicht erklären konnte.

[39] Einige Antworten von Schülern zu diesem Versuch: Die Masse nimmt ab, weil gasförmige Stoffe leichter sind als feste Stoffe (Klasse 8); Die Masse nimmt zu, weil Kohlenstoff mit dem Sauerstoff reagiert. Es entsteht Kohlenstoffdioxid, und das ist schwerer als Sauerstoff (Klasse 9); Ich denke, die Masse nimmt ab, weil nach der Reaktion kein Kohlenstoff mehr vorhanden ist. C und O haben miteinander reagiert und es ist ein Gas entstanden, das eigentlich nichts wiegen dürfte (Klasse 12, Leistungskurs) [**?**].



Versuchsaufbau für die Verbrennung von Kohlenstoff in einem abgeschlossenen System und für den Nachweis, dass sich dessen Gewicht dabei nicht ändert.



Eine Betrachtung der Verbrennungsreaktion auf der Teilchenebene macht deutlich, warum die Masse des Gesamtsystems gleich bleibt: Es geht keine Materie verloren, die Kohlenstoff- (schwarz) und Sauerstoffatome (rot) sind nach der Verbrennung (rechts) nur anders arrangiert als davor (links).

Abb. 15.35: Demonstration des Prinzips der Massenerhaltung bei der Verbrennung: Zu Beginn des Versuchs wird die Apparatur gewogen. Mit dem Bunsenbrenner wird die Kohle im Kolben erhitzt bis sie glüht. Durch Schütteln erreicht man einen besseren Kontakt zum Sauerstoff. Nach der vollständiger Verbrennung der Kohle lässt man den Versuchskolben auf Raumtemperatur abkühlen und wiederholt die Wägung. Man stellt fest, dass die Apparatur nach der Reaktion noch genauso viel wiegt wie zu Anfang, obwohl doch scheinbar Masse verschwunden ist. Dies ist eine Bestätigung der Überlegungen von Dalton und Lavoisier [**?**].

Daltons Atomhypothese (1808)

Ob die letzten (kleinsten) Teilchen eines Stoffes, wie Wasser, alle gleich sind, d.h. von derselben Gestalt, demselben Gewicht etc. ist eine Frage von einiger Wichtigkeit. Aus dem, was wir wissen, haben wir keinen Grund, eine Verschiedenheit dieser (kleinsten) Teile anzunehmen: Wenn aber alle Wasserteilchen gleich aufgebaut sind, so muss das auch für die Bausteine des Wassers (die Elemente Wasserstoff und Sauerstoff) gelten. Wir können daher schließen, dass die letzten Teilchen aller homogenen Stoffe völlig gleich in Gewicht, Gestalt etc. sind.

John Dalton in A New System of Chemical Philosophy

Stoffe verbinden sich immer im gleichen Massenverhältnis miteinander (siehe den Hoffmannschen Wasserzersetzungsapparat in Abb. 15.9). Das Gesetz der konstanten Proportionen lässt sich nicht erklären, wenn man eine kontinuierliche, unbeschränkte Teilbarkeit

der Materie annimmt. Dalton erkannte, dass es eine kleinste unteilbare Masse eines jeden Stoffes geben muss, welche als Atom bezeichnet wird. Bei der Reaktion zwischen verschiedenen Elementen bilden stets eine bestimmte Anzahl von Atomen ein Molekül. Atome müssen eine bestimmte unveränderliche Masse besitzen, die charakteristisch für jedes Element ist. Wasserstoff, als leichtestes Element, erhält die relative Atommasse 1 amu. Anderen Elemente werden als Vielfache des Wasserstoffs angegeben. Beispielsweise ist Eisen 56-mal schwerer als Wasserstoff.

Wo sind die Grenzen des Atommodells von Dalton?

- Elektrische und magnetische Phänomene im Zusammenhang mit Atomen wie beispielsweise die Elektrolyse werden durch das Atommodell von Dalton nicht erklärt.
- Die Ursache der chemischen Bindung bleibt ungeklärt.
- Das Modell von Dalton kann die Struktur des Periodensystems nicht erklären.

Brownsche Bewegung

These motions were such as to satisfy me ... that they arose neither from currents in the fluid, nor from its gradual evaporation, but belonged to the particle itself [**?**].

Robert Brown, 1828

Aus den Erkenntnissen der Chemie lässt sich die Größe der Moleküle nicht ableiten, da nur Verhältnisse zählen. Einblick in diese Problematik lieferte Experimente an Gasen und insbesondere Untersuchungen zur Viskosität durch Loschmidt [**?**]. Die Bewegung kleinster Partikel in einer Flüssigkeit wurde erstmals durch Ingenhousz (1784) beobachtet. Im Jahr 1827 bemerkte der Botaniker Robert Brown, dass Pollensamen, in Wasser suspendiert, und mit einem Mikroskop betrachtet, eine unregelmäßige und zufällige Wackelbewegung ausführen [**?**]. Man nennt dieses Phänomen deshalb Brownsche Molekularbewegung, siehe Abb. 15.36. Der Tanz der Partikel erinnerte die Wanderung von Samenfäden. Brown allerdings bemerkte, dass das Phänomen bei den kleinsten Teilchen der unbelebten Materie. Es musste also physikalischer und nicht biologischer Natur sein. Einstein argumentierte, dass die unsichtbaren Atome in der Flüssigkeit mit den suspendierten Teilchen stoßen und sie in Bewegung versetzen (Abb. 15.37). Die berechnete dreidimensionale Brownsche Bewegung eines Teilchens zeigt Abb. 15.38. Die Theorie Einsteins stand in krassem Gegensatz zur Überzeugung gestandener Wissenschaftler, denn Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts gingen viele Wissenschaftler wie Ernst Mach und Wilhelm Ostwald davon aus, dass Atome und Moleküle bloße mathematische Hilfskonstrukte seien.

Link to video `Illustrating the movement of particles in Brownian motion`

I did not believe that it was possible to study the Brownian motion with such a precision.



Abb. 15.36: Cartoon von Sidney Harris [**?**].

Albert Einstein an Jean Perrin, 1909

Die Brownsche Bewegung liefert ein natürliches Modell, um zu verstehen, wie Stoffe auf mikroskopischer Ebene transportiert und verteilt werden. Eine makroskopisch sichtbare Auswirkung der Brownschen Bewegung ist Diffusion. Brownsche Bewegung findet man überall in der Natur, in Flüssigkeiten, in Gasen und in fester Materie [**?**]:

- Verhalten von Nanopartikeln in Suspensionen [**?**]
- Ausbreitung von Aerosolen in der Atmosphäre[**?**]
- Kontrolle der Diffusion bei der Chipherstellung

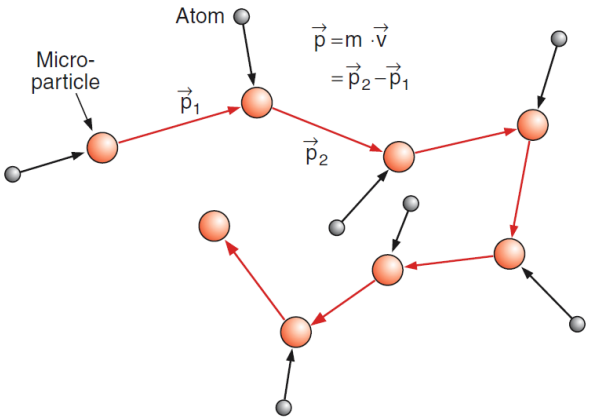


Abb. 15.37: Die Brownschen Bewegung lässt sich erklären, wenn man annimmt, dass Moleküle permanent aus allen möglichen Richtungen mit den makroskopischen Teilchen stoßen [**?**].

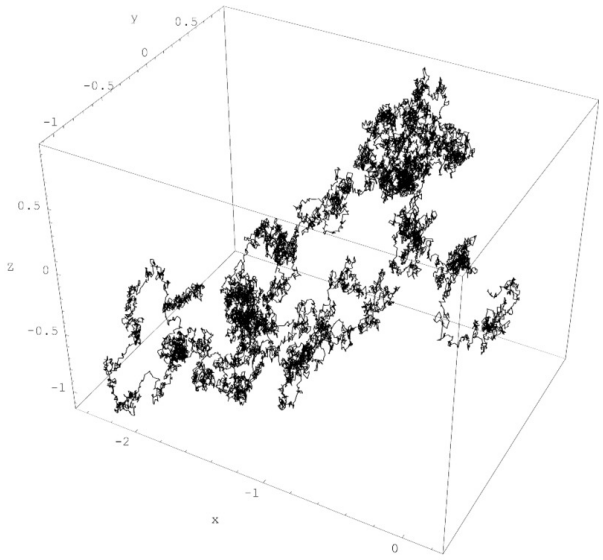


Abb. 15.38: Simulation eines dreidimensionalen Brownschen Bewegungsprozesses mit Zeitschritten von 0.0001 für eine Zeitspanne von $0 \leq t \leq 2$ [**?**].

- Art und Weise, wie sich aus winzigen Staubpartikel Planeten bilden[**?**]
- Passive Bewegung von Nährstoffen durch Zellmembranen [**?**]
- Pollenflug und ihr Einfluss auf Ökosysteme [**?**]
- Herstellung von Bier [**?**]
- Preisschwankungen auf Finanzmärkten [**?**]

Die mittlere Entfernung λ_{mfp}, die ein Molekül in einem mit Dichte n_{gas} zurücklegt, wird bestimmt durch den Stoßquerschnitt[40]

$$\lambda_{mfp} \approx \frac{1}{n_{gas} \cdot \sigma_{molecule}} \tag{15.28}$$

wobei sich $\sigma_{molecule}=\pi(2\, r_{molecule})^2$ aus dem Radius $r_{molecule}$ des Moleküls ergibt. Einsteins Theorie der Brownschen Bewegung [**?**] besagt, dass der Diffusionskoeffizient vom Radius der Partikel und den Eigenschaften der Flüssigkeit (Temperatur, Viskosität) abhängt. Die mittlere Entfernung , die ein Pollenkörner oder ein anderes mikroskopisches Objekt, das der Brownschen Molekularbewegung unterliegt, zurücklegt, nimmt mit der Wurzel der Zeit zu:

$$< x^2 >= \frac{k_b \cdot T_K}{3\,\pi \cdot \eta \cdot r_{molecule}} \cdot t \tag{15.29}$$

$< x^2 >$: mittlere zurückgelegte quadratische Wegstrecke des Partikels

[40] Die genauere Rechnung liefert $\lambda_{mfp}=1/(\sqrt{2} \cdot n_{gas} \cdot \sigma_{molecule})$.

$r_{molecule}$: Radius der Teilchen:

$$r_{molecule} = \frac{k_B \cdot T_K}{6\,\pi \cdot \eta \cdot D_D} \tag{15.30}$$

D_D: Diffusionskonstante.

η: Viskosität der Flüssigkeit

Anhand der Beobachtung der Brownschen Bewegung kann also der Diffusionskoeffizient D_D bestimmt werden. Auf der Grundlage von Einsteins Arbeiten führte Perrin[41] Experimente durch, die die Existenz von Atomen und Molekülen nachwies [**?**]. Perrin entwickelte eine Methode, Teilchen nahezu gleicher Größe ($\sim \mu$m) zu erzeugen. Er untersuchte damit die Brownsche Bewegung, bestätigte die Einsteinsche Vermutung, indem er unterschiedliche Flüssigkeiten und unterschiedliche Teilchengrößen verwendete und bestimmte die Avogadrokonstante. Damit konnte er die Anzahl Atome in einer Probe eines beliebigen Elements bestimmen. Eine Anleitung, das Experiment von Perrin selbst durchzuführen findet man in [**?**].[42] Der Nachweis durch Perrin war ein wichtiger Schritt hin zur Anerkennung der Theorie der Atome.[43]

Bei der ballistischen Bewegung eines Teilchens in Abwesenheit von Reibung und Gravitation (Newton 1) legt ein Molekül, dass sich mit einer Geschwindigkeit v bewegt, eine Strecke $D_{ballistic}$=$v \cdot t$ zurück. Das heißt, für die zurückgelegte Entfernung gilt:

$$D_{ballistic} \propto t \tag{15.31}$$

Bei der Brownschen Bewegung ist das anders, den die Zick-Zack Bewegung eines Moleküls in Folge von Stößen mit anderen Molekülen beschreibt den Prozess der Diffusion. Man kennt den Vorgang auch unter dem Namen random walk: Stellen Sie sich vor, ein Spaziergänger macht häufige, aber zufällige Richtungswechsel. Für diese Diffusionsbewegung gilt

$$D_{diffusion} = \sqrt{t} \tag{15.32}$$

Wie groß ist die mittlere Entfernung D_{rms} nach N Schritten des Wanderers?

$$D_{rms} = \sqrt{N} \cdot d \tag{15.33}$$

wobei d, die Schrittweite des Spaziergängers ist. Diese Betrachtung lässt sich 1-zu-1 auf Moleküle übertragen. Wir wollen wissen, wie weit sich ein Molekül nach einer vorgegebenen Zeit t von seinem Startort entfernt hat.

[41] The Nobel Prize in Physics 1926 was awarded to Jean Baptiste Perrin *for his work on the discontinuous structure of matter, and especially for his discovery of sedimentation equilibrium.*

[42] Die Boltzmann-Konstante kann ebenfalls durch eine Analyse der Brownschen Bewegung bestimmt werden [**?**].

[43] Nicht alle Forscher ließen sich überzeugen, so glaubte beispielsweise Ernst Mach bis zu seinem Tod im Jahre 1916 nicht an die Existenz von Atomen.

Die mittlere Geschwindigkeit v_{rms} eines Moleküls der Masse m in einem Gas bei einer Temperatur T_K ist

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3\,k_B \cdot T_K}{m}} \tag{15.34}$$

Bei einer mittleren freien Weglänge eines Moleküls λ_{mfp} ist die mittlere Zeit t_{rms} zwischen zwei Stößen t_{rms}

$$v_{rms} = \lambda_{mfp}/t_{rms} \tag{15.35}$$

Für N Stöße braucht es eine Zeit $t{=}N \cdot t_{rms}$. Damit kann man Gl.15.33 umschreiben

$$\begin{aligned}
D_{rms} &= \sqrt{N} \cdot \lambda_{mfp} \\
D_{rms} &= \sqrt{\frac{t}{t_{rms}}} \cdot \lambda_{mfp} \\
D_{rms} &= \sqrt{\frac{t}{v_{rms} \cdot \lambda_{mfp}}} \cdot \lambda_{mfp} \\
D_{rms} &= \sqrt{v_{rms} \cdot \lambda_{mfp}} \cdot t \\
D_{rms} &\approx \frac{1}{\sqrt{n_{gas} \cdot \sigma_{molecule}}} \left(\frac{3\,k_B \cdot T_K}{m}\right)^{1/4} \cdot \sqrt{t}
\end{aligned} \tag{15.36}$$

A Lévy-flight diffusion model to predict transgenic pollen dispersal [?]: The containment of genetically modified (GM) pollen is an issue of significant concern for many countries. For crops that are bee-pollinated, model predictions of outcrossing rates depend on the movement hypothesis used for the pollinators. Previous work studying pollen spread by honeybees, the most important pollinator worldwide, was based on the assumption that honeybee movement can be well approximated by Brownian motion. A number of recent studies, however, suggest that pollinating insects such as bees perform Lévy flights in their search for food. Such flight patterns yield much larger rates of spread, and so the Brownian motion assumption might significantly underestimate the risk associated with GM pollen outcrossing in conventional crops. In this work, we propose a mechanistic model for pollen dispersal in which the bees perform truncated Lévy flights. This assumption leads to a fractional-order diffusion model for pollen that can be tuned to model motion ranging from pure Brownian to pure Lévy. We parametrize our new model by taking the same pollen dispersal dataset used in Brownian motion modelling studies. By numerically solving the model equations, we show that the isolation distances required to keep outcrossing levels below a certain threshold are substantially increased by comparison with the original predictions, suggesting that isolation distances may need to be much larger than originally thought.

Anwendungen 1^{4LP}

The results cannot leave any doubt of the rigorous exactitude of the formula proposed by Einstein

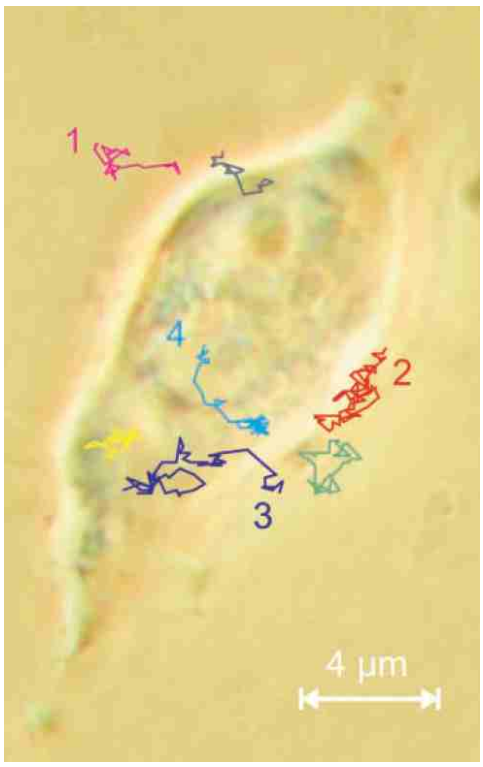


Abb. 15.39: Diffusionswege mit hoher räumlicher und Zeitauflösung zeigen unterschiedliche Bewegungsmuster von Viren während ihres Infektionsweges: (i) konsekutive Berührung des Virus an der Zelloberfläche und schnelle Endozytose; (ii) freie und anomale Diffusion des Endosoms und des Virus in das Zytoplasma und in den Zellkern; (iii) gerichtete Bewegung durch Motorproteine im Zytoplasma und im Kerntubulus [**?**].

Jean Baptiste Perrin, 1909

Ein Beispiel aus der Welt der Viren

Die moderne Einzelmolekül-Echtzeitbildgebung durch Markierung mit fluoreszierenden Farbstoffmolekülen (Kapitel *Mikroskopie*) ermöglicht eine Echtzeit-Visualisierung von Infektionswegen einzelner Viren in lebenden Zellen. Abb. 15.39 zeigt die Brownsche Bewegung diffundierender Viren [**?**]. Sie entsprechen verschiedenen Stationen des Infektionswegs, beginnend angefangen mit dem Abdocken an die Zellmembran, bis zum Transport des Virus in den Zellkern und der Expression seiner DNA. Für die Gentherapie ist das Verständnis der Infektionswege von grundlegender Bedeutung. Beispielsweise beobachtet man im Zellinnern unterschiedliches Diffusionsverhalten.

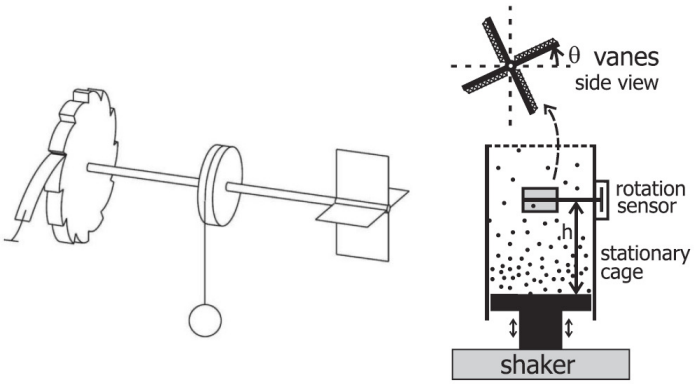


Abb. 15.40: (a) Das Gedankenexperiment von Smoluchowski und Feynman. (b) Granulare Realisierung der Smoluchowski-Feynman Ratsche. Die Schaufeln können sich beim Auftreffen der Teilchen frei in beide Richtungen drehen. Der sich ergebene Winkel wird notiert. Die asymmetrische Beschichtung der Leitschaufeln bewirkt eine Vorzugsdrehrichtung (Ratscheneffekt) [**?**].

Ein Beispiel aus der Welt der Nanomaschinen

Eine interessante Anwendung ist Feynmans molekulare Ratsche [**? ?**], die versucht, aus der Brownschen Molekularbewegung eine gerichtete Bewegung zu generieren. Ein Schaufelrad wird in eine Flüssigkeit getaucht. Mit seiner Drehachse ist das Rad mit einer Ratsche verbunden. Die Moleküle in der Flüssigkeit unterliegen der Brownschen Bewegung. Stöße bewirken, dass das Paddel sich dreht. So weit, so gut. Die Ratsche verhindert nun, dass sich das Schaufelrad in die Gegenrichtung dreht. Damit wäre eine Möglichkeit gefunden, Arbeit mit diesem statistischen Prozess zu leisten. Schreckt Sie dieser Satz nicht auf? Dieser Prozess verletzt den Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik! Feynman hat diesen Vorgang analysiert und gezeigt, dass die Sperrmechanismus auch eine Brownsche Bewegung aufweist und gelegentlich sich statt vorwärts auch mal rückwärts bewegt. Es zeigt sich, dass sich das Schaufelrad im Laufe der Zeit sich genauso oft rückwärts bewegt wie sie sich vorwärts bewegt. Jede Möglichkeit, Arbeit aus dem Prozess zu extrahieren, wird damit unwahrscheinlich und der Zweite Hauptsatz ist gerettet. Die Maschine kann nur funktionieren, wenn von außen Energie zugeführt wird. Forscher aus Twente haben kürzlich eine Brownsche Ratsche in Betrieb genommen [**?**], siehe Abb. 15.40. Ihr makroskopisches Modellsystem, das im übrigen nicht gegen den Zweiten Hauptsatz verstößt, arbeitet höchst ineffizient. Der größte Teil der Energie wird in Wärme und akustische Schwingungen verwandelt. Es ähnelt aber in seinem Mechanismus der Bewegung von Biomolekülen wie RNA-Polymerase und Proteinkinesin. Das macht die Untersuchungen für die Biologie interessant, denn diese Moleküle bewegen sich mittels eines Ratschenmechanismus durch den Körper.

Ein Beispiel aus der Klimaforschung [?]

Das Phänomen der Brownschen Bewegung illustriert die Relevanz statistischer Fluktuationen. Beispiele findet man in der Biologie oder auch Ökonomie. Dazu gehören die Diffusion von Schadstoffen in der Atmosphäre, die Diffusion von Löchern in einem Halbleiter, die Diffusion von Kalzium durch Knochengewebe in Organismen, Ausbreitung der Schwarzen Pest, historische Entwicklung der Landwirtschaft in der Jungsteinzeit, Ausbreitung afrikanischer Bienen, funktionelle Kleidung.
Alle Modelle haben ihre Grenzen und Fallstricke, und deren Verständnis ist unerlässlich, um eine sinnvolle Verbindung mit empirischen Beobachtungen herzustellen. Für ein so komplexes und chaotisches System wie die Atmosphäre, in der das Wetter auf einer Zeitskala von Tagen notorisch unvorhersehbar sein kann, ist es wichtig zu verstehen, warum Klimamodelle auf einer Zeitskala von Monaten und Jahren als zuverlässig angesehen werden können. Die Arbeit von Klaus Hasselmann[44] lieferte diesbezüglich einige weitreichende Erkenntnisse [? ?]: Indem er eine Analogie zur Brownschen Bewegung zog, formulierte er ein stochastisches Modell, das einen Überblick über die Variabilität des Klimas bietet und hilft, die Fallstricke der Fehlinterpretation statistischer Größen wie der Varianz und des Mittelwerts in Beobachtungsdaten zu vermeiden. Als Ergebnis konnte er einen Rahmen schaffen, der es ermöglicht, das Signal (großräumige Klimadynamik) vom Rauschen (kurzfristige Wetteränderungen) zu trennen, und darüber hinaus Methoden entwickeln, um in diesen Daten spezifische Fingerabdrücke natürlicher und vom Menschen verursachter Effekte zu identifizieren. So sollte die durch die CO_2-Anreicherung verursachte Erwärmung dazu führen, dass sich die Stratosphäre (10-50 km) abkühlt, während sich die untere Troposphäre erwärmt. Bei einer Erwärmung durch die Sonne ist das nicht zu erwarten. Es konnte nachgewiesen werden, dass nicht Naturereignisse wie Vulkanausbrüche, sondern auf vom Menschen verursachte Kohlendioxidemissionen für die erhöhte Temperatur in der Atmosphäre verantwortlich sind.

Detecting and Attributing External Influences on the Climate System: A Review of Recent Advances [?]**:** This paper reviews recent research that assesses evidence for the detection of anthropogenic and natural external influences on the climate. Externally driven climate change has been detected by a number of investigators in independent data covering many parts of the climate system, including surface temperature on global and large regional scales, ocean heat content, atmospheric circulation, and variables of the free atmosphere, such as atmospheric temperature and tropopause height. The influence of external forcing is also clearly discernible in reconstructions of hemispheric-scale temperature of the last millennium. These observed climate changes are very unlikely to be due only to natural internal climate variability, and they are consistent with the responses to anthropogenic and natural external forcing of the climate

[44] The Nobel Prize in Physics 2021 was awarded *for groundbreaking contributions to our understanding of complex physical systems* with one half jointly to Syukuro Manabe and Klaus Hasselmann *for the physical modelling of Earth—s climate, quantifying variability and reliably predicting global warming* and the other half to Giorgio Parisi *for the discovery of the interplay of disorder and fluctuations in physical systems from atomic to planetary scales*

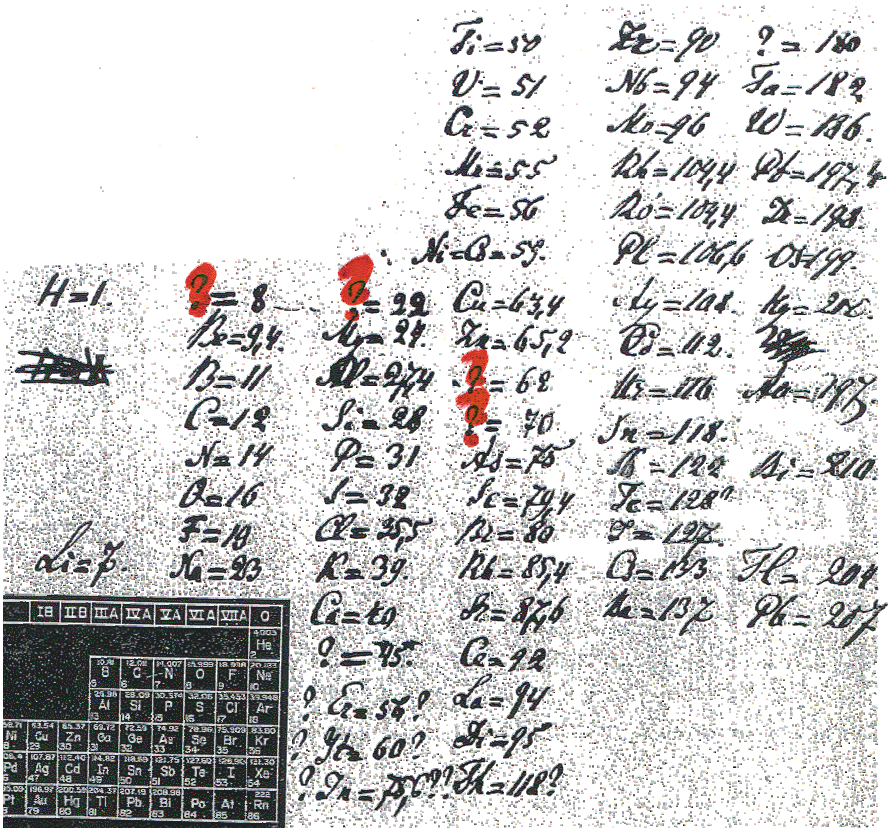


Abb. 15.41: Dmitri Mendelejew handgezeichnetes Original wurde auf den 17. Februar 1869 datiert und man erkennt kaum unsere heutigen Version des Periodensystems. Um den Zusammenhang zu sehen, muss man das Diagramm um 90^o im Uhrzeigersinn drehen und die Elemente von links nach rechts zu spiegeln [? ?].

system that are simulated with climate models. The evidence indicates that natural drivers such as solar variability and volcanic activity are at most partially responsible for the large-scale temperature changes observed over the past century, and that a large fraction of the warming over the last 50 yr can be attributed to greenhouse gas increases. Thus, the recent research supports and strengthens the IPCC Third Assessment Report conclusion that *most of the global warming over the past 50 years is likely due to the increase in greenhouse gases.*

Periodensystem der Elemente

Die nach der Größe ihres Atomgewichts angeordneten Elemente zeigen deutliche Periodizität ihrer Eigenschaften

Dmitri Mendelejew, 1869

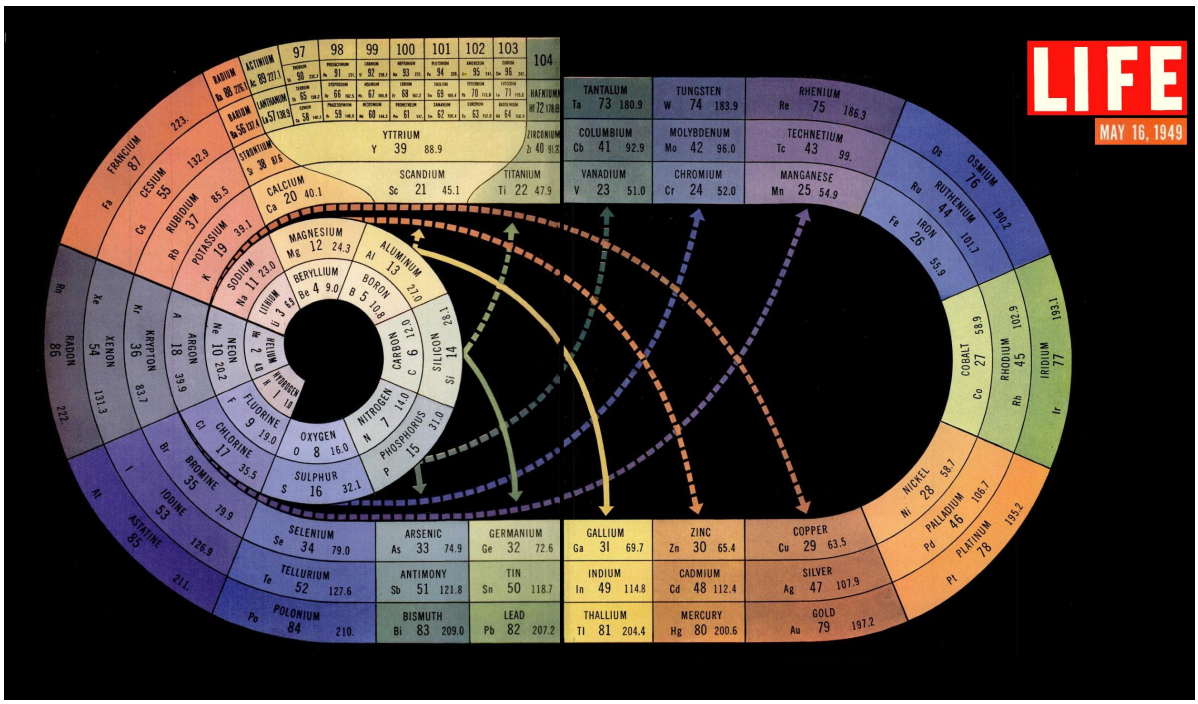


Abb. 15.42: Das Periodensystem als Spirale dargestellt, erschienen in der Zeitschrift *Life Magazine* im Jahr 1949.

Abb. 15.41 zeigt das Periodensystem, wie es Mendelejew aufgestellt hat. Einige Stellen in seinem Periodensystem lässt Mendelejew frei, weil Atomgewicht und Eigenschaften nicht zusammenpassten. Er sagte für die Leerstellen unbekannte Elemente voraus. Im Folgenden führt dies zur Entdeckung der Elemente Gallium (1875), Scandium (1879) und Technetium (1937). Heute hat das Periodensystem folgende Einträge, siehe Abb. 15.42.

Ein illustratives Beispiel, das die Stärken des Periodensystems hervorhebt, ist das Element Germanium. In der vierten Hauptgruppe (C, Si, ... Sn, Pb) stellte Mendelejew eine Lücke fest. Er gab dem fehlenden Element den Namen Eka-Silicium (Es) und machte Aussagen über physikalische Eigenschaften und mögliche chemische Verbindungen. Fünf Jahre später wurde das Element von Winkler nachgewiesen [**?**]. Es ist erstaunlich, wie gut die Vorhersage Mendelejew mit den tatsächlichen Eigenschaften übereinstimmte, siehe Tab. 15.2. Ein anderes Beispiel ist die Entdeckung des Elements Argon durch Lord Rayleigh im Jahr 1894. Für Argon fand sich kein Platz im Periodensystem und daher wurde eine weitere Spalte in das Periodensystem eingeführt, in der dann die Edelgase ihren Platz fanden.

Welche Stoffe findet man im menschlichen Körper?

Die Häufigkeit der Elemente auf der Erde und im Menschen zeigt Abb. 15.43. Es fällt auf, dass Metalle im Körper nur mit einem geringen Anteil vorhanden sind. Diese Stoffe

physikalische Eigenschaft	Eka-Silizium	Germanium
Atommasse	72.0 g/mol	72.61 g/mol
Dichte	5.5 g/cm^3	5.32 g/cm^3
spezifische Wärme	0.306 J·g^{-1}·K^{-1}	0.310 J·g^{-1}·K^{-1}

Tab. 15.2: Gegenüberstellung der Eigenschaften des vorgesagten Element Eka-Silicium und dem realen Element Germanium.

haben im Körper funktionale Aufgaben, siehe Abb. 15.45 und 15.46. Beispielsweise findet man in den Knochen einen hoher Kalziumanteil (siehe Kapitel *Röntgendiagnostik*).

Die Bedeutung des Periodensystems erkennt man an der Tatsache, dass aus Anlass der Aufstellung des Periodensystem im Jahr 1869 die Generalversammlung der Vereinten Nationen und die UNESCO das Jahr 2019 zur Internationalen Jahr des Periodensystems ausgerufen hat (Abb. 15.44).

Before the promulgation of the periodic law, the chemical elements were mere fragmentary incidental facts in nature; there was no special reason to expect the discovery of new elements, and the new ones which were discovered from time to time appeared to be possessed of quite novel properties. The law of periodicity first enabled us to perceive undiscovered elements at a distance which formerly were inaccessible to chemical vision, and long ere they were discovered new elements appeared before our eyes possessed of a number of well-defined properties.

Dmitri Mendelejev, Faraday Lecture, 1889

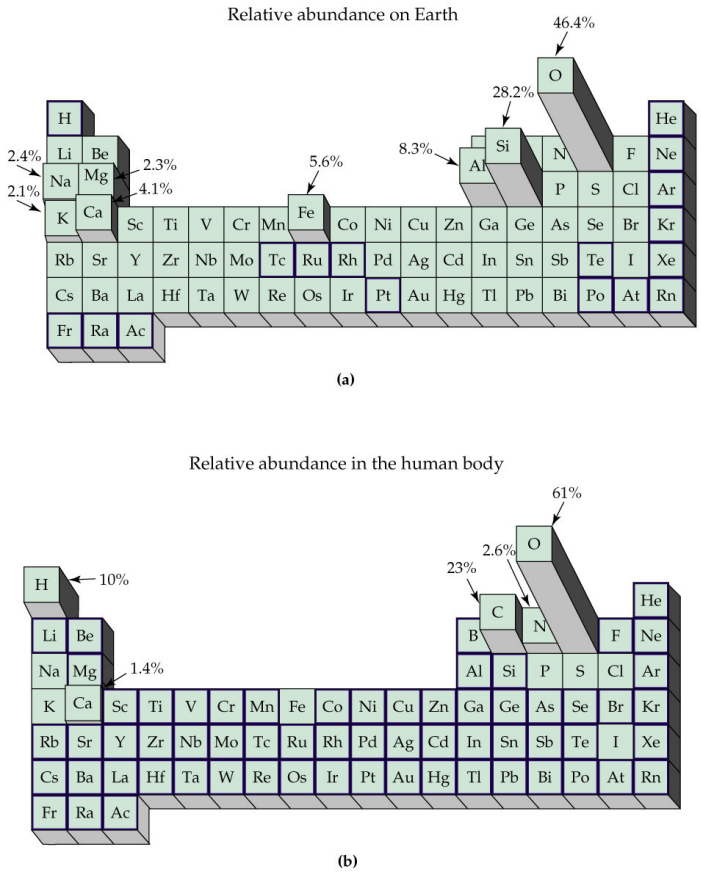


Abb. 15.43: Verteilung der Elemente in der Natur und im menschlichen Körper.

Abb. 15.44: 2019 has been designated by UNESCO as the International Year of the Periodic Table (IYPT), marking the 150th anniversary of the Mendeleev periodic table, which is an iconic image and a vital tool to all who learn and work in science, at all stages of their learning and careers.





Abb. 15.45: Die Stoffe, die den Menschen formen zum Ersten [**?**]



Abb. 15.46: Die Stoffe, die den Menschen formen zum Zweiten [**?**]



Rutherfords Streuexperimente

Ich hatte den Eindruck, mit einem Gewehr auf ein Stück Seidenpapier zu schießen und dass auf einmal eine der Kugeln nach hinten abprallte.

Ernest Rutherford

The main difficulty of the experiments has arisen from the necessity of using a very intense and narrow source of a particles owing to the smallness of the scattering effect. All the measurements have been carried out by observing the scintillations due to the scattered a particles on a zincsulphide screen, and during the course of the experiments over 100,000 scintillations have been counted. It may be mentioned in anticipation that all the results of our investigation are in good agreement with the theoretical deductions of Prof. Rutherford, and afford strong evidence of the correctness of the underlying assumption that an atom contains a strong charge at the centre of dimensions, small compared with the diameter of the atom [**?**].

Ausgehend von der Erkenntnis, dass im Atom Ladungsträger unterschiedlicher Polarität vorliegen, gab es eine Reihe von Vorschlägen für eine Struktur des Atoms. Die unterschiedlichen Vorstellungen wurden diskutiert, sind aber aus heutiger Sicht nur noch historisch interessant. Die vorgeschlagenen Modelle zeigen aber, wie dünn die Erkenntnisse



Abb. 15.47: Das Atommodell von Nagaoka lehnt sich an die Verhältnisse des Planeten Saturn und seiner Monde an. In diesem Modell wurde erstmals die Existenz des Atomkerns postuliert und gründete sich auf der Vermutung eines massiven Kerns, analog zum Missverhältnis zwischen der Masse von Saturn und der seiner Rings. Wie sich herausstellte hatte das Saturn-Modell eine Reihe von Schwächen. Der Kern war deutlich kleiner als angenommen. Weiter zeigt sich, dass ein elektrisch geladener Ring instabil gegenüber Schwingungen senkrecht zur Ringebene ist.

zu Beginn des 20ten Jahrhunderts waren. Ein Vorschlag war, dass sich die Elektronen in einem kleinen Raumgebiet konzentrieren und die positive Ladung sich gleichmäßig auf das Volumen des Atoms verteilt. Eine Analyse auf derr Grundlage der Heisenbergschen Unschärferelation liefert die Erkenntnis, dass eine solche Konfiguration nicht möglich ist, weil die zugehörigen Impulse der Elektronen enorme Werte annehmen würden. Hantaro Nagaoka schlug 1903 ein Modell vor, dass angelehnt war an die Verhältnisse des Planeten Saturn. Er stellte sich das Atom zusammengesetzt aus einem positiven Kern umgeben von einem Halo aus Elektronen, siehe Abb. 15.47. Auch dieses Modell wurde bald verworfen.

Thomsons plum-pudding Modell

I regard the atom as containing a large number of smaller bodies which I will call corpuscles; . . . In the normal atom, this assemblage of corpuscles forms a system which is electrically neutral. Though the individual corpuscles behave like negative ions, yet when they are assembled in a neutral atom the negative effect is balanced by something which causes the space through which the corpuscles are spread to act as if it had a charge of positive electricity equal in amount to the sum of the negative charges on the corpuscles [**?**].

J. J. Thomson (1899)

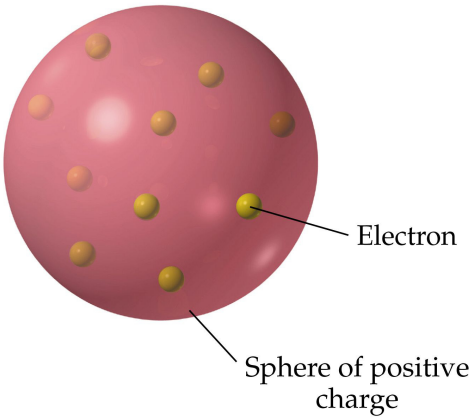


Abb. 15.48: Kurz nach der Entdeckung des Elektrons, aber noch vor der Entdeckung des Atomkerns versucht das Thomson-Modell, Eigenschaften von Atomen zu erklären: (i) Elektronen sind negativ geladene Teilchen. (ii) Atome tragen keine elektrische Ladung. Schlussfolgerung: Elektronen sind von einem Volumen positiver Ladung umgeben, wie negativ geladene *Pflaumen*, die in einen positiv geladenen *Pudding* eingebettet sind.

Die Vorstellung von J.J. Thomson über die Struktur des Atome war, dass die positiven Ladungen gleichmäßig über das Gebiet des Atoms verteilt sind und eine Art Pudding bilden, in dem sich die Elektronen wie Pflaumen bewegen (Abb. 15.48).[45] Das Modell ist unter dem Namen *plum-pudding* Modell bekannt geworden:[46]

- Atome sind nach außen hin neutral.
- Ein Atom besteht aus einer elektrisch positiv geladenen Kugel mit eingelagerten Elektronen.
- Elektronen können abgegeben oder zusätzlich aufgenommen werden.
  - Aus neutralen Atomen werden bei Abgabe von Elektronen positiv geladene Ionen.

[45] Im Potenzial $V(r)$ einer homogen aufgeladenen Kugel (Radius R), denn das stellt das Modell dar

$$V(r) = \frac{1}{8\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Z \cdot e^2}{R^3} \cdot (r^2 - 3R^2) \tag{15.37}$$

vollführt das Elektron eine periodische Bewegung mit der Frequenz

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Z \cdot e^2 m_e \cdot R^3} \tag{15.38}$$

Für Z=1 ergibt sich eine Frequenz von ν=$5 \cdot 10^{14}$ Hz oder 600 nm und man berechnet daraus einen Radius von 3Å für das Atom, was gut mit den Abschätzungen übereinstimmt und als Bestätigung des Atommodell angesehen werden kann. Allerdings nur auf den ersten Blick!

[46] Historische Klarstellung, obwohl eine Google Suchanfrage mit über $3 \cdot 10^6$ Treffern etwas anderes suggeriert: J. J. Thomson hat seinem Modell nie diesen Namen gegeben.

  - Bei der Aufnahme von Elektronen entstehen negativ geladene Ionen.

- Es ist nicht klar, warum die Atome aufgrund ihres plum-pudding Aufbaus elektrisch neutral vorliegen.

- Die Lichtemission aus Atomen kann im Rahmen des Modells nicht erklärt werden.

- Das Phänomen der Radioaktivität bleibt ungeklärt.

Plum pudding random medium model of biological tissue toward remote microscopy from spectroscopic light scattering: Biological tissue has a complex structure and exhibits rich spectroscopic behavior. There has been no tissue model until now that has been able to account for the observed spectroscopy of tissue light scattering and its anisotropy. Here we present, for the first time, a plum pudding random medium (PPRM) model for biological tissue which succinctly describes tissue as a superposition of distinctive scattering structures (plum) embedded inside a fractal continuous medium of background refractive index fluctuation (pudding). PPRM faithfully reproduces the wavelength dependence of tissue light scattering and attributes the *anomalous* trend in the anisotropy to the plum and the powerlaw dependence of the reduced scattering coefficient to the fractal scattering pudding. Most importantly, PPRM opens up a novel venue of quantifying the tissue architecture and microscopic structures on average from macroscopic probing of the bulk with scattered light alone without tissue excision. We demonstrate this potential by visualizing the fine microscopic structural alterations in breast tissue (adipose, glandular, fibrocystic, fibroadenoma, and ductal carcinoma) deduced from noncontact spectroscopic measurement [**?**].

Streuung How to

Wie erhält man im Experiment Informationen über die innere Struktur eines Objekts?

Hier helfen Streuexerimente, um über diese Sonden das Innerste einer Probe aufzulösen. Ein energetisches Teilchen wird an dem zu untersuchenden Objekt gestreut. Die Art und Weise, wie die Sondenteilchen von der Probe abprallen, gibt Auskunft darüber, wie das Probenteilchen beschaffen ist. Größe und Geschwindigkeit der Sondenteilchen müssen an die erwartete Struktur des Targets angepasst sein.

1. Große Projektile proben im Wesentlichen die äußere Struktur des Objekts.

2. Kleine Projektive geben Auskunft über die innere Struktur, wobei sich bei höheren Geschwindigkeiten der Projektile immer mehr Details erkennen lassen.

Erste vielversprechende Messungen wurden mit Elektronen durchgeführt. Streuexperimente von Hertz, durchgeführt mit Kathodenstrahlen im Jahr 1892 ergaben, dass diese dünnen Metallfolien durchdringen können. In Folgeexperimenten stellt Lennard fest, dass der Streuquerschnitt proportional zur Massendichte des Materials war. Als wichtiger Hinweis ergab sich, dass die Atome nicht den gesamten Raum ausfüllen. Ansonsten

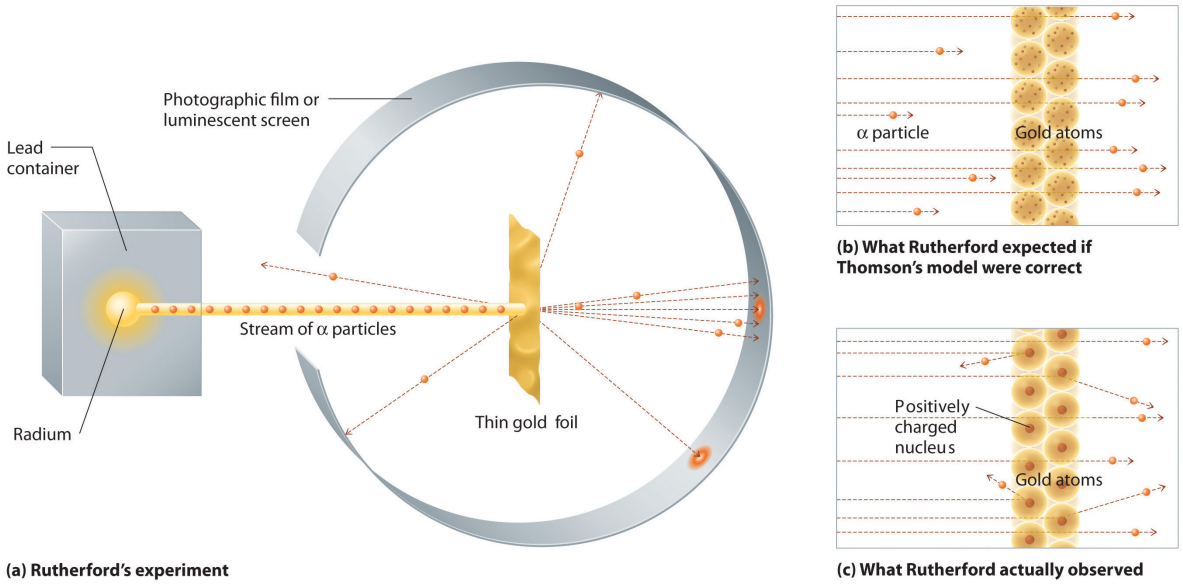


Abb. 15.49: *links*: Schematischer Aufbau des Rutherford-Experiments. *rechts, oben:* Was Rutherford auf der Grundlage des Thomson-Modell als experimentelles Ergebnis erwartete. *rechts, unten:* Rutherfords tatsächliches Beobachtungen [**?**].

hätte man die Durchdringungsvermögen der Kathodenstrahlen nicht erklären können. Offenbar sind die Bausteine des Atoms deutlich kleiner als die Atome selbst.

Anhand eines Streuexperiments mit α-Teilchen wurde das plum-pudding model mit Hilfe energiereichen Teilchen kritisch überprüft. Die Heliumkerne sind $7 \cdot 10^3$ mal schwerer als Elektronen und sollten nach den Vorüberlegungen geeignet sein, die Struktur des Atoms offenzulegen.

Rutherford nutze dazu einen α-Strahler. Ähnlich wie Thomson für Elektronen bestimmte er in Ablenkexperimenten das Ladung-zu-Masse Verhältnis der α-Teilchen und fand

$$\frac{q_\alpha}{m_\alpha} = \frac{e}{2\,m_H} \tag{15.39}$$

wobei m_H die Masse des Wasserstoffatoms. Demnach konnte es sich bei den Teilchen um einfach geladenes H_2^+ oder doppelt geladenes He^{2+} handeln. Um die Natur der Partikel zu klären, wurde eine Radiumprobe in einen Glasbehälter eingeschlossen. Tage später wurde in dem Glas eine Gasentladung gezündet und die Lichtemission analysiert, Das Leuchten war charakteristisch für Helium und nicht für Wasserstoff, wie man vorab vermutet hatte. Die Strahlung aus der Probe besteht aus doppelt geladenen Heliumkernen, die mit Geschwindigkeiten von $0.1c$ die Probe verlassen.

Nun zum eigentlichen Experiment. Nach dem Thomson-Modell sollte der Strom der Sondenteilchen nach Durchqueren der Atomprobe im Wesentlichen an Stärke abneh-

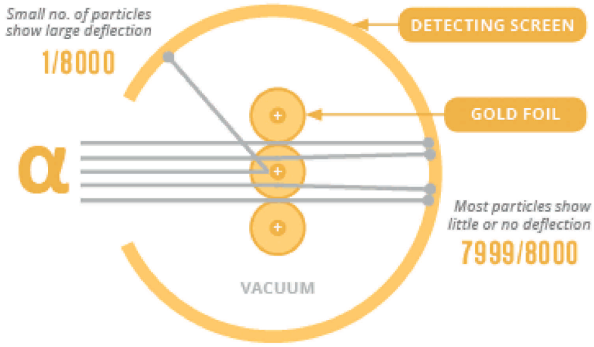


Abb. 15.50: Effizienz des Streuvorgangs beim Stoß von α-Teilchen mit einer Goldfolie im Experiment von Rutherford. Nur ein äußerst geringer Anteil der α-Teilchen wird in Rückwärtsrichtung zurück gestreut.

men, denn eine Ablenkung der Teilchen wird aufgrund der geleeartigen Struktur und der geringen Masse der Elektronen nicht erwartet, siehe Abb. 15.49 rechts-oben. Berechnungen auf der Grundlage des Thomsons-Modells ergaben, dass ein Goldatom ein α-Teilchen, das sich mit $2 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ bewegt, um durchschnittlich $6 \cdot 10^{-3}$ Grad ablenken sollte. Die Ablenkung ist so klein, da die Elektronen zu leicht sind, um die α-Teilchen merklich abzulenken.[47] Die positive Ladung ist andererseits über das gesamte Volumen des Atoms verteilt und kann daher auch keine Ablenkung der Projektile bewirken. Wenn ein α-Teilchen auf eine Goldfolie (Dicke $10^{-6}\,\mathrm{m}$) trifft, erwartet man Streuung an etwa 10^5 Atomen. Weiter sollten die Streuungen zufällig erfolgen. Die aufsummierte Ablenkung führt unter der Annahme von Vielfachstreuungen zu einer durchschnittlichen Ablenkung von etwa 0.6 Grad. Die α-Teilchen werden daher kaum von ihrer ursprünglichen Bahn abweichen. Außerdem erwartet man, dass nur 1 aus 10^{35} α-Teilchen in einem Winkel von 180^o reflektiert werden sollte - also praktisch nie!

Geiger-Marsden Experimente

I remember two or three days later Geiger coming to me in great excitement and saying, *We have been able to get some of the alpha-particles coming backward ...* It was quite the most incredible event that ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you ... It was then that I had the ides of an atom with a minute massive center carrying a charge.

Ernest Rutherford

Die Streuexperimente von Rutherford ergaben ein gänzlich anderes Bild, als man nach dem Thomson-Modell erwartet hatte. Atome einer dünnen Goldfolie werden mit α-Teilchen beschossen, die aus dem Zerfall von radioaktiven Radium stammten. Die Winkelverteilung der gestreuten Teilchen wird experimentell bestimmt (Abb. 15.49, rechts-unten). Zunächst beobachtet man, das der Strahl der α-Teilchen kaum aufgeweitet wurde. Dies ist im Einklang mit der Thomson-Vermutung, dass die elektrostatische Wechselwirkung der Elektronen und Protonen im plum pudding Modell weitestgehend aufheben.

[47] Um eine Vorstellung zu erhalten, denken sie an die Streuung eines Billardballs an einem Tennisball.

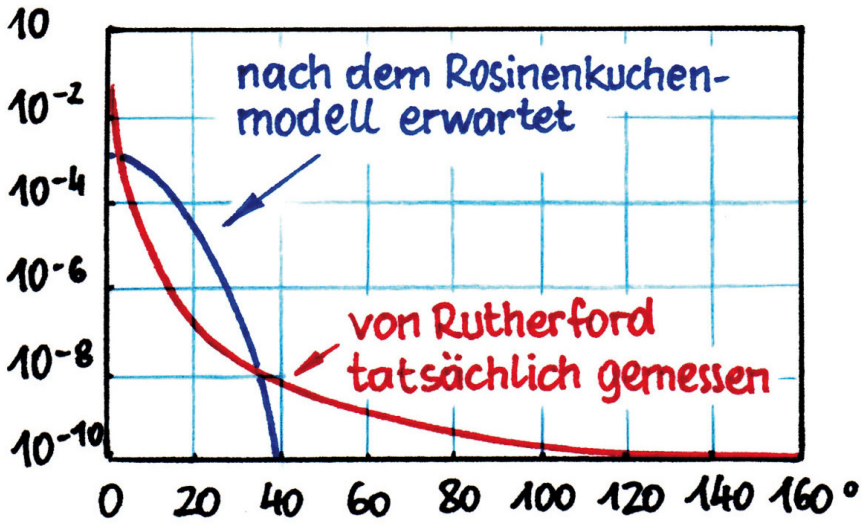


Abb. 15.51: Erwartung nach dem *plum pudding* Modell von Thomson und Rutherfords experimentelle Resultate [**?**].

Rutherford hatte die Idee, bei der Streuung auch bei großen Ablenkwinkeln nachzuschauen. Diese Experimente wurden von Geiger und Mardsen durchgeführt [**?**].[48] Wenn Sie das Experiment mal im Computer durchführen wollen, öffnen Sie diesen *link* und installieren Sie das Virtuelle Rutherford Experiment:

Link to `Virtual-Reality-Experimente`

Simulation: **Rutherford Scattering**

Im Experiment wurden folgende Beobachtungen gemacht:

- Der Hauptteil der Sondenteilchen durchqueren die Goldfolie ohne abgelenkt zu werden.

- Einige wenige der energiereichen α-Teilchen werden in große Ablenkwinkel gestreut, siehe auch Abb. 15.50. Das Experiment ergab, dass eines von 10^4 α-Teilchen reflektiert wurde. Das sind 10^{31} mal mehr, als nach dem Thomson-Modell erwartet!

Dass nahezu alle Teilchen durch die Folie fliegen ohne abgelenkt zu werden, deutet darauf hin, dass die Goldatome nahezu leer sind.[49] Die Teilchen, die in große Abprallwinkel abgelenkt werden, müssen dagegen auf einen kleinen, schweren Kern gestoßen sein. Hier konzentriert sich scheinbar die Masse der Goldatome. Rutherford argumentierte, dass für

[48] Die Quelle der höchstintensiven α-Strahlung war hochreines Radium ($4 \cdot 10^6$ Bq).

[49] Um eine Vorstellung zu bekommen stelle man sich folgendes vor: Wenn der Atomkern die Größe eines Tennisball hätte, dann wäre die Wolke aus Elektronen etwa einen Kilometer entfernt.

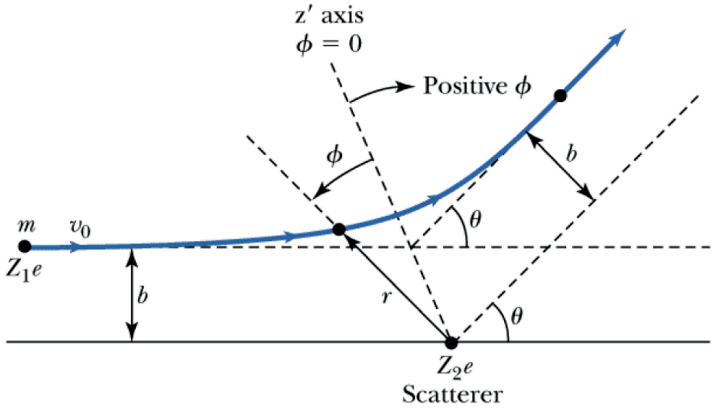


Abb. 15.52: Streugeometrie beim Rutherford-Experiment.

die erhebliche Ablenkung der α-Teilchen elektrische Felder notwendig sind, die deutlich höher sein müssen, als nach dem Thomson-Modell erwartet Auf der Grundlage dieser Überlegungen betrachten wir die elektrostatischen Verhältnisse. Fliegt ein α-Teilchen auf den Atomkern zu, wird die Coulombabstoßung stark zunehmen. Im Vergleich zum Abstand in der Größenordnung des Bohrschen Radius[50] nimmt die abstoßende Kraft um einen Faktor 10^8 zu, wenn das Sondenteilchen den Kern erreicht.

Die Resultate widersprechen dem plum-pudding-model einer homogen positiv aufgeladenen Kugel mit eingebetteten negativen Elektronen. Abb. 15.51 zeigt einen Vergleich der nach den Modellen von Thomson und Rutherford erwarteten Ereignisse als Funktion des Streuwinkels.

Die Rutherford Experimente erklären eine Reihe physikalischer Beobachtungen.

- Die Ionisierung von Atomen kann erklärt werden.
- Das Phänomen der Elektrolyse ist mit dem Modell vereinbar.
- Das Periodensystem der Elemente lässt sich im Rahmen des Modells erklären.

Können Sie die aufgestellten Aussagen begründen?

Da die Wechselwirkung mit den positiven Ladungen stark vom Abstand abhängt, ergibt sich eine erhebliche Ablenkung der Projektile nur in unmittelbarer Nähe zum Kern. Dies drückt sich im Stoßparameter[51] b aus (Abb. 15.52):

$$b = \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{Z_{nucleus} \cdot e^2}{E_{kin} \cdot \tan(\Theta/2)} \tag{15.40}$$

[50] $r_{Bohr} = 0.529 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$

[51] *Lexikon:* Der **Stoßparameter** b ist der senkrechte Abstand zwischen dem Weg eines Projektils und dem Zentrum eines Potenzials $U(r)$, das von dem Streuer erzeugt wird, siehe Abb. 15.52.

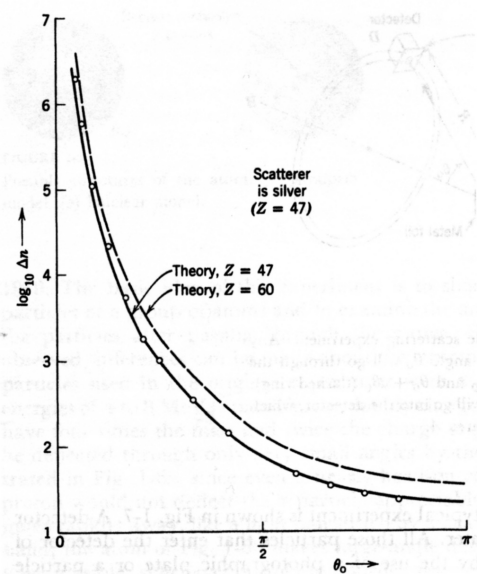


Abb. 15.53: Vergleich zwischen einem α-Teilchen-Streuexperiment und der Theorie. Die durchgezogene Linie entspricht Z=47. Für die gestrichelte Linie wurde in der Rutherfordschen Streuformel Z=60 eingesetzt. Man beachte, dass ein anderer Z-Wert die Form nicht verändert und nur eine vertikale Verschiebung der Rutherford-Kurve bewirkt [**?**].

Große Ablenkwinkel ergeben sich bei geringem Stoßparameter und umgekehrt. Rutherford hat dieses Streuverhalten analysiert und eine speziell für sein Experiment ausgelegte Streuformel aufgestellt. Sie beschreibt, ausgehend von einer anfänglichen Anzahl Teilchen (Anzahl N, Flächendichte n),[52] wie viele der Teilchen N_{sc} in Abhängigkeit von der kinetischen Energie E_{kin} im Stoß in einen bestimmten Raumwinkel Θ gestreut werden. Hier befindet sich der Detektor, der eine aktive Fläche A_0 hat. Dabei spielt weiter der Ladungszustand von Kern Z_1 und Projektil Z_2 (He^{2+}) eine Rolle und der Abstand R in dem das Projektil am Atomkern vorbei liegt.

$$N_{sc} = \frac{e^4}{64\,\pi^2 \cdot \varepsilon_0^2} \frac{N \cdot n \cdot A_0}{R^2} \frac{Z_{nucleus}^2}{E_{kin}^2 \cdot \sin^4(\Theta/2)} \tag{15.41}$$

[52] Anzahl der einfallenden Teilchen $N{=}n \cdot A_{beam} \cdot d$, wobei A_{beam} : Fläche des Projektilstrahls, d: Dicke der Folie.

Winkel $\Theta[^o]$	Anzahl Ereignisse N_{sc}	$N_{sc} \cdot \sin^4(\Theta/2)$
150	111	96.6
75	680	93.4
37.5	8800	93.9

Tab. 15.3: Streuraten als Funktion des Streuwinkels für Silber [**?**], siehe Fußnote 53.

Das bedeutet, dass N_{sc}:[53]

- proportional ist zur Dicke der Folie d.
- proportional ist zum Quadrat der Kernladung, also $Z^2_{nucleus}$.
- umgekehrt proportional ist zum Quadrat der kinetischen Energie der Projektive, also E^2_{kin}.
- umgekehrt proportional ist zur vierten Potenz von $\sin(\Theta/2)$.

Die Rutherfordsche Streuformel gibt die gemessenen Daten von Geiger und Marsden gut wieder [**?**]. Man beachte die logarithmische Aufteilung der Ordinate! Wichtig ist, dass nach der Streuformel N_{sc} und damit der Wirkungsquerschnitt folgendermaßen skaliert

$$N_{sc} \approx \frac{Z_\alpha \cdot Z_{nucleus}}{E^2_{kin} \cdot \sin^4(\Theta/2)} \tag{15.42}$$

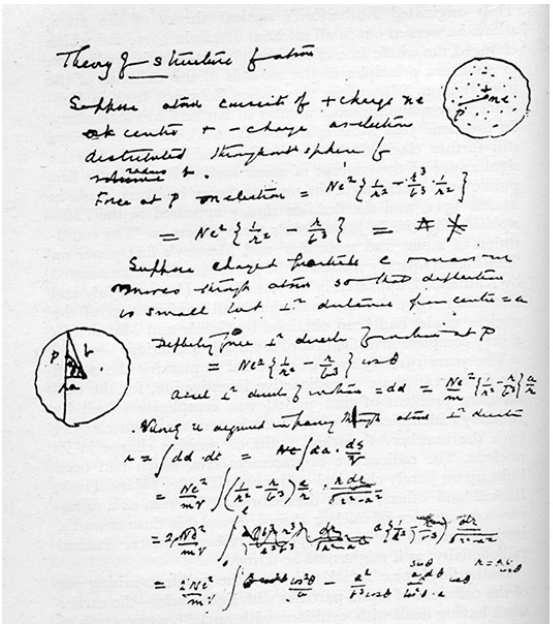
Man erkennt, dass die Streuung vom Ladungszustand des untersuchten Kerns Z_1 abhängt. Anhand der Streudaten lässt sich also prinzipiell die Kernladung und damit die Ordnungszahl der Elements bestimmen. Genauso solche Experimente haben Geiger und Mardsen durchgeführt. Die Untersuchungen beinhalteten Messungen zur Winkelabhängigkeit, zur Abhängigkeit von Foliendicke, Ordnungszahl und Kinetischer Energie der α-Teilchen. Abb. 15.53 zeigt, wie man anhand der Rutherfordstreuung eine Silberprobe identifizieren kann.

Link to video `The Rutherford Atom 1961`

Rutherfords Atommodell

Ausgehend von den Ergebnissen schlägt Rutherford sein Modell des Atoms vor. Frühe Überlegung Rutherfords zu diesem Thema (etwa 1910) zeigt Abb. 15.54. Geiger und Marsden zeigten, dass die Anzahl gestreuter α-Teilchen als Funktion des Streuwinkels konsistent ist mit der Annahme eines kleinen positiv geladenen Kerns. Um die tatsächliche Größe des Kerns zu bestimmen, sucht man in den Experimenten nach Abweichungen in der Coulombstreuung (Rutherfordsche Streuformel). Diese tritt allerdings erst bei großen Streuwinkeln oder hohen Geschwindigkeiten der Sondenteilchen auf und ist darauf zurückzuführen, dass sich die Art der Wechselwirkung ändert. Bei diesen Bedingungen proben die α-Teilchen nicht mehr die Coulombabstoßung durch den Kern, sondern die Starke Wechselwirkung. Dies führt zu Änderungen im Streuverhalten und die Streuquerschnitte weichen von der Rutherfordschen Formel ab (Abb. 15.55), siehe dazu [**?**]. Ähnliches zeigt sich, wenn man als Streuprojektile Elektronen verwendet, siehe

[53] Im einem Experiment an einer Silberfolie fanden Geiger und Marsden folgendes Ergebnis, siehe Tab. 15.3. Obwohl sich die Raten erheblich ändern, ändert sich das Produkt aus Rate und Winkel der Beobachtung nicht, was die Richtigkeit der Θ-Abhängigkeit untermauert.



Theory of structure of atom

Suppose atom consists of + charge ne at centre & - charge as electrons distributed throughout sphere of radius r.

Force at p on electron = $Ne^2 \{1/r^2 - r^3/b^3 \cdot 1/r^2\}$

= $Ne^2 \{1/r^2 - r/b^3\}$ = [crossed out]

Suppose charged particle e [illegible]

Moves through atom so that deflection

is small but [perpendicular] distance from centre = a

Deflecting force [perpendicular] direction from radius at P

= $Ne^2 \{1/r^2 - r/b^3\} \cos\theta$

And [perpendicular] direction of 'illeg' = dd = $Ne^2/m \{1/r^2 - r/b^3\} \cdot a/r$

Velocity U acquired in passing through atom [perpendicular] dirction

$R = \int d\alpha \cdot dt$ = etc.

Abb. 15.54: Notizen Rutherfords zu seinem Atommodell.

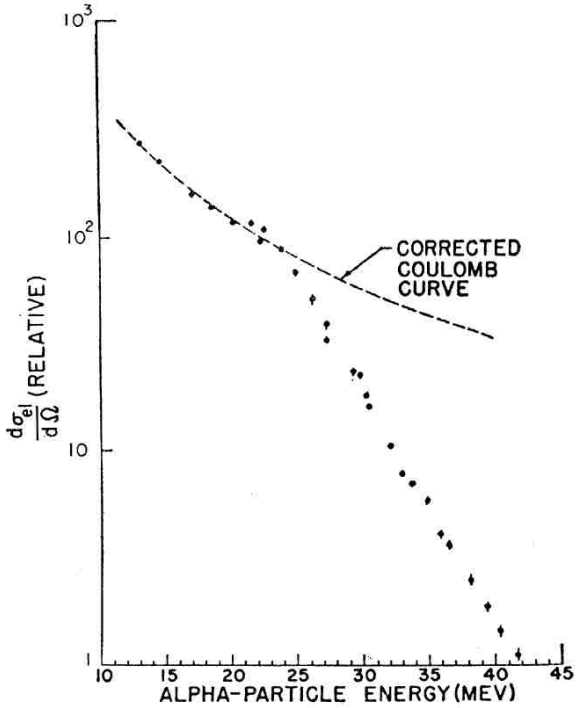


Abb. 15.55: Die Abweichung der Streuquerschnitte von den Vorhersagen des Rutherfordschen Streuformel bei hohen Energien der α-Teilchen, deuten darauf hin, dass sich bei einer weiteren Annäherung der α-Teilchen an den Kern die Wechselwirkung ändert. Verantwortlich ist die Starke Wechselwirkung [**?**].

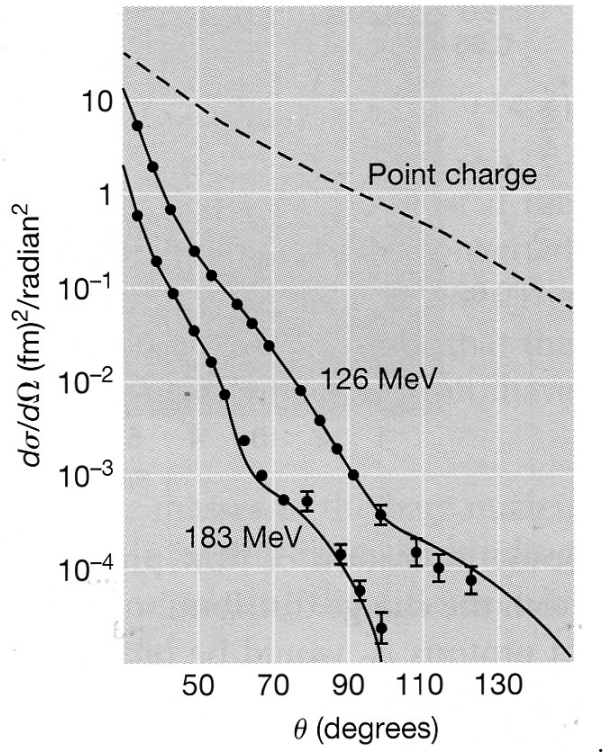


Abb. 15.56: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung von Elektronen an Gold. Bei hohen Projektilenergien zeigen sich ebenfalls Hinweise auf Beiträge der Starken Wechselwirkung [**?**]

Abb. 15.56. Die erwarteten Werte nach Rutherford (punktförmiger Streuer) sind eingezeichnet. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass es im Kern eine ausgedehntere Ladungsverteilung gibt (Kapitel *Kernmodelle*). Die Unterschiede werden um größer, je kleiner der Stoßparameter (große Ablenkwinkel) ist. Abweichungen von der Rutherfordschen Streuformel ergeben sich auch bei großen Stoßparametern, also wenn das α-Teilchen in einem großen Abstand am Kern vorbeifliegt. In diesem Fall schirmen die Elektronen des Atoms die Kernladung ab und die Wechselwirkung mit dem Kern ist stark herabgesetzt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen:

- Atome sind Objekte mit innerer Struktur.
- Atome bestehen aus einem Kern und einer Hülle, in der sich die Elektronen aufhalten.
- Die Elektronen bewegen sich auf Planetenbahnen um den Kern.
- Das Rutherford-Modell erklärt die experimentelle Resultate von Streuversuchen mit α-Teilchen und Elektronen an Metallfolien.
- Die Kernladungszahl stimmt mit der Ordnungszahl im Periodensystem überein.

Einige Anforderungen an ein überzeugendes Modell des Atoms werden allerdings nicht erfüllt.

- Das Rutherford-Modell erklärt nicht die Stabilität der Atome.
- Die Lichtemission aus Atomen ist nicht geklärt.
- Die Ursache der chemischen Bindung bleibt unklar.

Damit ergibt sich folgendes Bild des Atoms, siehe auch Abb. 15.57, wo die entscheidenden Entwicklungsstufen, die zur heutigen Vorstellung des Atoms führten, dargestellt sind:

- Das Atom hat einen Durchmesser in der Größenordnung von 10^{-10} m.
- In diesem Gebiet halten sich die Elektronen auf.
- Der Atomkern ist wesentlich kleiner als die Atomhülle. Die positive Ladung des Atoms ist in einem Gebiet von 10^{-15} m konzentriert.[54]
- Nahezu die gesamte Masse des Atoms entfällt auf den Kern.[55]
- Die Coulombabstoßung der Protonen wird durch andere Kräfte kompensiert.

If in a certain cataclysm, where all of the scientific knowledge is to be destroyed, but only one sentence is to be passed down to the next generation of creatures, what would be the best thing? The thing that contains the most information in the least number of words? I believe it is the atomic hypothesis or the atomic fact or whatever you want to call it, that all things are made out of atoms, little particles that move around, are in perpetual motion, attract each other when they're some distance apart but repel being squeezed into one another. n that one sentence, you will see, there is an enormous amount of information about the world, if just a little imagination and thinking are applied [**?**].

Richard Feynman (1964)

Anwendungen 2^{4LP}

Ein Beispiel aus der Werkstoffdiagnostik

Die Wechselwirkung schneller Ionen mit den Atomen eines Materials, genannt Rutherford backscattering spectrometry (RBS) kann genutzt werden, um Informationen über die oberflächennahen Bereiche einer Probe zu gewinnen. Abb. 15.59 stellt andere Verfahren der Materialanalyse vor. Stark beschleunigte Ionen (Masse m_1) werden auf MeV Energien beschleunigt und streuen elastisch an den Kernen (Masse m_2) in der Nähe der Oberfläche. Die gestreuten Ionen verlassen den Festkörper unter einem bestimmten Winkel Θ. Das

[54] Hätte der Atomkern die Größe einer ein Cent Münze, so hätte die Atomhülle unter Zugrundelegung dieses Maßstabs einen Durchmesser von einem Kilometer!
[55] Ein Kubikmillimeter Kernmaterie hätte eine Masse von 10^8 kg!

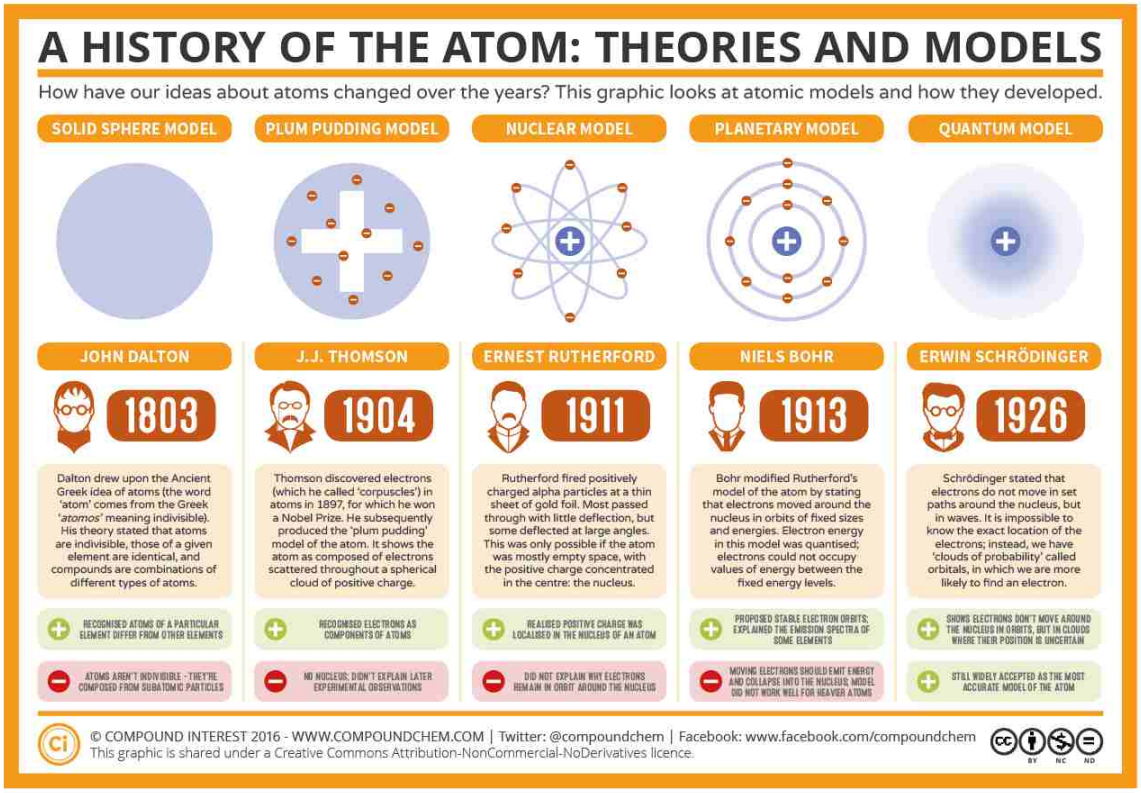


Abb. 15.57: Entwicklung der Atommodelle von Dalton bis Schrödinger.

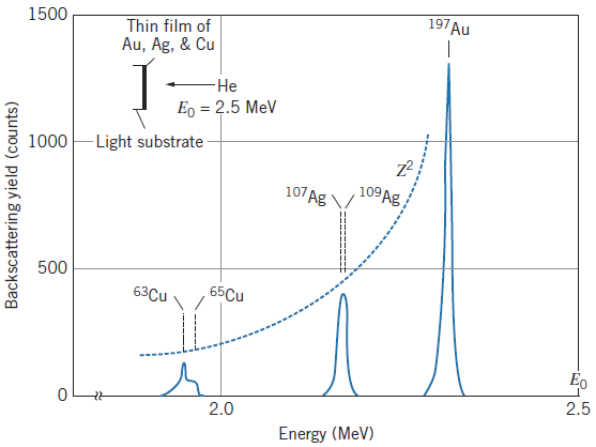


Abb. 15.58: Energiespektrum von 2.5 MeV α-Teilchen nach Rückstreuung an einer dünnen Schicht aus Kupfer, Silber und Gold. Die gestrichelte Linie zeigt das Z^2-Verhalten des Wirkungsquerschnitts, wie er nach der Rutherford-Formel erwartet wird [**?**].

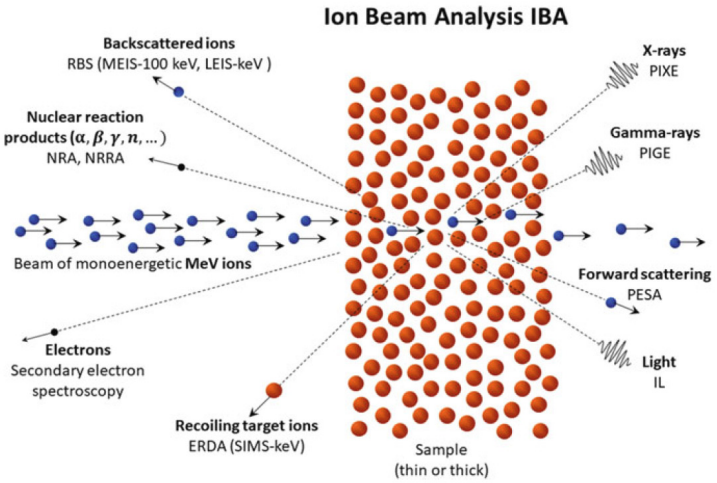


Abb. 15.59: Andere Streutechniken, die neben RBS zur Ionenstrahlanalyse von Materialien verwendet werden. MEIS: *medium energy ion scattering*; LEIS: *low energy ion scattering*; SIMS: *secondary ion mass spectrometry*; NRA: *nuclear reaction analysis*, NRRA: *resonant nuclear reaction analysis*, ERDA: *elastic recoil detection analysis*; IL: *ionoluminescence*; PESA: *photo-electron spectroscopy in air*; PIGE: *particle-induced gamma emission*; PIXE: *proton-induced x-ray emission* [**?**].

Verhältnis von Rückstreu- zu Primärenergie E_R/E_P heißt kinematischer Faktor k_{RBS} und errechnet sich aus Energie- und Impulserhaltung:

$$k_{RBS} = \left(\frac{\cos\Theta \cdot \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\theta}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \right)^2 \tag{15.43}$$

Für die 180^o Rückstreuung von α-Teilchen an einem Kern der Masse M ergibt sich ein Energieverlust des Heliumkerns von

$$k_{RBS} = \frac{4\, m_\alpha/M}{(1 + m_\alpha/M)^2} \tag{15.44}$$

Für schwere Kerne liegt der Energieverlust des α-Teilchens bei etwa 0.5 MeV, was experimentell gut aufzulösen ist. Abb. 15.58 zeigt ein das Energiespektrum der α-Teilchen, die an einer dünnen Edelmetallfolie gestreut wurden. Man beachte die Z^2-Abhängigkeit, die sich in der Intensität der Signale der Elemente wieder spiegelt. Die Methode hat eine so hohe Empfindlichkeit, dass sogar Signale der Kupferisotope (Kapitel *Kerne*) aufgelöst werden können.
Allerdings muss man noch den Energieverlust ΔE in Betracht ziehen, den die einfallenden Ionen in der Probe erleiden. Dieser steht aber in einem engem Zusammenhang

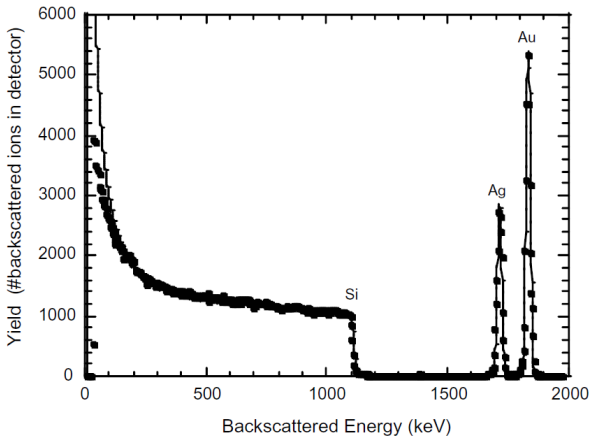


Abb. 15.60: RBS-Spektrum einer dünnen Silber/Gold-Folie auf einem Siliziumsubstrat [**?**].

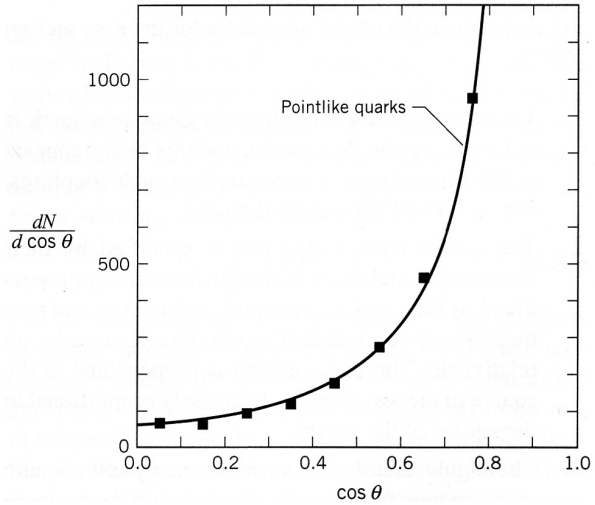


Abb. 15.61: Winkelverteilung getreuter quarks und Gluonen in hochenergetischen Proton-Antiproton Stößen, gemessen im Schwerpunktsystem [**?**].

zur Tiefe der durchquerten Schicht und liefert Informationen bis zu einer Tiefe von etwa 2-10 nm. Abb. 15.60 zeigt am Beispiel einer Messung an einer dünnen Folie, dass man sogar quantitative Daten ermitteln kann, wenn man in der Analyse noch die Stärken der Signale auswertet. Die Methode ist nahezu zerstörungsfrei und geeignet

- für die Untersuchung von Oberflächen und Grenzflächen
- für die Analyse von Schichtsystemen
- zur Ermittlung elementspezifischer Tiefenprofile
- zur Erkennung von Defekten kristalliner Festkörpern
- zur Vor-Ort Charakterisierung von Gesteinen auf Mond und Mars

Ein Beispiel aus der Welt der Quarks

Quark-Quark Streuexperimente wurden durchgeführt, um die Rutherford-Gleichung im Rahmen der Starken Wechselwirkung zu überprüfen [**?**].[56] Eine Übereinstimmung mit der Rutherford-Analyse erwartet man, wenn man annimmt, dass Quarks Punktteilchen sind. Abweichungen würden sich ergeben, wenn Quarks eine innere Struktur haben. Das Experiment ergab, dass für große Streuwinkel, die Anzahl der gestreuten Quarks grob mit der Anzahl von α-Teilchen im Geiger-Mardsen Experiment übereinstimmte. Quarks sind, nach heutigem Kenntnisstand, also Punktteilchen, wie Abb. 15.61 demonstriert. Überraschend ist, dass diese Eigenschaft nicht von der Masse des betrachteten Teilchen abhängt. Beispielsweise ist das bottom-quark punktförmig, obwohl es die fünffache Masse des Protons hat.

In concluding this discussion it may be appropriate to return to the theme introduced earlier and raise the question once again of the deeper, and possibly philosophical, meaning of the term *elementary* particle. As we have seen, the proton and neutron, which were once thought to be elementary particles, are now seen to be highly complex bodies. It is almost certain that physicists will subsequently investigate the constituent parts of the proton and neutron-the mesons of one sort or another. What will happen from that point on? One can only guess at future problems and future progress, but my personal conviction is that the search for ever-smaller and ever-more-fundamental particles will go on as long as man retains the curiosity he has always demonstrated [**?**].

R. Hofstadter[57] (1962)

Atome sehen: Feldionenmikroskop^{4LP}

Kann man Atome sehen?

Im Jahre 1928 veröffentlichten Fowler und Nordheim ihre theoretische Arbeit über die Emission von Elektronen aus Festkörpern, ausgelöst durch ein äußeres elektrisches Feld (siehe Kapitel *Tunneleffekt*). Nadelförmige Spitzen und eine erhöhte elektrische Feldstärke am Apex reichen aus, um die notwendigen Bedingungen für eine Feldemission zu realisieren und Bilder der Spitzenoberfläche zu erzeugen. Obwohl hochauflösende Bilder möglich wurden, wurde mit dieser Methode eine atomare Auflösung nicht erreicht, da die deBroglie Wellenlänge des Elektrons die Auflösung begrenzt. Die Situation ändert sich, wenn man eine positive Spannung an die Spitze angelegt. In diesem Fall beobachtet

[56] The Nobel Prize in Physics 1984 was awarded jointly to Carlo Rubbia and Simon van der Meer *for their decisive contributions to the large project, which led to the discovery of the field particles W and Z, communicators of weak interaction.*

[57] The Nobel Prize in Physics 1963 was divided, one half awarded to Eugene Paul Wigner *for his contributions to the theory of the atomic nucleus and the elementary particles, particularly through the discovery and application of fundamental symmetry principles*, the other half jointly to Maria Goeppert Mayer and J. Hans D. Jensen *for their discoveries concerning nuclear shell structure*

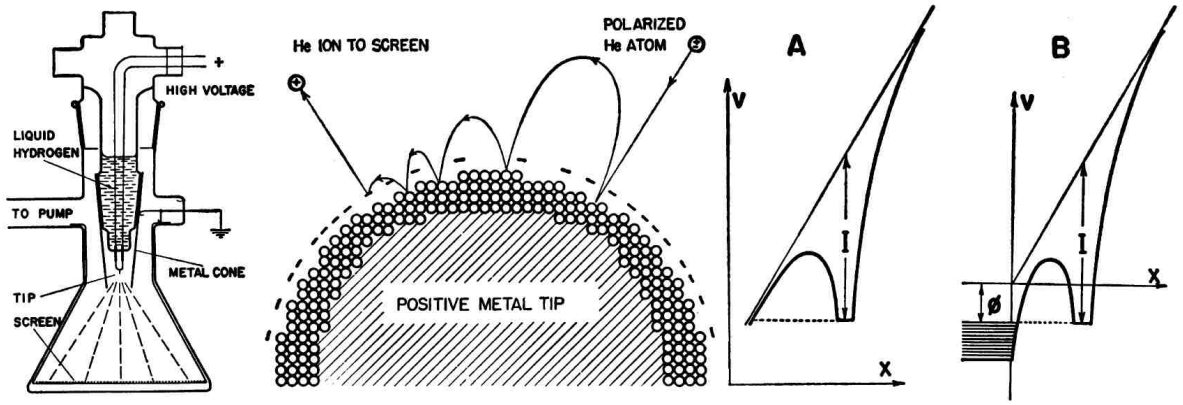


Abb. 15.62: Links: Schematische Darstellung eines Feldionenmikroskops. Mitte: Ein polarisiertes Heliumatom wird von der Metallspitze angezogen, in mehreren Sprüngen abgebremst und nahe der Oberfläche (Entfernung 0.2Å) durch einen tunnelinduzierten Ladungsaustausch ionisiert. Das Heliumion wird in Richtung des Schirms beschleunigt. Rechts: (A) Das Potential eines Atoms in einem starken elektrischen Feld; (B) das Potential eines Elektrons in der Nähe der Metalloberfläche. Die Feldionisation des Gasatoms tritt auf, wenn das Elektron aus dem Grundzustand entlang der gepunkteten Linie in das Metall links tunnelt [**?**].

man eine Streuung von Ionen (Wasserstoff, Helium), die empfindlich ist auf die Struktur der Oberfläche. Tatsächlich spielt auch hier der Tunnelprozess wieder eine wichtige Rolle, siehe Abb. 15.62. Dieses Instrument erhielt den Namen Feldionenmikroskop und lieferte die ersten Bilder einzelner Atome [**? ?**].

Für Untersuchungen von Proben mit einem Feldionenmikroskop bedarf es einer auf tiefe Temperaturen (unterhalb 100 K) abgekühlten Metallspitze. Die Kühlung sorgt dafür, dass die thermische Bewegung der Atome reduziert wird. Weiter finden die Experimente

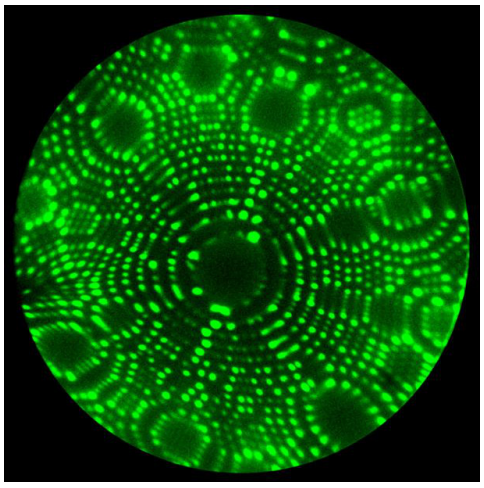


Abb. 15.63: Feldionenmikroskopische Aufnahme von reinem Wolfram entlang der (110)-Richtung, abgebildet bei einer Temperatur der Probe von 25 K[**?**].

im Vakuum statt, wobei die Kammer mit einem Edelgas gefüllt ist. Eine Hochspannung von etwa 8kV liegt zwischen der feinen Spitze und einem großflächigem Leuchtschirm an. Um eine möglichst hohe Auflösung zu erreichen, verwendet man die schwer ionisierende Edelgase wie Neon oder Helium. Dadurch setzt der Feldionisationseffekt erst bei hohen elektrischen Feldstärken ein. Auf der anderen Seite muss man verhindern, dass Oberflächenatome über Feldverdampfung aus der Oberfläche abgelöst werden.

Edelgasatome, die in der Nähe der Spitze ionisiert werden, bewegen sich entlang der elektrischen Feldlinien zum Detektor. Für die Abbildung benötigt man also keine optischen oder elektrostatischen Linsenelemente, so dass Aberrationseffekte keine Rolle spielen. Weiter treten keine Beugungsphänomene aufgrund der großen deBroglie Wellenlänge der Ionen auf, so dass die Auflösung maßgeblich durch die Krümmung der Metallspitze bestimmt wird. Die erreichbaren Vergrößerung liegt im Bereich bis 10^6. Damit gelingt es einzelne Atome auf der Oberfläche aufzulösen und Strukturen zu identifizieren. Abb. 15.63 zeigt eine Wolframoberfläche, aufgenommen bei einer Probentemperatur von 25 K. Es sei angemerkt, dass der Effekt der Feldverdampfung in der so genannten Atomsonde (*tomographic atom probe*) verwendet wird, um die chemische Zusammensetzung von Oberflächen zu charakterisieren. Dieses Verfahren wird vornehmlich in den Materialwissenschaften eingesetzt. Das Konzept wurde auf der Grundlage des *Field Desorption Spectrometer* Patents von J. A. Panitz entwickelt. Im Jahr 1983 wurde der erste Prototyp vorgestellt [**?**].

Hadean age for a post-magma-ocean zircon confirmed by atom-probe tomograph [?]: The oldest minerals on Earth are thought to have formed in the Hadean eon, but the reliability of the dates has been questioned. Atom-probe tomography of an ancient zircon confirms that the mineral formed about 4.4 billion years ago, implying that any mixing event of the silicate Earth occurred before that time.

Das physikalische Weltbild hat nicht Unrecht mit dem, was es behauptet, sondern mit dem, was es verschweigt.

Carl Friedrich von Weizsäcker

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Welche fundamentale Wechselwirkung ist beim Rutherfordschen Streuversuch für die Ablenkung der α-Teilchen verantwortlich?[58]

Aufgabe 2.2: Bestimmen Sie aus der Dichte von Kohlenstoff (Molmasse: M_{avo}=12 g/mol, Dichte: ρ=2.5 g/cm^3) die Größe der Atome unter der Annahme, dass es sich bei den Atomen um kleine Kugeln mit einem Volumen V_{atom} handelt!

Mit Hilfe der Avogadrokonstanten N_A kann man für das Atomvolumen schreiben:

$$\begin{aligned} V_{atom} &= \frac{V_{avo}}{N_A} \\ V_{atom} &= \frac{M_{avo}}{\rho \cdot N_A} \end{aligned}$$

Das Volumen einer Atomkugel ist

$$V_{atom} = \frac{4}{3}\pi \cdot r_{atom}^3$$

Fasst man beide Ausdrücke zusammen ergibt sich:

$$\begin{aligned} r_{atom}^3 &= \frac{3}{4\,\pi}\frac{M_{avo}}{\rho \cdot N_A} \\ V_{atom} &= \sqrt[3]{\frac{3}{4\,\pi}\frac{M_{avo}}{\rho \cdot N_A}} \\ r_{atom} &= \sqrt[3]{\frac{3}{4\,\pi}\frac{12\,\mathrm{g/mol}}{(2.5\,\mathrm{g/cm^3}) \cdot (6.02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}})}} \\ r_{atom} &= 1.28 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm} \\ r_{atom} &= 1.28 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3: Die positive Ladung eines Atoms ist[59]

(a) über das ganze Atom verteilt.

(b) um den Kern herum verteilt.

(c) am Kern konzentriert.

Aufgabe 2.4: Ein α-Teilchen nähert sich einem Goldkern (Ordnungszahl Z=79) mit einer Geschwindigkeit von $2 \cdot 10^7$ m/s. Wie nah kommen sich die Atomkerne?

[58] Antwort: Die Coulombwechselwirkung.
[59] Antwort: (c)

Die gesamte Kinetische Energie wird in Potenzielle Energie umgewandelt. Aus Gründen der Energieerhaltung gilt deshalb zu Beginn (i) und zum Ende (f) des Experiments:

$$\begin{aligned} E^i_{kin} + E^i_{pot} &= E^f_{kin} + E^f_{pot} \\ \frac{1}{2} m_\alpha \cdot v_\alpha^2 + 0 &= 0 + \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0} \frac{q_\alpha \cdot q_{Au}}{r_{\min}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{2\,q_\alpha \cdot q_{Au}}{m_\alpha \cdot v_\alpha^2} \\ r_{\min} &= \frac{1}{4\,\pi \cdot (8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}})} \frac{2\,(2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (79 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})}{4 \cdot (1.66 \cdot 10{-}27\,\mathrm{kg}) \cdot (2 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s})^2} \\ r_{\min} &= 2.75 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5: Welches Metall untersuchte Rutherford bei seinem berühmten Streuexperiment?[60]

(a) Kupfer

(b) Silber

(c) Gold

(d) Blei

(e) Stahl

Aufgabe 2.6: Der experimentelle Beweise für die Existenz des Atomkerns wurde erbracht durch[61]

(a) Millikans Öltropfenexperiment

(b) Atomemissionsspektroskopie

(c) magnetische Ablenkung von Kathodenstrahlen

(d) α-Streuung an einer dünnen Metallfolie

(e) Stimmt alles nicht!

Aufgabe 2.7: Wenn Atome einer Uranfolie mit α-Teilchen beschossen werden, erleiden nur ganz wenige Teilchen eine Ablenkung. Der Großteil der Partikel durchquert die Folie ohne Ablenkung. Warum?[62]

[60] Antwort: (c)
[61] Antwort: (d)
[62] Antwort: (d)

(a) Die abstoßende Kraft auf das α-Teilchen ist gering.

(b) Die anziehende Kraft der Elektronen auf das α-Teilchen ist gering.

(c) Es gibt nur einen Kern und eine erhebliche Anzahl an Elektronen.

(d) Der Kern nimmt im Vergleich zum Volumen des Atoms ein deutlich kleineres Volumen ein.

(e) Stimmt alles nicht!

Aufgabe 2.8: Rutherfords Streuexperiment führte zu dem Schluss, dass[63]

(a) Masse und Energie zusammenhängen

(b) Elektronen besetzen den Raum um den Kern

(c) Neutronen sind tief im Kern verborgen

(d) Der Wechselwirkungspunkt mit Materie kann exakt bestimmt werden

(e) Stimmt alles nicht!

Aufgabe 2.9: Welche der folgenden Aussagen wird NICHT vom Rutherfordschen Atommodell unterstützt?[64]

(a) Protonen und Neutronen findet man im Kern.

(b) Das Volumen des Kerns ist gering im Vergleich zum Volumen des Atoms.

(c) Die Anzahl an Protonen und Neutronen ist gleich.

(d) Die Anzahl an Elektronen und Protonen ist gleich.

(e) Die Anzahl der Elektronen und Neutronen ist gleich.

Aufgabe 2.10: Das Atom als Ganzes ist[65]

(a) positiv geladen.

(b) negativ geladen

(c) neutral.

(d) Stimmt alles nicht.

(e) Stimmt alles.

[63] Antwort: (b)
[64] Antwort: (c), (e)
[65] Antwort: (c)

Aufgabe 2.11: Was stimmt NICHT in Bezug auf Elektronen?[66]

(a) Elektronen findet man im Kern.

(b) Elektronen haben das größte q/m Verhältnis.

(c) Elektronen sind positiv geladen

(d) Elektronen sind schwerer als Myonen.

(e) Elektronen sind aus Quarks aufgebaut.

Aufgabe 2.12: Bestimmen Sie den mittleren Abstand der Moleküle bei Standardbedingungen für Druck und Temperatur (STP: p=$1.01 \cdot 10^5\,\mathrm{N/m^2}$, 273 K).

Aus dem Idealen Gasgesetz ergibt sich für ein Mol eines Gases bei einer Temperatur von 273 K:

$$\begin{aligned} N_A \cdot k_B \cdot T_K &= p \cdot V \\ k_B \cdot T_K &= \frac{p \cdot V}{N_{avo}} \\ k_B \cdot T_K &= (0.02585\,\mathrm{eV})\frac{273\,\mathrm{K}}{300\,\mathrm{K}} \\ k_B \cdot T_K &= 0.0235\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

Damit kann man das zugehörige Volumen berechnen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{(6.02 \cdot 10^{23}) \cdot (0.0235\,\mathrm{eV}) \cdot (1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV})}{1.01 \cdot 10^5\,\mathrm{N/m^2}} \\ V &= 0.0244\,\mathrm{m^3} \end{aligned}$$

Vielleicht haben sie den Wert ja schon mal gehört? Es sind 22.4 Liter. Damit gelingt es, den mittleren Abstand d der Moleküle zu berechnen. Er beträgt:

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{V}{N_{avo}}\right)^1 /3 \\ d &= \left(\frac{0.0244\,\mathrm{m^3}}{6.02 \cdot 10^{23}}\right)^1 /3 \\ d &= 3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Der Abstand der Moleküle ist, wie Avogadro schon vermutete, deutlich größer als die Größe der Moleküle, nämlich eine Größenordnung.

Aufgabe 2.13: Berücksichtigt man die Größe der Atome von 0.1 nm, welche Elektronen müssten Elektronen mindestens haben, um Details auf 1% der Größe aufzulösen?

[66] Antwort: (a), (c), (d), (e)

Es sollte klar sein, dass man hier relativistisch rechnen muss. Die deBroglie-Wellenlänge des Elektrons beträgt nach den Vorgaben 10^{-12} m.

$$pc = \frac{h \cdot c}{\lambda_{dB}} = 1.24 \cdot 10^6 \,\mathrm{eV}$$

Der relativistische Ansatz ist voll gerechtfertigt, denn diese Energie ist deutlich höher als die Ruheenergie des Elektrons. Als notwendige Kinetische Energie ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} - m_e \cdot c^2 \\ E_{kin} &= (\sqrt{0.511^2 + 1.24^2} - 0.511)\,\mathrm{MeV} \\ E_{kin} &= 0.83\,MeV \end{aligned}$$

Aufgabe 2.14: Schätzen Sie den Streuwinkel beim Stoß eines α-Teilchens (Geschwindigkeit v_α) mit einem Kern bei einem Abstand r zum Streuzentrum ab!

Die Ladung von α-Teilchen und Kern sind q_α=2 e und q_K=$Z \cdot e$. Die Änderung des α-Teilchen Impulses ergibt sich aus der Coulombkraft, die während des Vorbeiflugs (Zeitspanne Δt) wirkt. Wir schätzen Δp grob ab, indem wir statische Bedingungen und $\Delta t = 2\,r/v_\alpha$ annehmen.

$$\Delta p = F \cdot \Delta t = \left(k_C \frac{q_\alpha \cdot q_K}{r^2}\right) \cdot \left(\frac{2\,r}{v_\alpha}\right)$$

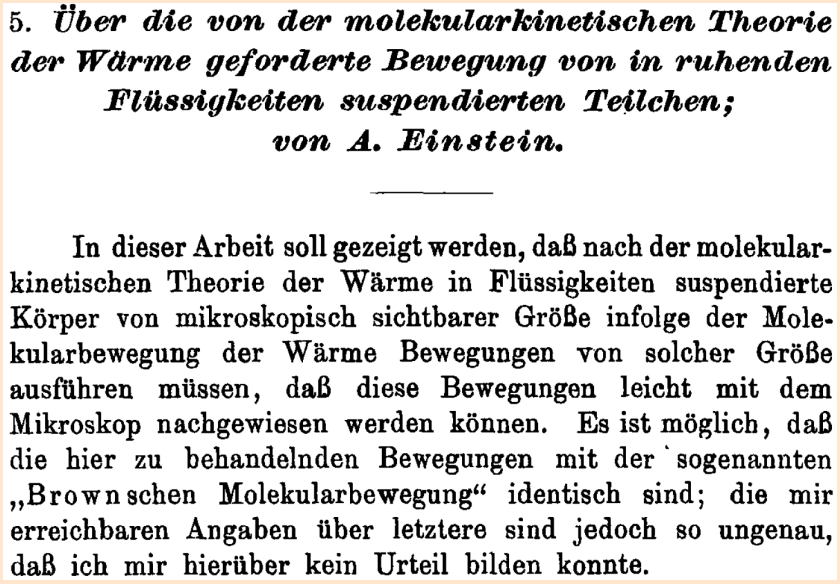
Für den Streuwinkel Θ findet man:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\Delta p}{p} \\ \Theta &= \left(2\,k_C \frac{q_\alpha \cdot q_K}{r \cdot v_\alpha}\right) \cdot \left(\frac{1}{m_\alpha \cdot v_\alpha}\right) \\ \Theta &= \frac{k_C \cdot q_\alpha \cdot q_K}{r \cdot \left(\frac{1}{2} m_\alpha \cdot v_\alpha^2\right)} \\ \Theta &= \frac{k_C \cdot q_\alpha \cdot q_K}{r \cdot E_\alpha} \end{aligned}$$

Was sagt einem dieses Resultat? Der Streuwinkel ist umgekehrt proportional zum Abstand zwischen α Teilchen und Streuzentrum. Wenn das Streuzentrum klein ist, führt das zu großen Streuwinkeln. Wenn das Streuzentrum ausgedehnt ist, kann das α-Teilchen möglicherweise eindringen. Die effektiv abstoßende Ladung verringert sich (Newtons Schalentheorem) und der Streuwinkel reduziert sich. Möglicherweise offenbart sich dadurch die Substruktur des Kerns [**?**]!

Aufgabe 2.15: When the scintillation microscope used in a Rutherford scattering experiment is set at an angle, Θ=30^o, the number of α particles observed is 3000/hr. How many per hour should be observed at 60^o and at 150^o?[67]

[67] Answer: 216, and 16



5. **Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;**
von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Abb. 15.64: Erster Abschnitt der Arbeit Einsteins von 1905 zur Brownschen Molekularbewegung [?].

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie viele Atome sind ungefähr in einer Tasse Tee?
2. Warum kann man Atome nicht mit bloßem Auge anschauen, wenn sie doch existieren?
3. Nennen Sie Hinweise darauf, dass es Atome tatsächlich gibt!
4. Die Abb. 15.64 zeigt den Anfang von Einsteins berühmter Arbeit zur Brownschen Molekularbewegung. Welchen Eindruck haben Sie von Einsteins Arbeitsweise?
5. Versagt das Thomson-Modell bei großen oder bei kleinen Streuwinkeln?
6. Können Sie den experimentellen Aufbau des Rutherford-Experiments skizzieren?
7. Welche Aussage konnte man aus dem Ergebnis des Rutherfordschen Streuversuches ziehen?
8. Warum hat das Experiment von Rutherford das plum-pudding Modell von Thomson widerlegt?
9. Wenn das Atom so groß ist wie ein Bierdeckel, wie groß ist dann der Atomkern?
10. Warum muss im Rutherford Experiment
    - eine dünne Metallfolie verwendet werden?
    - der α-Teilchenstrahl möglichst parallel und eng gebündelt sein?

11. In welchen Winkel wird im Rutherfordschen Experiment der Hauptteil der α-Teilchen gestreut?

12. Muss man bei der Analyse des Rutherford-Experiment nicht die Welleneigenschaften des α-Teilchens berücksichtigen?

13. Warum zeigt sich die innere Struktur des Atomkerns erst bei Betrachtung großer Streuwinkel?

14. Kann man im Rutherford-Experiment den Stoßparameter, dass heißt den minimalen Abstand der Streuer, einstellen?

15. Makroskopische Objekte haben extrem geringe deBroglie Wellenlänge und sind dennoch nicht geeignet, die Struktur der Materie zu untersuchen. Warum?

16. Was wäre im Rutherfordschen Experiment herausgekommen, wenn bei gleicher Ladung des α-Teilchens der Kern neutral oder negativ geladen gewesen wäre?

17. Warum hat das α-Teilchen aus dem radioaktiven Zerfall eine deBroglie Wellenlänge, die den Abmessungen des Kerns entspricht?

18. Beschreiben Sie ein Experiment, dass nachweist, dass das Proton positiv geladen ist!

19. In einem Experiment beobachtet man, dass Kathodenstrahlen in einem bestimmten Bereich nicht abgelenkt werden. Was sagt das über Eigenschaften des magnetischen Feldes aus?

20. Wie wäre das Rutherford-Experiment ausgegangen, wenn der Kern eine negative Ladung hätte?

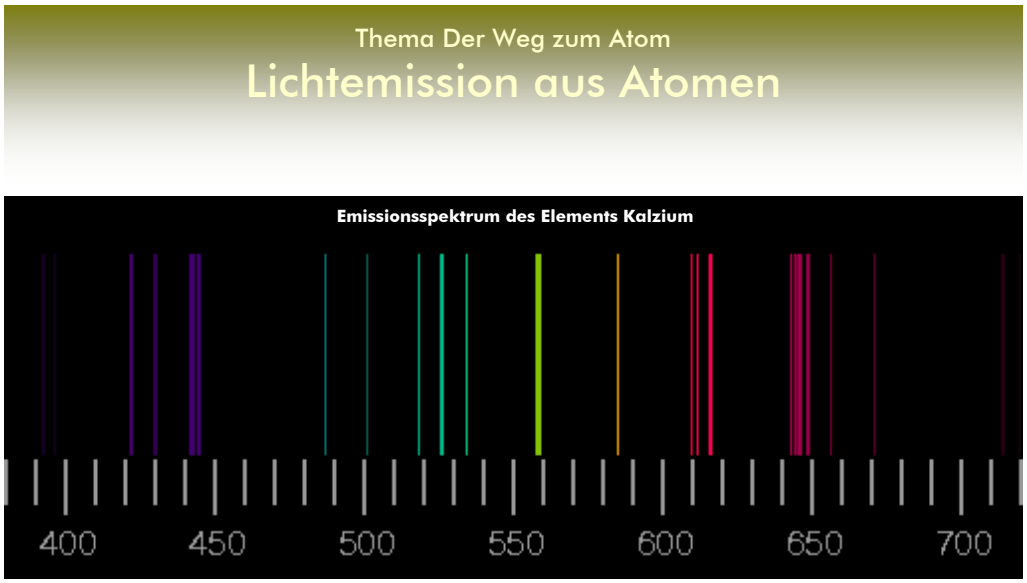
21. Angenommen Sie hätten die Chance das Rutherford Experiment an einer dünnen Folie aus Wasserstoff zu wiederholen. Was für ein Ergebnis würden Sie erwarten?

22. Wenn zwei Billardbälle aufeinander treffen, scheinen keine Kräfte zu wirken bis zu dem Moment an dem sie sich berühren. Welche Kräfte wirken beim Stoß?

23. Die Massenzahl ist die Summe der Ordnungszahl und der Neutronenzahl, während die Atomasse die Masse des einzelnen Atoms bezeichnet. Die sich ergebenden Werte sind leicht unterschiedlich. Was unterscheidet die beiden Werte?

24. Nehmen sie Feynmans Herausforderung an und konzentrieren sie noch mehr Wissenschaft in noch weniger Worte!

15.3 Lichtemission aus Atomen



As soon as I saw Balmer's formula, the hole thing was immediately clear to me

Niels Bohr, 1954

Menschen nehmen elektromagnetische Strahlung (Abb. 15.65) nur in einem eng begrenzten Spektralbereich (400-750 nm) wahr, den wir im Weiteren genauer betrachten wollen. Das Auge hat für die Analyse allerdings nur drei Arten von Zapfen zur Verfügung, sodass eine genauere spektral Auflösung die Möglichkeiten begrenzt sind, siehe Kapitel *Photoelektrischer Effekt*. Gegenstand sind unterschiedliche Lichtquellen, die, wie sich zeigen wird, teils außergewöhnliche Eigenschaften aufweisen. Im Zusammenhang mit dem Schwarzen Strahler haben wir heiße und dichte Körper kennengelernt. Ein Beispiel ist glühend heißer Stahl. Dieser strahlt, wie wir uns mit einem Spektrometer überzeugt haben, ein kontinuierliches Spektrum aus, siehe Abb. 15.66. Dieses Verhalten ist typisch für Flüssigkeiten und Festkörper zusammengesetzt aus vielen Atomen. Die Ursache ist, dass die einzelnen Atome stark miteinander wechselwirken und keine diskreten quantisierten Zustände mehr haben. Das Emissionsverhalten lässt sich berechnen, wenn man das Spektrum eines Schwarzen Strahlers gleicher Temperatur verwendet und die Absorptionseigenschaften des Objekts berücksichtigt. Das Emissionsspektrum ändert sich in seiner Struktur, wenn man einzelne Atome betrachtet. Hier beobachtet man einzelne

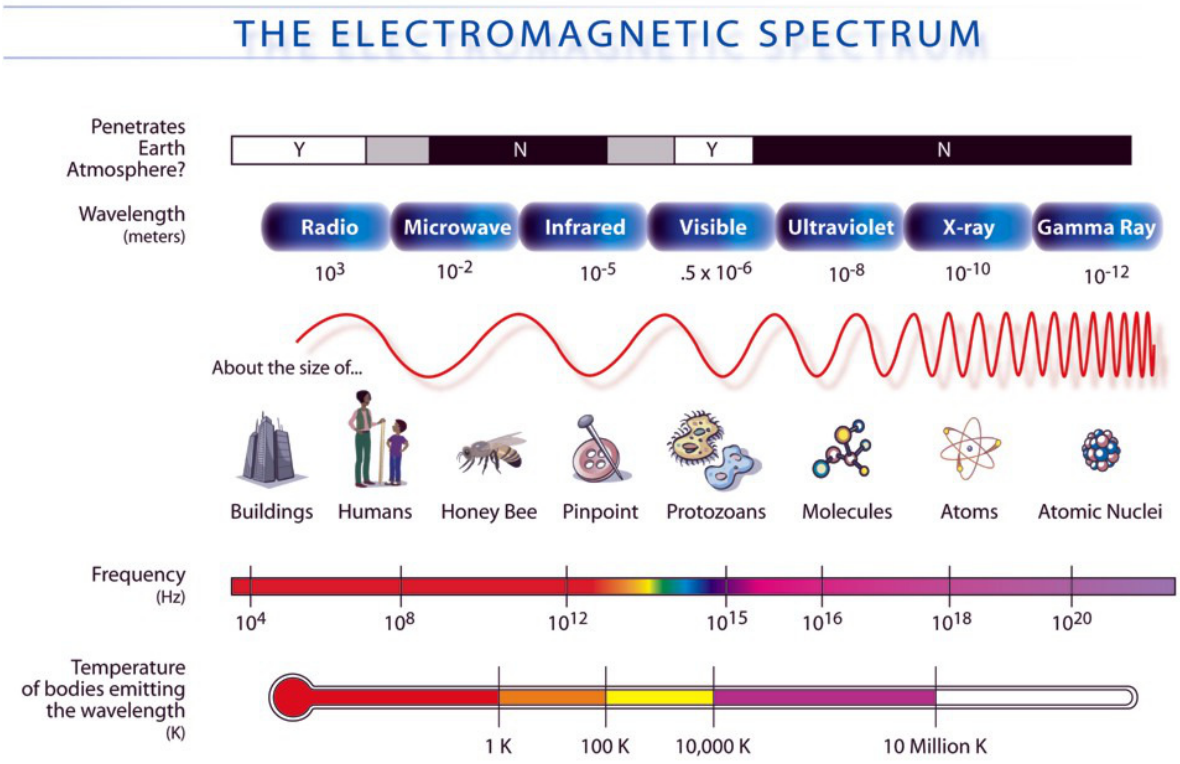


Abb. 15.65: Elektromagnetisches Spektrum und der Vergleich der Wellenlängen zu typischen Objektgrößen und dem Wienschen Verschiebungsgesetz [**?**].

klar separierte Linien bei Wellenlängen, die charakteristisch für das betrachtete Element sind (Abb. 15.67).[68] Die genauere Analyse der spektralen Signaturen (Linienspektrum) liefert Erkenntnisse über die Struktur der Atome. In Molekülen überlagern sich die hohe Anzahl an Linien zu einem so genannten Bandenspektrum. Abb. 15.68 zeigt das Emissionsspektrum des Stickstoffmoleküls N_2. Die Emission von N_2 ist neben Sauerstoff für die Farbenfülle des Polarlichts verantwortlich.

Im Jahr 1868 reiste der Forscher Pierre Janssen nach Guntur in Indien, um Sonneneruptionen bei einer Sonnenfinsternis zu beobachten. Die spektrale Analyse ergab, dass das Phänomen im wesentlichen von Wasserstoff bei extrem hohen Temperaturen herrührte.[69] Dabei bemerkte er, dass eine äußerst helle gelbe Emissionslinie, die man Natrium zuschrieb, nicht mit der erwarteten Wellenlänge übereinstimmte. Tatsächlich konnte er diese Linie keiner der bekannten Emissionslinien der bekannten Elemente zuschreiben. Die

[68] Die intensivste Linie im Wasserstoffspektrum wurde erstmals im Jahr 1853 von Anders Jonas Ångstrom aufgenommen. Im Jahr 1881 identifizierte William Huggins 10 Linien im Sonnenspektrum, die er Wasserstoff zuordnen könnte.

[69] Anders Jonas Ångström entdeckte im Jahr 1866 im Sonnenlicht die Spektrallinien des Wasserstoffs.

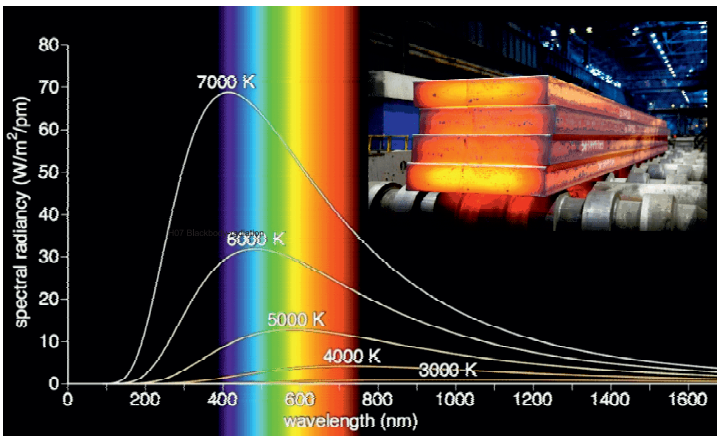


Abb. 15.66: Spektrum Schwarzer Strahler als Funktion der Temperatur. Die Temperatur der Sonne beträgt 5700 K, wodurch das Emissionsmaximum im Bereich des sichtbaren Lichts liegt [**?**].



Abb. 15.67: Cartoon aus [**?**].

Linie war so intensiv, dass man mit einem Spektrohelioskop[70] auch ohne Ausnutzung einer Sonnenfinsternis direkt beobachten konnte. Viele Wissenschaftler bezweifelten zunächst, dass es sich um ein neues Element handeln könnte. Der Physiker Luigi Palmieri analysierte 1882 Lava des Vulkans Vesuv und konnte hier ebenfalls die gelbe Emissionslinie nachweisen. 1894 konnte die Existenz von **Helium** durch William Ramsey[71] bei Untersuchungen zum radioaktiven Zerfall (Kapitel *Ionisierende Strahlung*) nachgewiesen werden [**?**].

[70] *Lexikon:* Ein **Spektrohelioskop** ist ein optisches Instrument zur Beobachtung der Sonne in einem stark eingeschränkten Spektralbereich [**?**]. Der Austrittsspalt wird mit einem Okular beobachtet und die Sonne in schneller Folge abgerastert. Dadurch entsteht für das Auge ein zusammenhängendes Bild der gesamten Sonnenscheibe.

[71] The Nobel Prize in Chemistry 1904 was awarded to Sir William Ramsay *in recognition of his services in the discovery of the inert gaseous elements in air, and his determination of their place in the periodic system.*

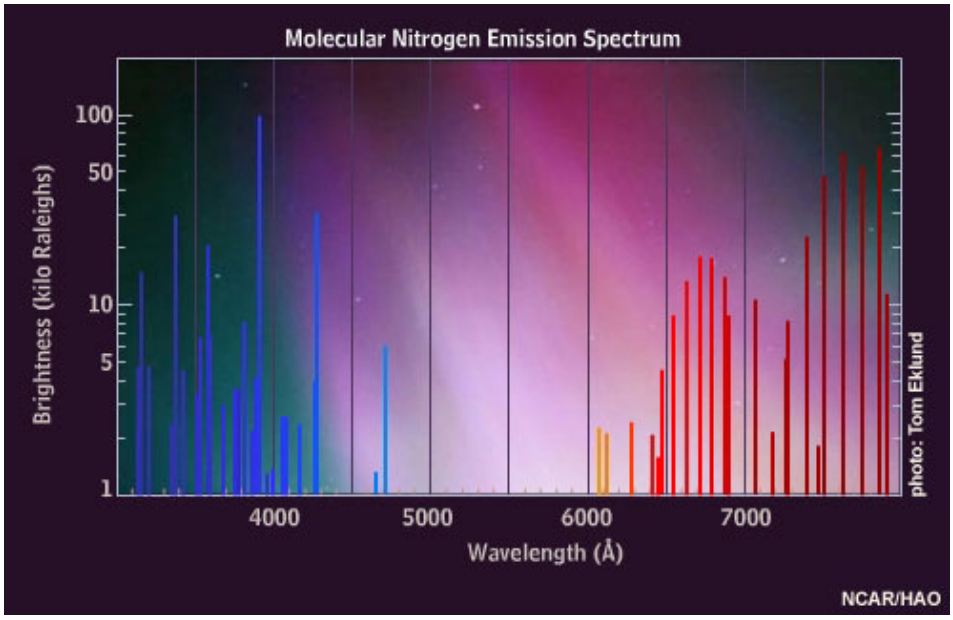


Abb. 15.68: Angeregte Stickstoffmoleküle senden rotes, blaues und violettes Licht aus. Das Zusammenspiel von Sauerstoff und Stickstoff und ihre proportionalen Änderungen mit der Höhe verursachen die Lichteffekte bei Polarlichtern [**?**].

Optische Spektrometer^{4LP}

Übrigens, im Moment beschäftige ich mich mit Stickstoff, aus reiner Neugierde, nicht aus kommerziellen Gründen. Es geht um den Stickstoff aus der Luft, er ist ein bisschen schwerer als derjenige, den man aus Ammoniak gewinnen kann. Gut möglich, dass er noch ein anderes, chemisch inaktives Gas enthält, das man bislang übersehen hat. Womöglich entdecken wir ein neues Element![72]

William Ramsey an seine Frau,1894

Um die optischen Spektren der Atome zu untersuchen,[73] verwendet man Gase bei geringem Druck. Aufgrund der Vakuumbedingungen sind die Partikel so weit voneinan-

[72] Hier geht es um das Edelgas Argon, Grundsätzlich stellt sich aber die Frage, wie man Elemente entdecken kann, die ziemlich unreaktiv sind. Die Chemie kann uns bei einer solchen Suche also nicht wirklich helfen und andere Methoden sind gefragt. Neben Argon ist Helium das leichteste Edelgas und kommt in seiner Häufigkeit gleich hinter Wasserstoff. Man findet Helium als Bestandteil der Gase der Sonne. Bei der Sonnenfinsternis 1868 richteten die Astronomen ihre Teleskope auf die Sonnenkorona und bestimmten die emittierten Spektrallinien. Dabei entdeckten sie neben bekannten Linien von Wasserstoff und Natrium eine helle gelbe Emissionslinie, die sie keinem der bekannten Elemente zuordnen konnten. Die Forscher nannten das Element, nach dem griechischen Wort *helios* für Sonne, Helium. Erst 27 Jahre später wurde es, Dank ausgefeilter optischer Spektroskopie, auf der Erde nachgewiesen.

[73] *Lexikon:* Optische Instrumente, die Licht in seine spektralen Anteile aufspalten, um Wellenlängen zu bestimmen, nennt man **Spektrometer**. Moderne Spektrometer können Wellenlängen mit einer Genauigkeit von 1:10^5 und Wellenlängenunterschiede zu 1:10^7 bestimmen. Laserbasierte Methoden

der entfernt, dass sie nur ganz selten miteinander stoßen. Die Emission erfolgt damit zweifelsfrei aus einzelnen Atomen. Das Licht wird mit Hilfe optischer Verfahren (siehe Vorlesung *Optik*) in seine spektralen Komponenten aufgespalten. Dies kann mit einem Prisma[74] oder einem Beugungsgitter[75] erfolgen.[76]

Miniaturized spectrometers with a tunable van der Waals junction [?]: Miniaturized computational spectrometers, which can obtain incident spectra using a combination of device spectral responses and reconstruction algorithms, are essential for on-chip and implantable applications. Highly sensitive spectral measurement using a single detector allows the footprints of such spectrometers to be scaled down while achieving spectral resolution approaching that of benchtop systems. We report a high-performance computational spectrometer based on a single van der Waals junction with an electrically tunable transport-mediated spectral response. We achieve high peak wavelength accuracy (∼0.36 nanometers), high spectral resolution (∼3 nanometers), broad operation bandwidth (from ∼405 to 845 nanometers), and proof-of-concept spectral imaging. Our approach provides a route toward ultraminiaturization and offers unprecedented

erreichen Werte von 1:10^{18}. Einen Überblick über Anstrengungen, Optische Spektrometer zu verkleinern, findet man in [**?**].

[74] *Lexikon:* **Prismenspektrometer**, siehe Abb. 15.69, nutzen die normale Dispersion von Licht in Medien. Kürzere Wellenlängen werden dabei stärker abgelenkt. Im Experiment wird Licht der Strahlungsquelle auf einen Eintrittsspalt fokussiert. Eine Kollimationslinse bündelt die Strahlung vor Eintritt in das Prisma. Durch den Strahlengang im Prisma wird das Licht in seine spektralen Komponenten zerlegt. Mit einer zweiten Kollimatorlinse wird der Eingangsspalt auf den Detektorschirm abgebildet.

[75] *Lexikon:* Vom Prinzip her sind **Gitterspektrometer** ähnlich aufgebaut wie Prismenspektrometer. Licht der Probe wird auf einen Eintrittsspalt fokussiert, so dass das dahinter liegende Gitter großflächig ausgeleuchtet wird. Vom Gitter reflektiertes spektral zerlegtes Licht wird durch eine weitere Linse auf einen Austrittsspalt fokussiert. Die Möglichkeiten, wie man ein Gitterspektrometer realisieren kann, sind vielfältig. Als Beispiele zeigt Abb. 15.70 den Czerny-Turner Aufbau und Abb. 15.71 den Aufbau nach Rowland. Eine frühe Variante wurde 1876 von Henry Draper verwendet, der eine Spektralanalyse der Lichts der Sonne Wega durchführte. Die spektrale Auflösung ($\lambda/\Delta\lambda$) von Gitterspektrometern erreicht Werte von 10^6, die im Vergleich deutlich höher sind, als bei Prismenspektrometern.

[76] Man kann das entstehende Interferenzbild allgemein verwenden, um Informationen über die geometrische Struktur des Blendensystems abzuleiten. Möglicherweise ist es zu klein, um es genauer anzuschauen. Zur Illustration betrachten wir Beugungsgitter, wobei weder Anzahl n_{slits} noch Abstand d_{slits} der Linien bekannt ist, siehe Abb. 15.72a. In der Beugungsstruktur erkennt man außer der Signatur des Einfachspalts nur einen weitere Unterstruktur. Daraus kann man schließen, dass es sich um einen Doppelspalt handelt (n_{slit}=2). Das erste Nebenmaximum des Spalts (m=2)fällt mit dem dritten Maximum des Doppelspalts (n=5) zusammen. Man erinnere sich das die Interferenzbedingung für Einfach- (Breite des Spalts b_{slits}) und Mehrfachspalte (Abstand der Spalte d_{slits}) lauten:

$$b_{slits} \sin\theta = m \cdot \lambda \tag{15.45}$$

$$d_{slits} \sin\theta = n \cdot \lambda \tag{15.46}$$

$$\frac{d_{slits}}{b} = \frac{n}{m} \tag{15.47}$$

Kennt man die Wellenlänge des verwendeten Lichts, lassen sich die entsprechenden Werte berechnen.

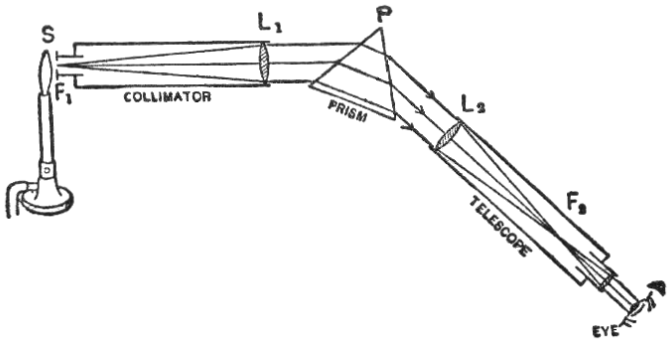


Abb. 15.69: Schematischer Aufbau eines Prismenspektrometers. Die spektrale Aufspaltung erfolgt durch die Dispersion von Licht im Prisma [**?**].

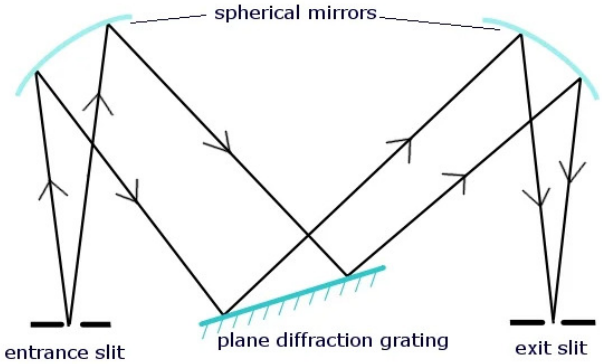


Abb. 15.70: Schematischer Aufbau eines Czerny-Turner Spektrometers. Licht tritt durch einen Eintrittsspalt in den Spektrographen ein. Ein konkaver Spiegel kollimiert das Licht und reflektiert es auf ein Gitter. Hier wird das Licht gebeugt und vom konkaven Spiegel in Richtung eines Detektor reflektiert und fokussiert.

performance in accuracy, resolution, and operation bandwidth for single-detector computational spectrometers.

Linienstrahlung

Durch ein optische Spektrometer gelingt es, die Lichtemission aus Atomen und Molekülen spektral aufzulösen. Die in Abb. 15.73 und Abb. 15.74 gezeigten Beispiele weisen eine Reihe an Besonderheiten auf:

- Atome emittieren Licht im sichtbaren Spektralbereich. Über andere Spektralbereiche liegen zunächst keine weiteren Informationen vor.

- Die Emission aus einzelnen Atomen unterscheidet sich grundsätzlich von der Emission aus einem Schwarzer Körper. Das Spektrum ist stark strukturiert und zeigt diskrete Linien.

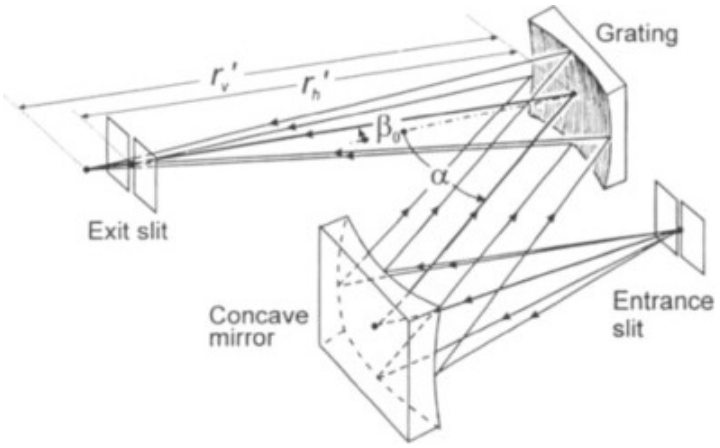


Abb. 15.71: Schematischer Aufbau eines Rowland-Circle Spektrometers. Der Rowland-Kreis hat einen Radius R, der tangential zu einem konkav gekrümmten Beugungsgitter mit Radius $2\,R$ liegt. Wenn der Eintrittsschlitz des einfallenden Lichts auf diesem Kreis liegt, werden die vom Gitter reflektierten Strahlen Punkten entlang desselben Kreises fokussiert[**?**].

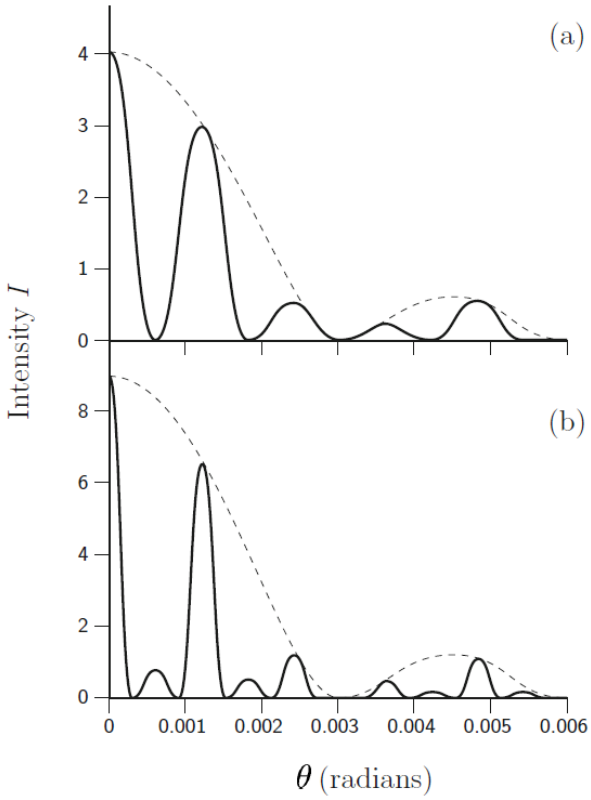


Abb. 15.72: Interferenzmuster von zwei unbekannten Spaltstrukturen [**?**].

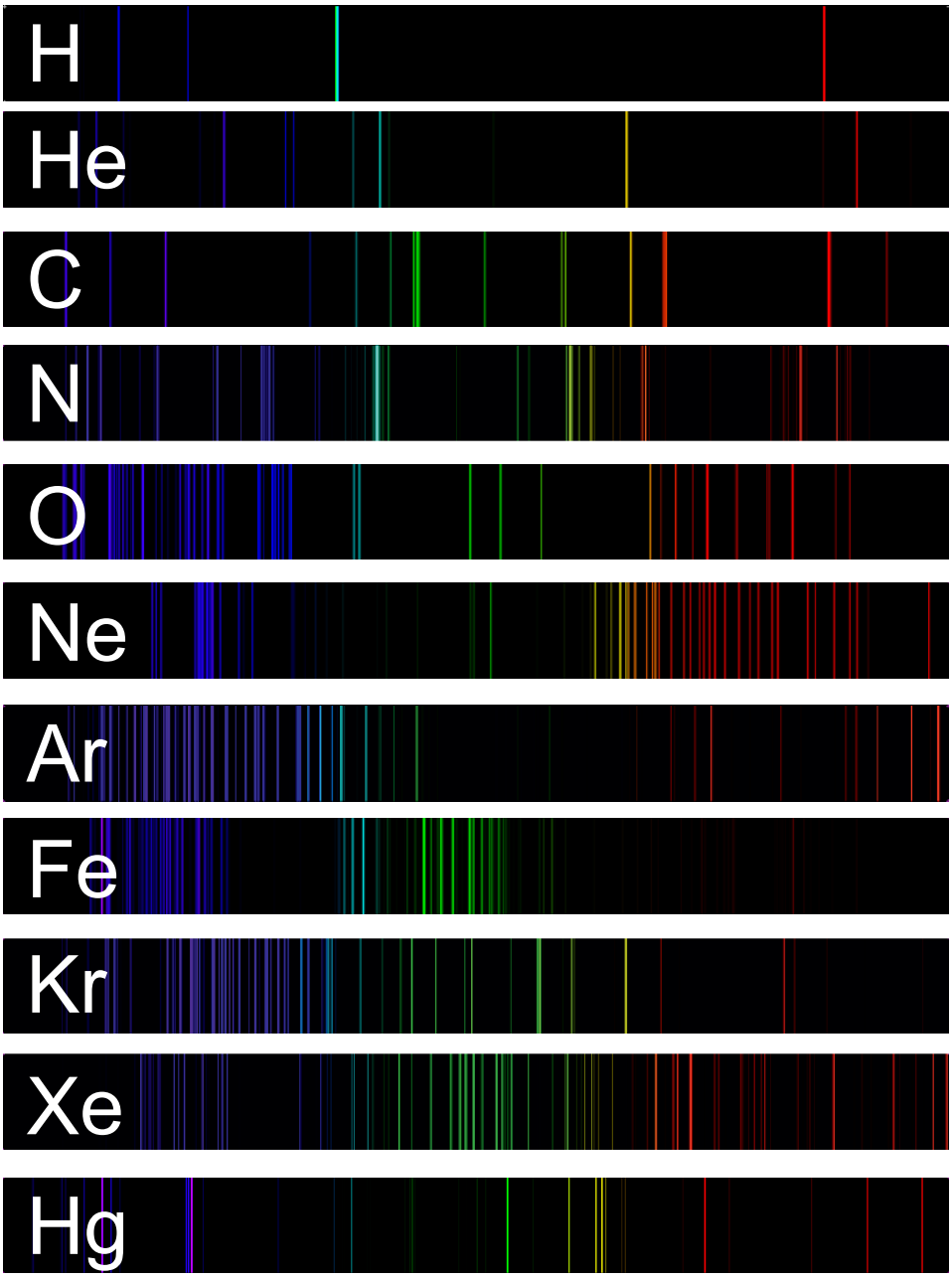


Abb. 15.73: Linienspektren ausgewählter Elemente [**?**].

- Die Emissionsspektren der Atome unterschiedlicher Elemente unterscheiden sich.
- Aus der Anzahl der Linien ergibt sich kein direkter Zusammenhang zur Stellung im Periodensystem.
- Moleküle wie H_2, O_2 oder CO zeigen ebenfalls ein Linienspektrum.
- Die Spektren von Atomen und Moleküle desselben Elements sind unterschiedlich. Zur Illustration zeigt Abb. 15.75 zeigt das Emissionsspektrum von H_2. Man vergleiche mit dem Spektrum des H-Atoms.

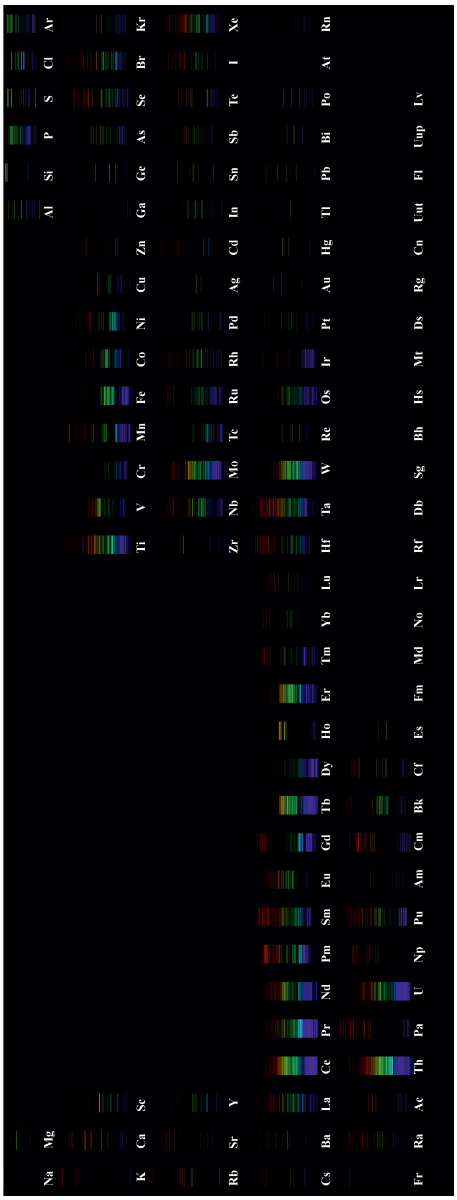


Abb. 15.74: Linienspektren der Elemente.

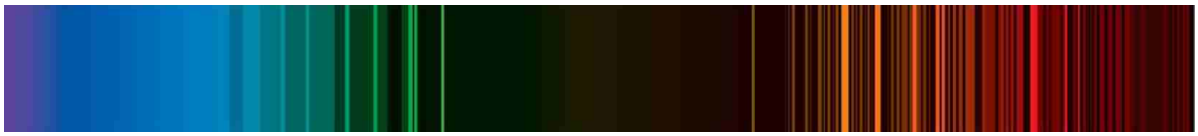


Abb. 15.75: Emissionsspektrum des Wasserstoffmoleküls. Es ergibt sich wie beim Atom ebenfalls ein Linienspektrum. Allerdings ist die Struktur deutlich komplexer [**?**].

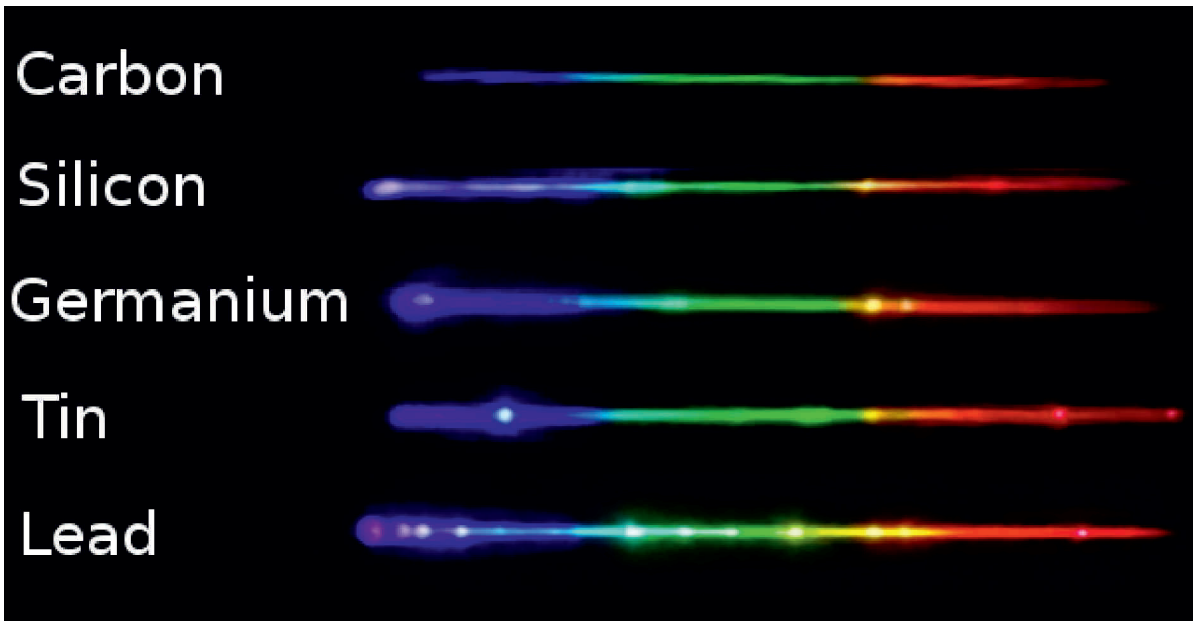


Abb. 15.76: Funkenspektren der Elemente der Kohlenstofffamilie [**?**].

Anwendungen 1^{4LP}

Ein Beispiel aus der Materialforschung

Man stellt fest, dass das Auftauchen eines atomaren Linienspektrums auch beobachtet wird, wenn zum Beispiel das Licht eines Überschlagsfunken spektral aufgelöst wird, siehe Abb. 15.76. Es handelt sich demnach wohl um ein Phänomen, dass charakteristisch für Atome und Moleküle ist und nicht von den gewählten experimentellen Bedingungen abhängt. Diese Methode der Atom-Emissions-Spektroskopie [**?**], siehe Abb. 15.77, wird zur qualitativen und quantitativen Bestimmung von Elementen in festen und flüssigen Proben verwendet. Eine Probe wird mit Hilfe einer Anregungsquelle in ein Plasma überführt. Dies kann durch eine Flamme oder eine Bogenentladung erfolgen. Verbrennungsflammen weisen niedrige Energien auf und gestatten es die Probe auf leicht anzuregende Elemente hin zu analysieren. Das vom Plasma emittierte Licht wird dazu spektral zerlegt und aufgezeichnet. Das so bestimmte Spektrum ermöglicht anhand der spektralen Lage der Linien eine qualitative Analyse. Aus Linienintensität und Konzentration lassen sich quantitative Aussagen ableiten.

Eine Glimmentladungsquelle ist ebenfalls geeignet ein Materialanalyse durchzuführen [**?**]. Dazu wird das Material einer elektrisch leitenden Probe durch ein Gleichstrom-Glimmentladungsplasma schichtweise zerstäubt, wobei es zur Anregung der Atome und Ionen kommt. Diese emittieren für ihr Element charakteristische Linienstrahlung. Diese Intensitäten sind der Konzentration des Elemente in der Entladungszone proportional. Zeichnet man den zeitlichen Intensitätsverlauf der einzelnen Linien während des Sputterprozesses auf, können daraus Konzentrations-Tiefenprofile der Probenschichten ermittelt

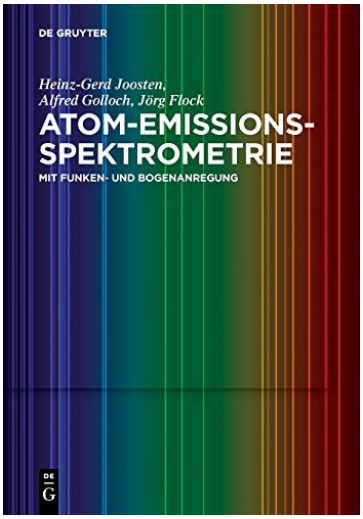


Abb. 15.77: *Aus dem Klappentext:* Atomemissionsspektrometrie (AES) ist eine sehr häufig in der Industrie benutzte Analysentechnik, um den Inhalt der Elemente in unterschiedlichen Proben zu bestimmen. Dieses Buch umfasst die Grundlagen der Methode, den Stand der Technik und vor allem praktische Aspekte zur Durchführung von AES-Analysen. Für den praktisch arbeitenden Analytiker und Forschungschemiker ist diese Publikation ist eine hervorragende Informationsquelle. [**?**]

werden, siehe Abb. 15.78.

Ein Beispiel aus der Astrophysik

Betrachtet man nicht nur das für das Auge sichtbare Licht, stellt man fest, dass auch im Röntgen- und im infraroten Spektralbereich Linienstrahlung beobachtet werden kann. Abb. 15.79 zeigt einen Ausschnitt des Röntgenspektrum des Doppelsternsystems Zeta Orionis, aufgenommen mit dem Chandra X-ray Observatory. Abb. 15.80 zeigt das Röntgenspektrum, dass von einer Wolke gasförmiger Materie (Cassiopeia A) ausgesen-

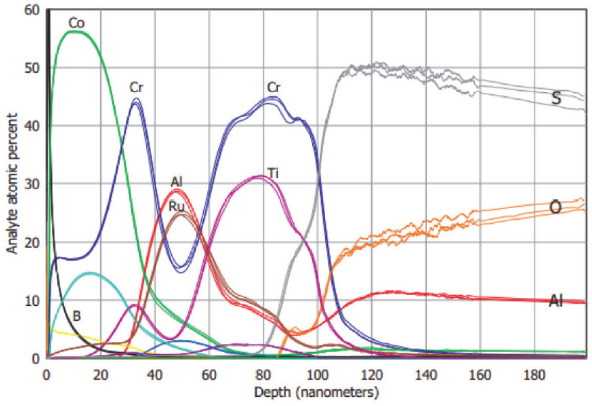


Abb. 15.78: Tiefenprofile der Oberfläche einer Festplatte bestehend aus unterschiedlich zusammengesetzten Schichten, die bis in eine Tiefe von 100 nm reichen [**?**].

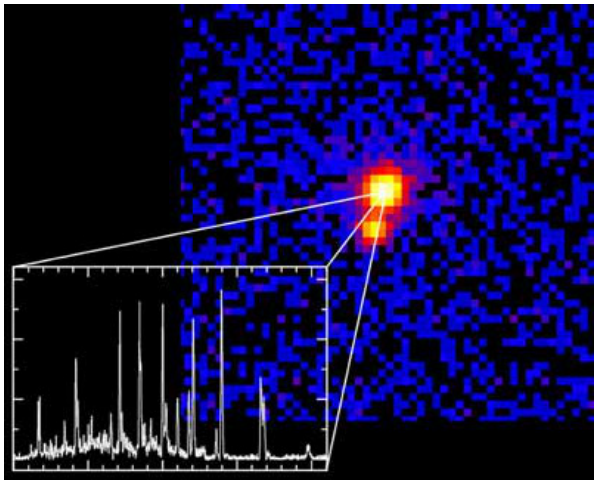


Abb. 15.79: Sichtbares und Röntgenspektrum des Doppelsternsystems Zeta Orioni. Durch die Zuordnung jeder Röntgen-Emissionslinie kann man Atomsorte und Ionisationszustand identifizieren. Durch Messung relativer Linienstärken bestimmter Ionen hat man Zugang zu Dichten und spezifischen Temperaturen [**?**].

det wird, die durch die Explosion eines massereichen Sterns aufgewirbelt wurde. Man erkennt, dass sich das Spektrum aus zwei Anteilen zusammensetzt -ein Röntgenkontinuum und einzelne Emissionslinien (siehe Kapitel *Röntgen*). Die Intensität der Strahlung nimmt bei höheren Energien ab. Neben dem Kontinuum zeigt das Spektrum die Emission verschiedener Elemente wie Neon (Ne), Kalzium (Ca) und Eisen (Fe). Da die Anteile der Röntgenstrahlung durch unterschiedliche Prozesse erzeugt werden, liefert ein solches Spektrum detaillierte Informationen über die Strahlungsquelle.

Balmer-Formel

Here's a formula that accurately calculates the wavelengths in the hydrogen spectrum.

Johann Jakob Balmer, 1885

Ein besonders einfaches Linienspektrum findet man bei der Emission aus Wasserstoff. Im Spektrum beobachtet man im sichtbaren Spektralbereich eine Anzahl an scharfen Linien, die bei Wellenlängen von λ=410 nm, 434 nm, 486 nm und 656 nm auftauchen, siehe Abb. 15.82. Balmer[77] hat die Positionen der Spektrallinien analysiert[**?**] und eine einfache empirische Formel aufgestellt, die die relativen Linienpositionen gut wiedergibt:

$$\lambda = C \cdot \frac{n^2}{n^2 - 4} \tag{15.48}$$

wobei $n \geq 3$ eine ganze Zahl und C=3364.56 nm eine Konstante ist. Abb. 15.84 zeigt , wie Balmer seine Gleichung beim Vergleich mit Messergebnissen von Ångstroem fand [**?**].In der Spektroskopie findet man die Gleichung üblicherweise in abgewandelter Form, unter Benutzung der Einheit Wellenzahl:[78]

$$\tilde{\nu}_{Balmer} = \frac{1}{\lambda_{Balmer}} \approx \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \tag{15.50}$$

[77] Johann Jakob Balmer (1825-1898) war Mathematiklehrer an der Unteren Töchterschule in Basel.

[78] *Lexikon:* Die **Wellenzahl** $\tilde{\nu}$ bezeichnet den Kehrwert der Wellenlänge $\tilde{\nu} = \nu/c = 1/\lambda$ und hat die

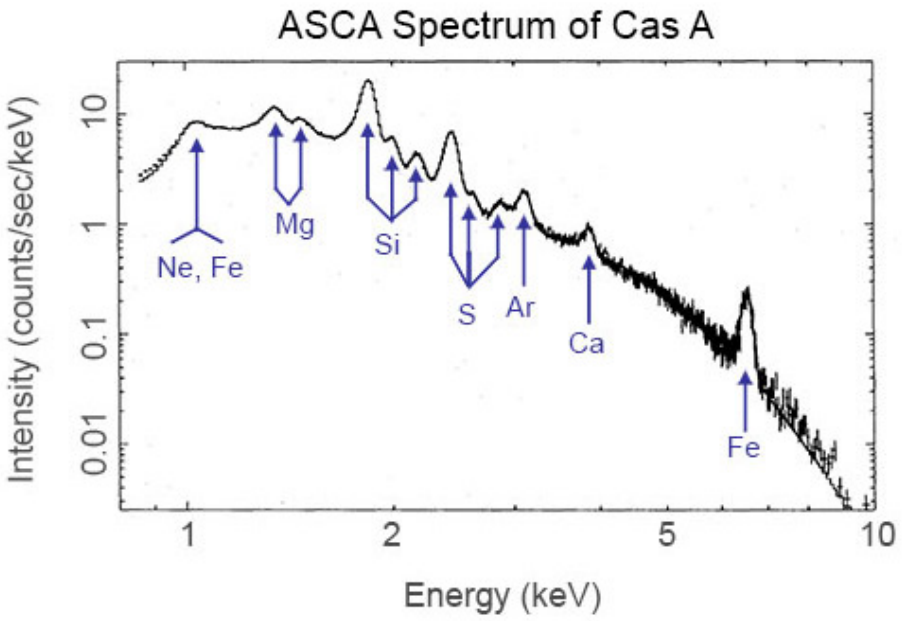


Abb. 15.80: Röntgenspektrum des Supernova-Überrests Cas A [**?**].

wobei n=3,4,... Die Proportionalitätskonstante bestimmte Balmer mit $0.011\,\mathrm{nm}^{-1}$. Auffallend ist, dass nur zwei ganze Zahlen in der Gleichung auftreten. Das muss etwas bedeuten, denn in der Newtonschen Mechanik tauchen diskrete Werte nicht auf. Massen, Kräfte, Geschwindigkeiten, und Energien sind in der klassischen Physik kontinuierliche

Dimension 1/Länge.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1\,\mathrm{eV}}{1239.8424\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}} = 8065.54\,\mathrm{cm}^{-1} \tag{15.49}$$

Die Wellenzahl ist der Quotient aus der Anzahl der auf eine bestimmte Länge entfallenden Wellenlängen. Die Spektroskopie verwendet hier die Länge 1 cm. In der Molekülphysik wird die Wellenzahl als Energieeinheit verwendet. Als Faustformel kann man sich merken: $8065\,\mathrm{cm}^{-1}$ entsprechen einer Energie von 1.0 eV.

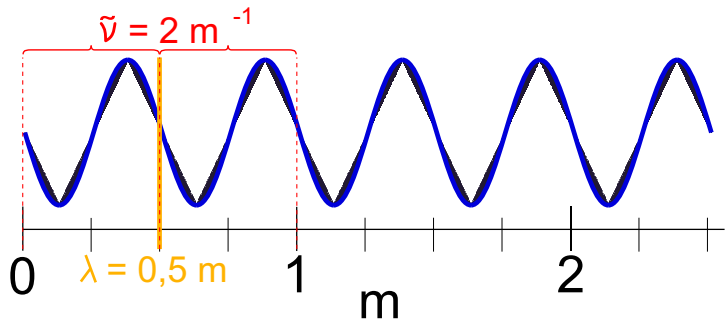


Abb. 15.81: Definition der insbesondere in der Molekülphysik häufig gebrauchten Energieeinheit Wellenzahl.

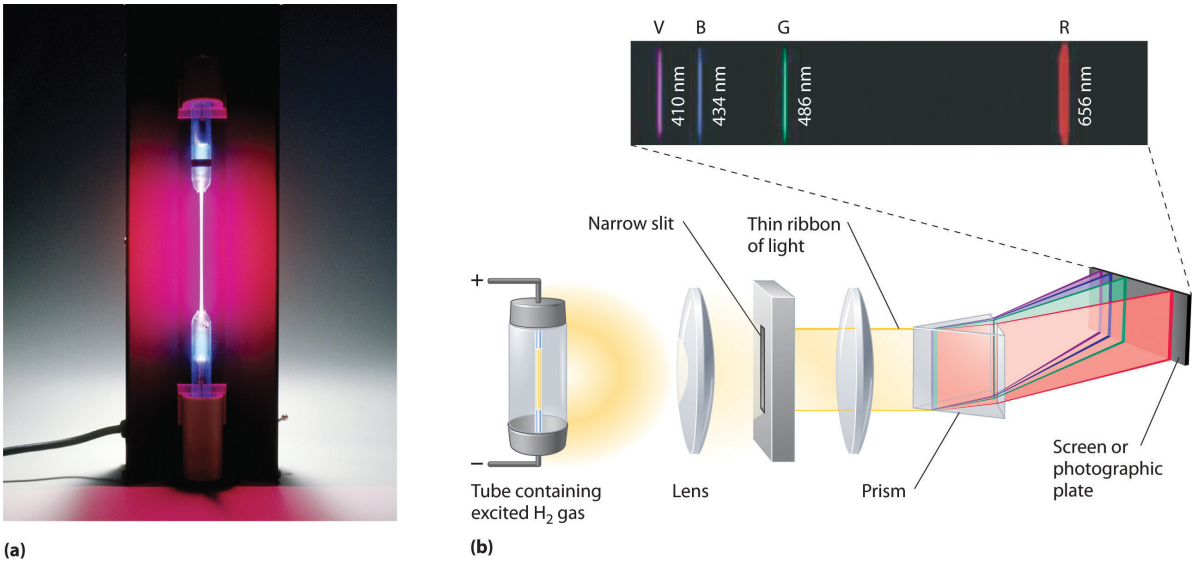


Abb. 15.82: (a) Eine Gas angeregter Wasserstoffatome emittiert ein charakteristisches rotes Licht. (b) Wenn das aus der Probe stammende Licht durch ein Prisma in seine Wellenlängen zerlegt wird, können vier charakteristische Emissionslinien beobachtet werden, wobei die Linie bei 656 nm die Intensivste ist [**?**].

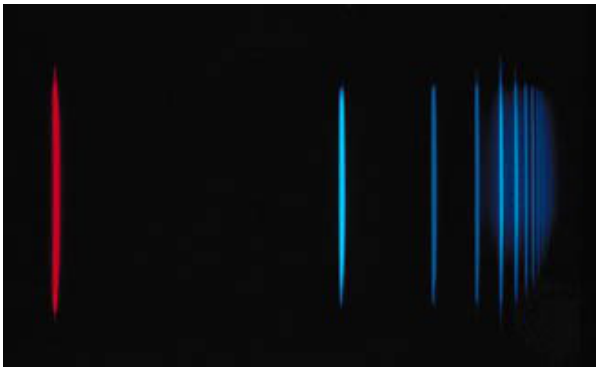


Abb. 15.83: Balmer-Serie des Wasserstoffs bis zur Seriengrenze [**?**].

Größen. Wie man in Abb. 15.83 sieht, reicht das Spektrum bis tief in den ultravioletten Bereich und strebt einer Grenzwellenlänge zu. Die Wasserstoff auftauchenden Linien werden in der Literatur als H_α (656 nm), H_β (486 nm) usw. bezeichnet.

Der gemeinschaftliche Faktor für diese Formel ist, wie er sich aus den Angströmschen Bestimmungen ableitet: $3645.6\,\text{mm}/10^7$. Man könnte diese Zahl die Grundzahl des Wasserstoffs nennen; und wenn es gelingen sollte, auch für andere Elemente die entsprechenden Grundzahlen ihrer Spektrallinien zu finden, so wäre die Vermutung gestattet, dass zwischen diesen Grundzahlen und den entsprechenden Atomgewichten bestimmte, wieder durch irgend eine Funktion ausdrückbare Beziehungen stattfinden [**?**].

Johann Jakob Balmer, 1885

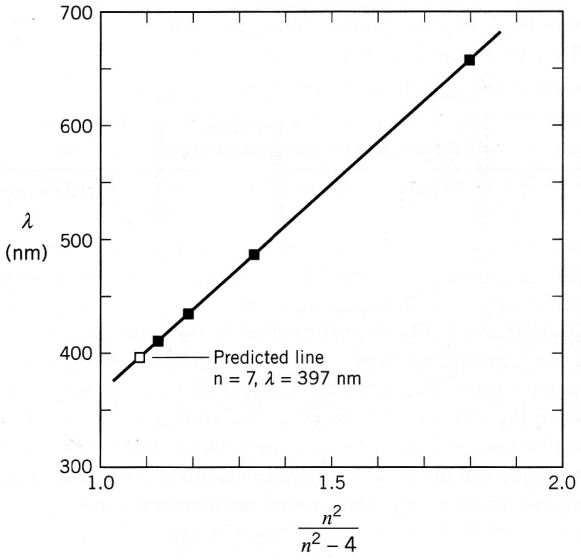


Abb. 15.84: Ångstroem bestimmt die genaue Linienposition von vier sichtbaren Wasserstoffemissionslinien. Balmer gelang es, die Messpunkte mit einer Geraden zu verbinden, wenn man die Wellenlängen gegen $n^2/(n^2-4)$, $n \geq 3$ auftrug [**?**].

Betrachtet man nicht nur den optischen, sondern auch den ultravioletten und infraroten Spektralbereich, findet man weitere Emissionsbanden, die bei 121 nm und 1875 nm beginnen und sich dann zu kürzeren Wellenlängen fortsetzten. Wie sich herausstellt, können auch diese Banden mit Hilfe einer modifizierten Balmer-Gleichung (Gl. 15.50) zugeordnet werden. Diese Analyse geht auf Johannes Rydberg zurück.[79]

$$\lambda = C \cdot \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} \tag{15.51}$$

Oder in der üblichen Form aufgeschrieben:

$$\frac{1}{\lambda_{Rydberg}} \sim \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \tag{15.52}$$

wobei n_1=1, 2, 3,... und $n_2 > n_1$. Es stellt sich heraus, dass der Vorfaktor in der Balmerformel eine Naturkonstante, die so genannte Rydberg-Konstante R_∞, ist:[80]

Rydberg-Konstante: R_∞=109 737 cm^{-1}

Man kann R_∞ unter Verwendung anderer Naturkonstanten berechnen:

$$R_\infty = \frac{1}{8}\frac{m_e \cdot e^4}{c \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^3} \tag{15.53}$$

[79] I had just finished testing various forms of the function when I heard of Mr. Balmer's communication on the spectral lines of atomic hydrogen. I was delighted to find that his formula is a special case of mine.

Johannes Rydberg (1889)

[80] Die Rydbergkonstante ist die am besten bekannte Naturkonstante ($\Delta R_\infty/R_\infty = 2 \cdot 10^{-12}$).

Oft wird in Lehrbüchern auch die Rydberg-Frequenz R und die Rydberg-Energie R_y verwendet.

Rydberg-Frequenz: $R{=}c \cdot R_\infty{=}3.289 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}$

Rydberg-Energie $R_y{=}h \cdot c \cdot R_\infty{=}13.6\,\mathrm{eV}$

Das Rydberg $(1.0 \cdot R_y)$ wird in der theoretischen Physik als Maßeinheit für die Energie verwendet. Ein Rydberg ist die Energie, die notwendig ist, um das Elektron aus dem Wasserstoffatom zu entfernen, d.h. es erfolgt eine Ionisation des Atoms. Damit kann eine Gleichung angegeben werden, die die Emission von Licht aus Wasserstoffatomen beschreibt.

$$\frac{1}{\lambda_{Rydberg}} = R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \tag{15.54}$$

It is the ambitious object of spectroscopy to study the vibrations of atoms and molecules in order to obtain what information we can about the nature of forces which bind them together... But we must not too soon expect the discovery of any grand or very general law, for the constitution of what we call a molecule is no doubt a very complicated one, and the difficulty of the problem is so great that were it not for the primary importance of the result which we may finally hope to obtain, all but the most sanguine might well be discouraged to engage in an inquiry which, even after many years of work, may turn out to have been fruitless... In the meantime, we must welcome with delight even the smallest step in the desired direction.

Arthur Schuster, 1870

example

Wasserstoff

Emissionsbanden 2

Rydbergformel

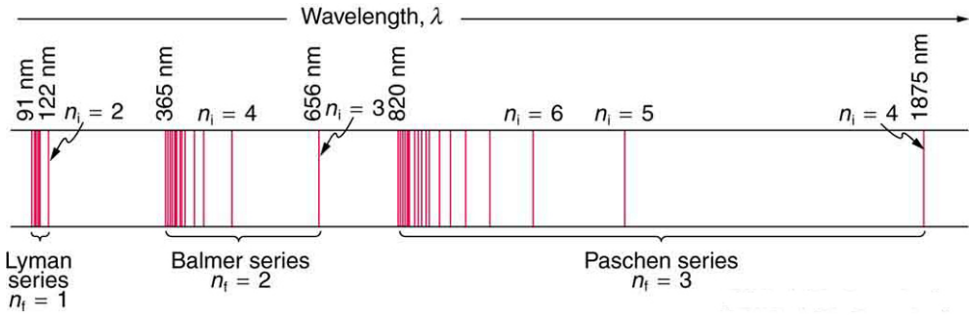
$$\frac{1}{\lambda_{Rydberg}} = R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

$n_1 = 1,2,3,\ldots$, $n_2 > n_1$

$$\frac{1}{\lambda_{Rydberg}} = 109\,678\,\text{cm}^{-1}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{Rydberg}} = 109\,678\,\text{cm}^{-1}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = 5331\,\text{cm}^{-1}$$

$$\lambda_{Rydberg} = 1.876 \cdot 10^{-4}\,\text{cm} = 1.876 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 1876\,\text{nm}$$



. . . so dürfte man vielleicht annehmen, dass die dem Wasserstoff zukommende Formel ein besonderer Fall einer allgemeineren Formel sei, welche für gewisse Bedingungen eben in die Formel für die Wasserstofflinien übergehe [**?**].

J. J. Balmer, 1885

Setzt man für $n_1 = 2$ und $n_2 = 3$ ein, ergibt sich ein Wert von 656 nm für die Wellenlänge der Emissionslinie. Die Emissionsbanden werden mit bestimmten Namen bezeichnet, die auf die Entdecker zurückgehen (Abb. 15.85):

- Lyman-Serie (Ly) [**?**]:

$$\frac{1}{\lambda_{Lyman}} = R_\infty \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \; n = 2, 3, 4, .. \tag{15.55}$$

- Balmer-Serie (Ba):

$$\frac{1}{\lambda_{Balmer}} = R_\infty \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \; n = 3, 4, 5, .. \tag{15.56}$$

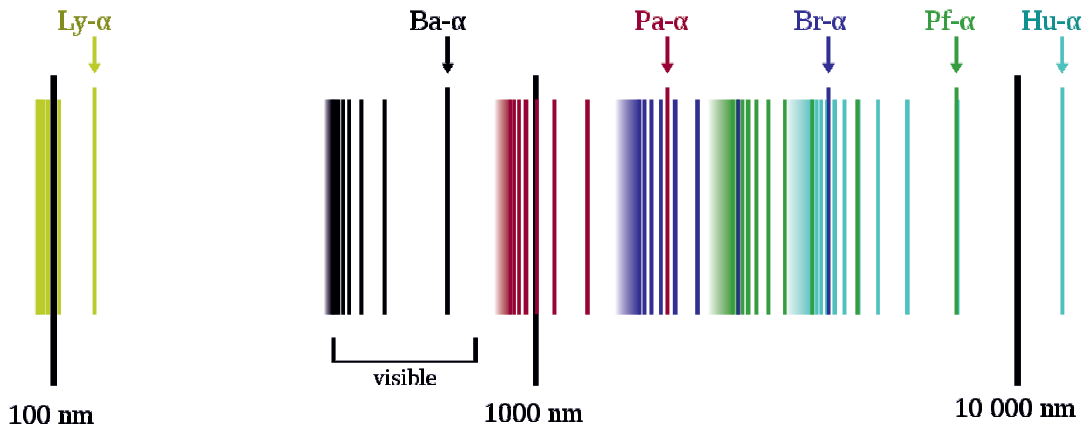


Abb. 15.85: Übersicht über die Emissionsserien des Wasserstoffatoms von Lyman bis Humphreys [**?**].

- Paschen-Serie (Pa) [**?**]:

$$\frac{1}{\lambda_{Paschen}} = R_\infty \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \; n = 4, 5, 6, .. \tag{15.57}$$

Weitere sind die Brackett- (Br, n=4) [**?**], Pfund- (Pf, n=5) [**?**] und die Humphreys-Serie (Hu, n=6) [**?**]. Ein Merkmal aller Progressionen ist, dass es jeweils eine kurz- (Seriengrenze)[81] und eine langwellige Grenzwellenlänge gibt. Für die Balmer-Serie sind dies beispielsweise 656 nm ($n_1 = 2$, $n_2 = 3$) und 365 nm ($n_1 = 2$, $n_2 = \infty$). Mit den angegebenen Gleichungen lassen sich die Emissionslinien von Wasserstoff berechnen. Die Formeln geben aber keine Auskunft darüber, warum genau diese Wellenlängen ausgestrahlt werden. Die Ursache wird erst im Rahmen der Bohrschen Theorie geklärt (siehe Kapitel *Bohrsches Atommodell*).

Strahlender Dipol^{4LP}

Wie lässt sich die Emission von Licht aus Atomen beschreiben?

Aus der Sichtweise der klassischen Elektrodynamik sind die Elektronen quasi-elastisch an das Atom gebunden und führen Eigenschwingungen der Frequenz $\nu_0 = 2\,\pi \cdot \omega_0$ aus. Wird ein Atom angeregt, fängt das Elektron an zu schwingen und sendet Dipolstrahlung aus. Die Abgabe von Energie dämpft den Schwingungsprozess, wobei die Amplitude des elektrischen Feldes $E(t)$ in charakteristischer Weise abnimmt, wobei Γ die

[81] *Lexikon:* Die Seriengrenze ist die obere Energiegrenze einer Spektralserie dar. Die Differenz zwischen Grundzustand und Seriengrenze bei der Lyman-Serie ist identisch mit der Ionisationsenergie. Energien oberhalb der Seriengrenze führen zur Ablösung des Elektrons vom Atom.

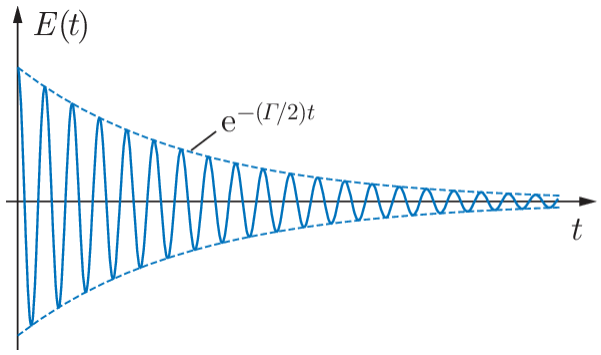


Abb. 15.86: Elektrische Feldstärke in der von einem Atom emittierten Wellen mit Strahlungsdämpfung [?].

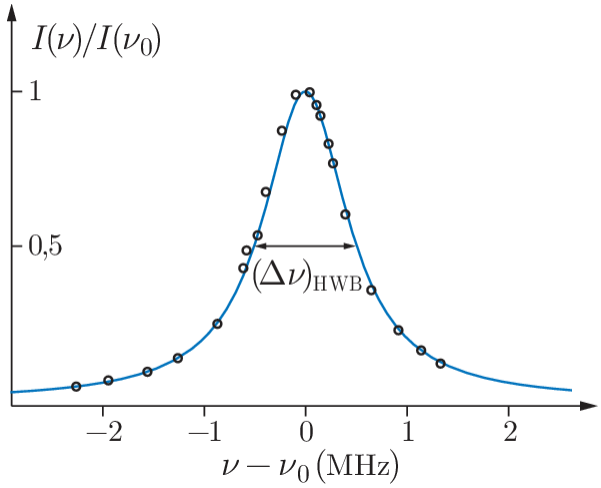


Abb. 15.87: Linienform einer Spektrallinie des Quecksilbers. Die durchgezogene Linie ist eine Lorentzkurve aus der sich eine natürliche Linienbreite von 1.03 MHz ergibt [?].

Dämpfungskonstante, siehe Abb. 15.86.

$$E(t) = E_0 \cdot \exp(-(\Gamma/2 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \tag{15.58}$$

Berechnet man die Strahlungsdämpfung, erhält man schließlich

$$\Gamma = \frac{2\, r_e \omega_0^2}{3\, c} \tag{15.59}$$

wobei der Term r_e der so genannte klassische Elektronenradius ist [?]

$$r_e = \frac{1}{k_C} \frac{e^2}{m_e \cdot c^2} = 2.8 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m} \tag{15.60}$$

Coulombkonstante: $k_C = 1/(4\,\pi \cdot \epsilon_0) = 8.987 \cdot 10^9\,\mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$

Für Licht von 600 nm ergibt sich $\Gamma{=}6 \cdot 10^7\,\mathrm{s}^{-1}$. Das bedeutet, dass die Amplitude der Schwingung innerhalb von $1/\Gamma \approx 10^{-8}\,\mathrm{s}$ auf $1/e$ abgesunken ist, siehe Abb. 15.86. Dieser Wert entspricht den experimentellen Beobachtungen: Angeregte Atome geben ihre Energie in Form von Licht nach eine Zeitspanne von Nanosekunden wieder ab. Auf ein ähnliches Ergebnis kommt man, wenn Überlegungen zur Kohärenzzeit oder zur natürlichen Linienbreite, siehe Abb. 15.87 (Kapitel *Heisenbergsche Unschärferelation*,

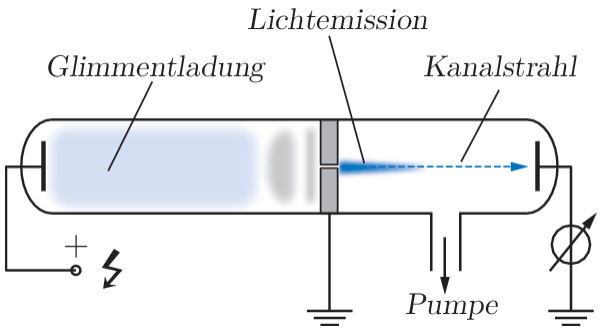


Abb. 15.88: Erzeugung von Kanalstrahlen mit Hilfe einer Glimmentladung [**?**]. Die Intensität der Kanalstrahlen ist dabei erheblich geringer im Vergleich zur Glimmentladung.

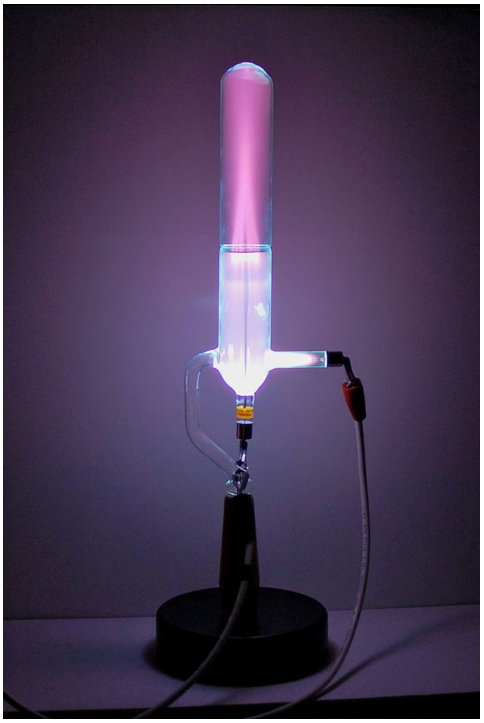


Abb. 15.89: Kanalstrahlen ist die historische Bezeichnung für die Lichtemission aus Ionen in einer Geißlerröhre [**?**].

$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$), anstellt. Schließlich kann man die Abklingzeit experimentell aus der Abnahme der Lichtintensität bei der Ausbreitung von Kanalstrahlen[82] berechnen. Dazu beobachtet man in einer Geißlerröhre[83] ortsaufgelöst die Lichtemission der schnellen Ionen auf dem Weg zur Anode, siehe Abb. 15.88. Aus dem exponentiellen Abfall berechnet man, unter Kenntnis der Geschwindigkeit der Atome, die charakteristische Zeitkonstante des untersuchten Stoffes.

[82] *Lexikon:* Zur Erzeugung von **Kanalstrahlen** werden Ionen durch ein elektrisches Feld zu einer gelöcherten Kathode hin beschleunigt, treten sie hindurch und können hinter der Kathode anhand ihrer Lichtemission nachgewiesen werden. Die Kanalstrahlen wurden 1886 von Eugen Goldstein entdeckt [**?**].

[83] *Lexikon:* Eine **Geißlerröhre** besteht aus zwei gleich geformten Elektroden (Kathode, Anode). Die Röhre wird mit Gasen (Wasserstoff, Edelgase, Luft, ...). Teils gibt es an der Glaswand fluoreszierendem Schichten. Durch das eingeschlossene Gas kommt es bei Anregung zur Emission charakteristischer Spektrallinien. In Abhängigkeit von der Druckverhältnissen liegen die Betriebsspannung bei 0.5 bis 20 kV.



Abb. 15.90: Die unterschiedlichen Farben bei einem Feuerwerk stammen aus der Emission verschiedener Elemente.

Anwendungen 2^{4LP}

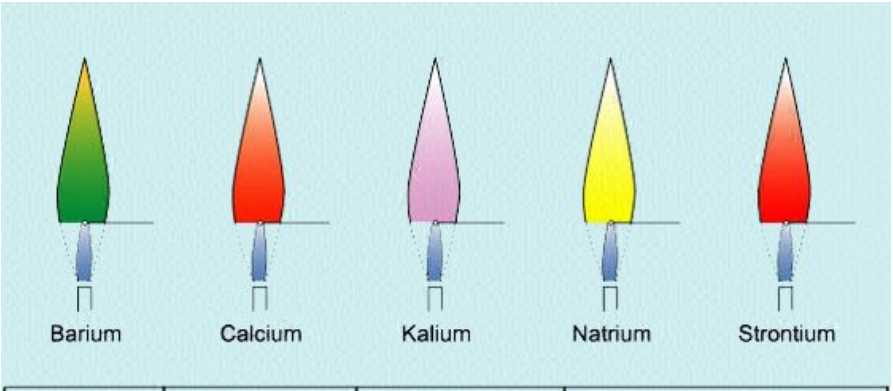
Ein Beispiel aus der Pyrotechnik

Jedes Atom des Periodensystems sendet ein charakteristisches Linienspektrum aus, siehe Abb. 15.74. Schon 1901 untersuchte Snyder das Spektrum von Rhodium und konnte 476 Emissionslinien auflösen [**?**]. Ein imposantes Beispiel sind Feuerwerke (Abb. 15.90), bei denen die durch die Explosion der Rakete freigesetzten Atome bunte Lichtphänomene verursachen. Linienreiche Spektren findet man insbesondere bei den Elementen aus den Nebengruppen des Periodensystems. Abb. 15.91 gibt eine Übersicht über spektrale Lage typischer Emissionslinien von Metallen.

Link to video `Emission Spectra Viewed With Diffraction Grating`

Beispiele aus der Astrophysik

Abb. 15.92 zeigt Emissionsspektren galaktischer Nebel. Die Emissionsnebel werden durch Strahlung in der Nähe befindlicher heißer Sterne zum Leuchten angeregt. In der Regel stammt die Emission aus Wasserstoff, Helium und Sauerstoff. Dabei hängt die Intensität der einzelnen Linien von der Strahlungsintensität ab, also von der Entfernung und der Temperatur des Sterns ab (quadratisches Abstandsgesetz, Stefan-Boltzmann Gesetz) Eine Emission aus Wasserstoff im ultravioletten Spektralbereich deutet beispielsweise darauf hin, dass sich der Wasserstoff nahe der Strahlungsquelle befindet. Beobachtet man die Emission eher bei längeren Wellenlängen, ist die Entfernung größer. Ist die Strahlungsintensität zu hoch, kehrt das Atom nicht in seinen Grundzustand zurück, wird weiter angeregt -möglicherweise ionisiert- und dadurch die Emissionsrate auf der betrachteten Wellenlänge reduziert. Als Folge erfolgt die Emission aus diesen Nebeln in



Metall	Element-symbol	Flammenfarbe	Wellenlänge des ausgesandten Lichts in nm
Barium	Ba	gelbgrün	524,2/ 513,7
Caesium	Ce	blauviolett	697,3/ 455,5/ 495,3
Calcium	Ca	ziegelrot	622,0/ 553,5
Kalium	K	hellviolett	769,9/ 766,5/ 404,5
Kupfer	Cu	grün	515,3/ 510,5
Lithium	Li	karminrot	670,8
Natrium	Na	gelb	589,3
Rubidium	Rb	rotviolett	780,0/ 421,6
Strontium	Sr	rot	605,0/ 460,8

Abb. 15.91: Tabelle der Farbe, die bei der Flammenprobe in Abhängigkeit der Elementwahl auftreten [**?**].

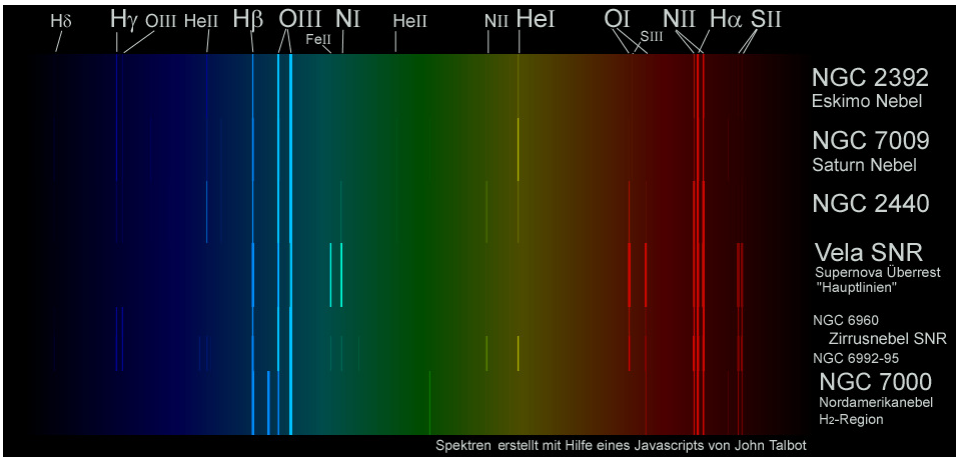


Abb. 15.92: Spektren unterschiedlicher Emissionsnebel [**?**].

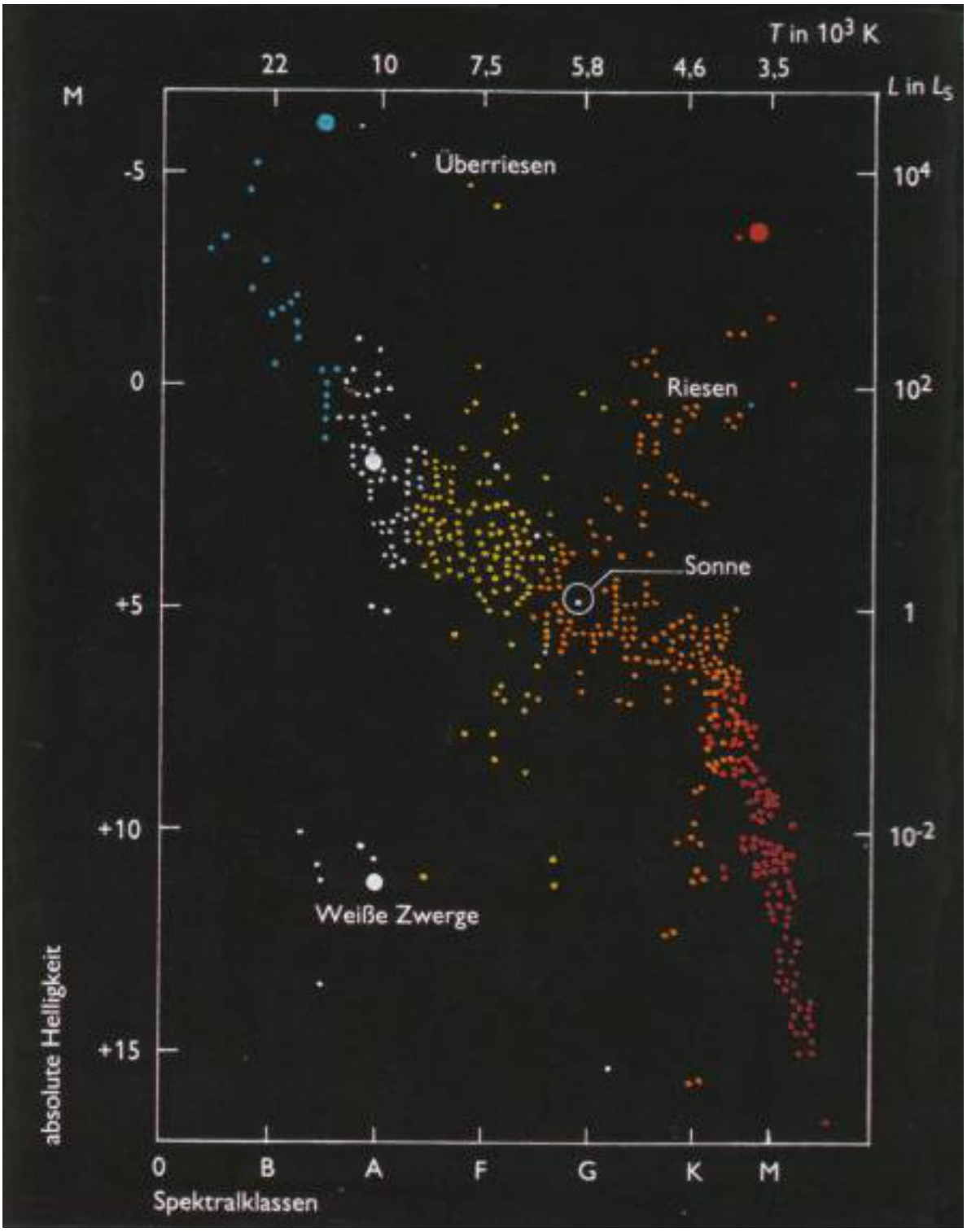


Abb. 15.93: Hertzsprung-Russell Diagramm mit zwei linear und zwei logarithmisch geteilten Achsen. Die Leuchtkraft-Achse ist logarithmisch geteilt. Für die absolute Helligkeit verwendet man eine lineare Skala. Ein Unterschied in der Helligkeit um eine Faktor fünf entspricht einem Verhältnis der Leuchtkraft von 1:100. Auf den x-Achsen sind die Spektralklassen der Oberflächentemperaturskala gegenübergestellt.

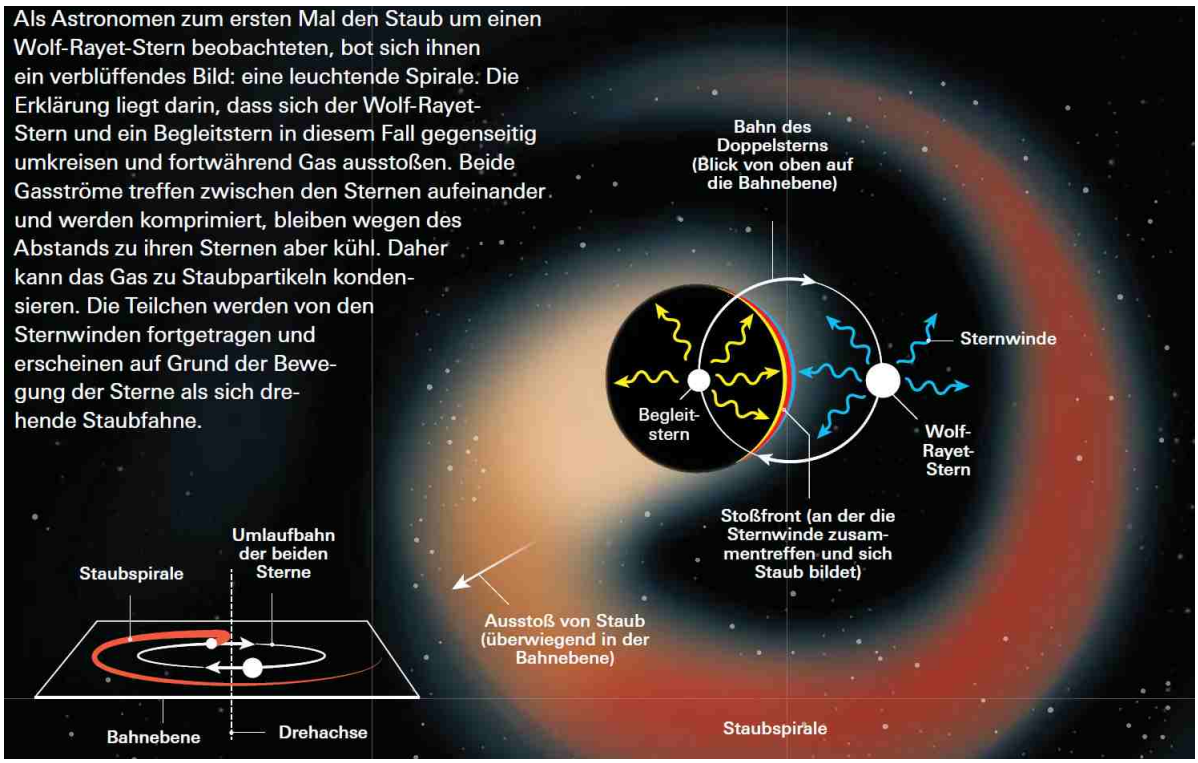


Abb. 15.94: Bildung eines Staubwirbels um ein Doppelsternsystem mit einem Wolf-Rayet Stern [**?**]

der Regel nur als dünnen Gasschichten.

Detection of barium in the atmospheres of the ultra-hot gas giants WASP-76b and WASP-121b [**?**]:[84] We add a novel detection of Ba^+ to the known atmospheric compositions of WASP-76b and WASP-121b, the heaviest species detected to date in any exoplanetary atmosphere, with additional new detections of Co and Sr+ and a tentative detection of Ti^+ for WASP-121b. We also confirm the presence of Ca^+, Cr, Fe, H, Li, Mg, Mn, Na, and V on both WASP-76b and WASP-121b, with the addition of Ca, Fe^+, and Ni for the latter. Finally, we also confirm the clear asymmetric absorption feature of Ca^+ on WASP-121b, with an excess absorption at the bluer wavelengths and an effective planet radius beyond the Roche lobe. This indicates that the signal may arise from the escape of planetary atmosphere.

Wolf-Rayet Sterne[**?**] sind äußerst selten und zeichnen sich durch enorme Größe und extrem hohe Temperaturen aus. Man findet sie deshalb im Hertzsprung-Russell Diagramm (Fig, 15.93) links oben. Sind sind das kurzlebige (10^6 Jahre) Endstadiums schwerer Sterne (20 bis 200 Sonnenmassen) bevor sie in einer Supernovaexplosion vergehen. In diesem Stadium hat der Stern nur noch wenig Wasserstoff. Diese Klasse von Sternen wurde im

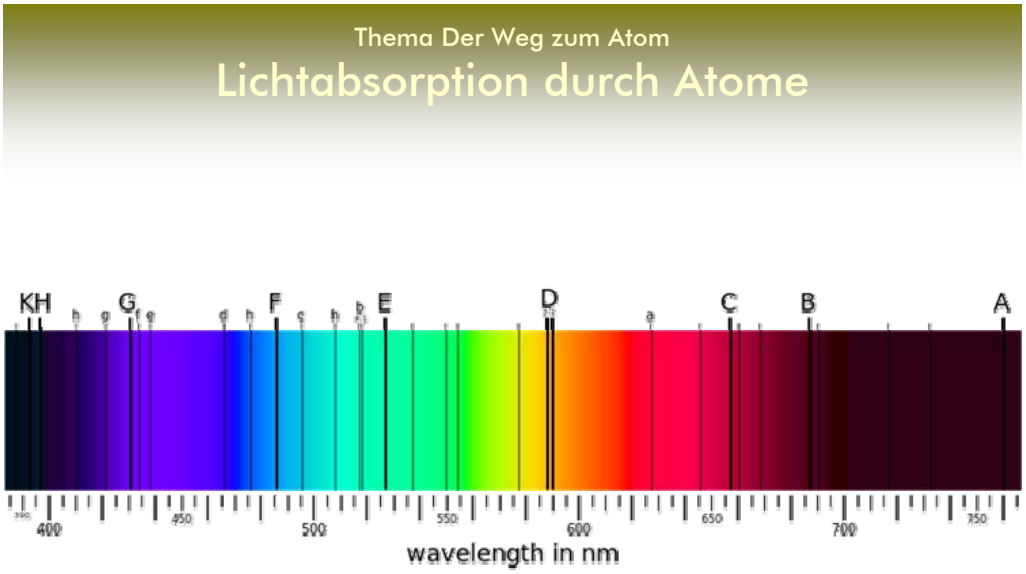
[84] siehe [**?**] für weitere Details.

Jahr 1876 von Charles Wolf und Georges Rayet entdeckt. Was die Forscher überraschte war, dass das Spektrum ganz anders aussah als das gewöhnlicher Sterne wie der Sonne. Statt einem breiten Spektrum mit Fraunhoferlinien fanden sie einzelne schmale Emissionslinien, ein Hinweis auf die Elemente. Das Licht des Sterns schien also nicht vom Stern selbst zu kommen, sondern von heißen Gasen in der Nähe des Sterns [**?**]. Ein bekannter Wolf-Rayet Stern ist Gamma Velorum mit einer intensiven blauen Emissionslinie. Aufgrund der intensiven Strahlung stößt der laufen Material ab, der sich mit etwa $0.01c$ vom Stern entfernt. Daraus bildet sich in Doppelsternsystemen Staub. Schaut man mit einem leistungsfähigen Teleskop auf dieses System, beobachtet man eine glühende Spirale, da das Material wie ein drehender Rasensprenger mit rotiert, siehe 15.94. Der Wolf-Rayet Stern WR 104 ist ein Beispiel [**?**].

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Möglichkeiten gibt es Licht spektral aufzuspalten?
2. Ist ein Linienspektrum ein Phänomen, dass nur im sichtbaren optischen Bereich des elektromagnetischen Spektrums auftaucht?
3. Was unterscheidet das Spektrum eines Atoms von dem eines Schwarzen Strahlers?
4. Welche Informationen erhält man aus einem Linienspektrum?
5. Welche Einheit hat die Rydberg-Konstante?
6. Wo findet man die Balmerlinie mit der geringsten Wellenlänge ?
7. Was versteht man unter Seriengrenze?
8. Bei welcher Wellenlänge findet man die Balmerlinie mit der geringsten Photonenenergie?
9. Kann man die Elementzusammensetzung eines entfernten Sterns durch eine Spektralanalyse des emittierten Lichts bestimmen?

15.4 Lichtabsorption durch Atome



Ich wollte nun zuerst sehen, ob sich in dem Sonnenlicht gebildeten Farbenbilde ein ähnlicher heller Streifen, wie in dem Farbenbilde von Lampenlicht zeige; anstatt desselben erblickte ich aber mit dem Fernrohre in diesem horizontal stehenden Farbenbilde fast unzählig viele starke und schwache vertikale Linien, die aber nicht heller, sondern dunkler sind, als der übrige Theil des Farbenbildes, und von denen einige fast ganz schwarz zu seyn scheinen [**?**].

Joseph von Fraunhofer, 1817

Fraunhofer-Linien

Beobachtet man das Licht der Sonne, erscheint es zunächst kontinuierlich, wie man es von einem heißen Körper erwarten würde (siehe Kapitel *Schwarzer Strahler*). Bei genauerem Hinsehen stellt man aber fest, dass an bestimmten, scharf begrenzten Stellen im Spektrum die Intensität des Licht stark abnimmt (Abb. 15.95). Dies sind die so genannten Fraunhofer-Linien, die durch die Absorption von Sonnenlicht durch Atome zwischen Lichtquelle und Auge hervorgerufen werden. Warum beobachtet man bei einem Stern, den man als Schwarzen Strahler betrachten kann, scharfe Absorptionslinien? Ein

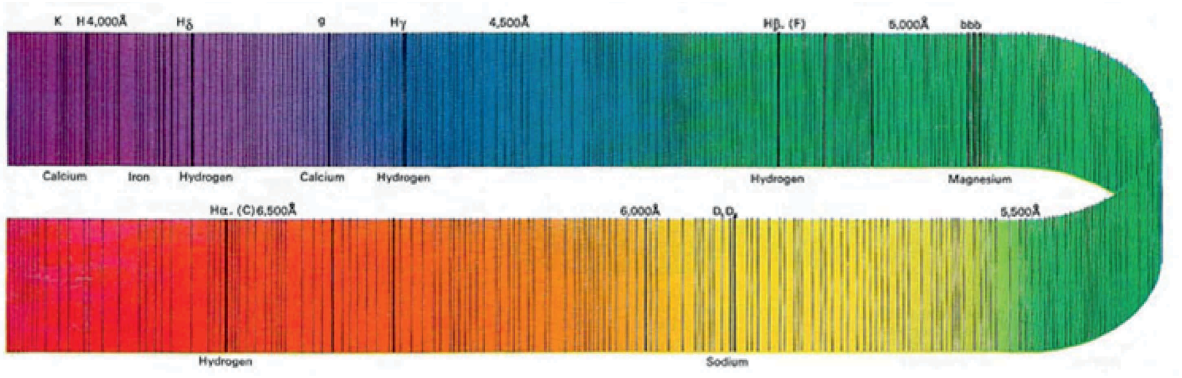


Abb. 15.95: Im Jahr 1814 betrachtete Fraunhofer in einem abdunkelten Raum die Spektralaufspaltung von Sonnenlicht. Bei genauer Betrachtung fiel ihm auf, dass man kein durchgängiges Farbband beobachtete, sondern dass das Spektrum von schwarzen Linien durchbrochen war.

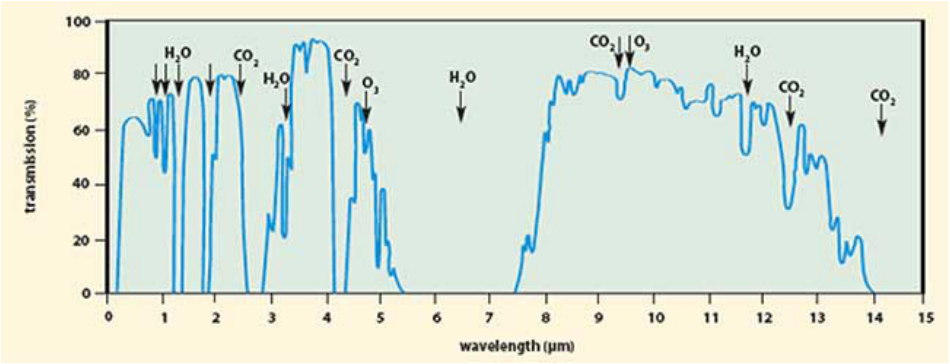


Abb. 15.96: Transmission von Sonnenlicht durch die Erdatmosphäre. Man erkennt, dass der sichtbare Spektralbereich zwischen etwa 500 und 750 nm für elektromagnetische Strahlung fast vollständig transparent ist [**?**].

Schwarzer Körper befindet sich im thermischen Gleichgewicht, das heißt, er absorbiert und re-emittiert ständig Photonen und man könnte vermuten, dass dadurch mögliche Lücken im Spektrum, hervorgerufen durch Absorption, aufgefüllt würden. Hier kommt zum Tragen, dass im Vergleich zu anderen Wellenlängen, Photonen, die eine Energie aufweisen, die einem atomaren Übergang entsprechen, mit deutlich gesteigerter Wahrscheinlichkeit absorbiert werden. Das bedeutet, dass ihre *mittlere freie Weglänge* so gering ist, dass man eine Emission aus diesen Atomen nur aus den äußeren und damit kälteren Bereichen der Photosphäre beobachten kann. Die Emission der übrigen Strahlung erfolgt aufgrund der größeren mittleren freien Weglänge aus tieferen und damit heißeren Schichten der Photosphäre. Nach dem Stefan-Boltzmann Gesetzes ist die Strahlungsleistung damit deutlich erhöht. Dieser Umstand führt zu einem merklichen Rückgang des ausgesendeten Lichts in der Nähe von Absorptionslinien. Sieben charakteristische Absorptionslinien wurden 1802 erstmals von William Hyde Wollaston im Spektrum der Sonne entdeckt. Fraunhofer, nachdem diese Linien benannt sind, fand bei Messungen

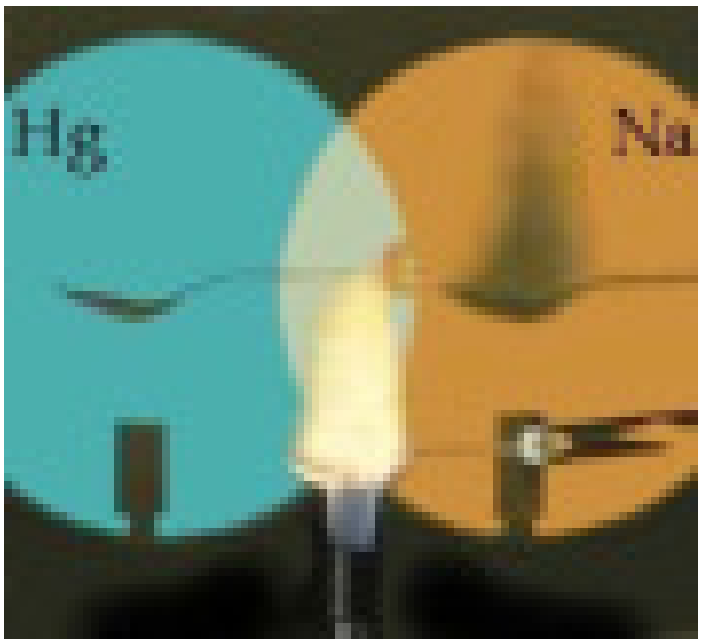


Abb. 15.97: Natrium wird verdampft und der Dampf mit unterschiedlichen Lichtquellen bestrahlt. Bei Beleuchtung mit dem Licht einer Quecksilberdampflampe bleibt der Alkalidampf unsichtbar. Bestrahlt man den Dampf dagegen mit dem Licht einer Natriumdampflampe absorbiert das gasförmige Natrium die einfallende Strahlung und das Natriumgas wird als Schatten sichtbar. Das Experiment demonstriert, dass die ausgesendete und die absorbierte Strahlung ein und dieselbe Wellenlänge haben.

mit höherer Auflösung insgesamt 574 dieser Linien. Es sei ergänzt, dass durch die Atmosphäre der Erde ebenfalls eine Abschwächung des Sonnenlichts, hier durch molekulare Gase verursacht, erfolgt, siehe Abb. 15.96.

Spektralanalyse

If we were to go to the sun, and to bring some portions of it and analyze them in our laboratories, we could not examine them more accurately than we can by this new mode of spectrum analysis.

Warren de la Rue, 1861

Eine Untersuchung des Sonnenspektrums liefert die Erkenntnis, dass Sterne aus den bekannten irdischen Elementen bestehen. Vergleicht man die Linienpositionen in der Emission von Atomen mit der Absorption im Sonnenspektrum stellt man fest, dass die Linien an denselben Stellen im Spektrum auftreten.

Für den experimentellen Nachweis des engen Zusammenhangs zwischen Absorption und Emission durch Atome (Abb.15.97) wird Licht unterschiedlicher Lichtquellen (Na- und

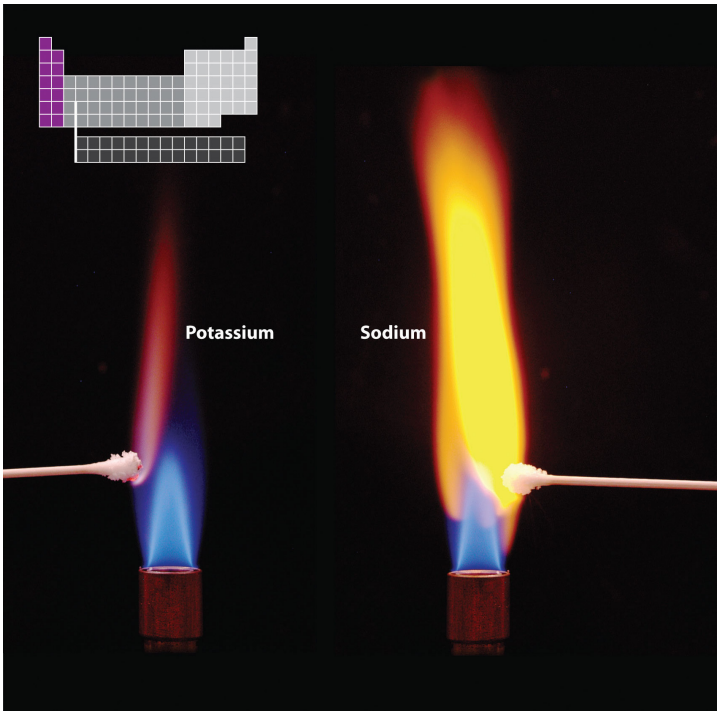


Abb. 15.98: Das Erhitzen einer Probe mit einer heißen Flamme führt zu angeregten Atomen. Bei der Relaxation in den Grundzustand wird Licht ausgesendet. Jedes Element sendet dabei Licht charakteristischer Frequenz aus. Solche Flammentests werden verwendet, um Elemente aufgrund ihrer Farbe zu identifizieren, hier gezeigt an Natrium- und Kaliumverbindungen.

Hg-Dampflampe) durch die Flamme eines Bunsenbrenners an eine Wand projiziert. Die Transmission des Lichts wird dadurch nicht beeinträchtigt, die Flamme ist transparent. Ein Löffel mit einer Natriumsalzlösung wird in die Flamme gehalten und die Auswirkung auf die projizierten Lichtflecke beobachtet. Während das Licht der Natriumlampe einen Schatten der Flamme an die Wand wirft, bleibt der Lichtfleck der Quecksilber-Dampflampe unverändert. Man schließt daraus, dass die Natriumflamme Licht der Natriumlampe absorbiert hat. Für das Licht der Quecksilberdampflampe gilt das nicht. Eine Spektralanalyse des Lichts der beiden Lampen ergibt, dass Licht der Wellenlängen (Hg 578 nm) und (Na 590 nm) emittiert wird. Dies bedeutet, dass Na-Atome Licht derselbe Wellenlängen sowohl absorbieren als auch emittieren. Die spektralen Eigenschaften der Elemente scheinen klar getrennt. Senkrecht zum Lichtstrahl der Na-Dampflampe beobachtet man ebenfalls Licht der Wellenlänge 590 nm. Die angeregten Atome geben das Licht also bei derselben Wellenlänge wieder ab.

Im Emissionsspektrum stammen die Spektrallinien aus dem heißen Gas, während die dunklen Linien im Fraunhoferspektrum durch die Absorption des kühlen Gases oberhalb der Sonnenoberfläche stammen. Trotzdem scheint der physikalische Ursprung ähnlich.

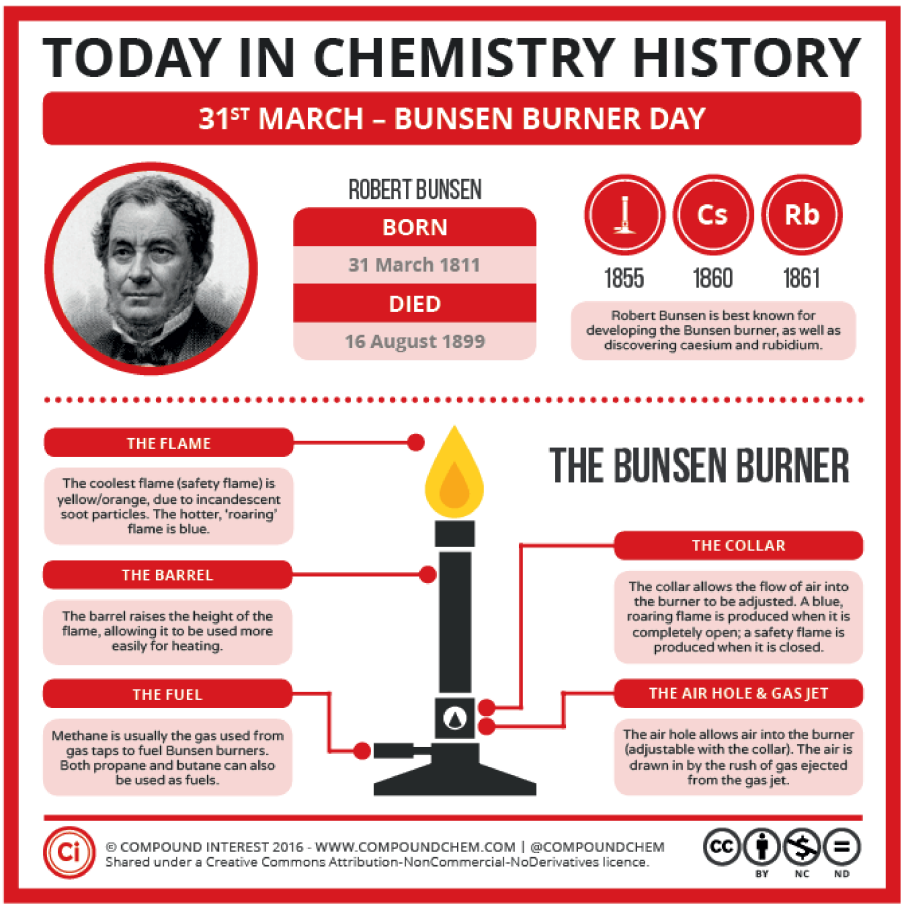


Abb. 15.99: Physikalisch-chemische Relevanz des Bunsenbrenners.

Kirchhoff und Bunsen führten Spektralanalysen chemischer Elemente durch.[85] Sie fanden heraus, dass jedes chemische Element ein charakteristisches Lichtspektrum abgibt. Erkennen Sie die vielfältigen Möglichkeiten? Dadurch ist es möglich, eine Probe auf ihre chemische Zusammensetzung hin zu untersuchen! Die systematische Untersuchung der Spektren irdischer Stoffe führte unter anderem zur Entdeckung der Elemente Caesium und Rubidium in den Salzen der Bad Durkheimer Maxquelle. Die Lichtquelle, die sie für ihre Untersuchungen verwendeten, war der heute als Bunsenbrenner bekannte Gasbrenner, siehe Abb. 15.99. Die experimentelle Methode nennt sich Flammenprobe,[86] hier gezeigt am Beispiel von Alkalimetallen (Abb. 15.98). Den experimentellen Aufbau zeigt Abb. 15.100.

[85] Der Erste, der Licht aus Flammen spektral untersuchte, war Thomas Melville (1752)[?]

[86] Der Entdecker der Methode ist Thomas Melvill, im Jahr 1752 darüber berichtete (*Observations on light and colors*). Mit einem Prisma beobachtet er die Emission aus durch Salze gefärbte Flammen. Es fiel ihm auf, dass Linie im gelben Spektralbereich stets an der gleichen Stelle des Spektrums zu sehen war. Die Ursache war Natrium, eine Verunreinigung in den Salzen.

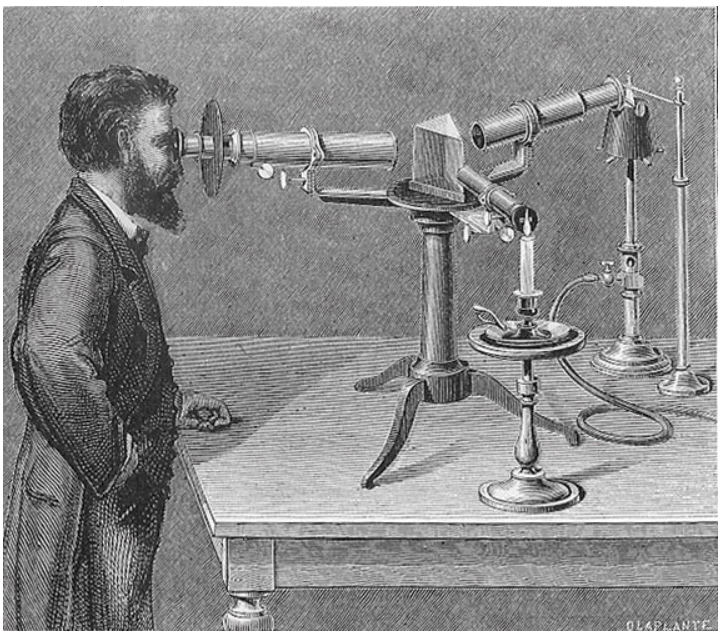


Abb. 15.100: Im Jahr 1855 entwickelte Robert Bunsen den Bunsenbrenner zur Verwendung bei Flammentests. Die nicht leuchtende Flamme störte nicht die vom Probenmaterial abgegebene Flammenfarbe. Kirchhoff schlug vor, ähnlich gefärbte Flammen anhand ihrer Emissionsspektren zu unterscheiden.

Im 18. Jahrhundert klärte sich die chemische Zusammensetzung von Soda und Pottasche. Duhamel du Monceau stellte fest, dass man Soda aus Kochsalz und ebenso aus Glaubersalz herstellen kann. Es musste also gemeinsame Grundsubstanzen geben. Andreas Marggraf gelang es in einem Experiment den Unterschied zwischen Soda und Pottasche herauszuarbeiten: Bringt man Soda in die Flamme eines Bunsenbrenners, färbt sie diese intensiv gelb, während sich die Flamme bei Pottasche violett verfärbt. Die Grundsubstanzen sind teils voneinander verschieden.

Die Abbildung 15.101 zeigt das Instrument, mit dem Bunsen und Kirchhoff ihre Sonnen-

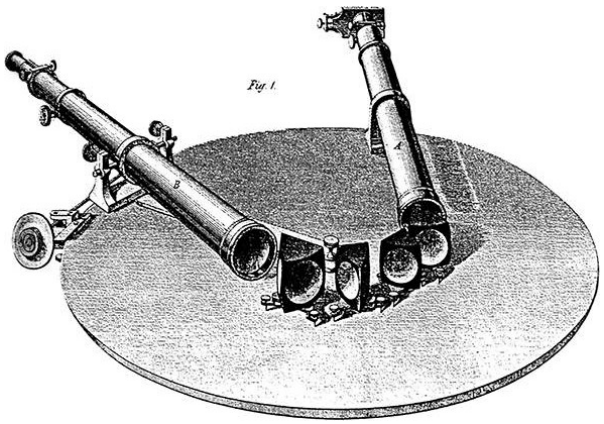


Abb. 15.101: Spektrograph von Bunsen und Kirchhoff.

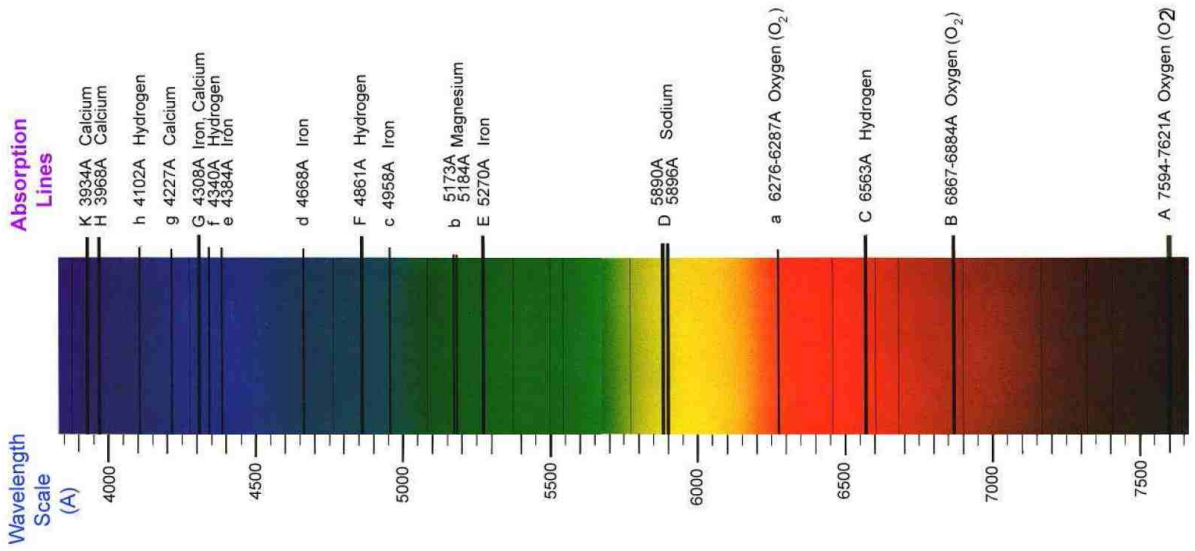


Abb. 15.102: Detailansicht des Sonnenspektrums im Bereich von 380 bis 770 nm, sowie Zuordnung der Fraunhoferlinien zu Atomen und Molekülen.

beobachtungen durchgeführten. Der experimentelle Aufbau enthält vier hintereinander gestellte Prismen, wodurch die Forscher eine exzellente spektrale Auflösung in ihren Messungen erreichten. Licht der Vergleichsprobe fällt auf den oberen Teil des Spalts und das Sonnenlicht auf den unteren, um im hoch aufgelösten Spektrum die Emissionslinien der Flammenprobe mit den Fraunhoferlinien zu vergleichen. Bunsen und Kirchhof gelang es 32 Elemente in der Sonne nachzuweisen. Damit gelang erstmals eine chemische Analyse der oberen Sonnenatmosphäre. Wie die Analyse der Fraunhoferlinien zeigt (Abb. 15.102), lassen sich die in den äußeren Schichten der Sonne vorhandenen Elemente identifizieren.

Link to video `Fraunhofer lines`

Welche Beobachtungen ergeben sich?

Für die Absorption findet man,

- dass Atome in einem Gas kein Licht emittieren. Auf der anderen Seite kann aber Strahlung unter bestimmten Bedingungen absorbiert werden. In der Quantenphysik nennt man diese Bedingungen den Grundzustand des Atoms.

- dass Atome Licht bei Wellenlängen absorbieren, die charakteristisch für das chemische Element sind (Abb. 15.102). Ein Beispiel für die Anwendung ist die Bestimmung der Schwermetallbelastung von Fischen [**?**].

(Für die Emission findet man,

- dass angeregte Atome im gasförmigen Zustand Licht ausstrahlen, wobei nicht klar ist, wie der Anregungsprozess aussieht.

- dass Atome ein Linienspektrum ausstrahlen, das charakteristisch für das chemische Element sind (Abb. 15.73).

Daraus kann die Schlussfolgerungen ziehen,

- dass Emission und Absorption bei gleicher Wellenlänge erfolgen. Das Atom gibt also in der Zeitspanne zwischen den Prozessen keine Energie ab, wie zum Beispiel ein erkaltender Körper.

- dass die Emissions- und Absorptionslinien ein Fingerabdruck der Elemente sind.

- dass die Beobachtungen darauf hindeuten, dass bei der Emission und Absorption von Strahlung durch Atome nur diskrete Energiepakete übertragen werden.

Bietet einerseits die Spektralanalyse... ein Mittel von bewunderungswürdiger Einfachheit dar, die kleinsten Spuren gewisser Elemente in irdischen Körpern zu entdecken, so eröffnet sie andererseits der chemischen Forschung ein bisher völlig verschlossenes Gebiet, das weit über die Grenzen der Erde, ja selbst unseres Sonnensystems, hinausreicht. Da es... ausreicht, das glühende Gas um dessen Analyse es sich handelt, zu sehen, so liegt der Gedanke nahe, daß dieselbe Analyse auch anwendbar sei auf die Atmosphäre der Sonne und die helleren Fixsterne [**?**].

G. Bunsen und R. Kirchhoff, 1860

Hertzsprung-Russell Diagramm^{4LP}

Jeder Stern emittiert ein charakteristisches Spektrum. Anhand des Schwarzkörperspektrums (siehe Vorlesung *Schwarzer Strahler*) kann auf die Oberflächentemperatur geschlossen werden. Die Fraunhoferlinien helfen darüber hinaus die chemische Zusammensetzung der betrachteten Sonne zu entschlüsseln und liefern damit zusätzliche Informationen für die Astrophysik. Die obige Abbildung zeigt das Spektrum entfernter Sonnen. Hochauflösende Spektroskopie gestattet es, damit mehr über den Aufbau von Sternen zu lernen. Abb. 15.103 zeigt eine frühe Analyse von Angelo Secchi aus dem Jahr 1870 [**?**]. Er bemerkte, dass sich Sterne anhand typischer Spektrallinien klassifizieren lassen. Zuerst benennt er drei Typen: weiße, farbige und blaue Sterne, auf die die heute siebenteilige Klassifikation aufgebaut ist. Allgemein kann man Sterne in Spektralklassen katalogisieren (Abb. 15.104) und anhand von Leuchtkraft und Spektrum in das Hertzsprung-Russell Diagramm eintragen, siehe Abb. 15.93. Es sei noch angemerkt, dass man anhand der Leuchtkraft über das Stefan-Boltzmann Gesetz den Radius der Sterne bestimmen kann.

Wie liest man das Hertzsprung-Russell Diagramm?

- Die Temperatur nimmt nach rechts hin ab. Heiße Sterne findet man links und kältere Sterne rechts.

- Die Leuchtkraft (oder Leistung) der Sterne nimmt nach oben hin zu.

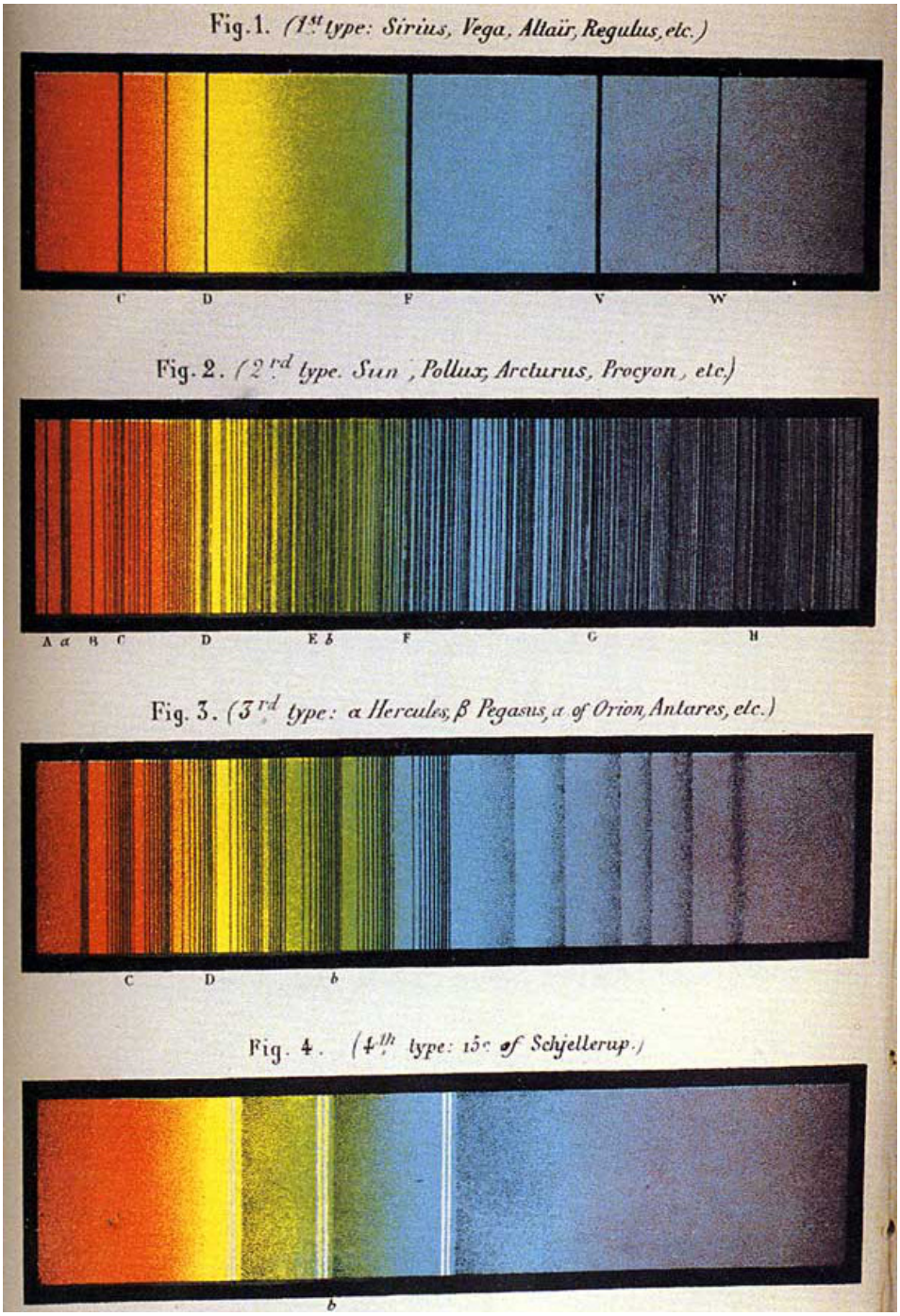


Abb. 15.103: Darstellung von Sternspektren nach Angelo Secchi, einem der Wegbereiter der Spektroskopie in der Astronomie. Im Jahr 1867 legte Secchi ein Verzeichnis von über 500 Fixsternen vor, in dem er die Spektren zunächst in drei Klassen, später in vier Klassen einteilte (. . . einige sehr merkwürdige Sterne, die meist eine blutrote Farbe besitzen und sehr geringe Helligkeit haben . . . dennoch sind ihre Linien sehr lebhaft . . .) [**?**].

Spektralklasse	Oberflächen-temp. in 10^3 K	Farbe	Beispiel
O	50 - 30	blau-weiß	
B	25 - 15	bläulich weiß	Riegel
A	12 - 8	weiß	Wega, Sirius
F	8 - 6	gelblich weiß	Prokyon
G	6 - 5	gelb	Sonne
K	4	orange	Arkturus
M	3.5	rot	Betelgeuze

Abb. 15.104: Tabelle der Einteilung von Sterne in Spektralklassen aufgrund ihrer Oberflächentemperatur.

- Sterne mit ähnlicher Temperatur sind vertikal übereinander angeordnet. Sterne mit ähnlicher Leuchtkraft sind horizontal angeordnet. Sterne mit ähnlichem Radius findet man entlang einer geneigten Linie.
- Von zwei Sternen mit ähnlicher Temperatur hat der größere Stern die höhere Leuchtkraft. Von zwei Sternen mit ähnlicher Leuchtkraft ist der größere Stern der kühlere.
- Die meisten Sterne (90%) findet man auf dem diagonalen Band (links oben nach rechts unten). Dies ist die sogenannte Hauptreihe.
- Sterne oberhalb der Hauptreihe sind größer als Hauptreihensterne
- Je höher die Oberflächentemperatur der Hauptreihensterne ist, desto höher ist ihre Leuchtkraft.
- Sterne, deren Leuchtkraft höher ist als die der Hauptreihensterne, werden Riesen oder Überriesen genannt.
- Sterne, deren Leuchtkraft geringer ist als die der Hauptreihensterne, werden Weiße Zwerge genannt.

Anzahl und Breite der Fraunhoferlinien^{4LP}

Aufgrund der Sterntemperatur ändert sich die chemische Zusammensetzung in der Photosphäre. Die Absorption von Strahlung erfolgt deshalb durch Atome, die beispielsweise in unterschiedlichen Ladungszuständen (neutral, einfach oder mehrfach geladen) vorliegen, siehe oben. Auch das Ionisationspotenzial I_P der Atome spielt eine Rolle (Kapitel

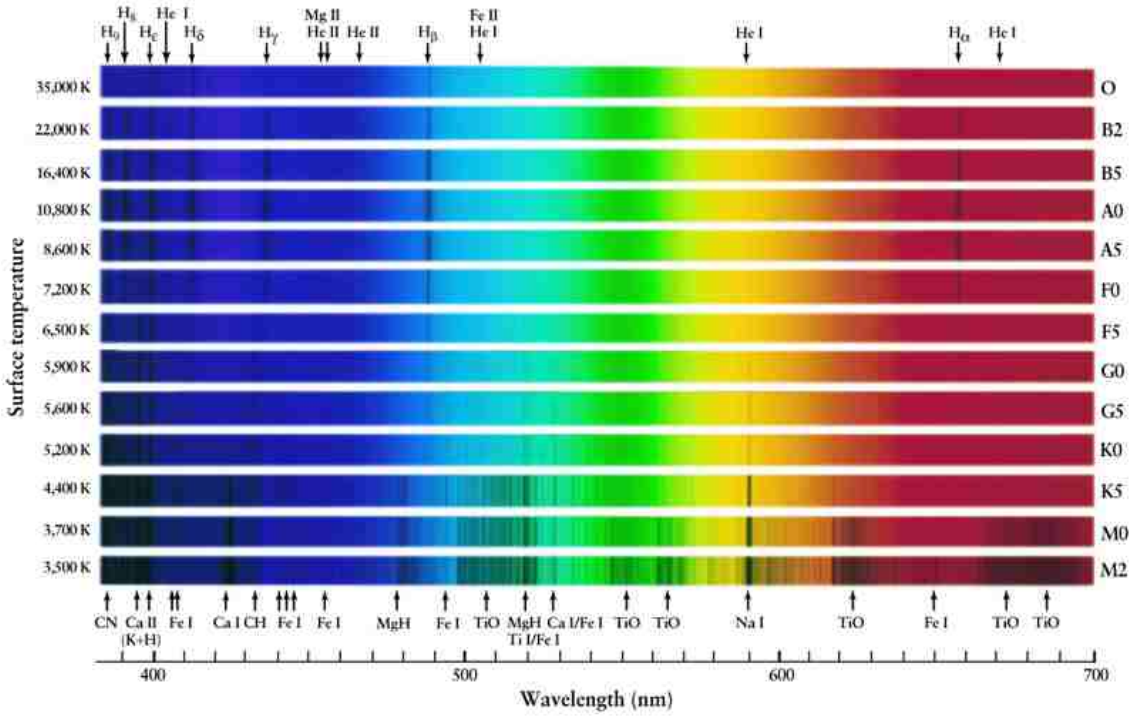


Abb. 15.105: Fraunhoferlinien von Sternen unterschiedlicher Spektralklassen. Man erkennt, dass Anzahl, Position und Breite der Linien stark mit der Spektralklasse variiert [**?**].

Photoelektrischer Effekt). Beispielsweise lässt sich Helium schwerer ionisieren als Wasserstoff, da das I_P deutlich höher ausfällt. Um diese Elemente anzuregen sind höhere Sterntemperaturen notwendig, da sich auch der Energieabstand zu den angeregten Zuständen erhöht. Die Zuordnung von Element und Ladungszustand gestattet also Aussagen über die Bedingungen in den Sternen zu machen. Abb. 15.105 zeigt Beispiele. Damit können anhand der Fraunhoferlinien Informationen über die chemische Zusammensetzung und die Temperaturverhältnisse in der Photosphäre gewonnen werden. Auffallend ist, dass sich in Sternen hoher Temperatur die Anzahl der Fraunhoferlinien verringert. Die Ursache ist die Ionisation der Atome, die die Emission in andere Spektralbereiche verschiebt. Abb. 15.106 zeigt wie sich die Temperatur der Sterne auf die Fraunhoferlinien auswirkt.[87] Durch einen Vergleich der Fraunhoferlinien erhält man dadurch einen empfindlichen Temperaturfühler.

[87] Man verwendet die Notation (I neutral, II einfach geladen, ...) um zwischen der Absorption durch unterschiedliche Ladungszuständen der Elemente zu unterscheiden. Bei Ca-II beispielsweise handelt es sich um Ca^+.

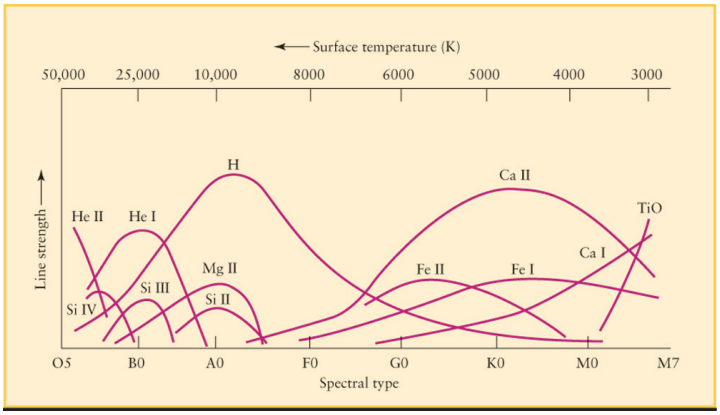


Abb. 15.106: In der Atmosphäre eines Sterns findet man, neben dem Hauptanteil Wasserstoff, Spuren anderer Elemente, die zum Emissionsspektrums des Stern beitragen. Die Stärke der Linien hängt von der Temperatur in der Photosphäre ab. Die eingehende Analyse liefert detaillierte Informationen über Temperatur und Elementzusammensetzung.

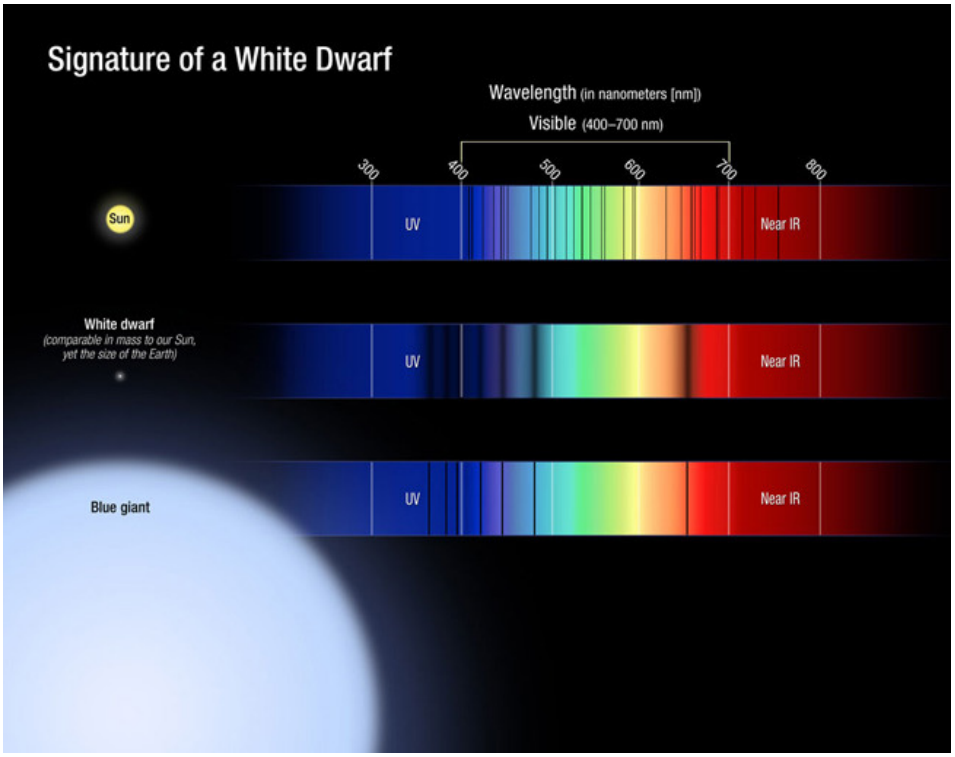


Abb. 15.107: Spektrale Merkmale eines Weißen Zwergs (Mitte) im Vergleich zur Sonne (Oben) und einem blauen Riesen (Unten). Das Spektrum des Weißen Zwergs ist einfach und enthält nur Absorptionslinien von Wasserstoff. Ein ähnliches Spektrum beobachtet man bei einem Blauen Riesen. Allerdings verbreitern sich im Weißen Zwerg die Linien aufgrund des enormen Drucks [**?**].

Ein Beispiel aus der Astrophysik

Zur weiteren Einordnung zeigt Abb. 15.105 Beispiele für Fraunhoferlinien in Sternen unterschiedlicher Spektralklassen. Interessant ist, dass auch die spektrale Breite der Linien ($\Delta\lambda$) der Absorptionslinien Informationen über die Objekte bereitstellen. In Riesensonnen stellt man fest, dass die Fraunhoferlinien eine geringe spektrale Breite haben. In Sternen geringer Größe und in Weiße Zwergen beobachtet man dagegen verbreiterte Absorptionslinien. Man kann diese Phänomene auf erhöhte Druckverhältnisse zurückführen. In kleineren Sonnen findet man die Photosphäre in einem geringeren Abstand zum Zentrum als in größeren Sternen, wodurch der Umgebungsdruck ansteigt. Ähnliche Bedingungen findet man in Weißen Zwergen, siehe Abb. 15.107. Die häufiger stattfindenden Stöße von Atomen untereinander verkürzen die Lebensdauer der angeregten Atome. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation ($\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$) führt dies zu einer größeren Energieunschärfe ($\Delta E = h \cdot \Delta\nu = h \cdot c/\Delta\lambda$), die die Absorptionslinien verbreitert.

Anwendungen^{4LP}

Of all objects, the planets are those which appear to us under the least varied aspect. We see how we may determine their forms, their distances, their bulk, and their motions, but we can never known anything of their chemical or mineralogical structure.

Auguste Comte, 1842

Beispiele aus der Exoplanetenforschung

Tatsächlich hat die Astrophysik es geschafft, anhand von Absorptionsspektren, die Atmosphäre von Exoplaneten (siehe Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*) zu charakterisieren. Das Messprinzip ist ähnlich, wie bei Analyse der Fraunhoferlinien. In diesem Fall dient das Heimatgestirn des Exoplaneten als Strahlungsquelle. Bei der Beobachtung verwenden die Forscher unterschiedliche optische Filter, die Licht in nur einen schmalen Wellenlängenbereich zum Detektor durchlassen. Nahe einer Absorptionslinie eines Gases schattet nicht nur die Planetenscheibe das Licht ab, sondern auch das in der Atmosphäre vorhandene Gas. Als Folge erscheint der Planet bei dieser Wellenlänge größer, siehe Abb. 15.108. Beim Transit des Planeten beobachtet man im Sonnenspektren zusätzliche Absorptionslinien, wodurch man Aussagen über die chemische Zusammensetzung der Atmosphäre treffen kann, siehe Abb. 15.109.

A continuum from clear to cloudy hot-Jupiter exoplanets without primordial water depletion [?]: Thousands of transiting exoplanets have been discovered, but spectral analysis of their atmospheres has so far been dominated by a small number of exoplanets and data spanning relatively narrow wavelength ranges (such as 1.1-1.7 micrometres). Recent studies show that some hot-Jupiter exoplanets have much weaker water absorption features in their near-infrared spectra than predicted. The low amplitude of water signatures could be explained by very low water abundance, which may

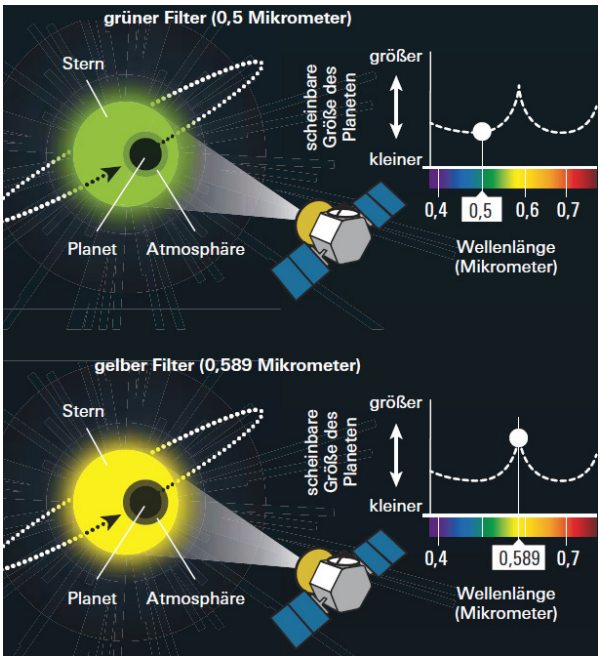


Abb. 15.108: Exoplaneten liefern beim Transit Informationen über die Zusammensetzung ihrer Gashülle. Lichts durchdringt die Atmosphäre, wobei jedes Atom und Molekül charakteristische Wellenlängen absorbiert. Dadurch erscheint der Planet größer, weil die Atmosphäre einen Teil des Sonnenspektrums absorbiert.

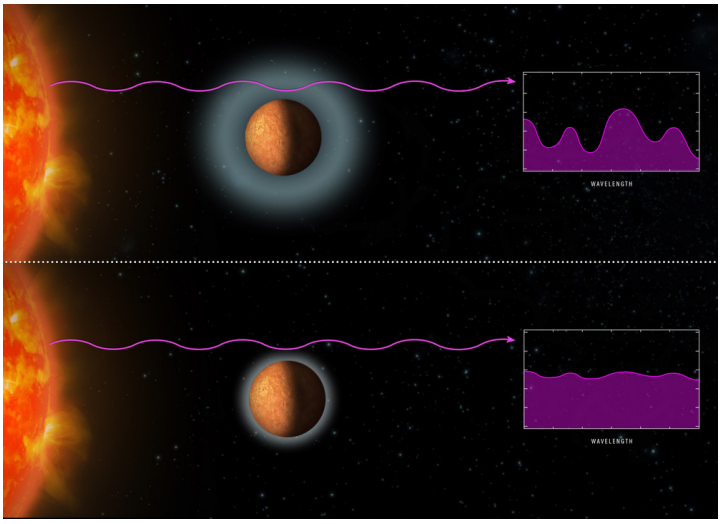


Abb. 15.109: Berechnetes Spektrum eines Exoplaneten mit den erwarteten Signaturen vorhandener Gasen [**?**].

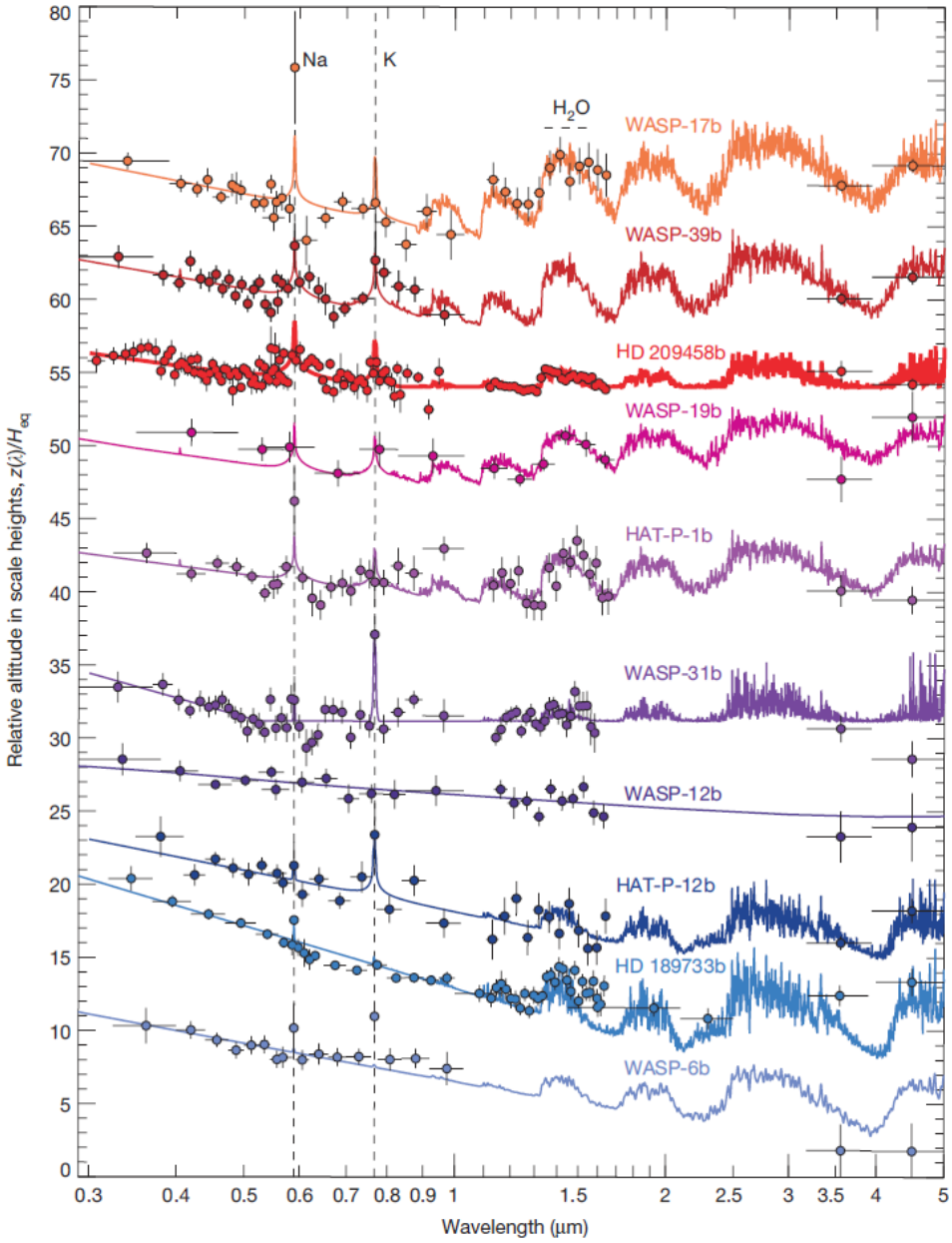


Abb. 15.110: HST/Spitzer transmission spectral sequence of hot-Jupiter survey targets. Solid coloured lines show fitted atmospheric models with prominent spectral features indicated. Planets with predominantly clear atmospheres (top) show prominent alkali and H_2O absorption. Very hazy and cloudy planets (bottom) have strong optical scattering slopes, narrow alkali lines and H_2O absorption that is partially or completely obscured [**?**].

be a sign that water was depleted in the protoplanetary disk at the planets formation location, but it is unclear whether this level of depletion can actually occur. Alternatively, these weak signals could be the result of obscuration by clouds or hazes, as found in some optical spectra. Here we report results from a comparative study of ten hot Jupiters covering the wavelength range 0.3-5 micrometres, which allows us to resolve both the optical scattering and infrared molecular absorption spectroscopically (Fig. 15.110). Our results reveal a diverse group of hot Jupiters that exhibit a continuum from clear to cloudy atmospheres. We find that the difference between the planetary radius measured at optical and infrared wavelengths is an effective metric for distinguishing different atmosphere types. The difference correlates with the spectral strength of water, so that strong water absorption lines are seen in clear-atmosphere planets and the weakest features are associated with clouds and hazes. This result strongly suggests that primordial water depletion during formation is unlikely and that clouds and hazes are the cause of weaker spectral signatures.

Mit dieser Methode konnten die Atmosphären einer Reihe von Exoplaneten untersucht werden, Damit ist man in der Identifizierung erdähnlicher Planeten und der Charakterisierung ihrer Druck und Temperaturverhältnisse einen entscheidenden Schritt weitergekommen. Allerdings gibt es auch Gegenbeispiele (Abb. 15.111):

Absence of a thick atmosphere on the terrestrial exoplanet LHS 3844 [?]: Most known terrestrial planets orbit small stars with radii less than 60 per cent of that of the Sun. Theoretical models predict that these planets are more vulnerable to atmospheric loss than their counterparts orbiting Sun-like stars. To determine whether a thick atmosphere has survived on a small planet, one approach is to search for signatures of atmospheric heat redistribution in its thermal phase curve. Previous phase curve observations of the super-Earth 55 Cancri e (1.9 Earth radii) showed that its peak brightness is offset from the substellar point (latitude and longitude of 0 degrees) . possibly indicative of atmospheric circulation. Here we report a phase curve measurement for the smaller, cooler exoplanet LHS 3844b, a 1.3-Earth-radii world in an 11-hour orbit around the small nearby star LHS 3844. The observed phase variation is symmetric and has a large amplitude, implying a dayside brightness temperature of 1 040 kelvin and a nightside temperature consistent with zero kelvin (at one standard deviation). Thick atmospheres with surface pressures above 10 bar are ruled out by the data, and less-massive atmospheres are susceptible to erosion by stellar wind. The data are well fitted by a bare-rock model with a low Bond albedo. These results support theoretical predictions that hot terrestrial planets orbiting small stars may not retain substantial atmospheres.

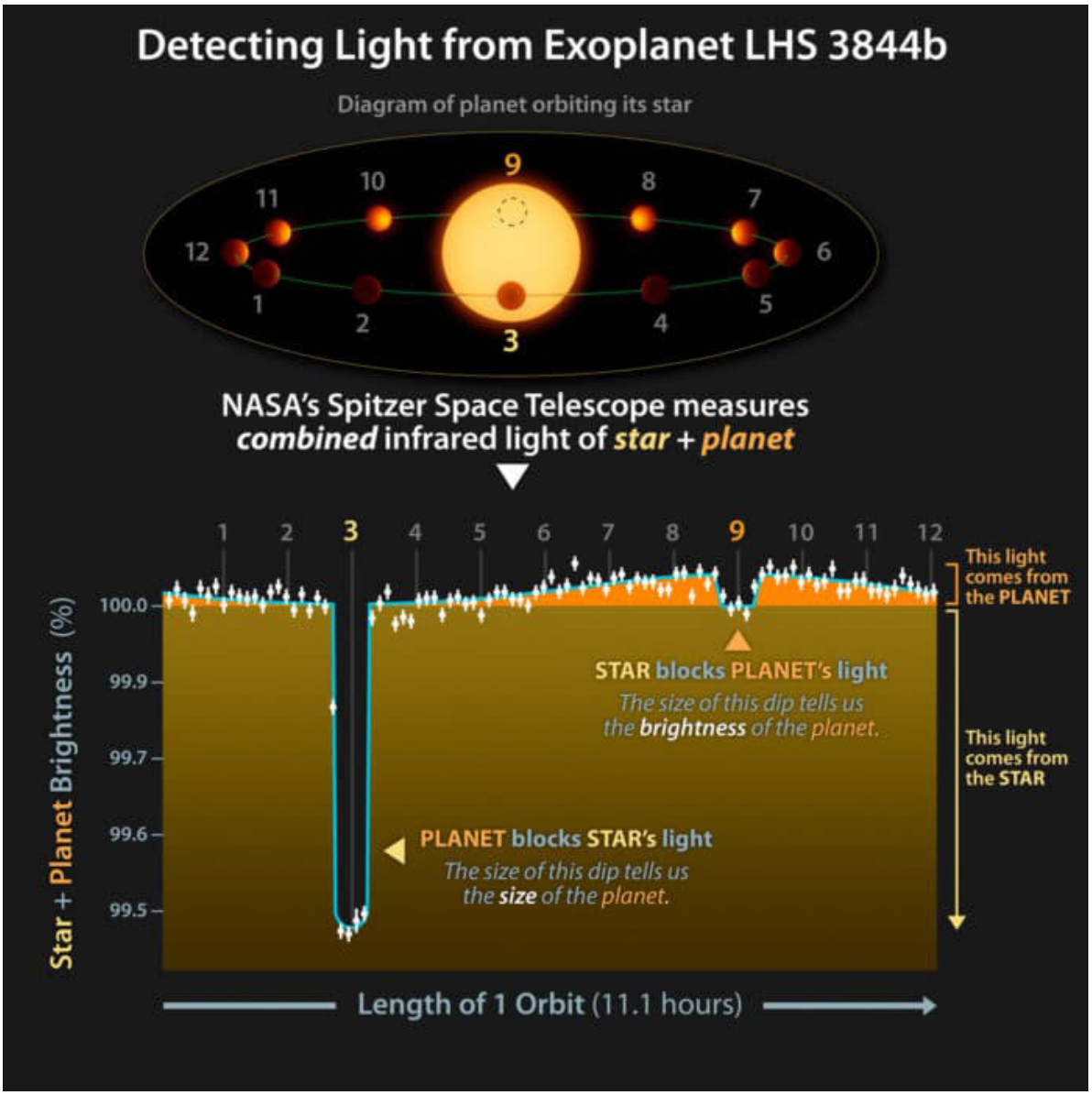


Abb. 15.111: Viele Exoplaneten umkreisen kleine Sterne mit einem geringen Bahnradius. Modelle sagen voraus, dass diese Planeten anfällig für atmosphärische Verluste. Dazu suchen Astronomen nach Signaturen für eine atmosphärischen Wärmeumverteilung. Der Exoplanet LHS 3844b, der eine kleine Sonne in einer Entfernung von etwa 50 Lichtjahren umkreist, weist allerdings KEINE nachweisbare Gasschicht auf, die ihn vor der Strahlung seiner Sonne schützt [**?**].

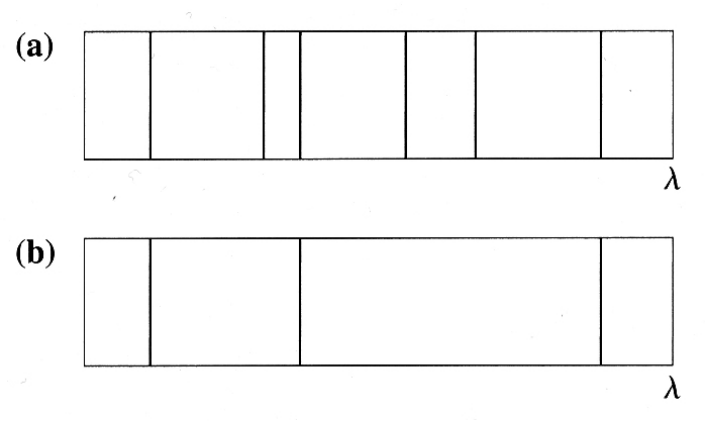


Abb. 15.112:

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Abb. 15.112 zeigt Spektren ein und desselben Elements. Was zeigen die Spektren?[88]

(i) a: Emission; b: Absorption

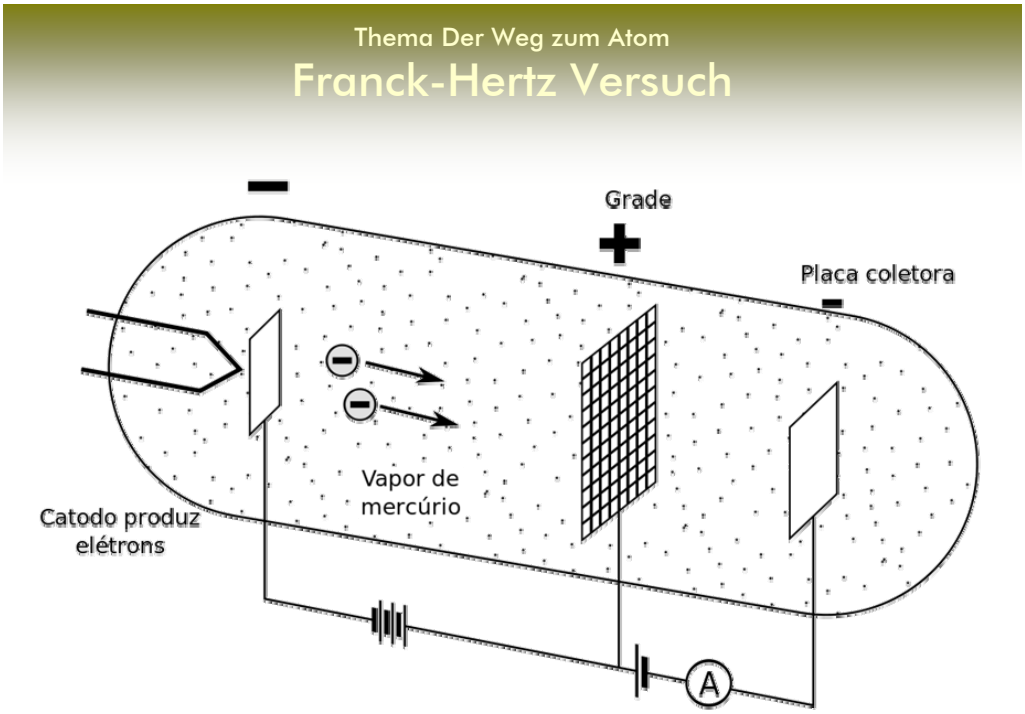
(ii) a: Absorption; b:Emission

[88] Antwort: (i) Alle Wellenlängen im Absorptionsspektrum findet man auch im Emissionsspektrum, aber nicht alle Wellenlängen im Emissionsspektrum findet man auch im Absorptionsspektrum wieder.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Warum ist der Bunsenbrenner für die Spektroskopie so gut geeignet?
2. Was ist eine Flammenprobe?
3. Welche Beitrag haben Bunsen und Kirchhoff zum Verständnis des Atoms geleistet?
4. Wie entstehen die Fraunhoferlinien?
5. Warum kann man Fraunhoferlinien überhaupt beobachten?
6. Sie beobachten die Emission eines Gases in einer Entladungsröhre. Unter welchen Bedingungen erwarten Sie, Fraunhoferlinien zu entdecken?
7. Warum verbreitern sich die die Linien in den Absorptions- oder Emissionsspektren von Gasen mit zunehmender Dichte der Gasmoleküle?

15.5 Franck-Hertz Versuch



It appeared to me to be completely incomprehensible that we had failed to recognize the fundamental signicance of Bohrs theory, so much so, that we never even mentioned it once in the relevant paper. It was unfortunate that we could not rectify our error. . . ourselves by clearing up the still existing uncertainties experimentally.

James Franck, 1925

In einer mit Quecksilberdampf gefüllten Vakuumröhre werden mit Hilfe eines Glühdrahts Elektronen erzeugt und durch eine regelbare Spannung beschleunigt, siehe Abb. 15.113. Überraschenderweise kommt es erst zu inelastischen Stößen mit den Quecksilberatomen, wenn die Elektronen eine bestimmte kinetische Energie erreichen. In diesem Fall geben die Elektronen ihre gesamte Energie an die Quecksilberatome ab. Der Franck-Hertz Versuchist der erste experimentelle Beweis der Quantisierung der Energiezustände in Atomen.

Link to video `Franck-Hertz Experiment`

Link to video `Franck Hertz Experiment 1961`

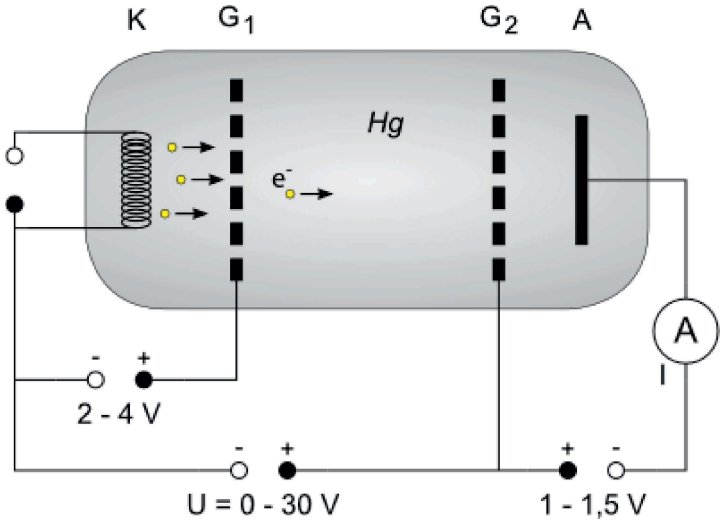


Abb. 15.113: Experimenteller Aufbau zur Durchführung des Franck-Herz Versuchs. Eine evakuierte Glasröhre enthält einem geringen Anteil (Partialdruck 20-20 mbar) an Quecksilber oder Neon.

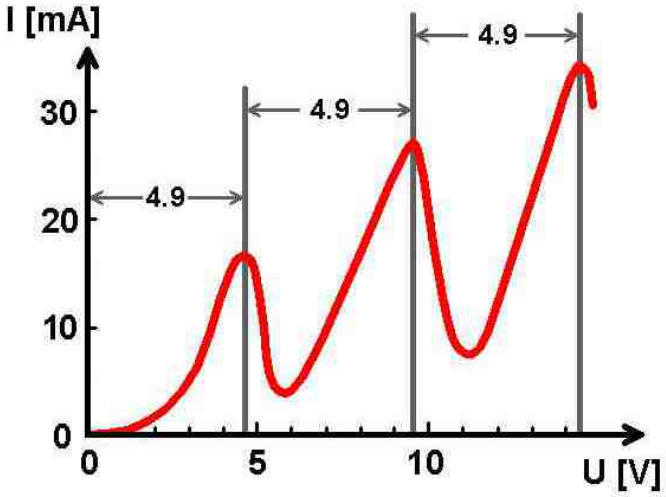


Abb. 15.114: Verlauf der Stromstärke in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung beim Franck-Hertz Versuch mit Quecksilberatomen. Die Stromstärke steigt zunächst mit zunehmender Beschleunigungsspannung kontinuierlich an. Bei einer bestimmten Beschleunigungsspannung sinkt die Stromstärke schlagartig ab. Bei Erhöhung der Beschleunigungsspannung steigt die Stromstärke wieder an und sinkt nach Erreichen eines weiteren Maximums wieder ab. Es zeigt sich, dass die Maxima der Stromstärke sich in Abständen von 4.9 V wiederholen.

Es sei angemerkt, dass Franck und Hertz zunächst nicht den Zusammenhang zwischen ihren Experimenten und den Arbeiten von Niels Bohr erkannt haben (siehe Kapitel *Bohrsches Atommodell*).

Das Franck-Hertz wird folgendermaßen durchgeführt: Quecksilber in der Reaktionskammer verdampft. Elektronen werden über den glühelektrischen Effekt (Kapitel *Photoelektrischer Effekt*) an der Kathode (K) erzeugt, durch ein schwaches elektrisches Feld in Richtung des Gitters G1 transportiert und durch die Spannungsdifferenz zwischen den G1 und G2 (Kondensator) auf eine bestimmte kinetische Energie beschleunigt. Die Elektronen können über inelastische Stöße Energie an die Quecksilberatome abgeben. Um die Abhängigkeit des Elektronenstroms von der kinetischen Energie der Elektronen zu charakterisieren, verwendet man die Gegenfeldmethode. Ein elektrischen Feld zwischen Gitter (G2) und Anode (A) bremst die Elektronen ab. Das Gegenfeld ist so gewählt, dass nur die Elektronen die Anode erreichen, die keine Energie durch inelastische Stöße abgegeben haben.

Wie wir schon oft beobachtet haben, reagiert das mikroskopische System gänzlich anders, als von Seiten der klassischen Physik erwartet. Wie kann man dieses Verhalten erklären? Fassen wir die zentralen experimentellen Beobachtungen zunächst zusammen, um die Unterschiede zwischen Mechanik und Quantenwelt herauszustellen:

- Elektronen, die keine ausreichende kinetische Energie erreichen, verlieren keine Energie durch Stöße.
- Nur Elektronen mit ausreichender Geschwindigkeit, geben Energie durch Stöße an Atome ab.

Das Resultat des Franck-Hertz Experimentes [**?**] widerspricht der klassischen Erwartung, dass sich die Elektronen in einem viskosen Medium aus Quecksilberatomen bewegen. Tatsächlich finden inelastische Stöße nur unter ganz bestimmten energetischen Bedingungen statt.

It's so lovely, it makes you cry [**?**]

Albert Einstein zum Franck-Hertz Versuch im Gespräch mit Ilse Meitner, 1913

Im Experiment wird nun die Geschwindigkeit der Elektronen (E_{kin}) kontinuierlich erhöht und die Anzeige auf dem Strommessgerät notiert. Was würde man erwarten? In elastischen Stößen mit den Atomen kann aufgrund des erheblichen Massenunterschieds (m_e/m_{Hg}) nur ein Bruchteil der kinetischen Energie des Elektrons auf das Hg-Atom übertragen werden. Da die mittlere freie Weglänge bei dem geringen Quecksilber-Dampfdruck groß ist, ist der Energieverlust im Großen und Ganzen vernachlässigbar. Allerdings führt der Impulsübertrag zu einer Änderung der Trajektorie und ein Teil der Elektronen stößt mit der Wand der Kammer und reduziert dadurch den Elektronenstrom. Zunächst steigt, wie erwartet, der Elektronenstrom an, da durch die höhere Beschleunigungsspannung mehr Elektronen die Anode erreichen. Dann beobachtet man etwas

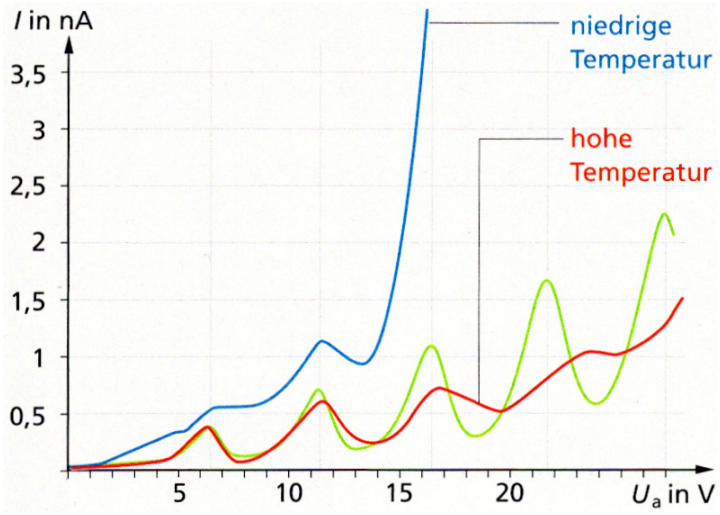


Abb. 15.115: Resultate des Franck-Hertz Versuchs bei unterschiedlichen Heiztemperaturen. Durch die Erhöhung des Heizstroms erhöht sich die Dichte des atomaren Gases und führt dazu, dass die mittlere freie Weglänge der Elektronen stark abnimmt.

Überraschendes. Das Amperemeter zeigt bei einer bestimmten Beschleunigungsspannung eine merkliche Abnahme des Elektronenstroms, siehe Abb. 15.114. Erhöht man die Abzugsspannung steigt der Elektronenstrom wieder an, um bei Erreichen einer bestimmten Spannung wieder einzubrechen. Dieser Vorgang wiederholt sich regelmäßig als Funktion der angelegten Spannung. Der Abstand der Stromeinbrüche erweist sich dabei mit einer Spannungsdifferenz von 4.9 V als konstant. Die Abnahme des Stroms deutet darauf hin, dass die Elektronen bei diesen charakteristischen Spannungen eine Energie E_a durch inelastische Stöße abgeben. Als Ursache für den Prozess können die Quecksilberatome identifiziert werden. Was würde man erwarten? In elastischen Stößen mit den Atomen kann aufgrund des erheblichen Massenunterschieds (m_e/m_{Hg}) nur ein Bruchteil der kinetischen Energie des Elektrons auf das Hg-Atom übertragen werden. Da die mittlere freie Weglänge bei dem geringen Quecksilber-Dampfdruck groß ist, ist der Energieverlust im Großen und Ganzen vernachlässigbar. Allerdings führt der Impulsübertrag zu einer Änderung der Trajektorie und ein Teil der Elektronen stößt mit der Wand der Kammer und reduziert dadurch den Elektronenstrom. Zunächst steigt, wie erwartet, der Elektronenstrom an, da durch die höhere Beschleunigungsspannung mehr Elektronen die Anode erreichen. Dann beobachtet man etwas Überraschendes. Das Amperemeter zeigt bei einer bestimmten Beschleunigungsspannung eine merkliche Abnahme des Elektronenstroms, siehe Abb. 15.114. Erhöht man die Abzugsspannung steigt der Elektronenstrom wieder an, um bei Erreichen einer bestimmten Spannung wieder einzubrechen. Dieser Vorgang wiederholt sich regelmäßig als Funktion der angelegten Spannung. Der Abstand der Stromeinbrüche erweist sich dabei mit einer Spannungsdifferenz von 4.9 V als konstant. Die Abnahme des Stroms deutet darauf hin, dass die Elektronen bei diesen charakteristischen Spannungen eine Energie E_a durch inelastische Stöße abgeben. Als Ursache für den

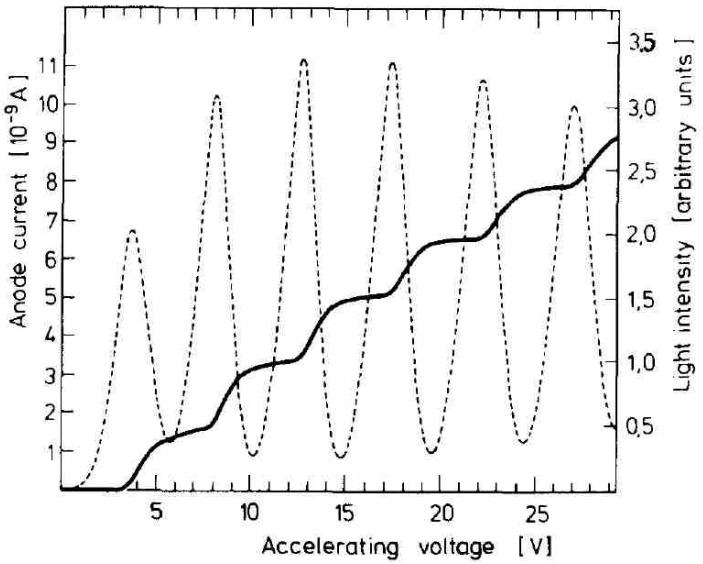


Abb. 15.116: Anodenstrom (gestrichelt) und Lichtintensität (durchgezogen) als Funktion der Beschleunigungsspannung.

Prozess können die Quecksilberatome identifiziert werden. Daraus kann man auf eine Reaktionsgleichung folgern, die so aussieht:

$$e^-(E_{kin}) + \mathrm{Hg} \rightarrow \mathrm{Hg}^*(E_a) + e^-(E_{kin} - E_a)$$

Durch den Energietransfer $(E_{kin} - E_a)$ an das Quecksilberatom können die Elektronen nicht mehr die Potenzialbarriere vor der Anode überwinden und erreichen nicht den Detektor. Möglicherweise handelt es sich um einen Kaskadeneffekt, der stets dieselbe physikalische Ursache hat. Die genaue Form der Franck-Hertz Kurve hängt von

- der Energieabhängigkeit des Anregungsprozesses ab.
- der Energieverteilung der von der Kathoden emittierten Glühelektronen ab.

Abb. 15.115 zeigt Untersuchungen, bei denen der Partialdruck der Hg-Atome über die Temperatur der Zelle variiert wurde. Unabhängig von der Dichte der Quecksilberatome beobachtet man die schon besprochenen Einbrüche im Elektronenstrom, wobei bei hohem Partialdruck die Ausprägung des Phänomens deutlich geringer ausfällt.

It seems that their experiments may possibly be consistent with the assumption that this voltage of 4.9 volts corresponds only to the transition from the normal state to some other stationary state of the neutral atom. . . . If the above considerations are correct it will be seen that Franck and Hertz's measurements give very strong support to the theory considered in this paper. If, on the other hand, the ionization potential of mercury should prove to be as low as assumed by Franck and Hertz, it would constitute a serious difficulty for the above interpretation. . . [**?**].

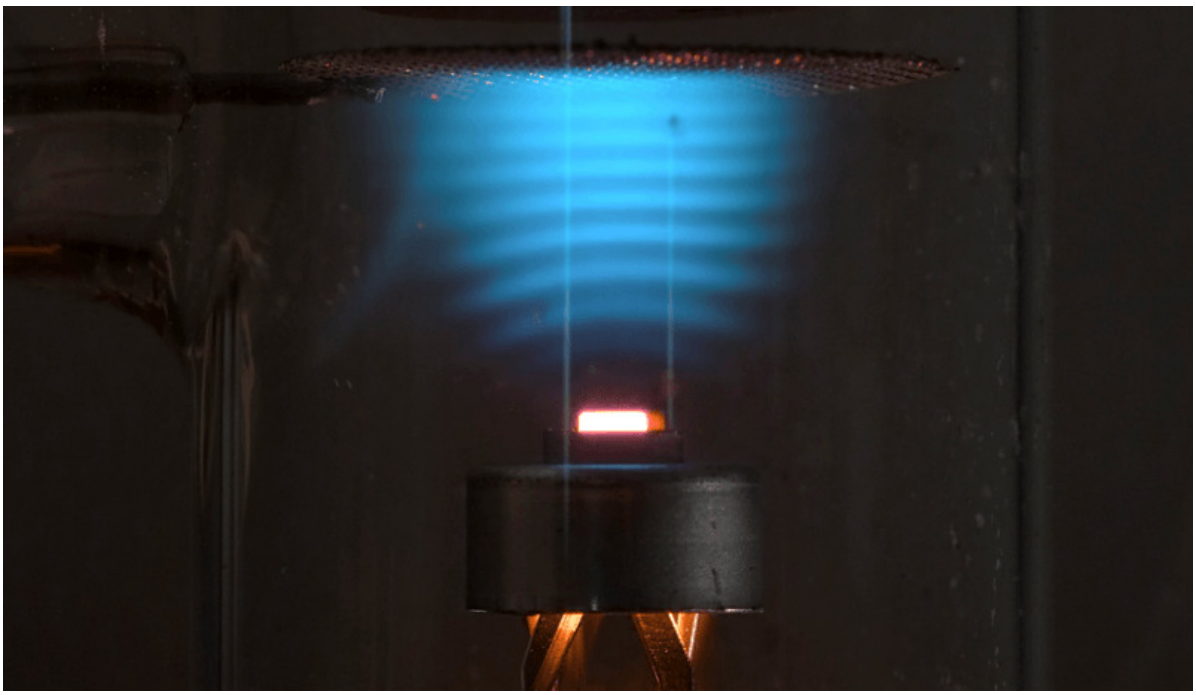


Abb. 15.117: Räumlich aufgelöste Aufnahme der Quecksilber-Lichtemission beim Frank-Hertz Versuch. Tatsächlich ist das experimentelle Szenario komplex. Der erste angeregte Zustand des Quecksilberatoms erzeugt für das Auge nicht sichtbares ultraviolettes Licht. Für diese Aufnahme erhöht man die Temperatur der Probe und damit die Gasdichte. Die Anzahl der Stöße erhöht sich dadurch und führt dazu, dass einige Quecksilberatome in den zweiten angeregten Zustand gelangen. Wenn diese Atome relaxieren, emittieren sie Linienstrahlung im ultravioletten Spektralbereich.

Niels Bohr, 1915

Beobachtet man den Bereich in dem sich die Elektronen bewegen mit dem Auge, stellt man fest, dass das Gas leuchtet, wenn es zum ersten Stromeinbruch kommt. Diese Beobachtung ist von zentraler Bedeutung für unser Verständnis des Atoms. Elektronen mit definierter Geschwindigkeit schaffen es nicht eine Strahlung der Atome auszulösen, wenn ihre Kinetischer Energie nicht einen bestimmten Wert, das Anregungspotenzial, erreicht.[89] Abb. 15.116 zeigt, dass die Intensität des emittierten Lichts immer dann ansteigt, wenn der Elektronenstrom einknickt [**?**]. Bei genauerem Hinsehen sieht man, dass die Leuchterscheinung nur in bestimmten, klar abgegrenzten Bereichen wahrzunehmen ist, siehe Abb. 15.117. Erhöht man die Beschleunigungsspannung bilden sich weitere Leuchtregionen aus. Eine spektrale Zerlegung ergibt, dass ultraviolettes Licht einer ganz bestimmten Wellenlänge, nämlich 253.6 nm emittiert wird. Ein Vergleich mit der Lichte-

[89] Ist die Elektronenenergie nur knapp oberhalb der Schwelle zur Lichtemission, tauchen im Spektrum nur wenige Linien auf. Erhöht das die Beschleunigungsspannung tauchen immer mehr Linien auf und das Spektrum wird immer komplexer.

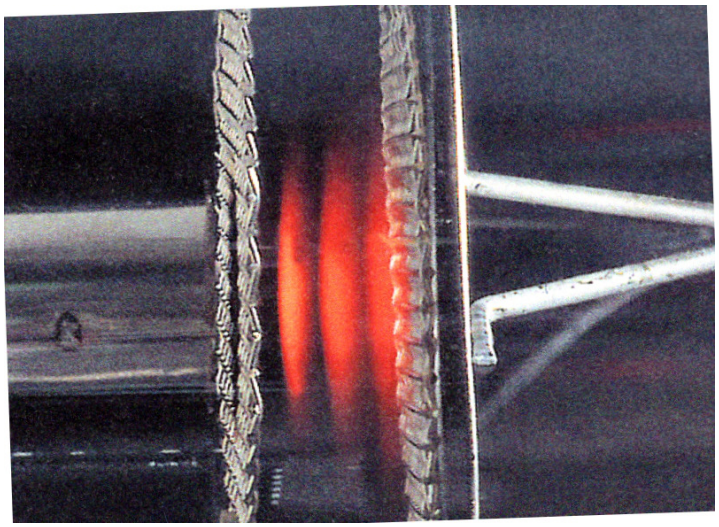


Abb. 15.118: Photo des Franck-Hertz Versuchs mit Neon. Zwischen den Gittern sind getrennte rötlich leuchtende Schichten zu erkennen, deren Anzahl bei höherer Spannung zunimmt. Die Relaxation der angeregten Neonatome erfolgt indirekt über Zwischenzustände unter Emission von Photonen im sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums.

mission der Elemente liefert das Ergebnis, dass als Quelle der Lichtaussendung nur die Quecksilberatome in Frage kommen. Die Analyse anhand der Planckschen Beziehung zwischen Photonenenergie und Wellenlänge liefert, dass die beobachtete Wellenlänge von 253.6 nm einer Photonenenergie von 4.9 eV entspricht.

$$\begin{aligned} E_{ph} &= h\nu_{ph} = \frac{h \cdot c}{\lambda} \\ E_{ph} &= (6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot \frac{(2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{(253 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})} \\ E_{ph} &= 7.83 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{15.61}$$

Den ersten Einbrüche im Elektronenstrom beobachtete man bei einer Beschleunigungsspannung von 4.9 V. Dies entspricht einer kinetischen Energie der Elektronen von

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2 = e \cdot U_e \\ E_{kin} &= 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 4.9\,\mathrm{V} \\ E_{kin} &= 7.85 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{15.62}$$

Wie man erkennt, stimmen beide Energiewerte überein. Das Experiment liefert den Beweis, dass Atome, bei inelastischen Stößen, Energien nur in bestimmten Energieportionen aufnehmen. Beim Quecksilberatom ist dies 4.9 eV. Der Vorgang kann folgendermaßen gedeutet werden:

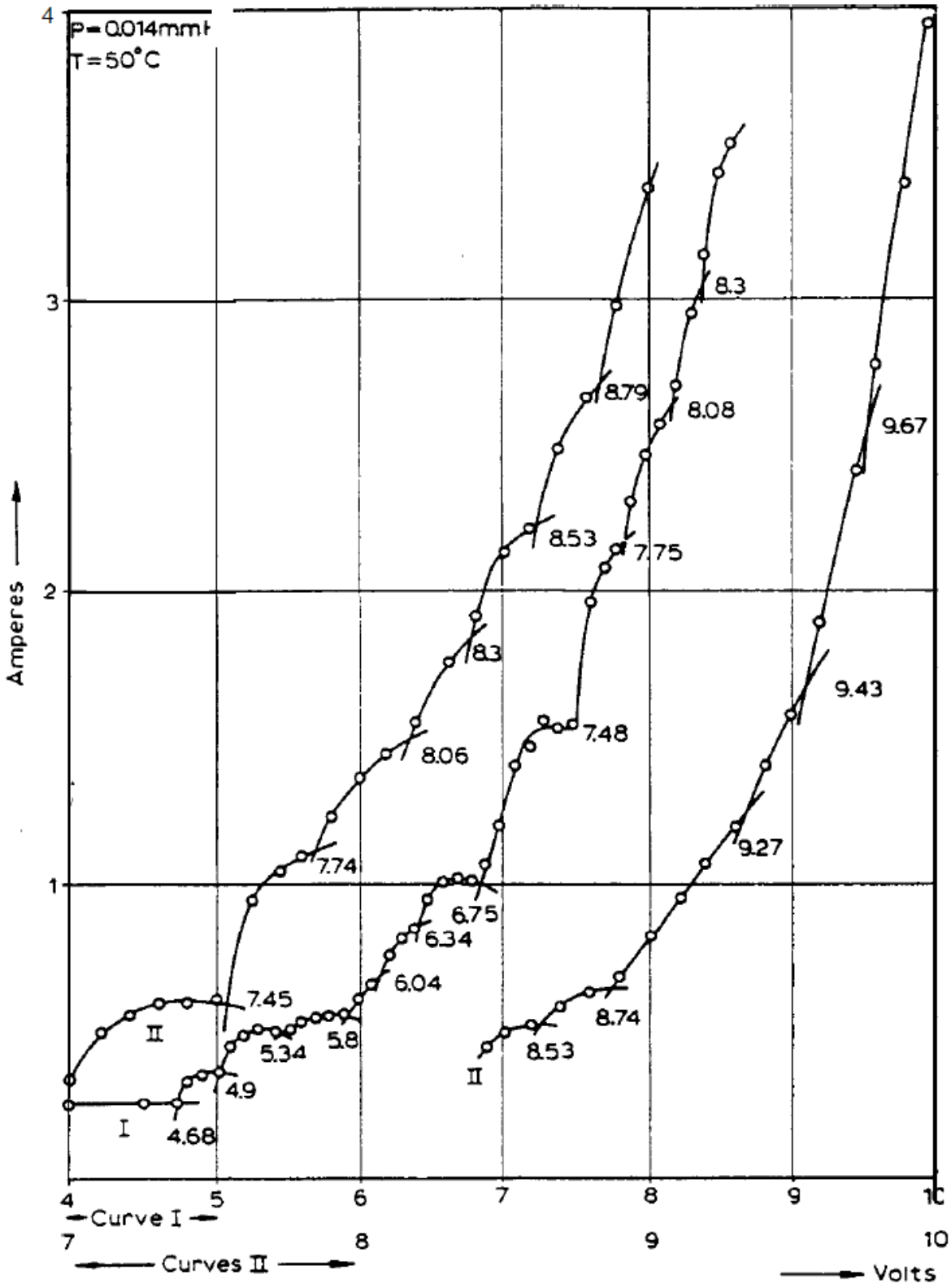


Abb. 15.119: Anregung von Quantenübergängen, sichtbar als Knicke im Spektrum, extrahiert aus den Strom-Spannungskurven an Quecksilber im Bereich bis zu Ionisationsschwelle. Bemerkenswert ist, dass man Übergänge identifizieren kann, die man mit Licht nicht anregen kann [**?**].

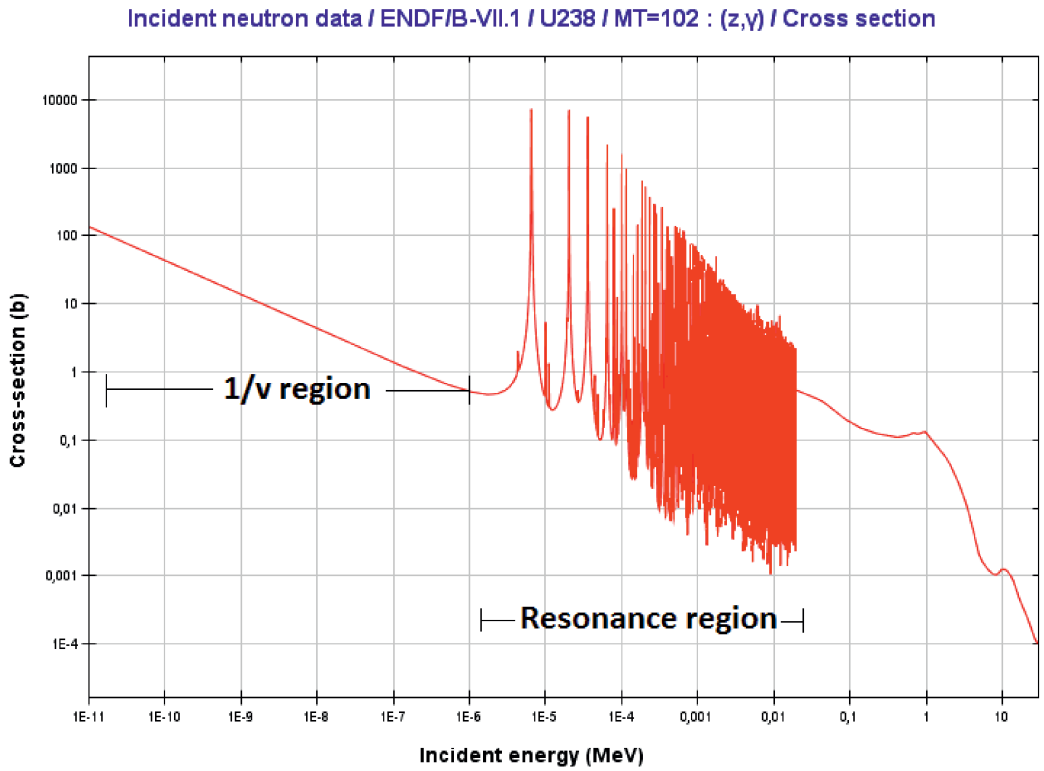


Abb. 15.120: Bei thermischen Neutronen nehmen die Absorptionsquerschnitte ab, wenn die Geschwindigkeit des Neutrons zunimmt ($1/v$-Bereich). Dann treten Resonanzen im Streuspektrum auf, die auf Kernanregungen hindeuten. Konzeptionell sind die Resonanzen bei der Wechselwirkung von Neutronen mit Kernen vergleichbar mit den Phänomenen, die man beim Franck-Hertz Versuch beobachtet.

- Erreichen die Teilchen eine kinetische Energie von 4.9 eV, geben die Elektronen ihre gesamte Energie in einem inelastischen Stoß an die Quecksilberatome ab. Aufgrund der Energieerhaltung ist das E_{kin} der Elektronen nach dem Stoß NULL. Das Teilchen ruht und wird im elektrischen Feld des Kondensator wieder beschleunigt.

- Die angeregten Quecksilberatome geben die gespeicherte Energie in Form von Licht wieder ab. Dabei ist die emittierte Wellenlänge charakteristisch für das Element, wie Experimente mit anderen Elementen wie beispielsweise Neon zeigen, siehe Abb. 15.118.

- Bei höher angelegten Spannungen zwischen Anode und Kathode werden die Elektronen wieder durch das elektrische Feld beschleunigt. Erreichen die Elektronen die notwendige kinetische Energie, können sie ihre Energie in einem zweiten inelastischen Stoß an die Quecksilberatome abgeben. Dieser Vorgang wiederholt sich und die Anzahl kann durch die Wahl der Beschleunigungsspannung eingestellt werden.

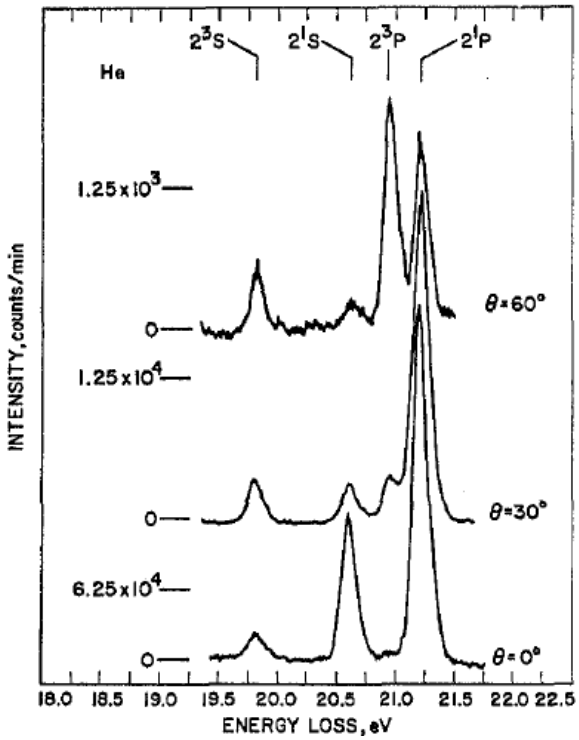


Abb. 15.121: Elektronenenergieverlustspektren von Helium bei unterschiedlichen Streuwinkeln. Der Elektronenstrahl hateine Kinetische Energie von 34 eV [**?**].

- Der durch den Beschleunigungsprozess verursachte räumliche Abstand zwischen den inelastischen Stößen führt zu bestimmten Bereichen, in denen die Emission beobachtet werden kann.

Erhöht man die Energieauflösung im Experiment, werden weitere Details sichtbar. Man beobachtet Signaturen, die man Anregungen in höhere elektronische Zustände des Quecksilberatoms zuordnen kann [**?**]. Abb. 15.119 zeigt das Ergebnis einer solchen Messung.

Das Experiment von Franck und Hertz zeigte erstmals, dass Energie durch Atome nicht kontinuierlich, sondern in diskreten Energieportionen aufgenommen wird. Wer tiefer in die Problematik des Franck-Hertz Versuchs einsteigen will, lese diesen Artikel [**?**], der in einer deutschen Fassung im Physik Journal abgedruckt wurde [**?**]. [90] Welche weitere Methode gibt es, um die Lage der Energieniveaus in Atomen zu bestimmen? Man nutzt inelastische Stöße. Ein Strahl monoenergetischer Elektronen wird auf ein atomares Gas geleitet. Die gestreuten Elektronen werden in Bezug auf ihre kinetische Energie unter-

[90] Die Vermessung der elektronischen Struktur durch Stöße mit Elektronen hat einige Male zu falschen Interpretationen geführt. Ein Beispiel ist die Untersuchung des Elements Helium durch James Franck [**?**]. Franck und Knipping beobachteten einen starken Sprung des Elektrometerwerts bei etwa 20.5 V und interpretierten ihr Ergebnis damit, dass es sich bei dem Signal um Ionen handelt, die durch Stöße mit den Elektronen erzeugt werden. Damit glaubten sie das Ionisationspotenzial bestimmt zu haben. Tatsächlich hatten sie nur das Anregungspotential des niedrigsten angeregten Zustands des Heliums gemessen. Was passiert tatsächlich? Beim Übergang in den Grundzustand emittiert das Heliumatom ultraviolettes Licht, was zur Emission von Photoelektronen aus der Sammelelektrode führt. Im Experiment kann man zwischen diesen Photoelektronen und ankommenden Ionen nicht unterscheiden [**?**].

sucht. Wurde ein atomares Niveau im Stoß angeregt, kommt es zu einem Energieverlust. Analysiert man die Bahn der Elektronen in einem magnetischen Feld ergeben sich bei charakteristischen Radien Signale. Die Methode nennt sich Elektronen-Energieverlust-Spektroskopie.[91] Abb. 15.121 zeigt Ergebnisse einer Messung an Helium [**?**].

Anwendungen^{4LP}

Abschließend sei bemerkt, dass -konzeptionell betrachtet- der Franck-Hertz Effekt auch bei Stößen langsamer Neutronen mit Kernen auftritt. Der Wirkungsquerschnitt für die Wechselwirkung nimmt dabei zunächst umgekehrt zur Geschwindigkeit der Neutronen ab, da die Verweilzeit des Neutrons in Kernnähe kürzer wird. Bei bestimmten kinetischen Energien regt das Neutron Kernresonanzen an, die dazu führen, dass ein Compound-Kern[92] gebildet wird, siehe Abb. 15.120.

[91] EELS: electron energy loss spectroscopy

[92] *Lexikon:* Ein **Compound-Kern** ist ein instabiler, kurzlebiger Atomkern, der bei Vereinigung des Projektilteilchens mit dem getroffenen Kern entsteht.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Können Sie den experimentellen Aufbau des Franck-Hertz Versuchs skizzieren?
2. Die glühende Kathode emittiert Elektronen. Wie ändert sich die Emissionsrate, wenn man keine Abzugsspannung anlegt?
3. Wie kommen die Stromeinbrüche im Franck-Hertz Experiment zustande?
4. Welche Bedeutung hat es, dass man bei Franck-Hertz Versuch gleichzeitig auch Licht beobachtet?
5. Handelt es sich der Lichtemission beim Franck-Hertz Versuch um ein kontinuierliches Spektrum?
6. Stellt man beim Franck-Hertz Versuch fest, dass es auch Emission aus höheren angeregten atomaren Energiezuständen gibt?
7. Beobachtet man die Energiesprünge im Franck-Hertz Versuch nur beim Element Quecksilber?

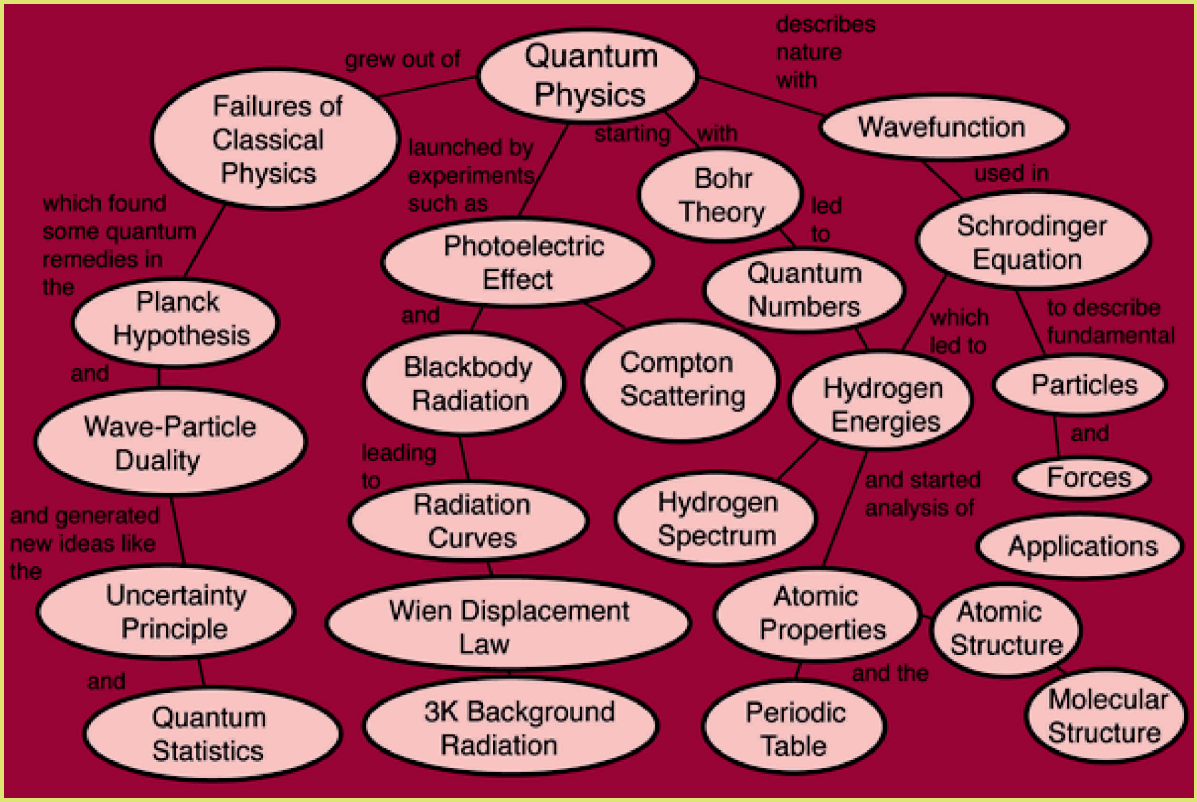


Abb. 15.122: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

- Kathodenstrahlen und die Experimente von Crookes
- Spezifische Ladung des Elektrons
- Öltröpfchenexperiment von Millikan
- Brownsche Molekularbewegung
- Periodensystem der Elemente
- Rutherfords Streuexperimente
- Rutherfords Atommodell
- Linienspektren der Elemente
- Rydberg-Formel (Gl. 15.54)

$$\frac{1}{\lambda_{Rydberg}} = R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

- Lyman-, Balmer- und Paschen-Serie und Seriengrenze des Wasserstoffs
- Fraunhoferlinien
- Experimente von Kirchhoff und Bunsen
- Franck-Hertz Versuch

Resümee Quantenwelt

Mit dem Franck-Hertz Experiment ist die Liste der Meilenstein-Experimente, mit denen wir den Abschnitt *Quantenwelt* begonnen haben (siehe entsprechende Abbildung dort), abgearbeitet. So banal es klingt, Auslöser dieser Entwicklung war die Einführung einer Konstanten h in die Strahlungsformel für den Schwarzen Strahler. Damit wurde eine Revolution in der Physik ausgelöst, die die naturwissenschaftliche Forschung und die technische Entwicklung maßgeblich geprägt haben.[93] Lassen wir die zentralen Experimente nochmal Revue passieren (siehe Kapitel *Quantenwelt*).

- Die Messung der Hohlraumstrahlung eines Schwarzen Körpers.
- Das Experiment von Davisson und Germer zur Streuung von Elektronenwellen an einer Nickel-Oberfläche.
- Der photoelektrische Effekt, der bei der Wechselwirkung von Licht mit Materie auftritt.
- Der Compton-Effekt zur Energieverschiebung des gestreuten Photons beim Stoß mit einem Elektron.
- Der Franck-Hertz Versuch, der den Nachweis der Quantisierung in Atomen lieferte.

Zentral war das Verständnis des Konzepts Welle-Teilchen Dualismus, d.h., dass sowohl Licht als auch Teilchen in Messungen Eigenschaften dieser Konzepte aufwiesen. Weiter stellte sich heraus, dass die Natur Sprünge macht. Damit ist die Grundlage gelegt, sich mit der Anwendung der Quantenphysik auf Vielteilchensysteme zu beschäftigen, also insbesondere über Atome und Kerne. Auch hier haben wir schon wichtige Erkenntnisse gesammelt:

[93] Was, wenn h einen anderen Wert hätte? Nun, die Sonne würde beispielsweise bei einer anderen Wellenlänge ihr Maximum haben. Vielleicht im Ultravioletten. Dann könnten wir sie mit unseren heutigen Augen noch nicht mal sehen. Klar, dass dann die Evolution, denken Sie an die Photosynthese, einen anderen Verlauf genommen hätte.



Abb. 15.123: Naturkonstante h. Briefmarke der DDR zum Hundersten Geburtstag von Max Planck (1958).

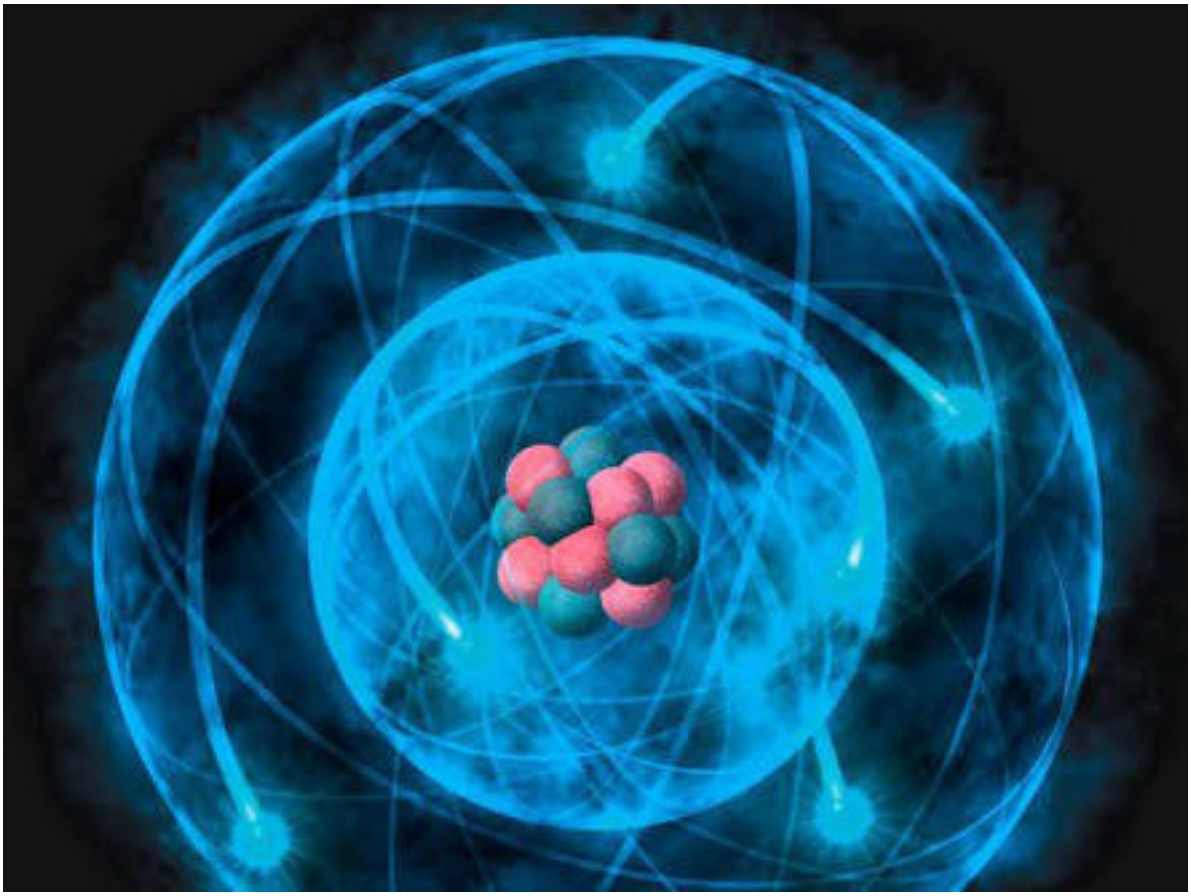
- Das Streuexperiment von Rutherford mit α-Teilchen an Goldfolien und die Erkenntnis, dass die positive Ladung der Atome auf einem kleinen Raumgebiet konzentriert ist.
- Die Beschreibung von Materiewellen durch die Schrödingergleichung.
- Die Erkenntnis, dass die Quantenphysik dem Messprozess Grenzen setzt, ausgedrückt durch die Heisenbergsche Unschärferelation.
- Das quantenphysikalische Phänomen des Tunnels, dass es erlaubt, im Prinzip beliebige Potenzialgebirge ohne Verluste zu durchqueren.
- Die Analyse der Absorption und Emission von Strahlung durch einzelne Atome.

Was sind noch für Erkenntnisse zu erwarten? Eine Aufgabe wird sein, die komplexen Bedingungen, die in Wasserstoff und den anderen Elementen herrschen, zu verstehen. Eine zentrale Rolle kommen dabei vier Quantenzahlen (Hauptquantenzahl n, Drehimpulsquantenzahl ℓ, magnetische Drehimpulsquantenzahl m_ℓ, und Spin s), dem Ausschließungsprinzip von Pauli und den Hundschen Regeln zu. Damit wird es möglich, die Struktur des Periodensystems aufzulösen und daraus die physikalischen und chemischen Eigenschaften der Elemente, aber auch die Struktur des Atomkerns zu verstehen. Und alles nur wegen einer unscheinbaren Naturkonstanten mit der Abkürzung h, siehe Abb. 15.123.

Wir dürfen nicht die Atome in die Fesseln unserer Vorurteile schlagen wollen (zu denen nach meiner Meinung auch die Existenz von Elektronenbahnen im Sinne der gewöhnlichen Kinematik gehört), sondern wir müssen umgekehrt unsere Begriffe der Erfahrung anpassen.)

Wolfgang Pauli an Niels Bohr, 12.12.1924

C Quantenwelt der Atome und Kerne



We have always had a great deal of difficulty understanding the world view that quantum mechanics represents. At least I do, because I'm an old enough man that I havent' got to the point that this stuff is obvious to me. Okay, I still get nervous with it... You know how it always is, every new idea, it takes a generation or two until it becomes obvious that there's no real problem. I cannot define the real problem, therefore I suspect there's no real problem, but I'm not sure there's no real problem [**?**].

Richard Feynman

Wenn Licht der Sonne auf eine Oberfläche fällt, dann wird es oft ohne Frequenzänderung re-emittiert oder es wird absorbiert und in Wärme umgewandelt. Manchmal erfolgt die Re-emission in Form von Licht geringerer Frequenz. Dieses Phänomen nennt man



Abb. 15.1: Bibelfenster im Kölner Dom, entstanden um 1260 [**?**].



Abb. 15.2: Das Hauptgebäude der National Autonomous University of Mexico. Die Ostwand der Fassade stellt die zeitgenössische Welt dar, mit einem Atom im Zentrum [**?**].

Fluoreszenz. Die Emission sekundärer Strahlung verrät uns etwa über die Materie, wirft aber auch Fragen auf. Beispielsweise

- Warum ist der Himmel blau?
- Warum erscheint Papier weiß?
- Warum ist Wasser transparent?
- Warum erscheinen Dinge farbig?
- Warum glänzen Metalle?

In July 1925, a 23-year-old German physicist submitted a paper to the journal *Zeitschrift für Physik* entitled Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen [**?**]. The publication of Werner Heisenberg's article was arguably the moment that ushered in the modern age of quantum mechanics, thus setting in train an astonishing revolution in our basic understanding of physics that has repercussions to this day. The United Nations has proclaimed 2025 to be the International Year of Quantum Science and Technology, in no small measure because of the events that began to

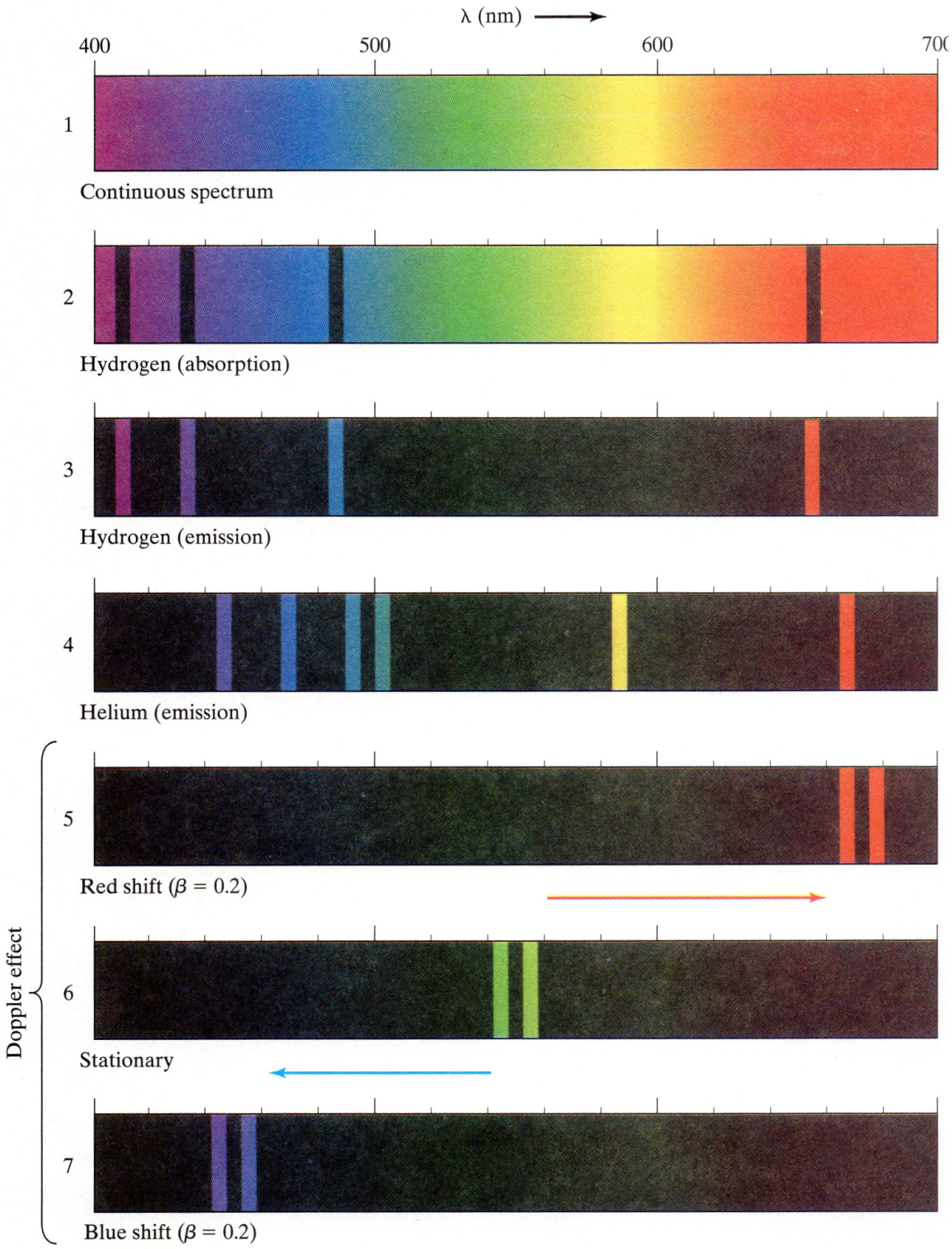
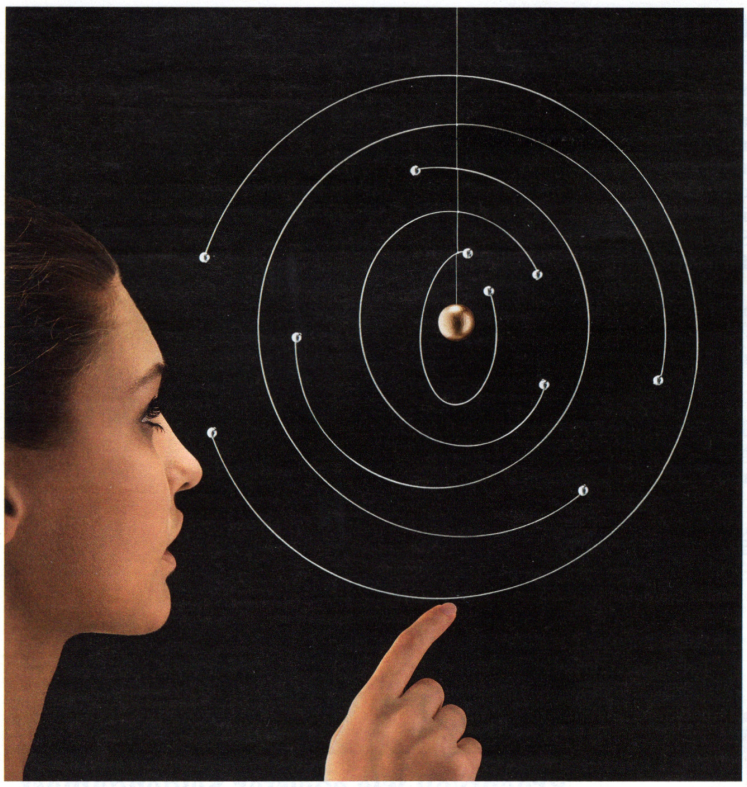


Abb. 15.3: Typische optische Spektren, die man bei der Analyse der Materie beobachtet. (1) Schwarzer Strahler; (2)-(3) Wasserstoff; (4) Helium; (5)-(7) Relativistischer Dopplereffekt ($\beta = v/c$)



Seit 62 Jahren fertigt der dänische Familienbetrieb Flensted extravagante Mobiles.
Sogar mit dem Guggenheim Museum, New York, und dem New Yorker Museum of Modern Art arbeiten die Mobile-Spezialisten zusammen.

Ikone der Physik: das Bohrsche Atommodell als kunstvolles Designer Mobile. Jedes ein Unikat.

Kreiert zum 100. Jubiläum. Vom dänischen Mobile-Ole Flensted mit dem Niels Bohr Institut, Kopenhagen.

1913 fasste der dänische Physiker Niels Bohr die damaligen wissenschaftlichen Erkenntnisse zu einem revolutionären Atommodell zusammen: ein grundlegender Beitrag zur theoretischen Physik. Dem Forscher zu Ehren wurde das Modell Bohrsches Atommodell genannt. 1922 erhielt er den Nobelpreis für Physik.

Ein Wunder der Natur – schön veranschaulicht.

Im Zentrum steht der Atomkern (2 cm Ø) aus goldfarben bemaltem Holz. Wie dieser werden fünf offene, millimeterdünne Edelstahlreifen mit je zwei Elektronen-Kugeln aus Edelstahl (0,6 cm Ø) von unsichtbar feinen Baumwoll-Polyester-Fäden gehalten. Die Bahnen drehen sich permanent um den Kern – ein Anblick von meditativer Ruhe und anrührend zarter Schönheit. Bei jedem Luftzug wird das Spiel der lichten Kreise freigesetzt.

Einzeln von Hand gefertigt und ausbalanciert.

Misst 27 x 27 cm. Wiegt 14,5 g. Inkl. 120 cm Nylonaufhängung. Made in Denmark.

- **Mobile Niels Bohr Atommodell**
  Nr. 220-833-50
  € 49,95

Abb. 15.4: Im Quantenkaufrausch: Niels Bohr als Mobile.

unfold [**?**].

Abb. 15.1 zeigt das älteste Fenster im Kölner Dom. Die mittelalterlichen Handwerkern nutzen ihre Erfahrung, um brillante Lichteffekts zu erzeugen. Das bunte Glas erhält seine Farbe durch die Zugabe von Metalloxiden in die Glasschmelze oder durch die Zugabe von Pigmenten auf die die Glasoberfläche. Mikroskopisch betrachtet reagieren die Atome der Materialien auf Licht und anfangen zu schwingen. Die Auslenkungen sind extrem klein, erzeugen aber alle diese optischen Phänomene, die wir in unserer Umwelt wahrnehmen. Es lohnt sich, mal genauer hinzusehen.

The fundamental idea can be stated in the following way: The complicated numbers of electrons in closed subgroups are reduced to the simple number one if the division of the groups by giving the values of the four quantum numbers of an electron is carried so far that every degeneracy is removed. An entirely non-degenerate energy level is already closed, if it is occupied by a single electron; states in contradiction with this postulate have to be excluded [**?**].

Zeitspanne	Energiebereich	Materie	Zusammensetzung
1910-1930	keV	Atoms	Elekronen und Nukleonen
1930-1950	MeV	Kerne	Protonen und Neutronen
1950-1980	GeV	Hadronen	Quarks
1980-heute	TeV	Quarks und Leptonen	?

Tab. 15.1: Grenzen der Physik.

Wolfgang Pauli (1946)

Alle physikalischen Systeme können durch Größe und die typische Zeitspanne, auf der die Prozesse in diesen System ablaufen, charakterisiert werden. Atome (Abb. 15.2) haben Größen von wenigen Å und elektronische Übergänge finden innerhalb von Nanosekunden statt. In Kernen benötigt ein Nukleon etwa 10^{-23} s, um den Kern (10^{-15}m) zu durchqueren. Diese Rahmenbedingungen führen zu typischen Energieskalen, die die Stärke der vorherrschenden Wechselwirkung wiedergeben (Tab. 15.1). Die Jahre zwischen 1910 und 1930 werden allgemein als das Goldene Zeitalter der Atomphysik bezeichnet, da in diesem Zeitabschnitt, wichtige Erkenntnisse über die Struktur und Eigenschaften des Atoms gewonnen wurden . Die Spektren der Atome und Kernen, wie in Abb. 15.3 demonstriert, haben dabei eine wichtige Rolle gespielt. (1) Das kontinuierliche Spektrum eines weiß-glühenden Schwarzen Strahlers umfasst das gesamte sichtbare Spektrum von rot bis ultraviolett. (2) Wasserstoff, mit Weißlicht beleuchtet, liefert Absorptionslinien. Wasserstoff absorbiert in optischen Wellenlängenbereich (400-700 nm) bei vier Wellenlängen. (3) Erhitzt man Wasserstoff beobachtet man Linienstrahlung aus den Atomen. Hier beobachtet man Emission bei vier charakteristischen Wellenlängen. (4) Betrachtet man andere Elemente, wie hier Helium, ergibt sich eine andere spektrale Signatur. (5) bis (7) zeigt die Aussendung eines Dubletts im grünen Spektralbereich (6) und ihre relativistische Dopplerverschiebung bei Entfernung (5) und Annäherung (7) an den Beobachter. Es kommt zu einer Verschiebung der Spektrallinien ins ultraviolette oder ins Infrarote.

Die relative Masse vieler Elemente war schon Mitte des 19. Jahrhunderts bekannt. Durch Ordnen mit ansteigender Masse und der Zuordnung gemeinsamer chemischer Eigenschaften gelangte Mendeleev im Jahr 1872 zum Periodensystem der Elemente. Danach hat Wasserstoff die Nummer EINS, Helium die Nummer ZWEI und Lithium die Nummer DREI und so weiter. Aber welche physikalische-chemische Bedeutung verbirgt sich dahinter? Überraschend stellte man fest, dass man Wasserstoff nur einfach aufladen konnte (H^+), Helium dagegen zweifach (He^+, He^{2+}). He^{3+} wird wiederum nicht beobachtet. Durch die Experimente von Thomson und Millikan wurde klar, dass beispielsweise Wasserstoff nur EIN und Helium ZWEI Elektronen hat. Weiter ergab sich, dass Wasserstoff EIN und Helium ZWEI Protonen hat. Die Ordnungszahl Z sagt aus. wie viele Protonen ein Element hat. Aufgrund gleicher Anzahl an Elektronen und Protonen ist das Atom elektrisch neutral. Allerdings stimmt die Ordnungszahl nicht mit der Masse des Elements überein, was an den Neutronen, den neutralen Bausteinen des Kerns liegt. Je nach Anzahl an



Abb. 15.5: Photo eines Fossils in einer Gesteinsschicht. Aufgrund der Kenntnisse über die Gesteinsschichten kann das Alter des Fundes grob bestimmt werden. Zu genaueren Einordnung wird oft die Radiokarbon- oder die Kalium-Argon-Methode eingesetzt, die Phänomene der Kernphysik ausnutzt.

Neutronen, kann ein Kern also unterschiedlich wiegen, ohne dass sich seine chemischen Eigenschaften merklich ändern. Man muss also davon ausgehen, dass Atome eine bestimmte Struktur haben.

Wie gelangte man an genauere Informationen?

Zu damaliger Zeit stellte es eine erhebliche Herausforderung dar, ein konsistentes Modell des Atoms und der Materie zu erarbeiten. Hinweise auf die Struktur der Materie waren sehr indirekt, die notwendigen Instrumente noch nicht entwickelt, Beobachtungen wurden mit dem Auge gemacht und Rechnungen noch per Hand durchgeführt. Ansätze, wie das Rutherford-Modell waren geeignet, Teile des Puzzles zu erklären, scheiterten aber bei trivialen Fragestellungen, wie Warum ist ein Atom stabil? oder Warum emittiert ein Atom diskrete Linien? An dieser Stelle tritt Niels Bohr ins Spielfeld und revolutioniert die damalige Vorstellung über Atome, siehe Abb. 15.4, indem er das Rutherfordsche Atommodell mit der Quantisierung verheiratete. Nebenbei setzte er dabei einige gestandene Grundregeln der klassischen Physik außer Kraft. Aber auch das Bohrsche Atommodell hatte Macken, denn es war nicht in der Lage die Eigenschaften anderer Elemente als Wasserstoff und wasserstoffähnlicher Atome zu beschreiben. Dazu bedurfte es den Arbeiten von Schrödinger und Heisenberg (Kapitel *Wellenfunktion*), die mit Hilfe von u.a. Wolfgang Pauli[1] die Struktur der Atome des Periodensystems (Kapitel *Beyond Bohr*)

[1] The Nobel Prize in Physics 1945 was awarded to Wolfgang Pauli *for the discovery of the Exclusion*

und auch den Kernaufbau (Kapitel *Kerne* und *Kernmodelle*) klärten. Es steht also an, diese bahnbrechende Entwicklung in der Physik und Chemie nachzuvollziehen und auch Auswirkungen auf unser tägliches Leben, wie beispielsweise im Bereich der *life sciences* kennenzulernen. Abb. 15.5 zeigt eine Anwendung, bei der kernphysikalische Methoden zur Altersdatierung eingesetzt werden.

It is rare for a scientific idea or theory to fundamentally change our perspective on reality. One such revolutionary moment is being celebrated in 2025, which the United Nations has declared to be the International Year of Quantum Science and Technology. This marks the centenary of the advent of quantum mechanics, which began in a flurry of papers 100 years ago. Just as it would be impossible to make sense of modern biology without Charles Darwin's theory of evolution, our fundamental understanding of the physical world is now rooted in quantum principles. Modern physics is quantum physics [**?**].

Hinweise auf geeignete Literatur zur Quantenphysik im Allgemeinen findet am im Kapitel *Quantenwelt*. Was gibt es an Literatur speziell zum Themenkomplex Quantenwelt der Atome und Kerne? Empfehlenswerte Lehrbücher sind beispielsweise [**? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?**]

Every physical system can be characterized by its size and the length of time it takes for processes occurring within it to evolve. This is as true of the electrons circulating about the nucleus of an atom as it is of a chain of mountains rising up over the ages [**?**].

James C. Morrison

Principle, also called the Pauli Principle.

Gut zu wissen!

Nach der Durcharbeitung des Abschnitts Quantenwelt der Atome und Kerne sollten Sie in der Lage sein, folgende zentrale Begriffe zu erklären:

1. α-, β-, γ-Strahlung
2. α-, β-, γ-Zerfall
3. Absorption radioaktiver Strahlung
4. Absorptionskoeffizient für Ionisierende Strahlung
5. Aufbau- oder Pauliprinzip
6. Angeregter Zustand eines Atoms
7. Aktivierung durch Neutronen
8. Aktivität
9. Bremsstrahlung
10. Bohrscher Radius
11. Bohrsches Atommodell
12. Bragg-Gleichung
13. C14-Methode
14. Charakteristische Röntgenstrahlung
15. Dipol-Auswahlregel
16. Duane-Hunt Gestz
17. Drehimpuls-Quantenzahl
18. Eindringtiefe radioaktiver Strahlung
19. Feldemission
20. Geiger Nuttall Regel
21. Grundzustand eines Atoms
22. Halbwertsdicke für Ionisierende Strahlung
23. Halbwertszeit einer radioaktiver Substanz
24. Hauptquantenzahl

25. Ionisationsgrenze im Wasserstoffatom
26. Isotope
27. K-Einfang
28. Kollaps der Wellenfunktion
29. Konstrastmittel
30. Kopenhagener Interpretation
31. Lambert-Beer Gesetz
32. Laser
33. Lyman-, Balmer-, Paschen-Serie
34. Lyman-α Wald
35. Magnetsche Quantenzahl
36. Moseley-Gesetz
37. Massendefekt
38. Nachweis Ionisierender Strahlung
39. Neutron
40. Neutronenstern
41. Nuklid
42. Periodensystem der Elemente
43. Postulate des Bohrschen Atommodells
44. Radioaktives Zerfallsgesetz
45. Ritzsches Kombinationsprinzip
46. Röntgenröhre
47. Röntgen-Absorptionskante
48. Röntgenbeugung
49. Röntgen-Strahlung
50. Schichtdicke für Ionisierende Strahlung

51. Spin
52. Stern-Gerlach Experiment
53. Stimulierte Emission
54. Termschema
55. Tunneleffekt
56. Tunnelspektroskopie
57. Tunnelwahrscheinlichkeit
58. Wasserstoffähnliche Atome
59. Weißer Zwerg
60. Wilson-Kammer
61. Zeeman-Effekt
62. Zerfallskonstante einer radioaktiver Substanz
63. Zerfallsreihen
64. Zerfallszeit einer radioaktiver Substanz

16 Bohrsches Atommodell



Atome sind völlig unmöglich - vom klassischen Standpunkt aus betrachtet.

Richard Feynman

[1]Das Rutherfordsche Modell des Atoms erklärt eine Reihe von Phänomenen im Zusammenhang mit den Eigenschaften der Atome. Es scheint aber notwendig, die Erkenntnisse der Quantenphysik in die Beschreibung einfließen zu lassen. Speziell die Abgabe von Licht in Form spektral eng begrenzter Emissionslinien bei charakteristischen Energien deutet darauf hin, dass es einen Zusammenhang geben muss mit der Planckschen Hypothese, dass Licht in Energiepaketen der Größe $E{=}h\nu$ abgegeben wird. Die Frage stellt sich weiter, in wieweit die deBroglie Wellenlänge des Elektrons eine Rolle spielt. Im Widerspruch zu Erkenntnissen der Elektrodynamik postuliert Bohr [**?**] stationäre

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

Energiezustände der Elektronen. Elektronen in einem Atom ändern ihre Energie nicht kontinuierlich, sondern nur durch Zu- oder Abgabe quantisierter Energiemengen. Dabei springen die Elektronen zwischen festgelegten Bahnen. Mit diesen einschneidenden Annahmen gelingt es Bohr die Hauptmerkmale des Spektrums von Wasserstoff zu erklären und die Rydberg-Formel herzuleiten. Damit wurde die Verbindung geschaffen zwischen dem Rutherfordschen Atommodell und der durch Planck eingeführten Naturkonstanten h, die sich in der Beschreibung der Eigenschaften ALLER Quantensysteme wiederfindet. Diese Arbeiten haben die Entwicklung der Quantenphysik maßgeblich beeinflusst. Abb. 16.1 illustriert die Historie. Es sei an dieser Stelle am Beispiel der Nobelpreise angemerkt, dass unsere heutige Vorstellung über die Natur der Atome erst 1926 mit der Vergabe des Physik Nobelpreises an Jean Baptiste Perrin[2] für seine Forschung zum Thema *discontinous structure of matter* allgemein anerkannt wurde.

Auf welchen Vorarbeiten fußt das Bohrsche Atommodell?

- Planck zeigte, dass quantisierte Energieniveaus in atomaren Oszillatoren notwendig sind, um das Spektrum Schwarzer Strahler zu erklären.
- Rutherford fand, dass sich im Kern des Atoms die positive Ladung konzentriert.
- Balmer erkannte, dass sich die emittierten Wellenlängen des Wasserstoffatoms durch Differenzen von ganzen Zahlen ergeben.

Welche Erkenntnisse ergeben sich aus dem Bohrschen Modell?

- Das Bohrsche Atommodell liefert eine Erklärung für die Stabilität der Atome.
- Emission und Absorption werden als quantisierte Änderungen in der Energie der Elektronen erklärt.
- Der Drehimpuls ist quantisiert.
- Das Bohrsche Modell erklärt die Resultate des Franck-Hertz Versuchs.
- Die Spektren von Wasserstoff und wasserstoffähnlichen Ionen (He^{+}, Li^{2+}, Be^{3+},...) lassen sich berechnen.
- Der Bahnradius des Elektrons im Wasserstoffatom stimmt grob mit Resultaten aus gaskinetischen Messungen überein.

[2] The Nobel Prize in Physics 1926 was awarded to Jean Baptiste Perrin *for his work on the discontinuous structure of matter, and especially for his discovery of sedimentation equilibrium.*
During the 1880s atoms and molecules became important scientific concepts, but whether or not they actually had a physical existence was still a matter of dispute. Jean Perrin maintained that if molecules were real, particles blended into a liquid should not all sink to the bottom but should distribute themselves throughout the liquid. In 1908 he could substantiate this through experimentation. He also substantiated Einstein's theory that Brownian motion - the random movement of small particles in a liquid - was due to collisions between the particles and molecules in the liquid.

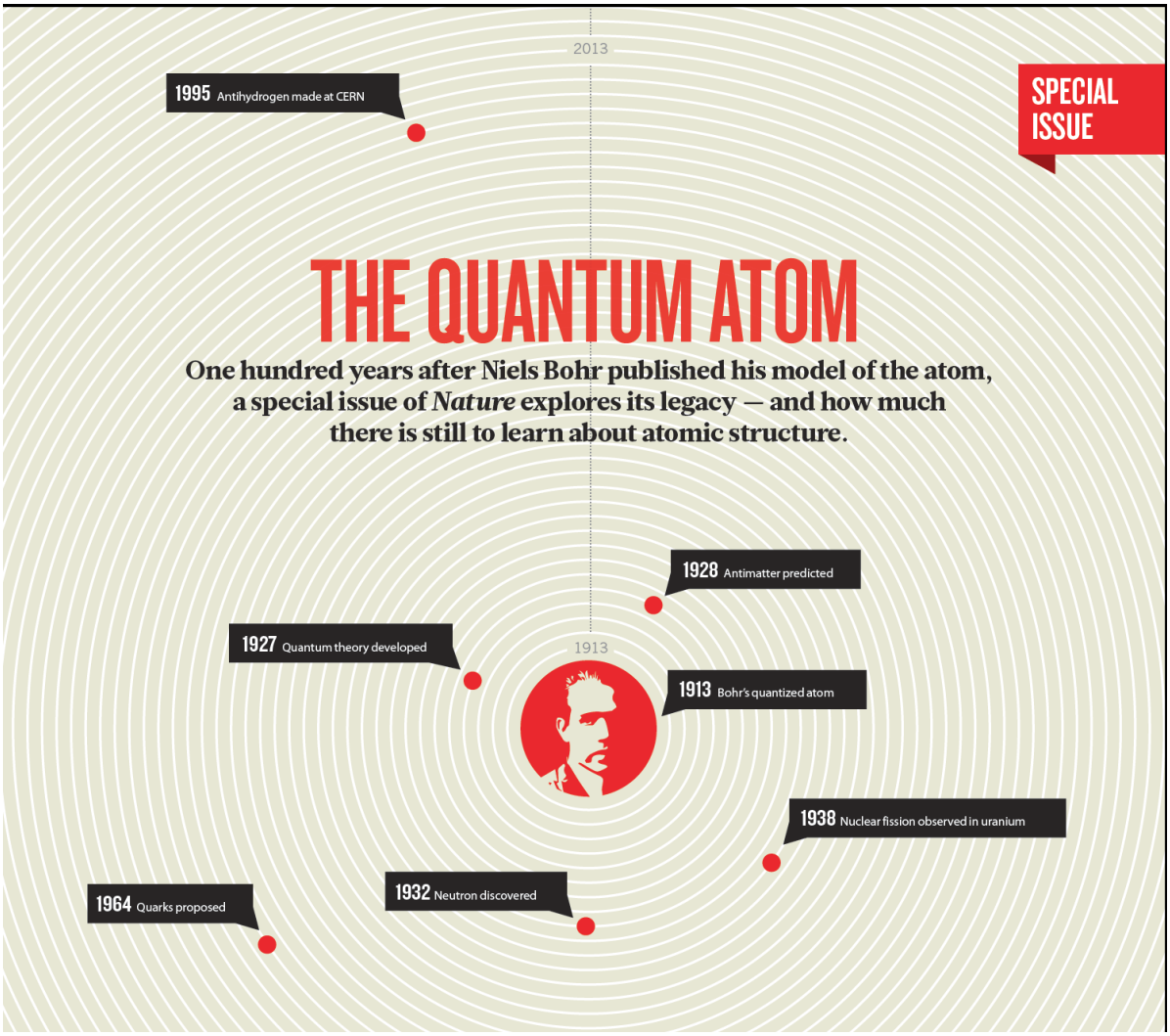
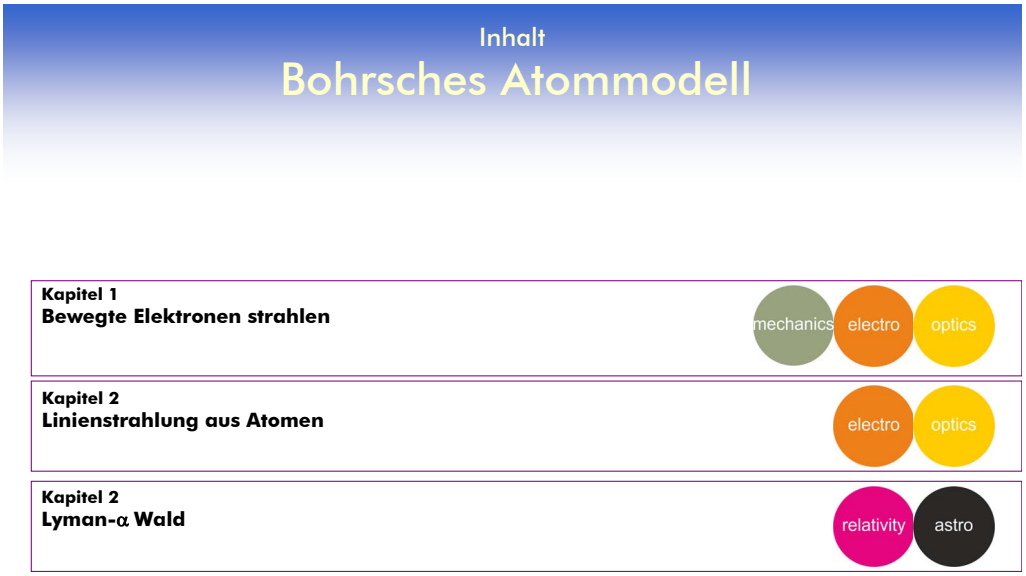


Abb. 16.1: July 1913 saw Danish physicist Niels Bohr publish the first of three papers setting out a radical new view of the nuclear atom. His idea - a positively charged nucleus ringed by electrons in orbits of discrete energies - explained the frequencies of light emitted by hydrogen as electrons made leaps between orbits. Quantum rules determined the electrons' energies, preventing the instabilities that had plagued previous mechanical models of atoms. One hundred years after Niels Bohr published his model of the atom, one has to explore its legacy - and how much there is still to learn about atomic structure [**?**].


Inhalt
Bohrsches Atommodell
Kapitel 1
Bewegte Elektronen strahlen
mechanics
electro
optics
Kapitel 2
Linienstrahlung aus Atomen
electro
optics
Kapitel 2
Lyman-α Wald
relativity
astro

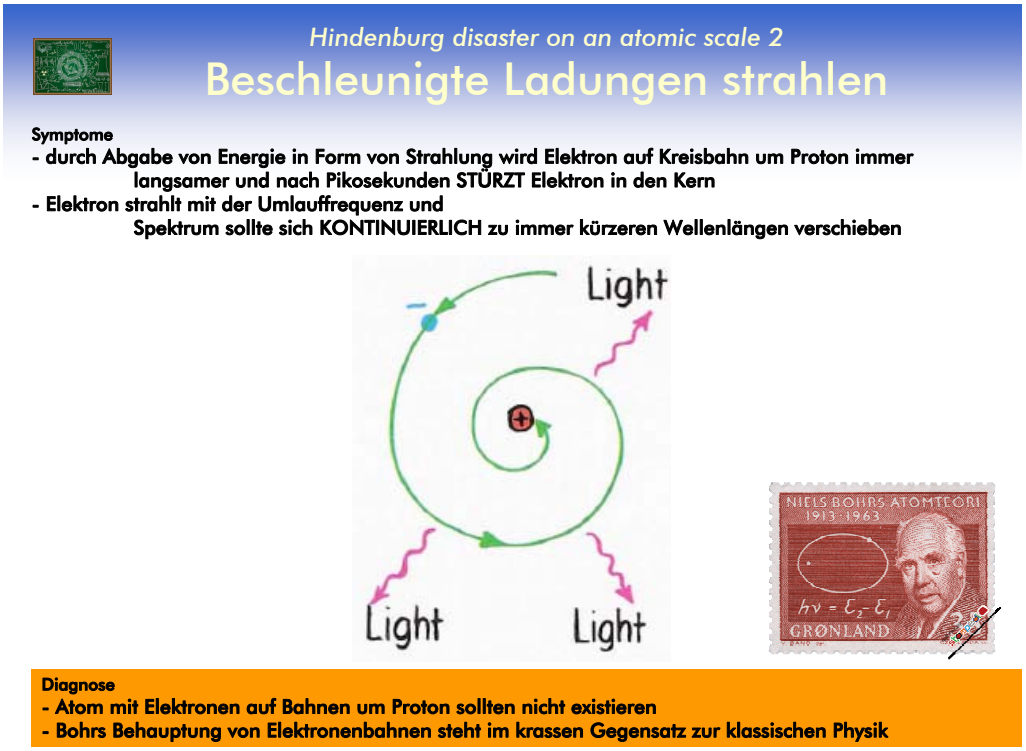
16.1 Bewegte Elektronen strahlen



The spectrum of the hydrogen atom has proved to be the Rosetta stone of modern physics: once this pattern of lines had been deciphered much else could be understood.

Theodor W. Hänsch, Arthur L. Schawlow and George W. Series [**?**]

Nach dem Earnshaw Theorem gibt es keine statische Anordnung von Elektronen und Protonen, die über einen längeren Zeitraum stabil ist [**?**]. Möglich ist dagegen einen dynamische Anordnung. Ein Beispiel für ein frühes dynamisches Atomodell ist das Saturnmodell von Nagaoka (siehe Kapitel *Der Weg zum Atom*). Das führt zu Problemen! In der klassischen Elektrodynamik emittiert eine Ladung elektromagnetische Strahlung, wenn sie beschleunigt wird. Dieses Phänomen wird in einem Synchrotron (siehe Kapitel *Zerfall des Myons*) genutzt, um brillante Lichtquellen zu realisieren. Dieser Energieverlust sollte für jede beschleunigte Ladung gelten, speziell für Elektronen, die sich nach den Vorhersagen des Rutherfordmodells auf Planetenbahnen um den Atomkern bewegen.



Niemand weiß, wie unser Wissen über das Atom ohne ihn wäre. Bohr ist persönlich einer der liebenswürdigen Kollegen, die ich kennengelernt habe. Er äußert seine Meinung wie ein ständig tastender und nie wie einer, der sich im Besitz der Wahrheit glaubt.

Albert Einstein

Elektronen in einer Radioantenne geben Energie in Form elektromagnetischer Dipolstrahlung ab, siehe Abb. 16.2. Um die Abstrahlung aufrechtzuerhalten, muss dem schwingenden Dipol Energie zugeführt werden. Durch die Bewegung des Elektrons um den

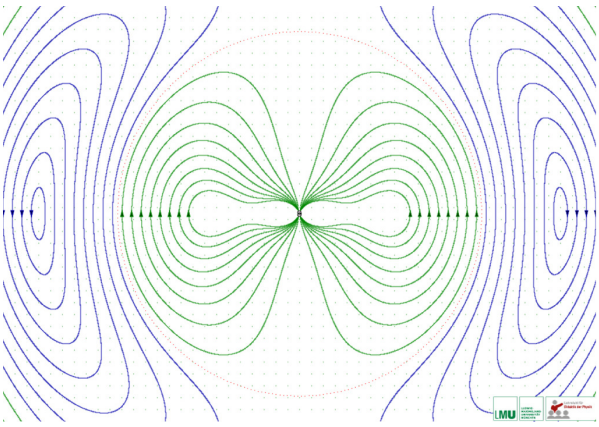


Abb. 16.2: Schnappschuss der elektrischen Feldlinien eines Hertzschen Dipols [?]

Atomkern hat das Elektron eine bestimmte kinetische Energie. Dabei wird es beschleunigt, da es ständig seine Richtung ändert ($\vec{F} = m\vec{a}$). Die damit verursachte Abgabe von Energie in Form elektromagnetischer Strahlung sollte zu einem Energieverlust führen. Da das System abgeschlossen ist, muss die Energie vom System bereit gestellt werden, wobei nur die kinetische Energie aus der Bewegung des Elektrons in Frage kommt. Der Energieverlust führt dazu, dass die kinetische Energie und damit die Geschwindigkeit des Elektrons kontinuierlich abnimmt. Die Reduzierung der Bahngeschwindigkeit bringt das Elektron immer näher an den Atomkern heran. Tatsächlich würde es schon nach 50 ps in den Atomkern stürzen. Die später vorgestellten Bohrschen Postulate sagen stationäre Bahnen der Elektronen um den Atomkern voraus und stehen damit im Gegensatz zu den Überlegungen aus der Elektrodynamik.

Da die Bewegung des Elektrons um den Kern durch die Coulombwechselwirkung bestimmt ist, kann man die Newtonsche Bewegungsgleichung unter der Annahme diskreter Bahnradien lösen. Für die Bahngeschwindigkeit v_e ergibt sich, indem man das Kräftegleichgewicht aus Coulomb- und Zentripetalkraft auswertet:

$$F_e = \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} \tag{16.1}$$

$$F_R = \frac{m_e \cdot v_e^2}{r} \tag{16.2}$$

$$F_e = \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} = \frac{m_e \cdot v_e^2}{r_n} = F_R$$

$$v_e = \sqrt{\frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e \cdot r_n}} \tag{16.3}$$

Damit kann man Periode T_e und Frequenz ν_e=$1/T_e$ der Elektronenbahn berechnen:

$$T_e = \frac{2\,\pi \cdot r_e}{v_e}$$

$$T_e = \left(\sqrt{\frac{1}{16\,\pi^3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e \cdot r_e^2}}\right)^{-1} \tag{16.4}$$

(16.5)

Als Erhaltungsgrößen sind noch der Impuls p_e und der Drehimpuls L_e interessant:

$$p_e = m_e \cdot v_e$$

$$p_e = \sqrt{\frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_e}} \tag{16.6}$$

$$L_e = p_e \cdot r_e = \sqrt{\frac{m_e \cdot e^2 \cdot r_e}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}} \tag{16.7}$$

Wie man erkennt, kann man relevante Größen wie Geschwindigkeit, Umlaufzeit, Impuls und Drehimpuls berechnen. In der Vorstellung des Bohrschen Modells greifen wir zurück auf die Erkenntnis, dass Teilchen auch Welleneigenschaften aufweisen. Dies führte zum Konzept der deBroglie Wellen (siehe Kapitel *Materiewellen*). Speziell kann dem Elektron aufgrund seiner Geschwindigkeit eine bestimmte Wellenlänge zugeordnet werden. Wie aus der Optik bekannt, sollten es auch bei Materiewellen das Phänomen der konstruktiven und destruktiven Interferenz geben. Nehmen wir an, eine Elektron-Materiewelle bewegt sich auf einer Kreisbahn. Dann ergibt sich konstruktive Interferenz, wenn der Umfang der Kreisbahn ein Vielfaches der deBroglie-Wellenlänge ist (Abb. 16.3). In allen anderen Fällen kommt es zu destruktiver Interferenz, wie Abb.16.4 illustriert. Für das Bohrsche Modell bedeutet das, dass nur Elektronen, die die Bedingung konstruktiver Interferenz erfüllen, zu stabilen Elektronenbahnen führen.

Confining Standing Waves in Optical Corrals [?]: Near-field scanning optical microscopy images of solid wall, circular, and elliptical microscale corrals show standing wave patterns confined inside the structures with a wavelength close to that of the incident light, see Abb. 16.5. The patterns inside the corrals can be tuned by changing the size and material of the walls, the wavelength of incident light, and polarization direction for elliptical corrals... The experimental and theoretical results demonstrate that electromagnetic fields on a dielectric surface can be controlled in a predictable manner.

Quantisierung der atomaren Energieniveaus

Aus der deBroglie Beziehung:

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \frac{h}{m_e \cdot v_e} \\ v_e &= \frac{h}{m_e \cdot \lambda_e} \end{aligned} \tag{16.8}$$

ergibt sich unter der Bedingung, dass der Kreisumfang das n-fache einer deBroglie Wellenlänge ist:

$$\begin{aligned} 2\,\pi \cdot r_n &= n \cdot \lambda_e \\ \frac{1}{\lambda_e} &= \frac{1}{2\,\pi}\frac{n}{r_n} \end{aligned} \tag{16.9}$$

Die Zahl n nennt man in der Quantenphysik die Hauptquantenzahl. Wie wir sehen werden, bestimmt n die Energie eines Quantenzustands. Die zugehörige Geschwindigkeit der Elektronen auf ihren Kreisbahnen:[3]

$$\begin{aligned} v_e &= \frac{h}{2\,\pi}\frac{1}{m_e} \cdot \frac{n}{r_n} \\ v_e &= \frac{\hbar}{m_e} \cdot \frac{n}{r_n} \end{aligned} \tag{16.10}$$

[3] Reduziertes Plancksches Wirkungsquantum oder Dirac-Konstante: $\hbar = h/2\,\pi$

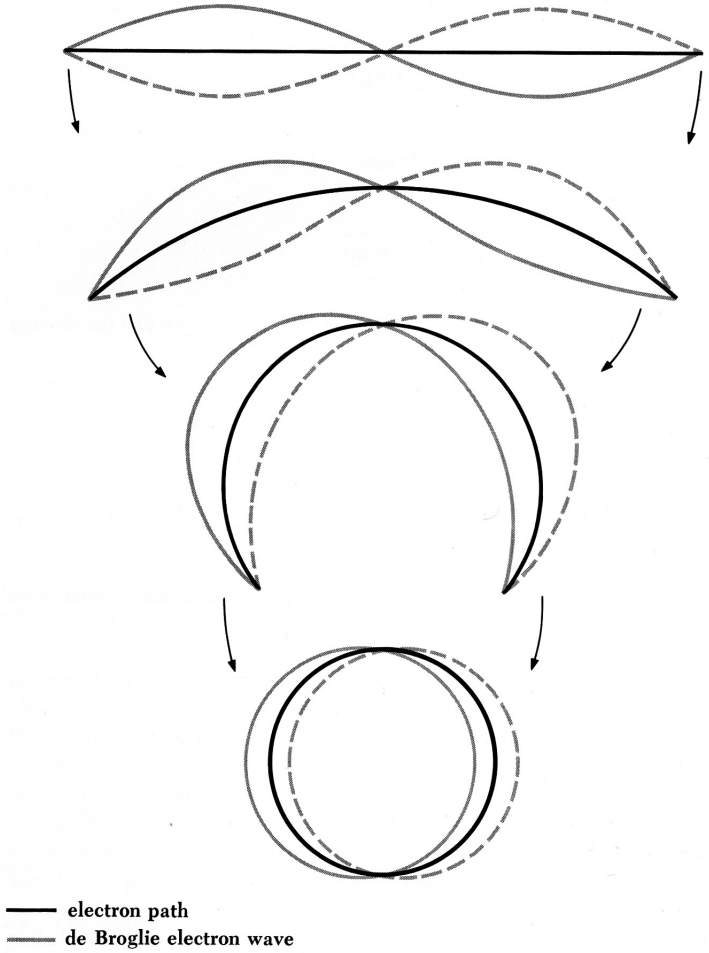


Abb. 16.3: Die Umlaufbahn des Elektrons im Wasserstoffatom entspricht einer stehenden deBroglie-Welle auf einem Kreis.

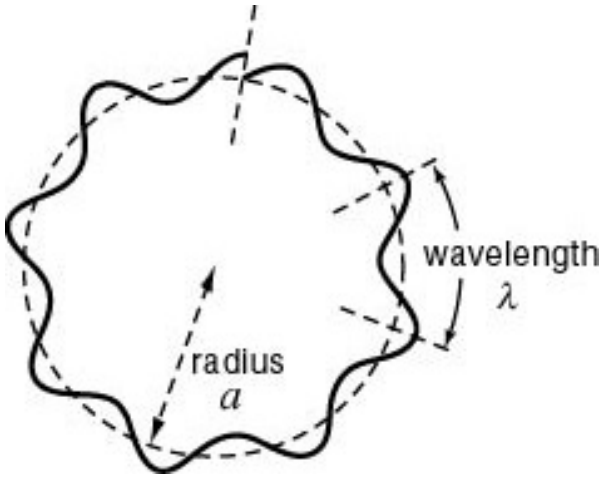


Abb. 16.4: Beispiel für eine deBroglie Elektronenwelle, bei der die Wellenlänge nicht an den Umfang des Kreises angepasst ist [**?**].

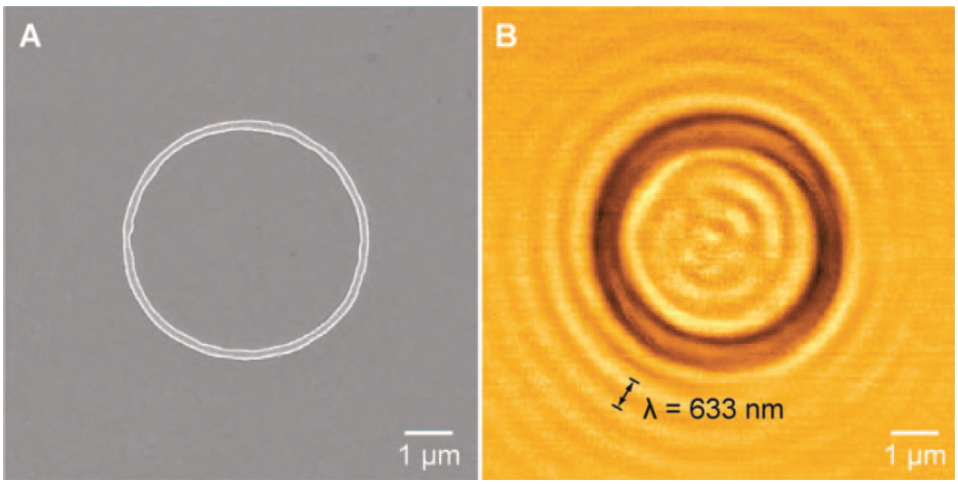


Abb. 16.5: Circular optical corrals. (A) SEM *scanning electron microscope* image of a 4.8 μm diameter Au corral. (B) SNOM *Near-field scanning optical microscope* image of (A) under circularly polarized 633 nm incident light [**?**].

Das Postulat, dass nur Elektronen mit bestimmten deBroglie Wellen um den Atomkern kreisen, drückt den Welle-Teilchen Dualismus aus. Die Annahme von Materiewellen führt zu einer Quantisierungsbedingung, weil nur bestimmte Bahnradien erlaubt sind. Der Ansatz ist somit ähnlich zu den Modellsystemen Harmonischer Oszillator und Potenzialtopf aus der Kapitel *Wellenfunktion*. Auch hier werden die Teilchen auf ein mikroskopisches Raumgebiet eingesperrt. In diesem Fall erfolgt die Eingrenzung durch das Coulombpotenzial. Abb. 16.6 zeigt Beispiele für stehende Wellen auf einem Kreis. Die Hauptquantenzahl n kann dabei ganzzahlige Werte n=1, 2, 3,... annehmen. Ein Wert $n = 0$ ist unphysikalisch, da bei v_e=0.0 m/s die deBroglie-Wellenlänge einen unrealistischen Wert (λ_{dB}=∞) annimmt. Das Elektron wäre damit nicht mehr lokalisierbar, beziehungsweise über das gesamte Universum verschmiert. Ein weitere Größe, die man berücksichtigen muss, ist der Drehimpuls $\vec{L}$. Wie im Kapitel *Heisenbergsche Unschärferelation* besprochen, schätzen wir die Unschärfe von L und Drehwinkel φ ab. Da wir nur an der Größenordnung interessiert sind, verwenden wir als Limit nicht $\hbar/2$ sondern schlicht h:

$$\Delta L \cdot \Delta\varphi \geq h \tag{16.11}$$

In einer Messung ergibt sich für die Bestimmung von φ ein Fehler von höchstens 2π. Damit erhält man für die minimale Unschärfe in L:

$$\begin{aligned} \Delta L_{\min} \cdot \Delta\varphi_{\max} &\geq h \\ \Delta L_{\min} \cdot 2\,\pi &\geq h \\ \Delta L_{\min} &\geq \frac{h}{2\,\pi} = \hbar \end{aligned} \tag{16.12}$$

Drehimpulse müssen sich also, um unterscheidbar zu sein, um einen Wert von $\hbar$ unter-

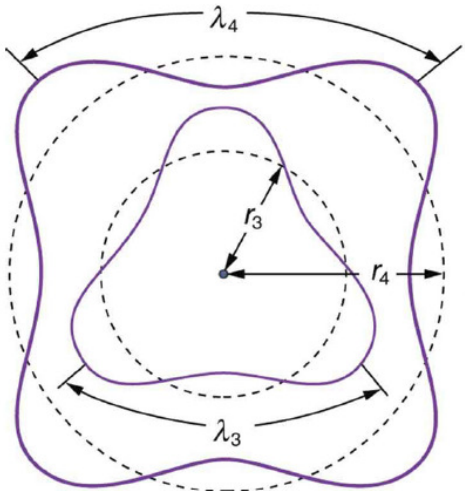


Abb. 16.6: Die hier gezeigten erlaubten Orbitale auf dem Kreis entsprechen in ihrem Umfang drei beziehungsweise vier deBroglie-Wellenlängen.

scheiden. Nach dem Bohrschen Atommodell ist $|L|$ ein Vielfaches von $\hbar$.

$$\begin{aligned} |\vec{L}|^2 &= m_e^2 \cdot r_e^2 \cdot v_e^2 \\ |\vec{L}|^2 &= 2\, m_e \cdot r_e^2 \cdot v_e^2 \\ |\vec{L}|^2 &= \frac{n^2 \cdot e^2 \cdot r_e}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \\ |\vec{L}|^2 &= n^2 \cdot \hbar^2 \end{aligned} \tag{16.13}$$

Wie sich herausstellt, ist die Annahme $|L|{=}n{\cdot}\hbar$, nicht ganz richtig! Das Teilchen sich stets auf Kreisbahnen bewegen (siehe Keplersche Planetenbahnen), ist im Allgemeinen ebenfalls nicht haltbar. Mehr dazu im Kapitel *Beyond Bohr*. In der Originalarbeit von Bohr von 1913 wird die Quantisierung nicht auf der Grundlage von Materiewellen entwickelt. Die deBroglie Hypothese wurde erst 1924 aufgestellt. Tatsächlich war die Grundannahme ein quantisierter Drehimpuls. Wie man erkennt wird, sind beide Ansätze gleichwertig. Aus der deBroglie Beziehung ergibt sich der Zusammenhang zwischen der λ und dem Impuls p. Das führt auf einen Ausdruck, der den Drehimpuls $r \cdot p$ beinhaltet:

$$\begin{aligned} \lambda_\ell &= \frac{h}{p_\ell} \\ 2\,\pi \cdot r &= \ell \cdot \frac{h}{p_\ell} \\ r \cdot p_\ell &= \ell \frac{h}{2\,\pi} = \ell \cdot \hbar \end{aligned} \tag{16.14}$$

Der Bahndrehimpuls kann nur Werte von $\ell{\cdot}\hbar$ annehmen, wobei ℓ eine ganze Zahl ($\ell \geq 0$) ist. Als maximaler Wert für ℓ ergibt sich n-1.

Mit der deBroglie Beziehung betrachten wir nun nochmal die Bewegung der Elektronen um den Atomkern. Aus dem Kräftegleichgewicht F_e=F_R ergibt sich dann mit Gl. 16.10:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} &= \frac{m_e\cdot v_e^2}{r_n} \\ \frac{1}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} &= \frac{m_e}{r_n}\cdot\frac{n^2\cdot\hbar^2}{m_e^2\cdot r_n^2} \\ \frac{1}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} &= \frac{\hbar^2}{m_e}\cdot\frac{n^2}{r_n^3} \\ r_n &= \frac{4\,\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\hbar^2}{m_e\cdot e^2}n^2 \end{aligned} \tag{16.15}$$

Man erkennt, dass die Hauptquantenzahl n als quadratischer Term in der Gleichung auftaucht. Die Bahnradien skalieren demnach quadratisch mit der Hauptquantenzahl. Für n=1 kann der zugehörige Bahnradius r_{Bohr} bestimmt werden. Man erkennt, dass der zu bestimmende Wert nur von Naturkonstanten abhängt.

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{4\,\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\hbar^2}{m_e\cdot e^2} \\ r_1 &= 4\,\pi\frac{(8.85\cdot10^{-12}\,\mathrm{F/m})\cdot(1.054\cdot10^{-34}\mathrm{Js})^2}{(9.1\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg})\cdot(1.602\cdot10^{-19}\,\mathrm{C})^2} \end{aligned}$$

Den Radius der innersten Elektronenbahn r_{Bohr} findet sie im Lehrbuch in der Liste der Naturkonstanten:

Bohrscher Radius: r_{Bohr}=$5.29\cdot10^{-11}\,\mathrm{m}$

Der Atomdurchmesser beträgt nach dieser Rechnung also etwa $10^{-10}\,\mathrm{m}$ und ist in Übereinstimmung mit Experimenten (siehe Kapitel *Der Weg zum Atom*).
Mit den Wert von r_n lassen sich die zugehörigen Bahngeschwindigkeiten v_n berechnen:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\hbar}{m_e\cdot r_n}\cdot n \\ v_1 &= \frac{\hbar}{m_e\cdot r_n} \\ v_1 &= \frac{1.054\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{9.109\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot0.529\cdot10^{-10}\,\mathrm{m}} \end{aligned} \tag{16.16}$$

Elektronengeschwindigkeit auf der Bohrschen Bahn: v_{Bohr}=$2.19\cdot10^{6}\,\mathrm{m/s}$

Wie sich herausstellt, sind die Bahngeschwindigkeiten geringer als $0.01c$.[4] Das bedeutet, dass man OHNE Berücksichtigung relativistischer Effekte, die wesentlichen Eigenschaften des Wasserstoffatoms bestimmen kann. Die Elektronen haben auf den einzelnen

[4] Zum Vergleich: Würde das Elektron um die Erde rasen, wäre es nach 20 Sekunden wieder an seinem Ausgangspunkt.

Bahnen unterschiedliche Geschwindigkeiten, wobei sich die Bahngeschwindigkeit auf den äußeren Bahnen erniedrigt. Das bedeutet, dass sich die deBroglie Wellenlänge der Elektronen, die sich auf diesen Bahnen bewegen, vergrößert.
Die aus der Anwendung der deBroglie-Beziehung auf das Wasserstoff bestimmten Werte für r_n (Gl. 16.15) und v_n (Gl. 16.16) erlauben die Bestimmung der Kinetischen Energie des Elektrons auf den einzelnen Bahnen.

$$
\begin{aligned}
E^n_{kin} &= \frac{1}{2} m_e \cdot v_n^2 \\
E^n_{kin} &= \frac{1}{2} m_e \cdot \left(\frac{\hbar^2}{m_e^2 \cdot r_n^2} n^2 \right) \\
E^n_{kin} &= \frac{1}{2} m_e \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot n^2}{m_e^2} \right) \cdot \left(\frac{m_e \cdot e^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0^2 \cdot \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \right)^2 \\
E^n_{kin} &= \frac{1}{2} m_e \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 2\,\pi} \cdot \frac{\hbar^2}{\hbar^4} \cdot \frac{m_e^2}{m_e^2} \cdot \frac{e^4}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{n^2}{n^4} \right) \\
E^n_{kin} &= \frac{1}{8 \cdot (2\,\pi)^2} \frac{(2\,\pi)^2}{h^2} \cdot \frac{m_e \cdot e^4}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} \\
E^n_{kin} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{m_e \cdot e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad (16.17) \\
E^1_{kin} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{m_e \cdot e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \qquad (16.18)
\end{aligned}
$$

Dabei ist insbesondere der Wert für n=1 von Interesse.

Kinetische Energie auf erster Bohrscher Bahn: $E^1_{kin} = 2.18 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$=13.6 eV

In diesem Fall hat das Elektron die höchste Bahngeschwindigkeit und damit die höchste kinetische Energie. Die Analyse zeigt, dass die Werte von E^n_{kin} quadratisch ($1/n^2$) von der Hauptquantenzahl abhängen.

In einem weiteren Schritt wird die Potenzielle Energie der Elektronen auf den quantisierten Bahnen bestimmt. Die potenzielle Energie zweier Punktladungen (q_1, q_2)

$$E_{pot} = k_C \cdot \frac{q_1, \cdot q_2}{r} \qquad (16.19)$$

nimmt den Wert NULL an, wenn der Abstand r beträchtlich wird, also $r \to \infty$. Die Gesamtenergie hat den Wert NULL, wenn das Teilchen außerdem ruht (E_{kin}=0). Diese Situation ergibt sich für $n \to \infty$, $r_n \to \infty$ und $v_n \to 0$. Ein Elektron an ein Proton gebunden hat eine geringere Energie als zwei freie Teilchen. Man denke daran, dass man Energie aufwenden muss, um die Partikel zu trennen. Die sich ergebenden potenziellen Energien der Elektronen sind deshalb negativ (Abb. 16.7). Alle in einem Potenzial gebundene Elektronen haben damit eine negative Bindungsenergie. Entfernt sich das Elektron vom Kern erhöht sich die potenzielle Energie. Für die Berechnung der potenziellen

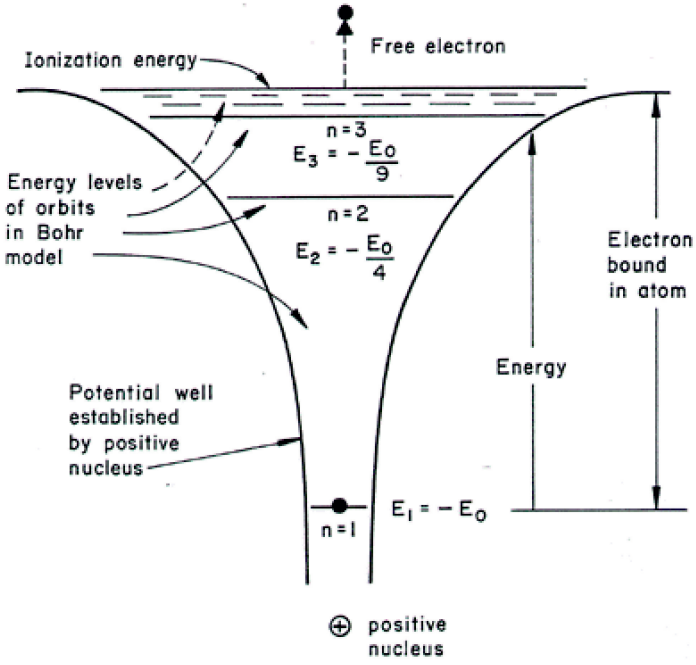


Abb. 16.7: Lage der Energiezustände im Bohrschen Wasserstoffatom.

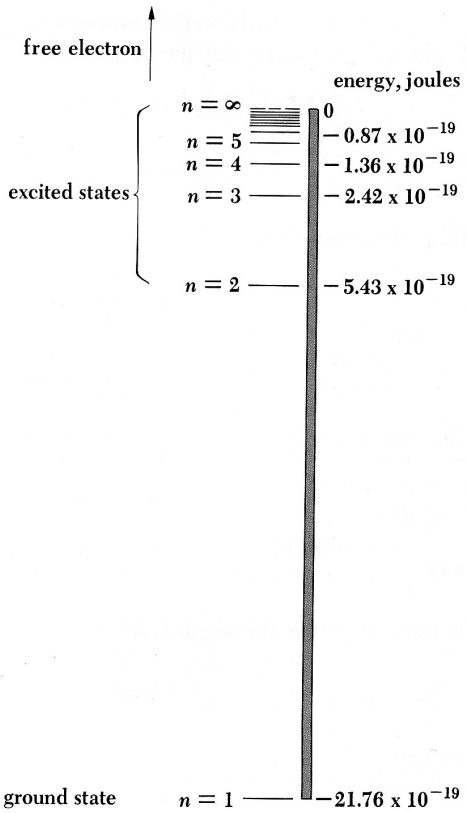


Abb. 16.8: Werte der Energiezustände im Wasserstoffatom [**?**].

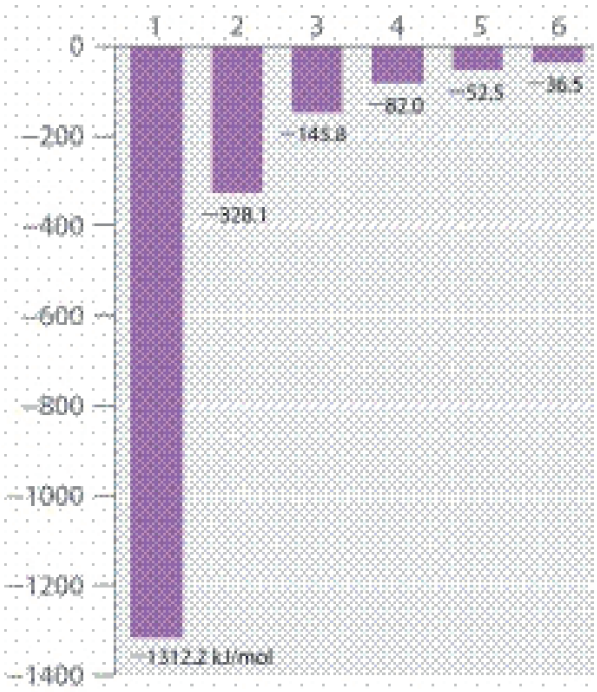


Abb. 16.9: Energiezustände im Wasserstoffatom in der chemischen Energieeinheit kJ/mol

Energie verwenden wir die Gleichungen 16.15 und 16.16:

$$
\begin{aligned}
E^n_{pot} &= -\frac{1}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r_n} \\
E^n_{pot} &= -\frac{e^2}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{m_e^2\cdot e^2}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2} \\
E^n_{pot} &= -\frac{m_e\cdot e^2}{4\,\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{4\,\pi^2}\cdot\frac{(2\,\pi)^2}{h^2}\cdot\frac{1}{n^2} \\
E^n_{pot} &= -\frac{1}{4}\frac{m_e\cdot e^4}{\varepsilon_0^2\cdot h^2}\cdot\frac{1}{n^2} \qquad (16.20) \\
E^1_{pot} &= -\frac{1}{4}\frac{m_e\cdot e^4}{\varepsilon_0^2\cdot h^2} \qquad (16.21)
\end{aligned}
$$

Hier ergibt sich ebenfalls eine quadratische Abhängigkeit ($1/n^2$) der Potenziellen Energie E^n_{pot} von der Hauptquantenzahl n.

Potenzielle Energie auf erster Bohrscher Bahn: $E^1_{pot} = -4.35\cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$=–27.2 eV

Mit der Kenntnis von E^n_{kin} und E^n_{pot} ergibt sich unter Berücksichtigung der Quantisierung

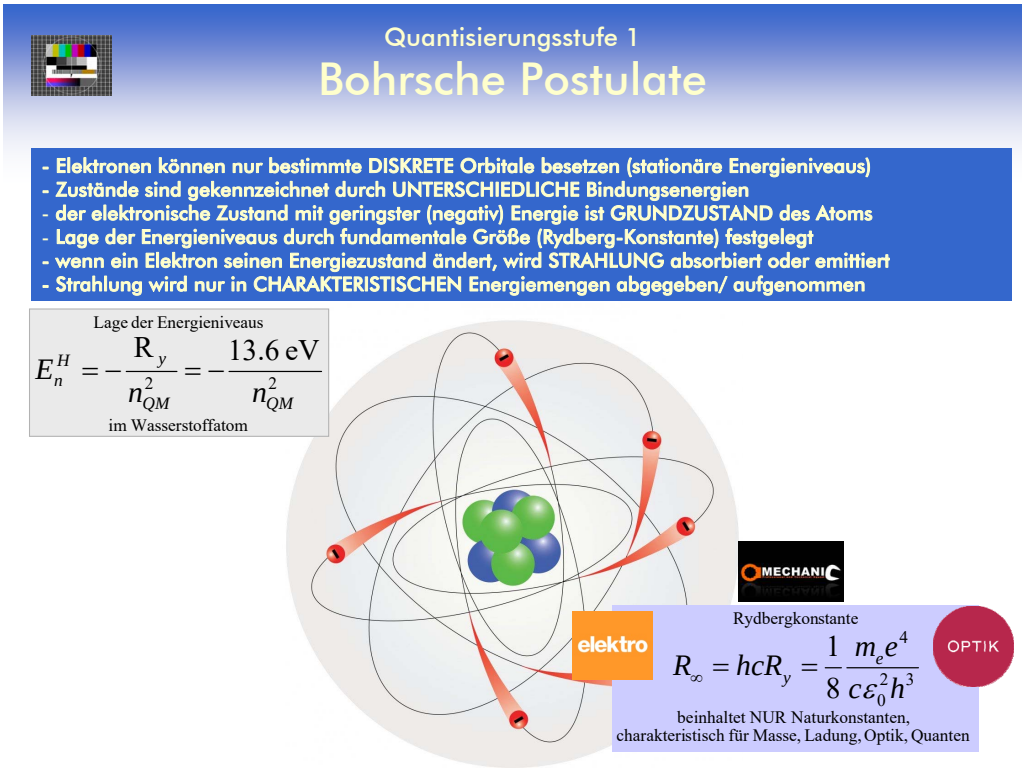
die Gesamtenergie des Systems.

$$
\begin{aligned}
E^n_{ges} &= E^n_{kin} + E^n_{pot} \\
E^n_{ges} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{m_e \cdot e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{2}{8} \frac{m_e \cdot e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \\
E^n_{ges} &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{m_e \cdot e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad (16.22) \\
E^1_{ges} &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{m_e \cdot e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \qquad (16.23)
\end{aligned}
$$

Die Werte für die Gesamtenergie E^n_{ges} sind negativ. Für große n streben die Energiewerte gegen NULL, siehe Abb. 16.8. Das bedeutet, dass das Elektron an den Kern gebunden ist und somit Energie aufgewendet werden muss, um das Elektron abzulösen. Für $n = 1$ ist das Elektron mit der höchsten Bindungsenergie an den Kern gebunden (Abb. 16.9).

Gesamtenergie auf erster Bohrscher Bahn: $E^1_{pot} = -2.18 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = -13.6\,\mathrm{J}$

Man bezeichnet diesen Energiezustand als den Grundzustand des Systems. Gelingt es dem Atom Energie abzugeben, wird man es über kurz oder lang in diesem Zustand wiederfinden. Andererseits muss Energie aufgewendet werden, um ein Elektron aus diesem Energiezustand auf eine der anderen Bahnen zu überführen. Man nennt die Bahnen, auf denen sich das Elektron bewegt die stationären Bahnen. Das Elektron befindet sich hier in einem stationären Zustand, was bedeutet, dass keine Strahlung ausgesendet wird und sich der Zustand zeitlich in seiner Energie nicht ändert. Nur die Position des Elektrons ändert sich.



If this nonsense of Bohr should in the end prove to be right, we will quit physics [**?**].

Otto Stern an Max von Laue, 1913

Bohrsche Postulate

Die bisherige Analyse begründet sich durch die Behandlung von Materiewellen im Rahmen der klassischen Newtonschen Bewegungsgleichungen. Als Bohr sein Modell vorstellte, war die deBroglie Hypothese noch nicht bekannt. Wie hat er argumentiert? Die Plancksche Konstante hat die dieselbe Dimension wie der Drehimpuls L:[5]

$$\begin{aligned}
[h] &= \text{Energie} \cdot \text{Zeit} \\
[h] &= \frac{M \cdot L^2}{T^2} \cdot T \\
[h] &= \frac{M \cdot L^2}{T} \qquad (16.24) \\
[L] &= [m \cdot v \cdot r] \\
[L] &= M \cdot \frac{L}{T} \cdot L \\
[L] &= \frac{M \cdot L^2}{T} \qquad (16.25)
\end{aligned}$$

[5] M: Dimension Masse; L: Dimension Länge; T: Dimension Zeit

Das lässt vermuten, dass der Drehimpuls der Elektronen in Einheiten der Planckschen Konstanten quantisiert sind. Bohr postulierte deshalb folgende Quantisierungsbedingung. Das Produkt aus dem Abstand zur Drehachse r und Impuls p muss ein Vielfaches einer Planckschen Konstanten $\hbar$ sein. Man erinnere sich, dass $r \cdot p$ den Drehimpuls darstellt. Also folgt:

Der Drehimpuls ist quantisiert in Einheiten von $\hbar$.

$$L_\omega = \hbar,\ 2\hbar,\ 3\hbar, \ldots \tag{16.26}$$

Das Bohrsche Modell[6] des Wasserstoffatoms erweitert durch die Quantisierung der Energiezustände das Rutherfordschen Modell:

- Atome bestehen aus negativen Elektronen, die einen winzigen positiven Kern umkreisen.
- Elektronen können nur bestimmte diskrete Energiezustände (Orbitale) besetzen. Man ordnet die Energiezustände folgendermaßen: $E_1 < E_2 < E_3 < E_4 < \ldots$ Dies sind die so genannten stationären Energieniveaus. Elektronen bewegen sich strahlungsfrei auf diesen Kreisbahnen. Der Drehimpuls ist quantisiert und ist ein Vielfaches von $\hbar$.
- Energiezustände sind gekennzeichnet durch unterschiedliche Bindungsenergien.
- Der Energiezustand mit der geringster (negativen) Energie ist der Grundzustand des Atoms. Jedes Atom ist bestrebt, in diesen niedrigsten Energiezustand zu gelangen.
- Die Lage der Energieniveaus ist durch eine Naturkonstante, die Rydberg-Konstante bestimmt.
- Die Gesamtenergie in einem Atom ist quantisiert. Ein Atom absorbiert oder emittiert elektromagnetische Strahlung, indem es abrupt von einem Energieniveau in ein anderes wechselt.
- Der Wechsel eines Energieniveaus kann auch durch den Stoß mit einem Elektron oder einem anderen Atom erfolgen, siehe Franck-Hertz Versuch.
- Die beim Energiesprung absorbierte oder emittierte Strahlung kann nur in charakteristischen Energiemengen aufgenommen oder abgegeben werden.

Welche Schlussfolgerungen können aus dem Bohrschen Ansatz gezogen werden?

- Materie ist stabil. Wenn ein Atom seinen Grundzustand erreicht hat, gibt es keinen Zustand der einen geringere Energie aufweist. Im Grundzustand kann sich das Atom unendlich lange aufhalten.

[6] The Nobel Prize in Physics 1922 was awarded to Niels Bohr *for his services in the investigation of the structure of atoms and of the radiation emanating from them*

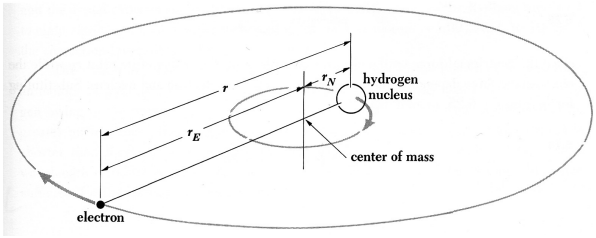


Abb. 16.10: Elektron und Proton kreisen um einen gemeinsamen Massenschwerpunkt.

- Atome emittieren diskrete Linienspektren. Nur Photonen mit Wellenlängen, deren Photonenenergie mit dem Abstand der atomaren Energieniveaus übereinstimmen können absorbiert oder emittiert werden. Licht anderer Wellenlänge können nicht absorbiert oder emittiert werden, weil damit der Energieerhaltungssatz verletzt wäre.

- Durch Stöße von Teilchen mit Atomen, können diese in einen angeregten Energiezustand überführt werden. Durch Abgabe eines Photons kann das angeregte Atom in den Grundzustand zurückkehren.

- Alle Absorptionslinien erscheinen auch im Emissionsspektrum, aber nicht alle der Emissionslinien beobachtet man nicht im Absorptionsspektrum.

- Jedes Element des Periodensystem hat ein charakteristisches Emissions- und Absorptionsspektrum.

Durch die Behandlung des Atoms unter Berücksichtigung der Bohrschen Postulate konnte eine Reihe an Phänomenen im Zusammenhang mit den Eigenschaften von Atomen erklärt werden:

- Die Größe des Wasserstoffatoms.

- Das Linienspektrum von Wasserstoff und wasserstoffähnlichen Ionen.

- Die Resultate des Franck-Hertz Experiments.

Aus der Bohrschen Bedingung lässt sich die Rydberg-Konstante R_∞ herleiten:

$$R_\infty = \frac{1}{8}\frac{m_e \cdot e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot c \cdot h^3} \tag{16.27}$$

Rydberg-Konstante für schweren Atomkern ($m_K \to \infty$): R_∞=10 973 731.568 539 m^{-1}

Dies ist die Rydberg-Konstante R_∞, die wir schon im Kapitel *Der Weg zum Atom* kennengelernt haben. Die Unsicherheit im genauen Wert beträgt nur $5{\cdot}10^{-12}$. Dieser Wert ergibt sich unter der Annahme eines superschweren Protons ($m_p \to \infty$). Realistischer

ist es, die tatsächliche Masse des Protons zu verwenden und in den Gleichungen die reduzierte Masse des Elektrons μ_e einzusetzen (Abb. 16.10).

$$\begin{aligned} \mu_e &= \frac{m_p \cdot m_e}{m_p + m_e} \\ \mu_e &= \frac{1836}{1837} m_e \end{aligned} \tag{16.28}$$

Dann findet man:

$$\begin{aligned} \frac{R_H}{\mu_e} &= \frac{R_\infty}{m_e} \\ R_H &= \frac{\mu_e}{m_e} \cdot R_\infty \end{aligned} \tag{16.29}$$

Rydberg-Konstante für das Wasserstoffatom: R_H=0.9994557 $\cdot$ R_∞

Analog ergeben sich für die Bahnradien r_n und die Energiezustände E^n_{ges} eines Elektrons im Feld eines schweren Atoms mit Masse $m_p \to m_K$:

$$\mu_K = \frac{m_K \cdot m_e}{m_K + m_e} \tag{16.30}$$

$$r_n = \frac{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar^2}{e^2} \cdot \frac{n^2}{\mu_K} \tag{16.31}$$

$$E^n_{ges} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{\mu_K}{n^2} \tag{16.32}$$

Um den Effekt der reduzierten Masse zu illustrieren, vergleichen wir die Wellenlänge der roten Balmerlinie von Wasserstoff (656.1 nm) und Deuterium (656.3 nm). Der Unterschied ist gering, reicht aber aus, um im Experiment zwischen den beiden Isotopen zu unterscheiden.

Wasserstoffähnliche Systeme

Interessant sind in diesem Zusammenhang wasserstoffähnliche Systeme. Dazu gehören Ionen, die sich dadurch auszeichnen, dass sie nur noch ein einzelnes Elektronen haben.[7] Dies sind (Z-1)-fach geladenen Ionen wie He^+ oder Na^{10+} ($e^2 \to Z \cdot e^2$). Das zugehörige Potenzial ist das Coulombpotenzial des Wasserstoffkerns multipliziert mit der Ladung des wasserstoffähnlichen Ions:

$$U(r) = -k_C \frac{Z \cdot e^2}{r} \tag{16.33}$$

Da beispielsweise U^{91+} einen schweren Kern aufweist, kann man hier in guter Näherung μ_e=m_e verwenden. Wichtiger ist aber, dass

[7] HI: hydrogen-like ions

Ion	Ordnungszahl Z	Durchmesser $2\,r_1$	Ionisierungsenergie	Balmerlinie $2 \leftarrow 3$
H	1	0.106 nm	13.6 eV	656 nm
He^+	2	0.053 nm	54.4 eV	164 nm
Li^{2+}	3	0.035 nm	125.1 eV	73 nm

Tab. 16.1: Charakteristische spektroskopische Werte der leichten Elemente.

Particle	e^-	μ^-	π^-	K^-
m/m_e	1	207	273	967
Bohr radius r_1 in fm	$\frac{5.3}{Z} \cdot 10^4$	$\frac{256}{Z}$	$\frac{194}{Z}$	$\frac{54.8}{Z}$
Term energy for $n = 1$, $Z = 1$	−13.6 eV	−2.79 keV	−3.69 keV	−13.1 keV
$\Delta E(n = 2 \rightarrow 1)$ for $Z = 20$	4.1 keV	837 keV	1.1 MeV	3.9 MeV

Abb. 16.11: Tabelle der Eigenschaften exotischer Atome (Myon μ^-, Pion π^-, Kaon K^-). Angegeben ist die Masse in Bezug auf das Elektron, der Radius der ersten Bohrschen Bahn und der Energieabstand zur zweiten Bohrschen Bahn in einem 20-fach geladenen Atom [**?**].

- der Radius der ersten Bohrschen Bahn mit $1/Z$ abnimmt.
- die Ionisierungsenergien mit dem Quadrat der Kernladung Z anwächst.

$$R_{HI} = R_\infty \left(1 + \frac{m_e}{m_{HI}}\right) \approx R_\infty \tag{16.34}$$

$$r_1 = \frac{m_e \cdot r_{Bohr}}{\mu_{HI} \cdot Z} \approx \frac{r_{Bohr}}{Z} \tag{16.35}$$

$$E^n_{ges} = \frac{1}{8} \cdot \frac{e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h} \cdot \frac{\mu_{HI} \cdot Z^2}{n^2} \approx \frac{Z^2}{n^2} \tag{16.36}$$

$$E_{ph} = (13.6\,\text{eV}) \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \cdot \text{eV} = Z^2 \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \tag{16.37}$$

Auch die Wellenlängen der Übergänge verschieben zu kürzeren Wellenlängen, siehe dazu Tab. 16.1. Schließlich erhöht sich durch die hohe Kernladung die Geschwindigkeit der Elektronen erheblich und relativistische Effekte müssen unter Umständen berücksichtigt werden.

Ersetzten wir zunächst das Elektron durch ein schweres, negatives Teilchen, beispielsweise ein Myon oder ein Antiproton. Der zugehörige Bohrsche Radius ergibt sich mit:

$$r_n = \frac{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar^2}{e^2 \cdot \mu} \cdot \frac{n^2}{Z} \tag{16.38}$$

Die Gleichung zeigt, dass die Radien invers proportional zur reduzierte Masse μ sind. Ist das ausgetauschte Teichen schwerer als das Elektron, so ist der Einfluss der Kernladung

auf die Lage der Energieniveaus in diesen exotischen Atome stärker. Aus der Messung der Energieverschiebung ergeben sich Informationen über die Ladungs- und Massenverteilung im Atomkern. Interessant ist es, dass man die Analyse auf Positronium[8] (μ_e=$m_e/2$) und Myonium[9] (μ_e=$0.995m_e$) [**?**] ausdehnen kann. Beim Positronium verringert sich im Vergleich zum Wasserstoffatom die Bindungsenergie von 13.6 eV auf 6.8 eV. Interessante Möglichkeiten ergeben sich für die Forschung, wenn man Elektron und Proton durch ihre Antiteilchen ersetzt. Ohne Wechselwirkung mit der Umgebung ist Antiwasserstoff stabil. Dies erlaubt es zu untersuchen, ob es Unterschiede zwischen der Materie und Antimaterie gibt [**?**]. Die Schwierigkeit ist allerdings, solche Objekt zu erzeugen und für längere Zeiten zu stabilisieren, um die teils langwierigen Untersuchungen durchführen zu können. Die Tabelle in Abb. 16.11 gibt eine Übersicht über charakteristische Eigenschaften exotischer Atome. Man erkennt, dass die typischen Energien extrem unterschiedlich ausfallen.

Confinement of antihydrogen for 1,000 seconds [**?**]**:** Atoms made of a particle and an antiparticle are unstable, usually surviving less than a microsecond. Antihydrogen, made entirely of antiparticles, is believed to be stable, and it is this longevity that holds the promise of precision studies of matter-antimatter symmetry. We have recently demonstrated trapping of antihydrogen atoms by releasing them after a confinement time of 172 ms. A critical question for future studies is: how long can anti-atoms be trapped? Here, we report the observation of anti-atom confinement for 1 000s, extending our earlier results by nearly four orders of magnitude. Our calculations indicate that most of the trapped anti-atoms reach the ground state. Further, we report the first measurement of the energy distribution of trapped antihydrogen, which, coupled with detailed comparisons with simulations, provides a key tool for the systematic investigation of trapping dynamics. These advances open up a range of experimental possibilities, including precision studies of charge-parity-time reversal symmetry and cooling to temperatures where gravitational effects could become apparent.

Anwendungen^{4LP}

Beispiele aus der Astrophysik

Die Linienspektren der Atome erlauben Rückschlüsse auf die chemische Zusammensetzung astronomischer Objekte. Hierzu drei historisch wichtige Beispiele:

- Im Jahr 1896 veröffentlichte Pickering Beobachtungen zu bislang unbekannten Linien bei 541 unnd 456 nm im Spektrum des Sterns ζ Puppis [**?**]. Der Forscher vermutete eine neue Form von Wasserstoff mit halbzahligen Übergangsniveaus. Fowler beobachtet im Jahr 1912 ähnliche Linien in einem Wasserstoff-Helium-Gemisch [**?**]. Auch er war der derselben Meinung wie Pickering. Niels Bohr kam

[8] *Lexikon:* Das **Positronium** (e^-e^+) ist ein exotisches Atom, das aus einem Elektron und seinem Antiteilchen, dem Positron besteht.

[9] *Lexikon:* Das **Myonium** ist ein exotisches Atom aus einem Anti-Myon (μ^+, Lebendauer 2 μs) und einem Elektron. Dieses exotische Atom ist eines der fundamentalsten Systeme der Atomphysik. verhält sich chemisch wie Wasserstoff, ist aber um einen Faktor neun leichter [**?**].

dagegen zu dem richtigen Schluss, dass die Spektrallinien von ionisiertem Helium emittiert werden.

- Im Katzenaugennebel hatte William Huggins 1864 starke grüne Spektrallinien gefunden, die man zunächst einem neuen Element Nebulium zuordnete. Im Jahre 1927 berechnete Ira Bowen, dass diese Linien aus Sauerstoff und Stickstoff stammen. Nebulium war damit vom Tisch [**?**]. Die Linien treten nur bei geringen Gasdichten, wie beispielsweise in interstellaren Gas- und Molekülwolken auf.

- Im Sonnenspektrum entdeckte Bengt Edlen Linien, die man dem Element Coronium zuordnete. Edlen entdeckte aber, dass die Quelle 13-fach geladenen Eisenatome waren. Seine Zuordnung erforderte allerdings Temperaturen in der Sonnenkorona von mehreren Millionen Grad, um die notwendig Ionisation zu gewährleisten. Inzwischen wissen wir, dass er recht hatte.

Ein Beispiel aus der Medizin

In biologischem Gewebe reagieren Positronium-Zerfälle empfindlich auf intermolekulare Prozesse und die intramolekulare Struktur, sowie den Stoffwechsel lebender Organismen. Diese Erkenntnis führt zu neuen Ideen bezüglich der Positronium-basierten Bildgebung in der Medizin. Diese nutzt aus, dass bei der Positronen-Emissions-Tomographie (PET) (Kapitel *Ionisierende Strahlung*) etwa 40% der Positronen-Vernichtung durch die Bildung von Positronium-Atomen im Körper des Patienten erfolgt. Positronium-Bildgebung erfordert Multiphotonen-Tomographiesysteme. Diese ermöglichen nicht nur die Registrierung von Elektron-Positron Annihilationen in zwei Photonen (Standard-PET), sondern auch den Zerfall in drei Photonen, d.h. neben dem gleichzeitigen Nachweis der beiden Vernichtungsphotonen auch den eines weiteren Photons aus der Relaxation des Radionuklid [**?**]. Die Empfindlichkeit der Methode ist gegenüber Standard-PET reduziert, kann aber durch eine Erfassung eines großen Raumwinkels verbessert werden.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
☐ geraten; ☐ unsicher; ☐ unentschieden; ☐ sicherlich richtig; ☐ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Wie lange dauert es, bis das Elektron klassisch betrachtet in den Kern stürzt?

Die von einer beschleunigten Ladung abgestrahlte Leistung P_q skaliert mit der vierten Potenz des Bahnradius. Die Analyse liefert:[10]

$$P_q = \frac{2}{3}\frac{k_C^3}{c^3 \cdot m_q^2}\frac{Z^2 \cdot e^6}{r^4} \tag{16.39}$$

Setzt man die Werte für das Wasserstoffatom (Umlaufzeit T_{Bohr}=$1.56 \cdot 10^{-16}$ s, Bohrscher Radius r_{Bohr}=$0.53 \cdot 10^{-10}$ m, Bindungsenergie E_{Bohr}=13.6 eV) ein, findet man für die Energieabgabe pro Sekunde P_q oder pro Umlauf $P_q \cdot T_{Bohr}$, sowie die Zeitspanne t_{crash} bis das Elektron am Kernort ankommt:

$$P_q = 2.87 \cdot 10^{-11}\,\text{eV/s} \tag{16.40}$$

$$P_q \cdot T_{Bohr} = 4.36 \cdot 10^{-5}\,\text{eV} \tag{16.41}$$

$$t_{crash} = \frac{E_{Bohr}}{P_q} = 4.47 \cdot 10^{-11}\,\text{s} \tag{16.42}$$

Tatsächlich ist das der Wert, der sich bei einem konstanten Bahnradius ergeben würde. Durch die Energieabgabe reduziert sich der Radius und die Energieabgabe erhöht sich. Dadurch dauert es, nach einer genaueren Rechnung nur 10^{-16} s, bis der Vorgang abgeschlossen ist. Oder anders ausgedrückt: Atome gibt es gar nicht!

Aufgabe 1.2: Welche Hauptquantenzahl n ergibt sich für das in Abb. 16.12 skizzierte Wasserstoffatom?[11]

Aufgabe 1.3: Die Wellenlänge der H_α-Linie von Wasserstoff ist 6561 Å. Welche Wellenlänge ergibt sich für die H_β-Spektrallinie in der Balmer-Serie des einfach ionisierten Heliumatoms?

[10] k_C=$8.99 \cdot 10^9$ Vm/As ist die Coulombkonstante.
[11] Jeder Knoten entspricht einer halben Wellenlänge. Also ergibt sich $n = 3$.

$$\frac{1}{\lambda_Z} = R_\infty \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \tag{16.43}$$

$$\frac{1}{\lambda_{Z=1}} = R_\infty \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36} \cdot R_\infty \tag{16.44}$$

$$\frac{1}{\lambda_{Z=2}} = R_\infty \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{20}{36} \cdot R_\infty \tag{16.45}$$

$$\frac{1}{\lambda_{Z=2}} = \frac{5}{9} \cdot R_\infty \tag{16.46}$$

$$\lambda_{Z=2} = 121.5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = 121.5\,\mathrm{nm} \tag{16.47}$$

Aufgabe 1.4: Ist es möglich, dass ein Elektron im Wasserstoffatom einen Geschwindigkeit von $3.60 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$ hat? Was ändert sich, wenn die Geschwindigkeit $3.65 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$ beträgt? Berechnen Sie Bahnradius und Bindungsenergie!

$$v_n = \frac{v_1}{n} \tag{16.48}$$

$$n = \frac{2.19 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}}{3.60 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}} \tag{16.49}$$

$$n = 6.08 \tag{16.50}$$

Da n keine ganze Zahl ist, kann sich das Elektron nicht mit dieser Geschwindigkeit um das Wasserstoffatom bewegen.

$$v_n = \frac{v_1}{n} \tag{16.51}$$

$$n = \frac{2.19 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}}{3.65 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}} \tag{16.52}$$

$$n = 6.0 \tag{16.53}$$

Das Elektronen hält sich im Energiezustand n=6 auf. Die zugehörige Bindungsenergie und der Radius der Bahn beträgt:

$$E_6 = -\frac{13.6\,\mathrm{eV}}{6^2} \tag{16.54}$$

$$E_6 = -0.38\,\mathrm{eV} \tag{16.55}$$

$$r_n = n^2 \cdot r_{Bohr} \tag{16.56}$$

$$r_6 = 6^2 \cdot 0.529 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \tag{16.57}$$

$$r_6 = 1.9 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = 1.9\,\mathrm{nm} \tag{16.58}$$

Aufgabe 1.5: Das Verhältnis zwischen kinetischer Energie und Gesamtenergie der Elektronen des Wasserstoffatoms ist nach dem Bohrschen Modell[12]

[12] Antwort: (c)

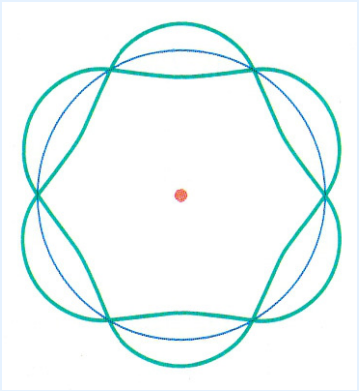


Abb. 16.12:

(a) 2:1

(b) 1:1

(c) 1:-1

(d) 1:2

(e) Keins von alledem!

Aufgabe 1.6: Wenn ein Elektron von n=3 auf das Energieniveau n=2 hinunterfällt, wird Energie abgeben in Höhe von[13]

(a) 10.2 eV.

(b) 12.9 eV.

(c) 1.9 eV.

(d) 0.65 eV.

Aufgabe 1.7: Bei einem elektronischen Übergang aus dem Grundzustand eines Atoms[14]

(a) wird Energie absorbiert

(b) wird Energie abgegeben.

(c) kann es sowohl zur Absorption als auch Emission von Energie kommen.

(d) ist nicht vorhersehbar, was passiert.

Aufgabe1.8: Wenn sich ein Elektron auf einer stationären Bahn um den Wasserstoffkern bewegt, dann[15]

[13]Antwort: (c)
[14]Antwort: (a)
[15]Antwort: (d)

(a) absorbiert es Energie.

(b) gewinnt es kinetische Energie.

(c) strahlt es Energie ab.

(d) bleibt die Energie konstant.

Aufgabe 1.9: Das Postulat der Bohrschen Theorie, dass Elektronen von einer Umlaufbahn zur anderen Energiesprünge ausführen, ist eine Konsequenz der[16]

(a) Quantisierung.

(b) Wellennatur des Elektrons.

(c) Wahrscheinlichkeitsdichte.

(d) Heisenbergschen Unschärferelation.

Aufgabe 1.10: Wie stark ist das elektrische Feld E_e im Abstand von r=1 Å vom Proton?

$$E_e = k_C \frac{e}{r^2} = 144\,\mathrm{V/nm} = 1.44 \cdot 10^{11}\,\mathrm{V/m} \tag{16.59}$$

Aufgabe 1.11: Das Bohrsche Atommodell kann folgendes erklären:[17]

(a) Nur das Spektrum des Wasserstoffatom.

(b) Das Spektrum von Einelektronensystemen.

(c) Das Spektrum des Wasserstoffmoleküls.

(d) Das Sonnenspektrum.

(e) Das Spektrum von Wasserstoff und Helium.

Aufgabe 1.12: Das Verhältnis der Radien von zweiter und erster Bahn im Wasserstoffatom ist[18]

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

(e) 5

[16] Antwort: (a)
[17] Antwort: (b)
[18] Antwort: (d)

Aufgabe 1.13: Welche der folgenden Prinzipien der klassischen Physik werden im Bohrschen Modell verletzt?[19]

(a) Entgegengesetzte Ladungen ziehen sich mit einer Kraft an, die umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands ist.

(b) Die auf einen Körper wirkende Kraft ist gleich seiner Masse mal seiner Beschleunigung.

(c) Beschleunigende Ladungen strahlen Energie ab.

(d) Teilchen haben stets eine genau definierte Position und einen genau definierten Impuls.

(e) Alle oben genannten Aussagen sind im Bohrschen Modell verletzt.

Aufgabe 1.14: Was können Sie bei gegebener deBroglie-Wellenlänge eines Elektrons ($\lambda_{dB} = h/p$) und der Bedingung für stehende Wellen auf einem Kreis ($2\,\pi \cdot r = n \cdot \lambda$) über den Drehimpuls L des Elektrons aussagen?[20]

(a) $L = n \cdot \hbar/r$

(b) $L = n \cdot \hbar$

(c) $L = n \cdot \hbar/2$

(d) $L = 2, n \cdot \hbar$

[19] Antwort: (c)
[20] Antwort: (b)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wissen Sie noch was ein Synchrotron ist und warum diese Frage hier gestellt wird?
2. Vor ihrem Auge bewegt sich ein Elektron immer vor und zurück. Würden Sie ein elektrisches Wechselfeld beobachten, wenn Sie ein entsprechendes Sinnesorgan hätten?
3. Warum würde die klassische Physik eine Implosion des Atoms vorhersagen?
4. Was würde passieren, wenn das Elektron des Wasserstoffatoms sich nicht bewegen würde?
5. Welche Widersprüche in Bezug auf die klassische Physik musste Bohr überwinden?
6. Zeigen Sie, dass die Einheit der Planckschen Konstanten einem Drehimpuls entspricht!
7. Welchen Durchmesser hat das Wasserstoffatom?
8. Auf welcher Bohrschen Bahn hat das Elektron die höchste Geschwindigkeit?
9. Welche Bedeutung haben Materiewellen für die Entwicklung des Bohrschen Atommodells?
10. Erläutern Sie, warum man den Bindungsenergiewerten negative Werte zuordnet?
11. Nimmt die Energie des Wasserstoffatoms zu, wenn sich das Elektron auf einer Bahn mit größerem Radius bewegt?
12. Was ist höchste Energie, die ein Atom (!) im ersten angeregten Zustand absorbieren kann?
13. Was sind wasserstoffähnliche Atome und wie hängen die Energien und Radien der Elektronenbahnen mit denen im Wasserstoff zusammen?
14. Energie ist notwendig, um das Wasserstoffatom zu ionisieren. Braucht man mehr Energie, wenn sich das Elektronen im ersten angeregten Zustand befindet?
15. Hat die Gravitation Einfluss auf die Lage der Energieniveaus im Wasserstoffatom?
16. Wie unterscheiden sich die Bahnen der Elektronen in Atomen von den Bahnen der Planeten um die Sonne?
17. Warum sprechen wir nie von der Quantisierung der Planetenbahnen?

16.2 Linienstrahlung aus Atomen



Wir haben die Möglichkeit, ihre Formen, Entfernungen, Größen und Bewegungen zu bestimmen, während wir niemals durch irgendein Mittel ihre chemische Zusammensetzung bestimmen können.

Auguste Comte über die Sterne (1835)

In Gasen bei hohen Temperaturen befindet sich ein merklicher Anteil der Atome in einem angeregten Zustand. Die Energie für die Besetzung angeregter Zustände erhalten die Atome durch Stöße untereinander. Bei hohen Temperaturen (E_{kin}=$k_B \cdot T_K$) ist dieser Prozess wahrscheinlicher als bei niedrigen. Dieses Verhalten lässt sich durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Gasgeschwindigkeiten der Atome beschreiben. Durch die Emission von Strahlung können die angeregten Atome in einen energetisch tiefer liegenden Zustand übergehen. Das Auftreten scharfer Spektrallinien bei bestimmten Frequenzen ist ein Hinweis auf diskrete Energiezustände im Atom. Das Bohrsche Atommodell erklärt die Lage der Linien im Wasserstoffatom. Eine naheliegende Frage stellt sich: Was könnte eine typische Anwendung sein? Nun, die Physik kennt eine Reihe von Systemen, bei der charakteristische Frequenzen eine wichtige Rolle spielen. Dazu

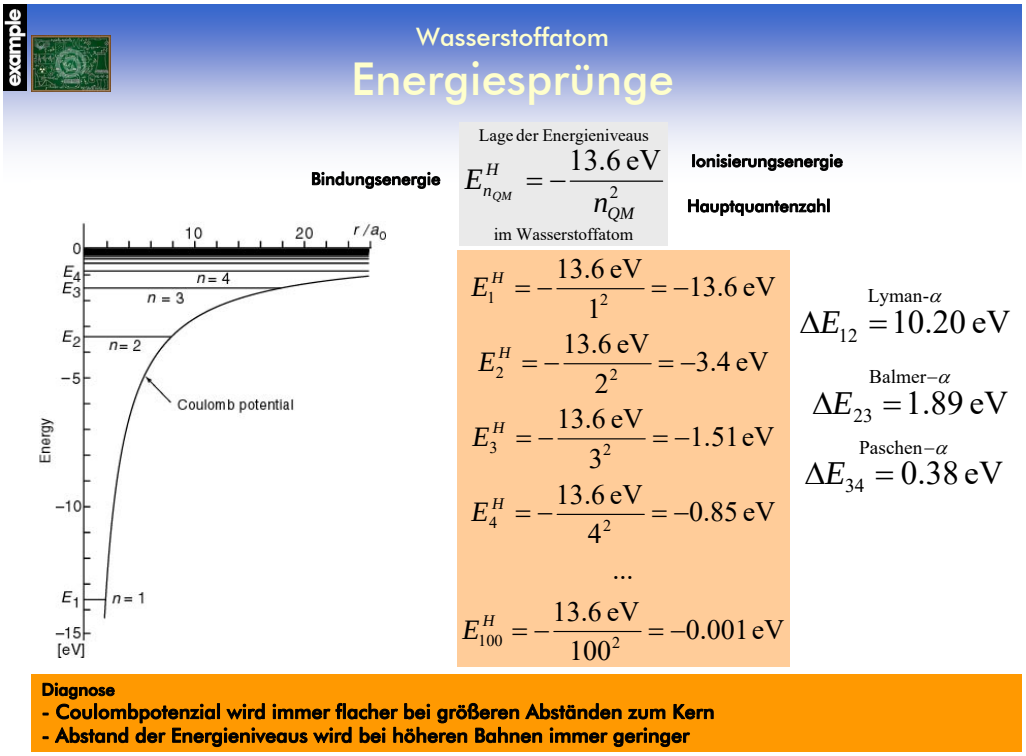
gehören das mathematische Pendel und Schwingkreise. Die Periode ist hier klar definiert:

$$f_{Pendel} = \frac{1}{2\,\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{16.60}$$

$$f_{Schwingkreis} = \frac{1}{2\,\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \tag{16.61}$$

wobei g die Gravitationsbeschleunigung, ℓ die Länge des Pendels, L die Induktivität der Spule und C die Kapazität des Kondensators im Schwingkreis ist. Die Anwendung sind mechanische Uhren und Quarzuhren. Mit den klar definierten Frequenzen, die die Lichtabsorption und -emission aus Atomen bereitstellt, erreicht man deutlich höhere Frequenzen. Was liegt näher, als daraus extrem genau gehende Uhren zu bauen.

Hyper-precise atomic clocks face off to redefine time [**?**]: Happy birthday, caesium clock. Now move over. As the atomic clock used to define time itself turns 60, tests are set to begin on a new generation of clocks that are designed to give the caesium version a run for its money. Such timekeepers would enable a variety of experiments, including testing whether the fundamental constants of nature really are constant over time, and, eventually, a more precise official definition of the second. Atomic clocks track the frequency of electromagnetic waves emitted by atoms as they change energy states. First demonstrated by British physicist Louis Essen in June 1955, the caesium clock became the world's official timekeeper in 1967 - defining the second as the time it takes for the microwaves that are absorbed or emitted when caesium atoms switch between states to cycle through 9,192,631,770 oscillations.



Wasserstoff-Serien

Mit Hilfe des Bohrschen Atommodells lassen sich die Energiezustände im Wasserstoffatom berechnen, siehe Tab. 16.2. Die Auswertung des Vorfaktors liefert:

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{R_y}{n^2} \\ E_n &= -\frac{13.6\,\text{eV}}{n^2} \end{aligned} \tag{16.62}$$

wobei es sich bei dem Wert von 13.6 eV um die Ionisierungenergie des Wasserstoffatoms handelt. Ausgehend vom Wasserstoff Grundzustand ($n = 1$) muss eine Energie von 13.6 eV aufgewendet werden, um das Elektron vom Wasserstoff zu lösen.[21] Aufgrund der Abhängigkeit der Energiezustände von $1/n^2$ reduziert sich der Abstand der Energieniveaus bei höherem n. Bei $n \to \infty$ beträgt der Abstand zu n=1 schließlich 13.6 eV und der Abstand benachbarter Energieniveaus geht gegen NULL. Kommt es zur Absorption oder Emission von Strahlung, ist dies verbunden mit einem Wechseln der Elektronen von einem Energieniveau E_i zu einem Energieniveau E_j (Abb., 16.14). Um die Wellenlänge der

[21] Die Ionisierungsenergie ist, wie die Austrittsarbeit, eine charakteristische Größe der Elemente im Periodensystem (Abb. 16.13).

Hauptquantenzahl n	Bindungsenergie	Differenz zu $n+1$
1	$E_1^H = -\frac{13.6\,\text{eV}}{1^2} = -13.6\,\text{eV}$	
Ly_α		$\Delta E_{12} = 10.20\,\text{eV}$
2	$E_2^H = -3.4\,\text{eV}$	
H_α		$\Delta E_{23} = 1.89\,\text{eV}$
3	$E_3^H = -1.51\,\text{eV}$	
Pa_α		$\Delta E_{34} = 0.38\,\text{eV}$
4	$E_4^H = -0.85\,\text{eV}$	
	...	
100	$E_{100}^H = -\frac{13.6\,\text{eV}}{100^2} = -0.001\,\text{eV}$	

Tab. 16.2: Energiezustände und Energieabstände (Emissionslinien) im Wasserstoffatom.

ausgesendeten Strahlung zu berechnen, betrachtet man die Differenzen ($E_{ij} = E_j - E_i$) zwischen den Bindungsenergien auf den einzelnen Bohrschen Bahnen:

$$E_{ij} = h \cdot \nu_{ij} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{ij}} \tag{16.63}$$

Berechnet man die Energiedifferenz der beiden am tiefsten gebundenen Energiezuständen (E_1=-13.6 eV und E_2=-3.4 eV) ergibt sich ein Wert von 10.2 eV. Das bedeutet, dass ein Photon der Energie E_{ph}=10.1 eV oder einer Wellenlänge von 121.6 nm ein Elektron von der ersten auf die zweite Bohrsche Bahn anheben kann. Fällt das Elektron in den Grundzustand $n = 1$ zurück, strahlt es ein Photon mit ebenfalls 121.6 nm aus. Dieser Energiesprung E_{12} im Wasserstoff (Ly_α), spielt in der Astronomie eine wichtige Rolle, wie das folgende Kapitel zeigen wird.

Ein Beispiel aus der Astrophysik[4LP]

Die Galaxis EIS 107 findt man im *AXAF Deep Field*.[22] Das Spektrum dieser ziemlich weit entfernten Galaxis, siehe Abb. 16.15 zeigt markante spektrale Linien, unter anderem die Ly-α Emissionslinie, sowie Absorptionslinien von Sauerstoffatomen und Silizium- und Kohlenstoffionen. Die ermittelte Rotverschiebung beträgt z=3.92, wodurch die Linien vom ultravioletten in den roten Spektralbereich verschoben sind.

Aus der Lage der Energieniveaus im Wasserstoffatom lassen sich die Übergangsenergien für die optischen Übergänge als Funktion von Energie, Frequenz oder Wellenlänge berechnen. Die Analyse zeigt, dass sich mit diesen Gleichungen die Wasserstoffserien (Lyman-, Balmer-, Paschenserie, ...) (Abb. 16.16) in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten berechnen lassen. An dieser Stelle ist es sinnvoll, noch einmal das Korrespondenzprinzip aufzurufen oder einfach die Frage zu stellen: Unter welchen Be-

[22] AXAF: Advanced X-ray Astrophysics Facility project

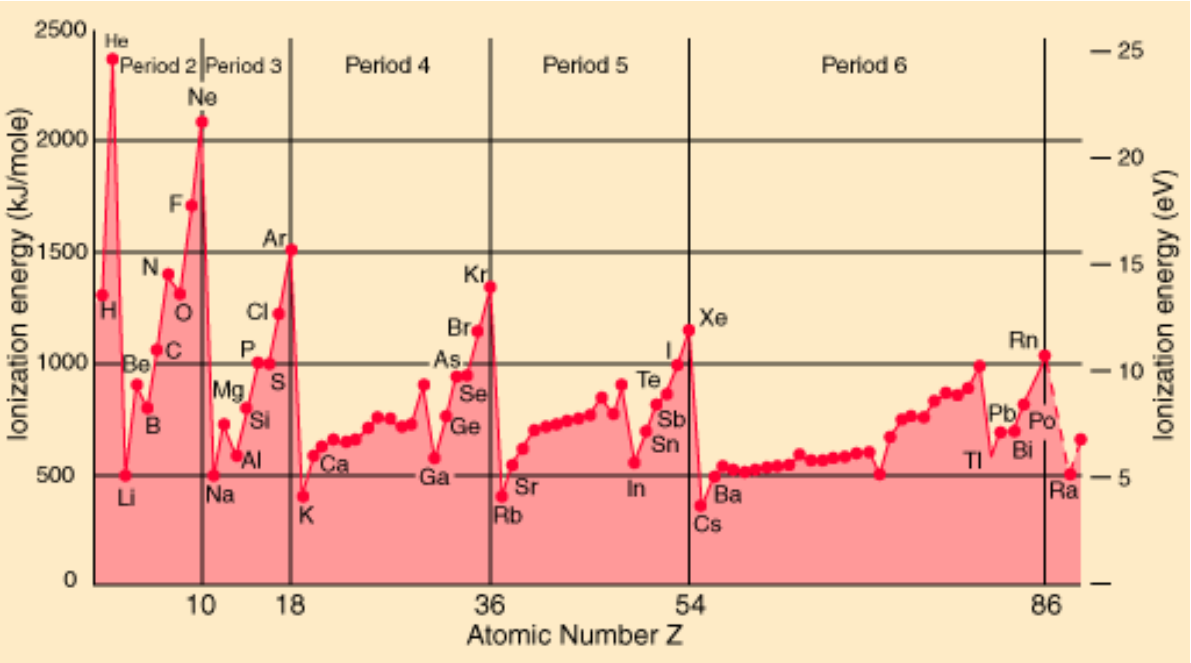


Abb. 16.13: Ionisierungsenergien der Elemente, angegeben in eV und kJ/mol. Man beachte den erheblichen Unterschied zwischen den Alkalimetallen und den Edelgasen.

dingungen verhält sich das Bohrsche Atom klassisch? Ein Elektron, dass sich auf einer Kreisbahn mit Radius

$$r_n = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2 \tag{16.64}$$

bewegt, strahlt Licht einer Frequenz ab, die der Umlauffrequenz entspricht. Aus der Geschwindigkeit v_n

$$v_n = \frac{e}{\sqrt{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m_e \cdot r_n}} \tag{16.65}$$

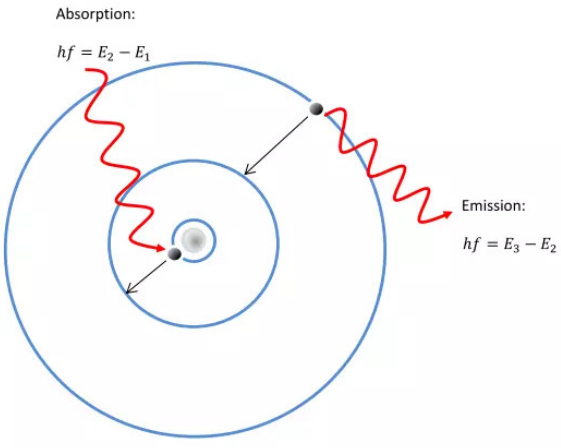


Abb. 16.14: Emission und Absorption von Licht im Bohrschen Atommodell. Beim Wechsel eines Elektrons auf eine tiefere Bahn wird Energie frei gesetzt (Emission eines Photons). Zum Wechsel in einen höheren Orbit muss Energie absorbiert werden. Diese Energie kann in Form eines Photons geeigneter Energie erfolgen.

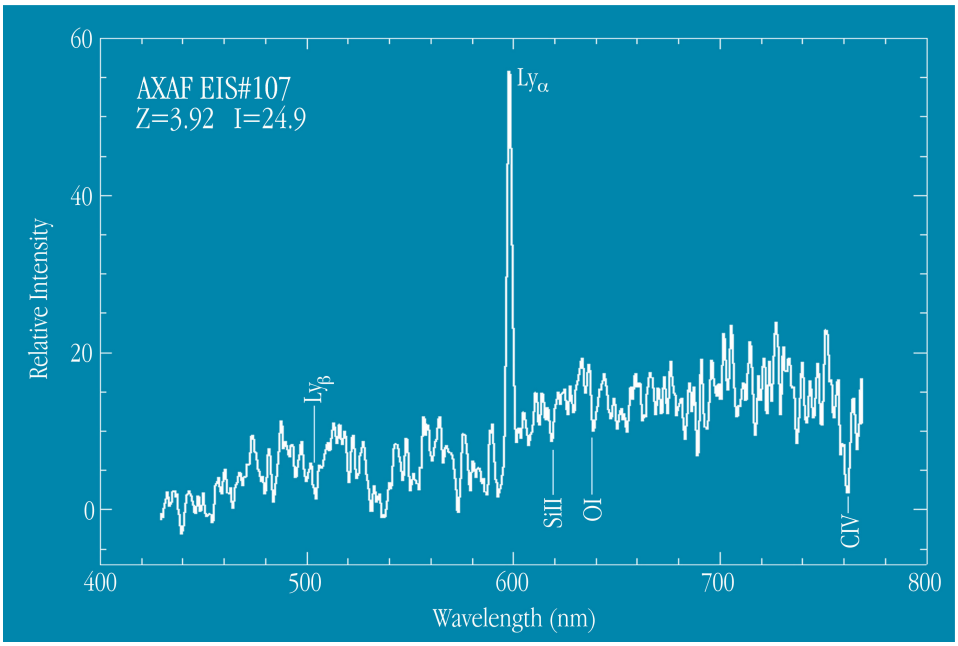


Abb. 16.15: Spektrum der weit entfernten Galaxis EIS 107 [**?**].

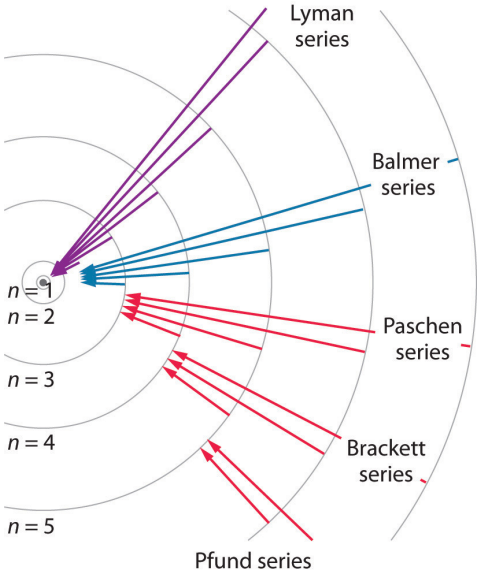


Abb. 16.16: Lyman-, Balmer-, Paschen-, Brackett- und Pfund-Serien im Wasserstoffatom mit Angabe der Wellenlängen für Emission und Absorption.

lässt sich die zugehörige Frequenz ν_n für eine Quantenzahl n berechnen:

$$\begin{aligned} \nu_n &= \frac{v_n}{2\,\pi \cdot r_n} \\ \nu_n &= \frac{e}{\sqrt{2\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m_e \cdot r_n^3}} \\ \nu_n &= \frac{m_e \cdot e^4}{8\,\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \frac{2}{n^3} \end{aligned} \tag{16.66}$$

Dazu nehmen wir extrem große Radien an, wie beispielsweise ein Bahnradius von 1 cm. Die Hauptquanten ist dann nahe bei 10 000. Bei einem solchen Abstand zum Kern sollten Quanteneffekte gering ausfallen und die kinetische Energie des Elektrons nur geringfügig kleiner sein im Vergleich zum Wasserstoff Ionisationspotenzial. Ein optischer Übergang (Vereinfachung: $n_i \to n$; $n_f \to n - p$, p=1, 2, 3, ...)

$$\begin{aligned} \nu_{if} &= \frac{m_e \cdot e^4}{8\,\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \\ \nu_{if} &= \frac{m_e \cdot e^4}{8\,\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \left(\frac{1}{(n-p)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ \nu_{if} &= \frac{m_e \cdot e^4}{8\,\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \left(\frac{2\,n \cdot p - p^2}{n^2 \cdot (n-p)^2} \right) \\ \nu_{if} &= \frac{m_e \cdot e^4}{8\,\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \frac{2\,p}{n^3} \end{aligned} \tag{16.67}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass

$$\begin{aligned} 2\,n \cdot p - p^2 &\approx 2\,n \cdot p \\ (n-p)^2 &\approx n^2 \end{aligned} \tag{16.68}$$

Für p=1 ergibt sich dieselbe Frequenz wie für ein klassisch kreisendes Elektron (Gl. 16.66)! Klassische Physik und Quantenphysik stimmen also im Limit großer Quantenzahlen überein (Bohrsches Korrespondenzprinzip).

Ritzsches Kombinationsprinzip

Das empirisch gefundene Prinzip von Ritz [**?**] besagt, dass sich die Frequenz einer unbekannten Spektrallinie in einfacher Weise durch Addition und Subtraktion der Frequenzen bekannter Spektrallinien bestimmen lässt (Abb. 16.17). Linien der Spektren von Elementen könnten damit aus vorhandenen Linien vorhergesagt werden. Da die Lichtfrequenz proportional zur reziproken Wellenlänge ist, kann das Ergebnis auch über die Energieeinheit der Molekülphysik, die Wellenzahl ausgedrückt werden. Das Ritzsche Kombinationsprinzip gilt für alle Atome und Moleküle. Allerdings hat es nur für Wasserstoff und wasserstoffähnliche Systeme diese einfache Form. Im Jahr 1889 veröffentlichte

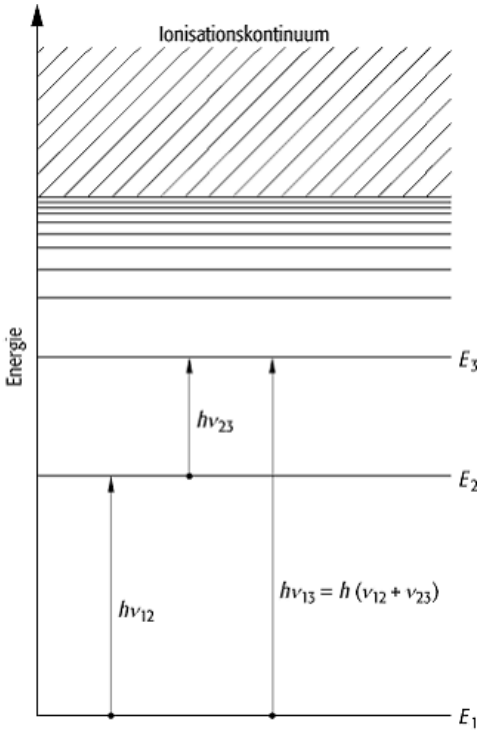


Abb. 16.17: Schema zur Ermittlung unbekannter Spektrallinien aus bekannten Emissions- bzw. Absorptionsübergängen nach dem Ritzschen Kombinationsprinzip.

Rydberg Messungen zu Natrium und fand die Vorsagen des Ritzschen Kombinationsprinzips bestätigt [**?**]. Wir betrachten das Beispiel der Ly_β und H_α Emissionen und zeigen, wie man das Konzept anwendet, um die Ly_α-Linien zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_{21}} &= \frac{1}{\lambda_{31}} - \frac{1}{\lambda_{32}} \\
\frac{1}{\lambda_{21}} &= R_\infty \left(\left(\frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) - \left(\frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \right) \\
\frac{1}{\lambda_{21}} &= R_\infty \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)
\end{aligned} \tag{16.69}$$

Anwendungen^{4LP}

Im Jahr 1931 untersuchten Birge und Menzel die Isotope des Sauerstoffs [**?**]. Dabei stellten sie leichte Unterschiede in der Masse fest, die sie zu dem Schluss kommen ließen, dass es möglicherweise ein schwereres Wasserstoff-Isotop ($^2_1\mathrm{H}$) geben könnte. Sie konnten sogar das Verhältnis der Isotope angeben, nämlich 1/4500. Schwerer Wasserstoff enthält

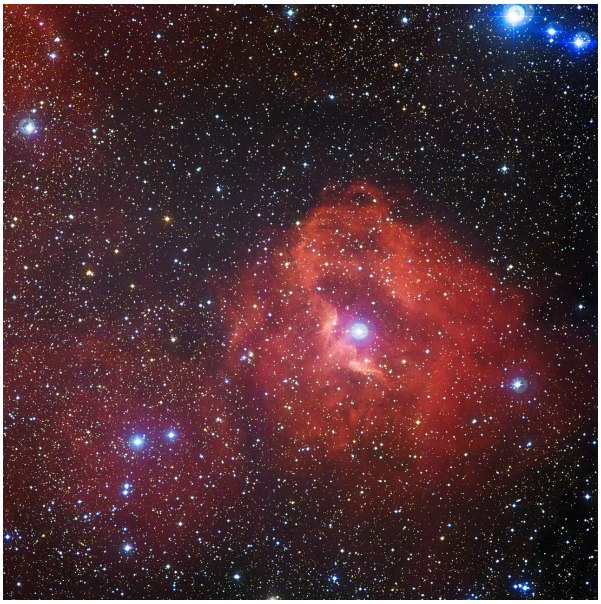


Abb. 16.18: Der Gum 41-Nebel ist 7 300 Lichtjahre von der Erde entfernt und zeigt Wasserstoff-Balmeremission. Auf dem Photo scheint der Nebel dicht und hell zu sein, was aber nicht stimmt. Wenn ein Raumfahrer diesen Nebel durchfliegen würde, würde man den Nebel aus nächster Nähe kaum wahrnehmen. Das ist auch der Grund, warum Gum 41 erst Mitte des 20ten Jahrhunderts entdeckt wurde.

neben dem Proton noch ein Neutron. Im Jahr 1931 wies Urey[23] das Isotop Deuterium anhand seiner Balmer-Emissionslinien nach [**?**].

Ein Beispiel aus der Astrophysik

Wasserstoff ist mit Abstand das häufigste chemische Element im Universum. Lichtemission aus Wasserstoffwolken wird deshalb standardmäßig bei der Analyse kosmischer Objekte verwendet. Abb. 16.18 zeigt eine Aufnahme des La-Silla-Observatorium. Inmitten der Wasserstoffwolke Gum 41 geben heiße junge Sterne energiereiche Strahlung ab, die den umgebenden Wasserstoff in einem charakteristischen roten Farbton leuchten lassen. Ein anderes Beispiel ist der Elefantenrüsselnebel (Abb. 16.19), hier gezeigt in einer Detailaufnahme, wobei sich die spektrale Analyse auf die so genannte H_α des Wasserstoff[24] konzentriert. Der Nebel ist ein aktives Sternentstehungsgebiet und weist Sterne

[23] The Nobel Prize in Chemistry 1934 was awarded to Harold Clayton Urey *for his discovery of heavy hydrogen.*

[24] *Lexikon:* Die $\mathbf{H}_\alpha$-Balmerlinie ($E_2 \leftarrow E_3$) bei einer Wellenlänge von 656.28 nm bezeichnet in der Astronomie und Physik die hellste Spektrallinie des angeregten Wasserstoffs im optisch sichtbaren Spektralbereich. Die H_α-Linie ist von Bedeutung für die Sonnenbeobachtung, insbesondere der Chromosphäre (H_α-Teleskop). Abb. 16.20 zeigt einen Vergleich von Weißlicht- und H_α-Beobachtung der Sonne. Im H_α-Licht beobachtet man Aktivität der Sonne, wie beispielsweise Protuberanzen am Sonnenrand und die zellenartige Struktur der Chromosphäre. Weiter werden mit Hilfe von H_α unter



Abb. 16.19: Der Elefantenrüsselnebel, 2 400 Lj entfernt im Sternbild Kepheus, ist ein H-II-Bereich bestehend aus Staub, Gas, sowie jungen Sternen (circa 10^6 a) und Protosternen.

im Alter von nur 10^5 Jahren auf. Licht massereicher Sterne in der Umgebung ionisiert und komprimiert den Rand der Wolke. Auf der anderen Seite drückt der Wind junger Sterne im Innern der Wolke das Gas von der Mitte nach außen und führt in der Summe zu einer Gaskompression im Nebel, der die Bildung von Protosternen ausgelöst.

Weitere Beispiele aus der Astrophysik

Abb. 16.21 zeigt ein Sonnenspektrum, aufgenommen bei einer Sonnenfinsternis. Klar erkennt man, dass der Hauptteil der vom Sonnenrand emittierten Strahlung im sichtbaren Bereich von Balmerlinien des Wasserstoffs stammen.

Im Jahr 1967 hatten Partridge und Peebles[**?**] die Idee, dass junge Galaxien mit hohen Rotverschiebungen, die Lyman-α Strahlung aussenden,[25] ein geeigneter Sensor für großräumige Strukturen sein könnten. Diese fernen Galaxien mit hoher Lyman-α-Emission, sogenannte Lyman-α-Emitter, können genutzt werden, um das kosmologische Standardmodell bei großen Rotverschiebungen zu testen und Einblicke in die Umgebung dieser Galaxien zu ermöglichen.

Wie entdeckt man Regionen in einer Galaxie, in denen sich neue Sterne bilden? Die Lyman-break galaxy Methode beruht auf der Beobachtung, dass Strahlung mit Photonenenergien, die kurzwelliger ist als die Lyman-Grenze (91.2 nm) nahezu vollständig vom umgebenden neutralem Gas absorbiert wird. Im Bezugssystem der Galaxie führt das zu einem Abfall der Lichtintensität unterhalb der Lyman-Grenze. Diesen markanten Abbruch kann man nutzen, um Bereiche, in denen neuen Sterne entstehen, aufzuspüren.

anderem Gasnebel untersucht.

[25] *Lexikon:* Als **Lyman-α-Emitter** [**? ?**] werden extragalaktische Strahler bezeichnet, die Emission von Ly$-\alpha$ Strahlung zeigen, siehe Abb. 16.22. Die relativistische Rotverschiebung deutet darauf hin, dass es sich um Objekte aus der Zeit der Entstehungszeit der Galaxien etwa 10^9 Jahre nach dem Urknall handelt. Die Lyman-α Spektrallinie entsteht bei der Rekombination von Elektronen mit ionisierten Wasserstoffatomen. Die Strahlung wird emittiert, wenn das Elektron vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand übergeht.

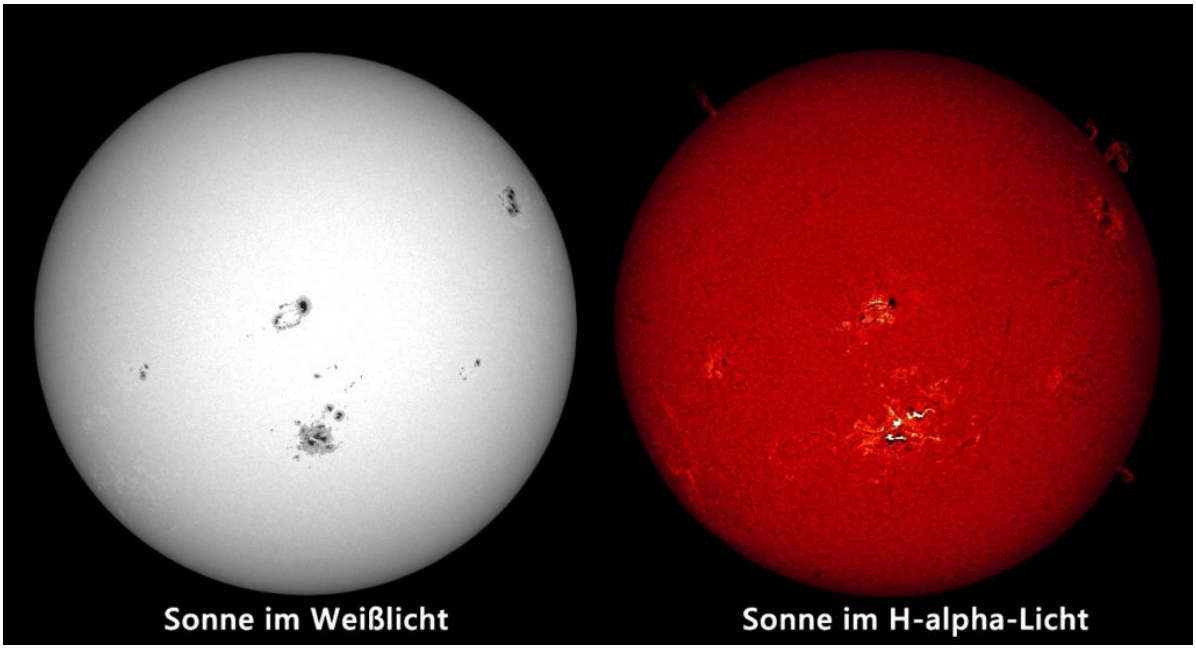


Abb. 16.20: Vergleich der Emission der Sonne im sichtbaren Bereich und auf der Wasserstoff H_α Spektrallinie.

Allerdings wird kurzwelliges Licht von der Erdatmosphäre absorbiert. Der relativistische Dopplereffekt verschiebt diesen Wellenlängenbereich bei sehr weit entfernten Galaxien in den roten Spektralbereich und kann mit terrestrischen oder Weltraumteleskopen nachgewiesen werden. Abb. 16.23 zeigt das Beispiel einer Galaxie mit einer Rotverschiebung von z=2.012. Für Galaxien mit Rotverschiebungen von z=3 findet man die Lyman-Grenze bei etwa 360 nm [**?**]. Interessant ist auch der Nachweis größerer Rotverschiebungen. Die Herausforderung ist, Techniken zu entwickeln, Signale auch im ferneren Infrarot nachzuweisen. Damit kommt man dem Ziel näher, die Entwicklung in diesen Regionen besser

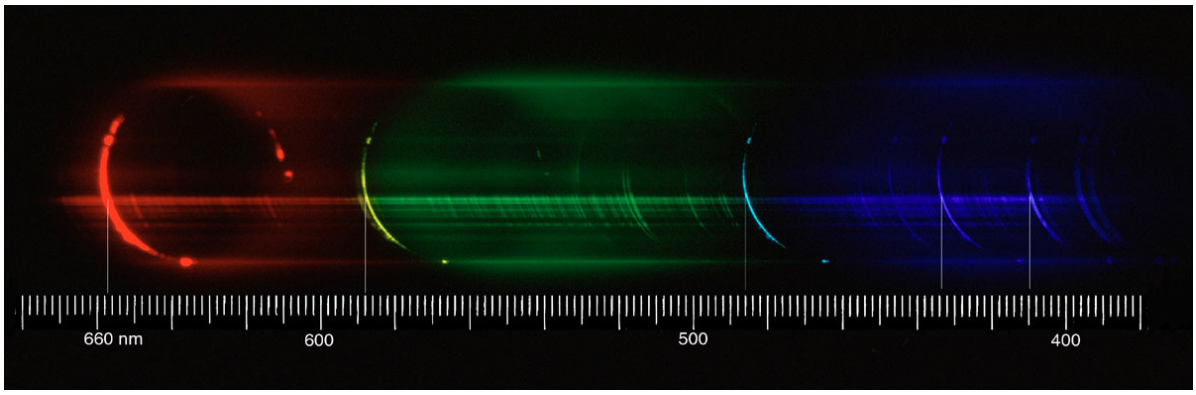


Abb. 16.21: Balmer-Serie des Wasserstoff emittiert von Atomen der Sonnenkorona, aufgenommen bei einer Sonnenfinsternis

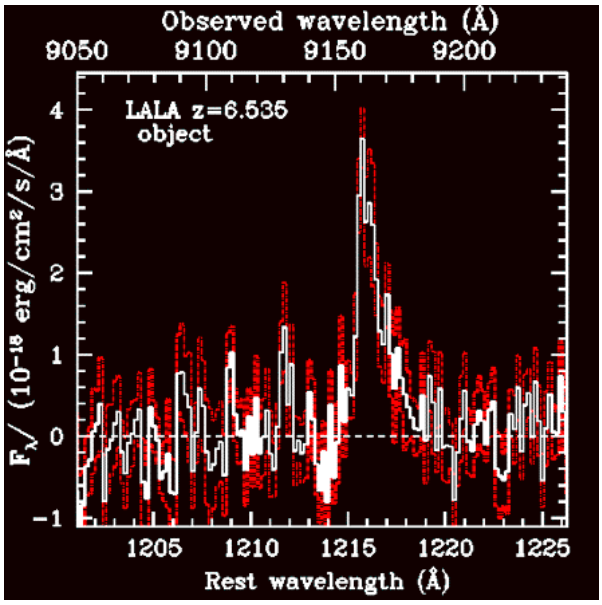


Abb. 16.22: Beispiel für die Lyman-α Emission eines weit entfernten astronomischen Objekts, wobei die Rotverschiebung von z=6.536 berücksichtigt wurde.

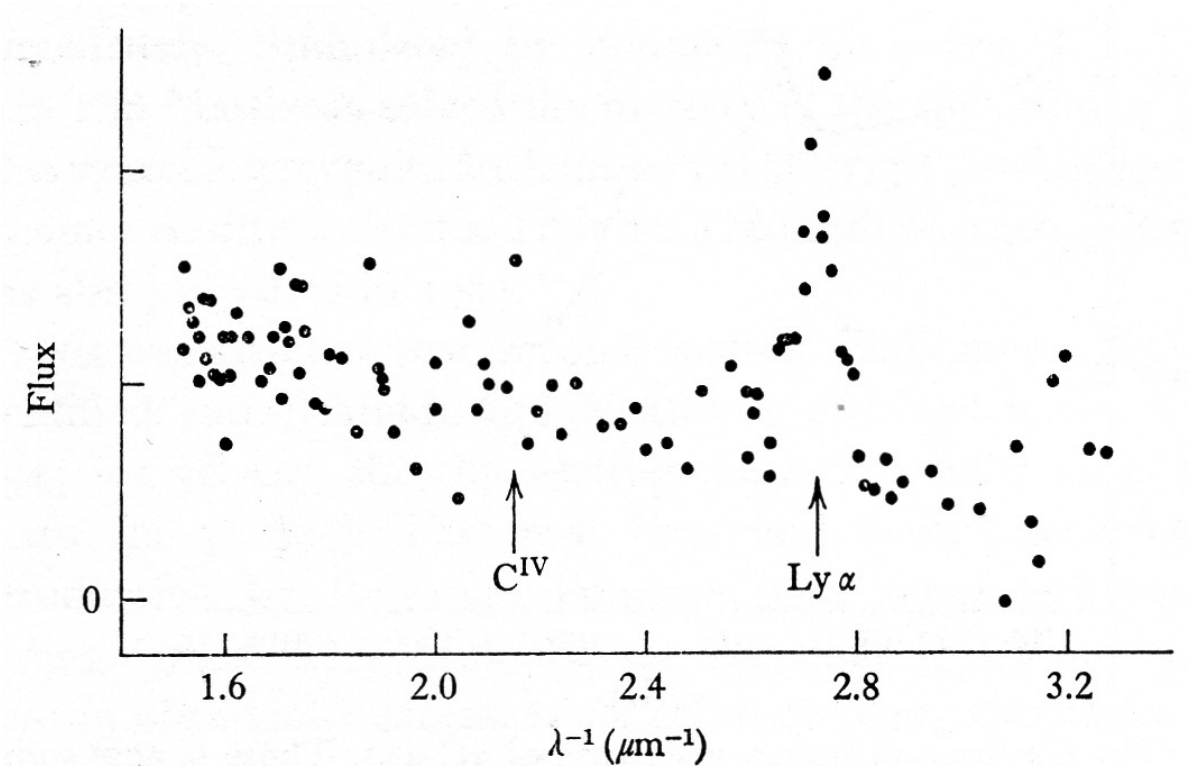


Abb. 16.23: Spektrum von 3C9 mit einer Rotverschiebung von 2.012, wodurch die Lyman-α Linie von 121.6 nm ins Ultraviolette verschoben wird [**?**].

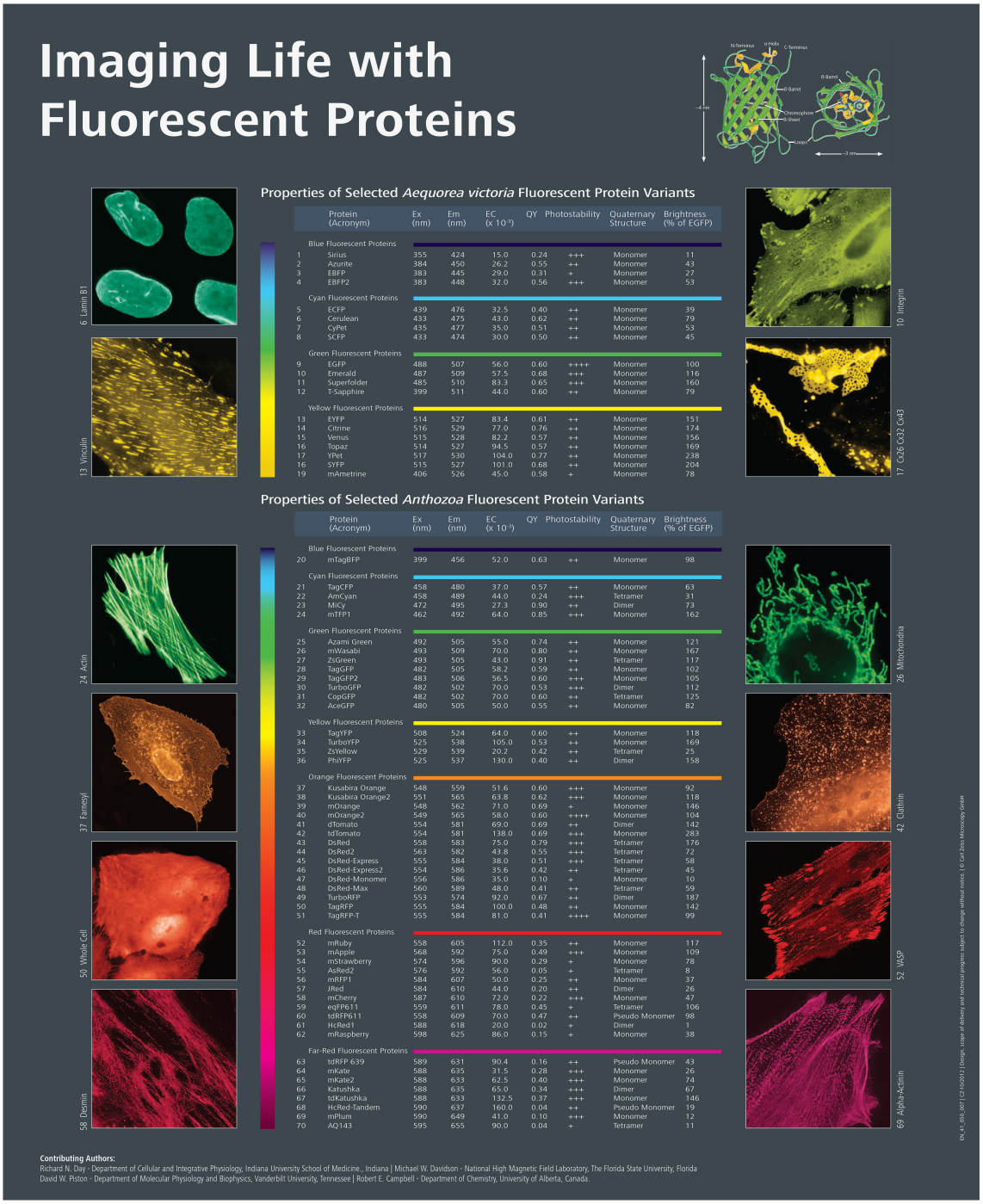
zu verstehen und Sternentstehungsraten zu bestimmen [**?**]. Kürzlich wurden mit Hilfe der Lyman-break galaxy Methode Lyman-break Galaxien (HD1 und HD2, GLASS-z12) bei $z \sim 12 - 13$ entdeckt [**?**].

Are the newly-discovered $z \sim 13$ drop-out sources starburst galaxies or quasars? [?]: The detection of two $z \sim 13$ galaxy candidates has opened a new window on galaxy formation at an era only 330 Myr after the big bang. Here, we investigate the physical nature of these sources: are we witnessing star forming galaxies or quasars at such early epochs? If powered by star formation, the observed ultraviolet (UV) luminosities and number densities can be jointly explained if: (i) these galaxies are extreme star-formers with star formation rates 5-24 times higher than those expected from extrapolations of average lower-redshift relations; (ii) the star formation efficiency increases with halo mass and is countered by increasing dust attenuation from $z \sim 10 - 5$; (iii) they form stars with an extremely top-heavy initial mass function. The quasar hypothesis is also plausible, with the UV luminosity produced by black holes of $\sim 10^8\,M_\odot$ accreting at or slightly above the Eddington rate ($f_{Edd} \sim 1.0$). This black hole mass at $z \sim 13$ would require very challenging, but not implausible, growth parameters. If spectroscopically confirmed, these two sources will represent a remarkable laboratory to study the Universe at previously inaccessible redshifts.

Ein Beispiel aus der Molekülphysik

Fluoreszenz tritt auf, wenn ein Elektron in einem Atom durch die Absorption eines hochenergetischen Photons E_{ph} angeregt wird. Für die Relaxation in den Grundzustand öffnen sich dem System zwei Wege: (i) Das Elektron fällt in den Grundzustand zurück und sendet dabei ein Photon der gleichen Energie E_{ph} aus. (ii) Die Relaxation erfolgt in Schritten und es kommt zur Emission mehrerer niederenergetischer Photonen. Die Wellenlänge der Photonen kann dabei im sichtbaren Bereich liegen. Solche fluoreszierende Farbstoffe können die Farben von Kleidung im Sonnenlicht heller erscheinen lassen. Hier wird ultraviolette Strahlung in sichtbares Licht umgewandelt. Ein anderes Beispiel sind Leuchtstoffröhren, die effizient (Faktor vier gegenüber Glühbirnen) elektrische Energie in sichtbares Licht umsetzen. Abb. 16.25 zeigt einen Skorpion, der von einer UV-Lampe beleuchtet wird. Proteine nahe der Hautoberfläche emittieren ein charakteristisches blaues Fluoreszenzlicht. Fluoreszierende Moleküle sind in der Biologie aufgrund ihrer Vielseitigkeit und Empfindlichkeit weit verbreitet. Die Messung der Fluoreszenz ist eine zerstörungsfreie Methode, um die Eigenschaften und die Dynamik von Biomolekülen zu analysieren, siehe Abb.16.24. Fluoreszierende Sonden werden beispielsweise verwendet, um Proteine zu lokalisieren und ihre Aktivierung nachzuweisen.

Characterization of the fluorescence intensity and color tonality in the exoskeleton of scorpions [?]: Scorpions are a mesodiverse and nocturnal group of arachnids inhabiting most biomes worldwide. Different species of scorpions have divergent adaptations to the substrate they live in, but most of them share an intriguing characteristic: their exoskeleton contains fluorophores that emit blue-greenish fluorescence under ul-



Carl Zeiss Microscopy
microscopy@zeiss.com
www.zeiss.com/microscopy

ZEISS
We make it visible.

Abb. 16.24: Beispiele für den Einsatz fluoreszierender Stoffe zur Sichtbarmachung von Proteinen in der Mikroskopie.



Abb. 16.25: Fluoreszenz im Tierreich am Beispiel eines mit ultraviolettem Licht bestrahlten Skorpions. Der biologische Zweck ist noch Gegensatz der Diskussion [**?**].

traviolet radiation. Although there are some reports in the literature on the study of fluorescence in scorpions, the biological functionality of this light emission is currently unknown and is under debate. In this work, the properties of emission from the scorpion's exoskeleton are studied by means of digitally processed photographs taken of living specimens under ultraviolet illumination and complemented with standard spectroscopic measurements of emission and excitation spectra. With the aim of identifying possible correlations between the fluorescence, the characteristics color of the exoskeleton and the biology of the scorpions, 4 families, 9 genera and 24 species were studied. Our results suggest that the intensity of fluorescence is heterogeneous throughout the scorpions exoskeleton studied here in such a way that pedipalps and metasomal segments fluoresce more intensely than the mesosomal segments. The spectrum of fluorescence across species is practically identical, suggesting that the same fluorophores are present in their exoskeletons. However, the fluorescence intensity emitted by each species varies according to their characteristic color (associated with the exoskeleton optical reflectance). Since the coloration of the exoskeleton is determined by the concentration of melanin and other pigments according to the substrate where scorpions live in, we conclude by suggesting that fluorescence may correlate directly to the ecomorphotype of the scorpions.

Bei Briefmarken werden seit einiger Zeit phosphoreszierende Stoffe[26] beigemengt, so dass

[26] *Lexikon:* **Phosphoreszenz** ist die Eigenschaft eines Stoffes im Dunkeln nachzuleuchten. Im Gegensatz zur Fluoreszenz endet die Lichtemission nicht typischerweise nach spätestens 10^{-6} s, sondern es kommt zur Lichtaussendung im Bereich von Stunden. Phosphoreszierende Stoffe werden auch Luminophore genannt, da sie scheinbar *Lichtspeicher* darstellen. Die Ursache für die langen Halbwertszeiten liegt in der Besetzung langlebiger angeregter Zustände, bei denen die Rate der Lichtemission stark herabgesetzt ist.

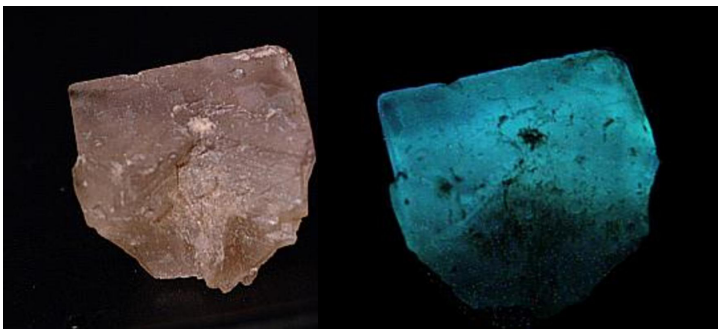


Abb. 16.26: Thermolumineszenz von Flusspalt.

sie bei Bestrahlung mit ultraviolettem Licht anfangen zu leuchten. Man verwendet diese Methode, um den automatischen Poststempelmaschinen die Lokalisierung der Briefmarke auf den Umschlägen zu erleichtern und unfrankierte Briefe auszusondern.

Ein Beispiel aus der Archäologie

Eine weitere Methode, über die Lichtemission Informationen zu extrahieren, ist die Thermolumineszenz [**?**]. Dazu betrachtet man Fundstücke, die einst einer Hitzeeinwirkung ausgesetzt waren (s. unten). Durch Einwirkung ionisierender oder kosmischer Strahlung wird Energie in langlebigen Energiezuständen gespeichert und akkumuliert. Das Phänomen der Thermoluminesz kann durch ein einfaches Modell beschrieben werden. In den Materialien gibt es Fehler im Gitteraufbau, sowie Fremdatome. Solche Störungen zeichnen sich im Vergleich zum übrigen Festkörper durch ein Ladungsdefizit aus, und stellen Potenzialmulden dar. Bestrahlt man die Probe, entstehen an diesen Stellen Ladungsträger, die größtenteils sofort wieder rekombinieren. Ein geringer Anteil allerdings diffundiert und kann an Störstellen eingefangen werden. Solche metastabilen Zustande können Energie über lange Zeitspannen speichern. Erwärmen regt Gitterschwingungen an und Elektronen können die Potenzialmulde verlassen und unter Aussendung von Strahlung rekombinieren. Beispiele sind Keramiken, vulkanische Asche, Kohlestücke oder Mineralien. Für die Analyse wird das Fundstück erhitzt. Die zugeführte Wärme liefert die notwendige Zusatzenergie, um die angeregten Energiezustände zu entleeren, wobei es zur Lichtemission kommt. Abb. 16.26 zeigt das Phänomen am Beispiel eines Flusspaltkristalls, der bei einer Erwärmung auf 230 ^{o}C anfängt, Thermolumineszenz zu zeigen. Aus der Emissionskurve (Glühkurve) (Abb. 16.27) kann auf das Alter der Probe geschlossen werden. Nach der Erhitzung sind alle langlebigen Zustände entvölkert. Die Auswirkung der Erhitzung ist also, dass die interne Uhr der Probe auf den Wert NULL gesetzt wird. Die Thermolumineszenz ist eine Methode, die Radiokarbonmethode (Kapitel *Kerne*) zu ergänzen.

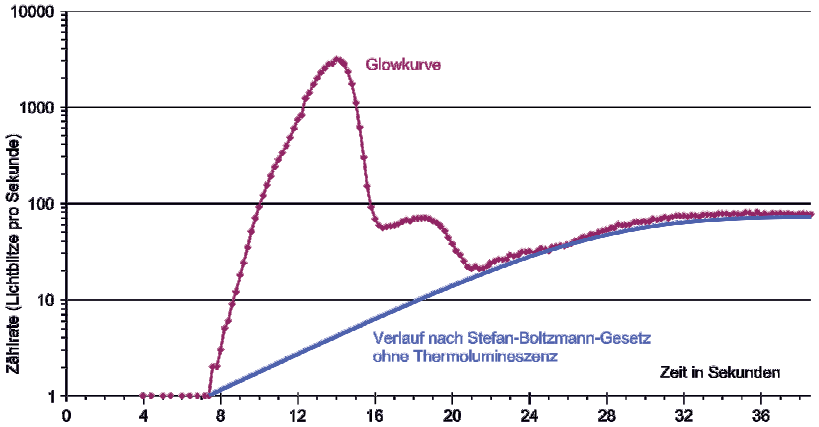


Abb. 16.27: Glühkurve im Vergleich zur Lichtemission eines Schwarzen Strahlers.

Ein Beispiel aus der Meterologie

Übergänge zwischen Energiezuständen in Atomen lassen sich nutzen, um genau gehende Atomuhren zu realisieren. Um eine möglichst hohe Zeitauflösung zu erreichen, benötigt man langlebige angeregte Zustände in den Atomen (hohe mittlere Lebensdauer Δt des angeregten Zustands). Das führt dazu, dass sich die Energiezustände nicht stark durch die Unschärferelation ($\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$) verbreitern. Dieses führt zu Spektrallinien mit extrem geringer Linienbreite, die man als hoch genauen Frequenzstandard verwenden kann. Speziell nutzt man die so genannte Hyperfeinstruktur[27] der Energieniveaus aus. Wichtig ist in diesem Zusammenhang nur, dass der Abstand der Energieniveaus gering ist, so dass die Übergänge zwischen den Energieniveaus im Mikrowellenbereich liegen. Im Experiment durchqueren die Atome einen Mikrowellenresonantor.[28] Der Grundidee der Methode (Abb. 16.28) ist, dass nur Atome im Grundzustand den Eingangsfilter -genannt Polarisator- ohne Ablenkung passieren können. Innerhalb der Resonatorzelle werden die Atome vom Grundzustand in einen höheren Energiezustand angeregt. Nur wenn die Anregungsfrequenz exakt mit dem Abstand der Energieniveaus abgestimmt ist, können die Atome in den angeregten Zustand gelangen. Aufgrund der geringen Linienbreite, ist dies nur in einem äußerst schmalen Frequenzband möglich. Im Experiment wird die Frequenz unablässig nachjustiert und garantiert damit eine ständige Überprüfung der eingestell-

[27] *Lexikon:* Die **Hyperfeinstruktur** bezeichnet in der Spektroskopie die Aufspaltung einer Spektrallinie in mehrere Komponenten. Die Aufspaltung wird durch nukleare Effekte verursacht und kann nur mit Instrumenten mit hoher spektraler Auflösung beobachtet werden. In der **Feinstruktur** ist die Linienaufspaltung das Ergebnis von Energieänderungen, die durch die Spin-Bahn-Kopplung der Elektronen erzeugt werden. Die Linienaufspaltung der Hyperfeinstruktur resultiert aus der Wechselwirkung der Elektronen mit dem Spin des Atomkerns, siehe auch das Kapitel *Beyond Bohr*.

[28] *Lexikon:* Das **Mikrowellen-Verfahren** zur Realisation einer Atomuhr wird seit 1967 angewendet, um die **Zeiteinheit Sekunde** zu definieren:
The SI unit of time is the second defined as follows: *The 13th Conférence Générale des Poids et Mesures decides: The second is the duration of 9 192 631 770 periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of the caesium 133 atom.*

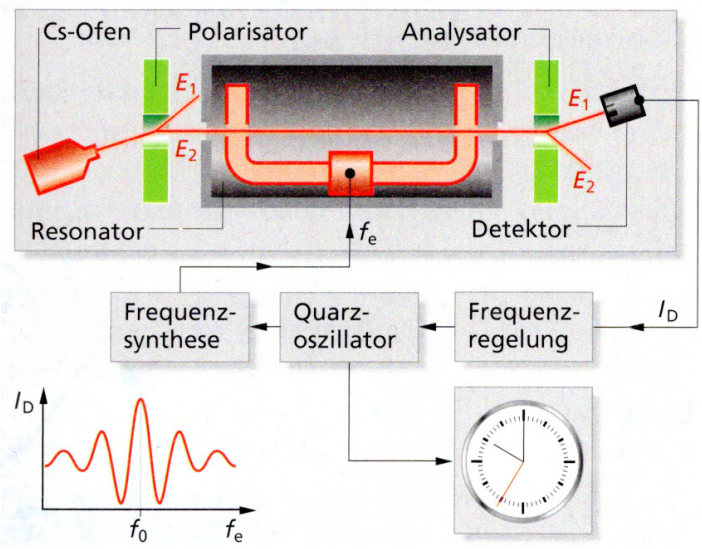


Abb. 16.28: Schematischer Aufbau einer Cäsium-Atomuhr [?].

ten Bedingungen. Am Ausgang der Zelle können nur Atome im angeregten Zustand den Ausgangsfilter -genannt Analysator- passieren. Da die Frequenz des atomaren Übergang nicht von Umwelteinflüssen beeinflusst ist, erreicht man eine Genauigkeit im Gang der Atomuhr von $1{:}10^{14}$.

Ein Beispiel aus der Atomphysik

We never experiment with just one electron or atom or (small) molecule. In thought-experiments we sometimes assume that we do; this invariably entails ridiculous consequences... [?]

Erwin Schrödinger, 1952

Es war lange Zeit unmöglich, die Energiesprünge in einem EINZELNEN Atom direkt zu beobachten. Dies gelang erst durch die Entwicklung von Fallen (Abb. 16.29) für einzelne Atome [?].[29] Abb. 16.30 zeigt die Möglichkeiten, eine genau bekannte Menge an Kalzium-Ionen in einer Falle zu speichern.

Link to video `How particle accelerators work`

Im Experiment [?] regt ein Laserstrahl ein Atom in einer Paul-Falle[30] in einen angeregten Zustand an. Nach einer gewissen Zeit wechselt das System wieder in den Grund-

[29] The Nobel Prize in Physics 1989 was divided, one half awarded to Norman F. Ramsey *for the invention of the separated oscillatory fields method and its use in the hydrogen maser and other atomic clocks*, the other half jointly to Hans G. Dehmelt and Wolfgang Paul *for the development of the ion trap technique*

[30] *Lexikon:* **Paul-Falle** arbeiten, indem sie geladene Teilchen mit Hilfe von elektrodynamischen Feldern einfangen, die ein Quadrupolpotential erzeugen, um das Entweichen der Teilchen zu verhindern.

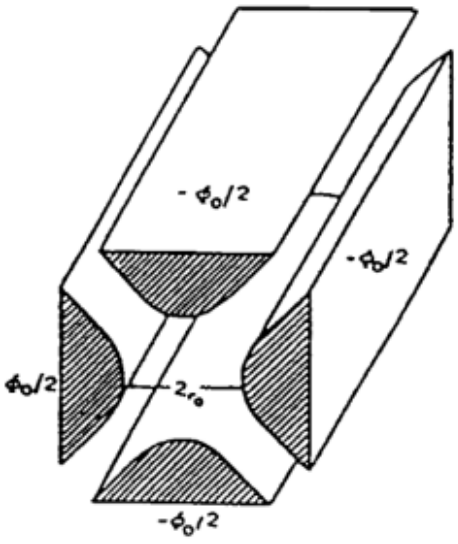


Abb. 16.29: Schematischer Aufbau einer Paul-Falle, mit der sich Ionen mit Hilfe elektrischer Wechselfelder fangen lassen.

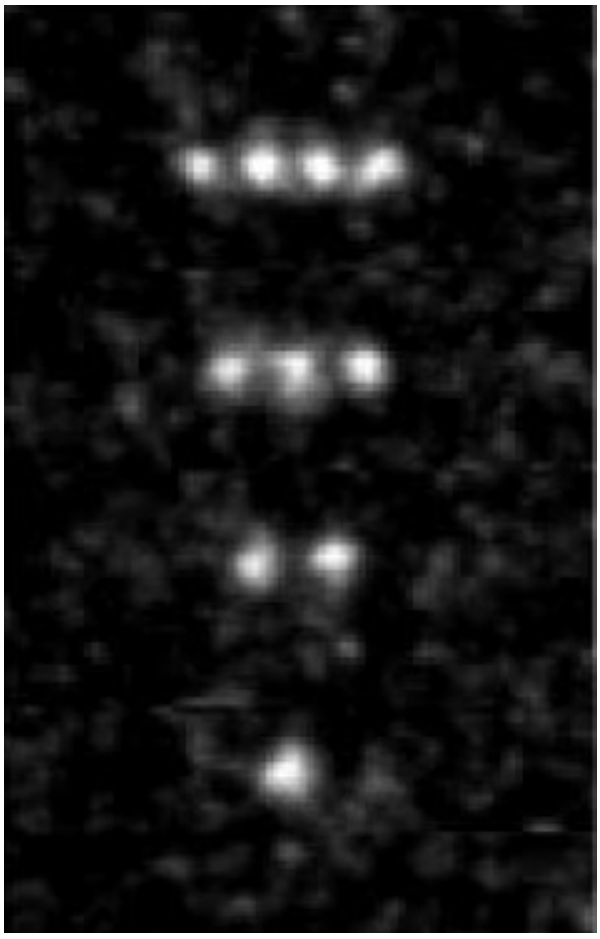


Abb. 16.30: Speicherung einer definierten Anzahl an Kalzium-Ionen in einer Radiofrequenz-Falle [**?**].

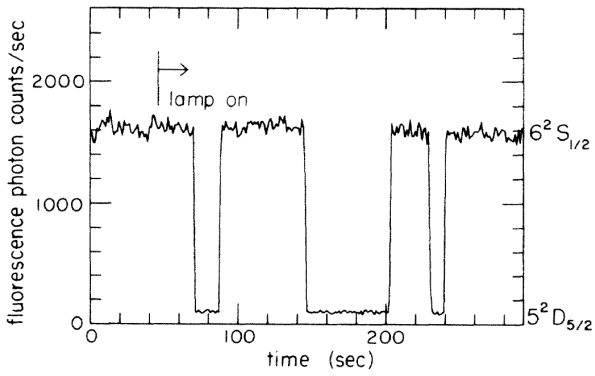


Abb. 16.31: Das unregelmäßig auftauchende Fluoreszenzsignal ist ein Indiz dafür, dass ein einzelnes Ba^+-Ion diese Quantensprünge ausführt [**?**].

zustand über, wobei es die Anregungsenergie durch die Emission eines Photon abgibt. Aus dem Grundzustand kann das Laserlicht das Atom direkt wieder in den angeregten Zustand anregen. Das Atom blinkt in unregelmäßiger Weise, da der Übergang statistisch erfolgt. Den mittleren Zeitabstand kann man aus der Heisenbergschen Unschärferelation abschätzen. Im Experiment wird gemessen, in welchen Abständen die Lichtaussendung erfolgt, siehe Abb. 16.31. Man beobachtet also die Abgabe quantisierter Energiepakete aus einem einzelnen Atom! Es sei angemerkt, dass das hier vorgestellte Experiment die Messmethode der Quantenphysik aufgreift. Man erhält den wahrscheinlichsten Messwert in einem Experiment aus einer Vielzahl an Einzelmessungen. Dazu führt man

- viele Messungen an einem einzelnen Objekt aus.
- eine Messung an einem Ensemble aus gleichen Objekten aus.

Paul-Fallen können nur mit einem oszillierenden und nicht mit einem statischen elektrischen Feld realisiert werden.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Die Wellenlänge einer Spektrallinie ist umgekehrt proportional[31]

(a) zum Radius

(b) zur Energie

(c) zur Geschwindigkeit

(d) zur Quantenzahl

(e) Stimmt alles nicht!

Aufgabe 2.2: Die Verhältnis der Flächen A_2/A_1, die das Elektron in den Quantenzuständen n=2 und n=1 Wellenlänge überstreicht ist:[32]

(a) 1:2

(b) 1:16

(c) 8:1

(d) 16:1

Aufgabe 2.3: Die Energie des ersten angeregten Zustands im Wasserstoffatom ist:[33]

(a) -13.6 eV

(b) -3.4 eV

(c) -1.51 eV

(d) -0.85 eV

Aufgabe 2.4: Die Energie der zweiten Bohrschen Bahn des Wasserstoffatoms mit n=2 beträgt -328 kJ/mol^{-1}, daher wäre die Energie der Bohr-Bahn mit n=4:[34]

(a) -41 kJ/mol^{-1}

(b) -1312 kJ/mol^{-1}

(c) -164 kJ/mol^{-1}

(d) -382 kJ/mol^{-1}

Aufgabe 2.5: Die Gesamtenergie des Elektrons im Wasserstoffatom[35]

[31] Antwort: (b)
[32] Antwort: (d)
[33] Antwort: (b)
[34] Antwort: (d)
[35] Antwort: (a)

(a) Nimmt zu, wenn sich das Elektron vom Kern entfernt.

(b) Nimmt ab, wenn sich das Elektron vom Kern entfernt.

(c) Da ändert sich nichts.

Aufgabe 2.6: Ein elektronischer Übergang zur ersten Bohrschen Bahn führt[36]

(a) zur Aufnahme von Energie

(b) zur Abgabe von Energie.

(c) Sowohl Abgabe als auch Aufnahme von Energie.

(d) Kann man nicht vorhersagen!

Aufgabe 2.7: Welche der folgenden Aussagen wird ist nicht durch die Bohrsche Theorie unterstützt:[37]

(a) Die Energie der Elektronen auf den Bahnen ist quantisiert.

(b) Das Elektron auf der innersten Bahn hat die geringste Energie.

(c) Elektronen bewegen sich auf unterschiedlichen Bahnen um den Kern.

(d) Die Geschwindigkeit und der Ort des Elektrons kann nicht gleichzeitig exakt bestimmt werden.

Aufgabe 2.8: Der sichtbare Bereich des Wasserstoffspektrums enthält die folgenden Serien:[38]

(a) Lyman

(b) Balmer

(c) Paschen

(d) Brackett

(e) Rydberg

Aufgabe 2.9: Die von Atomen emittierte Strahlung hatte aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation eine natürliche Linienbreite. Auf der Sonnenoberfläche bewegen sich die Atome mit einer Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell. Dies führt zu einem Dopplereffekt, der die Spektrallinien zusätzlich verbreitert. Dieser berechnet sich zu:

$$\Delta\lambda = 0.72 \cdot 10^{-6}\,\lambda \cdot \sqrt{T_K/m_{at}} \tag{16.70}$$

[36] Antwort: (b)
[37] Antwort: (d)
[38] Antwort: (a)-(d)

wobei T_K die absolute Temperatur und m_{at} das Atomgewicht. Berechnen Sie die Dopplerverbreiterung der Balmer-α Emissionslinie, die von den Wasserstoffatomen auf der Sonnenoberfläche (T_K=5 800 K) emittiert wird.

Die natürliche Linienbreite ist mit $0.5 \cdot 10^{-12}$ m gering.

$$\Delta\lambda = 0.72 \cdot 10^{-6} \, (656.3 \cdot 10^{-6} \, \text{nm}) \cdot \sqrt{\frac{5\,800 \, \text{K}}{1}} = 36 \cdot 10^{12} \, \text{m} = 0.036 \, \text{nm} \qquad (16.71)$$

Zusätzlich stattfindende Stöße verbreitern die Linien noch mehr. Insgesamt ist der Effekt so stark, dass das Sonnenspektrum kontinuierlich erscheint.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wovon hängt die Eigenfrequenz eines mathematischen Pendels ab?
2. Welche charakteristische Frequenz hat ein LC-Schwingkreis?
3. Bei Raumtemperatur beobachtet man im Absorptionsspektrum des Wasserstoffs nur die Lyman-Serie. Warum nicht die anderen Serien, wie zum Beispiel die Balmer-Serie?
4. Di Balmer-Serie wurde zuerst entdeckt. Warum eigentlich?
5. Kann man die Lyman-Serie mit dem Auge beobachten?
6. In der Balmer-Formel betrachten sie den Fall, dass n gegen unendlich geht. Ergibt sich aus dieser Betrachtung einen neue physikalische Größe?
7. Welche Bedeutung hat das Ritzsche Kombinationsprinzip?
8. Das Wasserstoffatom hat nur ein Elektron, zeigt aber ein linienreiches Spektrum. Warum?
9. Warum gilt Energieerhaltung, wenn ein Atom von einem höheren in einen niedrigeren Energiezustand wechselt?
10. Unter starkem Elektronenbeschuss emittiert das Wasserstoffatom ein reich strukturiertes Spektrum. Welche Linie ist wohl die intensivste?
11. Kann ein Wasserstoffstoff ein Photon absorbieren, dessen Energie größer ist als 13.6 eV?
12. In welchem Atom (H, He^+ oder Li^{2+}) ist das Elektron am stärksten gebunden?
13. Überlappen die Lyman- und Balmer-Serien?
14. Warum ist die Differenz der Grenzfrequenzen der Ly-α- und der Balmer-Serie gleich der Frequenz der ersten Ly-α-Linie?
15. Wenn Licht durch eine mit Wasserstoffgas gefülltes Volumen propagiert beobachtet man nur Lyman-α Absorptionslinien. Warum ist das so?
16. Welche Wellenlängen werden au einem Wasserstoffgas emittiert, wenn man das Gas mit 12.2 eV Elektronen beschießt?
17. Was ist die kürzeste, was die längste Wellenlänge, die aus Wasserstoff emittiert wird?
18. Auf der einen Seite wird behauptet, dass Elektronen in Atomen diskrete Energiewerte haben. Auf der anderen Seite gibt es Argumente, dass man Energien nicht genau bestimmen kann. Was denken Sie?

19. Warum kann man aus der Beobachtung von scharfen Emissionslinien aus Wasserstoff den Schluss ziehen, dass alle Elektronen dieselbe Ladung tragen?

20. Was hätte es für das Bohrsche Atommodell bedeutet, wenn die Strahlung aus den Atomen kontinuierlich und nicht diskret gewesen wäre?

21. Wasserstoff macht den Hauptteil Materie auf der Oberflächen der Sterne aus. Für die zugehörigen Absorptionslinien findet man die höchste Intensität bei Sternen einer Temperatur von 9 000 K. Im Sonnenspektrum sind sie dagegen schwächer ausgeprägt und in besonders heißen und kalten Sterne findet man sie fast gar nicht. Wie beeinflusst die Oberflächentemperatur der Sterne die Absorptionslinien?

22. Ein Astronom beobachtet Wasserstoff Spektrallinien aus dem Anregungszustand n=320. Kann man diese Linien auch im Labor erzeugen und beobachten?

23. Ist das Bohrsche Atommodell vereinbar mit der Heisenbergschen Unschärferelation?

24. Mit ansteigendem n reduziert sich der Abstand der Energieniveaus. Warum ist das so?

25. Warum hat ein Elektron im Zustand n=1 eine geringere Energie als ein freies Elektron ($n = \infty$)?

26. Was ist ein wasserstoffähnliches Atom und wie unterscheidet es sich von neutralem Wasserstoff?

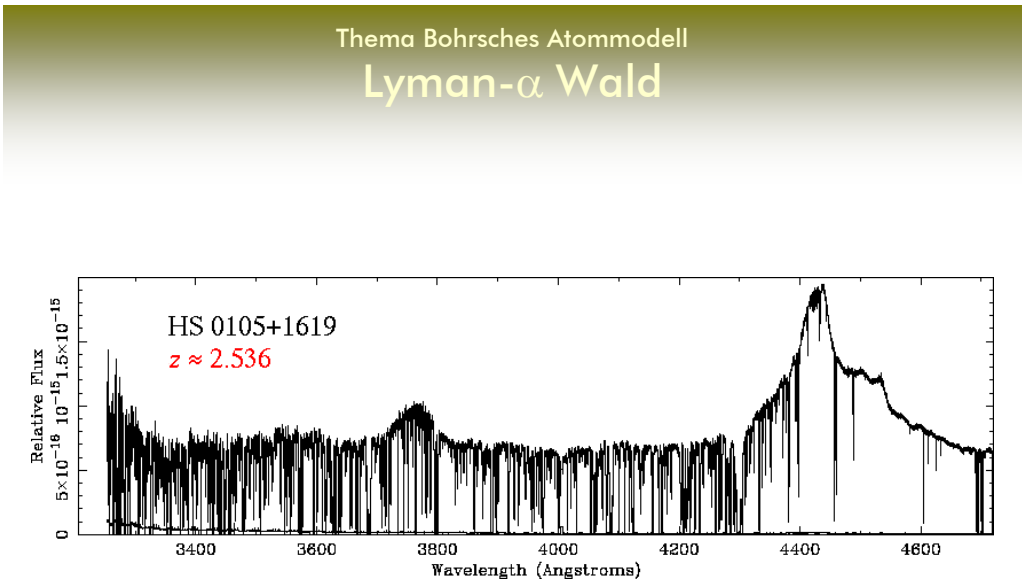
27. Wie ändert sich die Bindungsenergie, wenn sich die Kernladung auf $Z \cdot e$ erhöht?

28. Wie ändern sich die Elektronenradien, wenn sich die Kernladung erhöht?

29. Der erste angeregte Zustand von He^+ entspricht der Grundzustandsenergie von Wasserstoff. Zufall oder gilt das für alle wasserstoffähnlichen Ionen?

30. Die Beschichtung auf der Innenseite von Leuchtstoffröhren absorbiert ultraviolettes Licht und gibt sichtbares Licht ab. Ein Erfinder behauptet, dass er in der Lage ist, den umgekehrten Prozess durchzuführen. Was meinen sie. Ist die Idee patentwürdig?

Lyman-alpha Wald[4LP]



Der intergalaktische Raum ist mit Gas gefüllt. Im Mittel befindet sich in einem Kubikmeter etwa ein Atom. Das ist 10 Milliarden mal weniger als ein Ultrahochvakuum im Labor. Trotzdem hinterlässt das Gas Spuren im Spektrum eines starken Strahlers,[39] beispielsweise eines Quasars.[40]

Das Licht weit entfernter Quasare durchquert auf seinem Weg zur Erde viele intergalaktische Wasserstoffwolken. Wenn die Strahlung eine Wolke durchdringt, absorbiert der dort vorhandene Wasserstoff einen Teil des Lichts. Die Anordnung erinnert an einen kosmischen Diaprojektor, wobei eine entfernte Lichtquelle die Rolle der Glühbirne spielt, und dazwischen liegende Gaswolken sind eine Abfolge von Dias, die die Farbe der Lichtquelle durch Absorbieren von Teilen der Spektrum verändern. Die Absorptionslinien werden

[39] *Lexikon:* Die Absorption durch den **Ly_α-Wald** im Spektrum eines Quasars wurde im Jahr 1965 nachgewiesen. Je weiter man in die Frühphase des Universums zurück geht,m desto größer ist der Anteil von Masse in Form von Gas. Die Absorption durch die Ly_α Übergänge in neutralem Wasserstoffs ist so hoch, dass das Licht einer Stark leuchtenden entfernteren Lichtquelle, unter Berücksichtigung der Rotverschiebung durch eine rotverschobene Ly_α Absorptionslinie, nahezu vollständig absorbieren werden sollte. Eine solche Signatur bezeichnet man als **Gunn-Peterson Effekt** [**?**].

[40] Quasare sind die hellsten Kerne von Galaxien. Ihre enorme Leuchtkraft wird auf die Massenakkretion superschwerer Schwarze Löcher zurückgeführt.

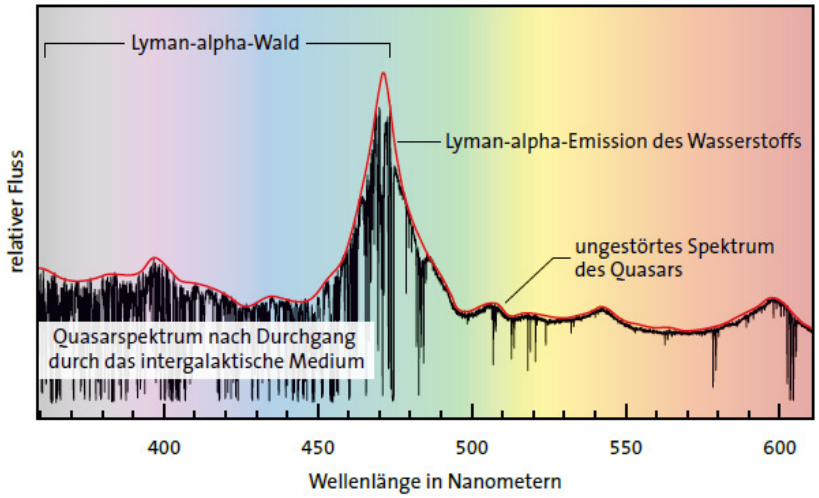


Abb. 16.32: Typisches Spektrums eines weit entfernten Quasars, dessen Strahlung durch Ly-α Absorption galaktischer Wolken in unterschiedlicher Entfernung (Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*) modifiziert ist. Rot eingezeichnet ist das vom Quasar ausgesandte Spektrum mit der dominanten Ly-α Emission [**?**].

also nicht von den Strukturen selbst hervorgerufen, sondern stammen von Wasserstoffwolken, die sich zwischen der Lichtquelle und der Erde befinden. Die Absorption erfolgt im wesentlichen bei der Wellenlänge der Lyman-α-Linie. Absorption durch andere Wasserstofflinien, aber auch andere Elemente, sind ebenfalls nachgewiesen worden. Während sich das Licht des Quasars ausbreitet, ändert sich aufgrund der relativistischen Dopplerverschiebung (siehe Kapitel *Allgemeine Relativitätstheorie*) die Wellenlänge der Strahlung. Deswegen absorbieren die Wasserstoffwolken das Licht des Quasars in Abhängigheit vom Abstand zur Strahlungsquelle bei vielen unterschiedlichen Wellenlängen. Abb. 16.32 zeigt das Spektrum des Quasars HE2347-4342, das bei 470 nm sein Leuchtkraftmaximum hat. Das resultierende Spektrum ist ein Fingerabdruck, da Informationen über den Lichtweg als Absorptionslinien quasi *eingebrannt* sind [**?**]. Jeder der durchquerten Wolken hinterlässt eine Einkerbung im Spektrum des Quasars. Diese scharfen Absorptionslinien im Spektrum dieser weit entfernten astronomischen Objekte nennt man den Lyman-α-Wald [**? ?**].

Aus den Spektren ergeben sich Rückschlüsse auf die Verteilung von interstellarer Materie im Universum. Je mehr Licht des Quasars absorbiert wird, desto höher war der Anteil an neutralem Wasserstoff zu diesem Zeitpunkt im Universum. Aufgrund der steigenden Anzahl an Wasserstoffwolken nimmt die Anzahl der Absorptionslinien mit der Entfernung der Objekte zu. Bei weit entfernten Quasaren wird nahezu das gesamte Licht aufgrund des hohen Anteils an neutralem Wasserstoff im intergalaktischen Medium absorbiert. Bei weniger weit entfernten Quasaren erreicht mehr Licht die Erde, da weniger neutrales Gas vorhanden ist.

Es sei abschließend noch vermerkt, dass der ionisierte Wasserstoff keine Spuren in den Spektren der Quasare hinterlässt und deshalb unsichtbar bleibt. Warum eigentlich? Ionisierter Wasserstoff ist der Hauptbestandteil des intergalaktischen Mediums. Nur etwa ein Zehntausendstel des Gases ist tatsächlich neutral.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was ist die Lyman-Serie?
2. In welchem Spektralbereich beobachtet man die Lyman-Serie?
3. Warum ist Wasserstoff für die Astrophysik interessant?
4. Worum handelt es sich bei einem Quasar?
5. Was versteht man unter dem Begriff Lyman-α Wald?
6. Warum nennt man den Lyman-α-Wald nicht Balmer-α-Wald?
7. Galaxien sind starke Emitter von Ly-α-Strahlung. Das intergalaktische Medium zwischen den Galaxien absorbiert dagegen diese Strahlung. Kann man daraus Rückschlüsse ziehen auf die Temperaturverhältnisse in diesen Gebieten?
8. Beobachtet man hauptsächlich H-I oder H-II Regionen im Universum?

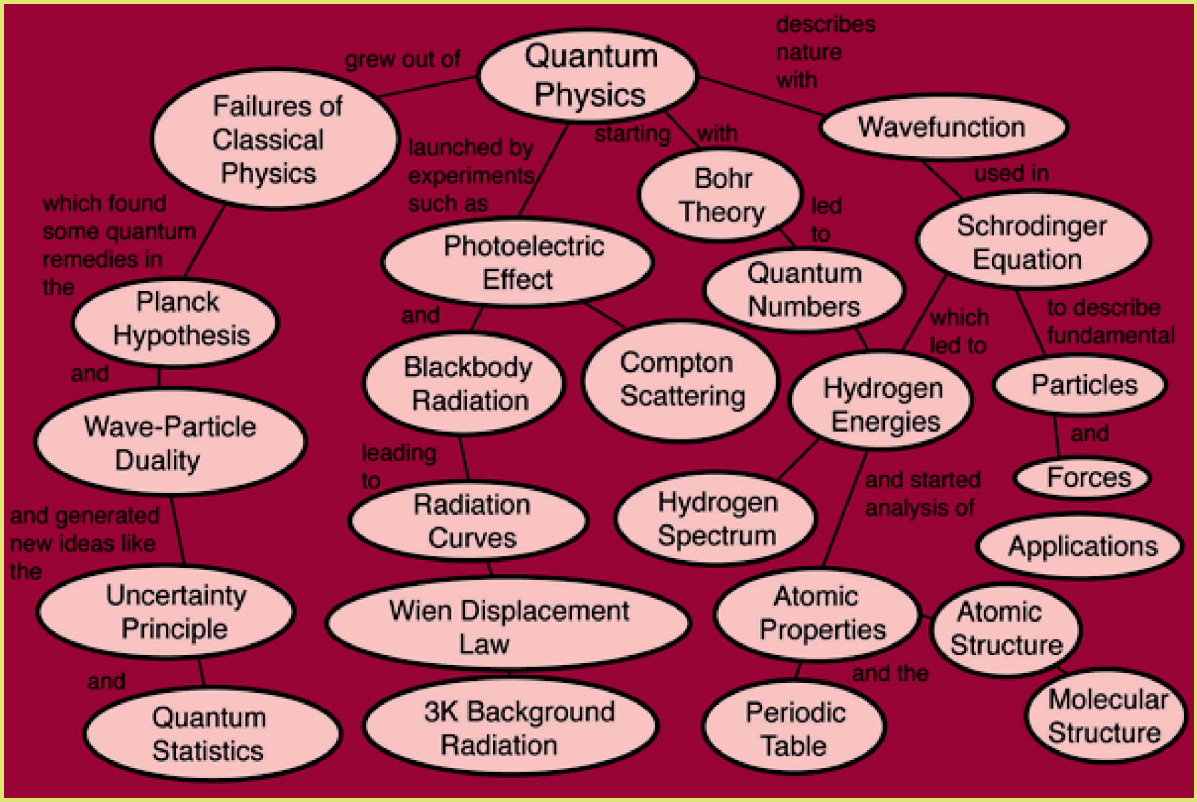


Abb. 16.33: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

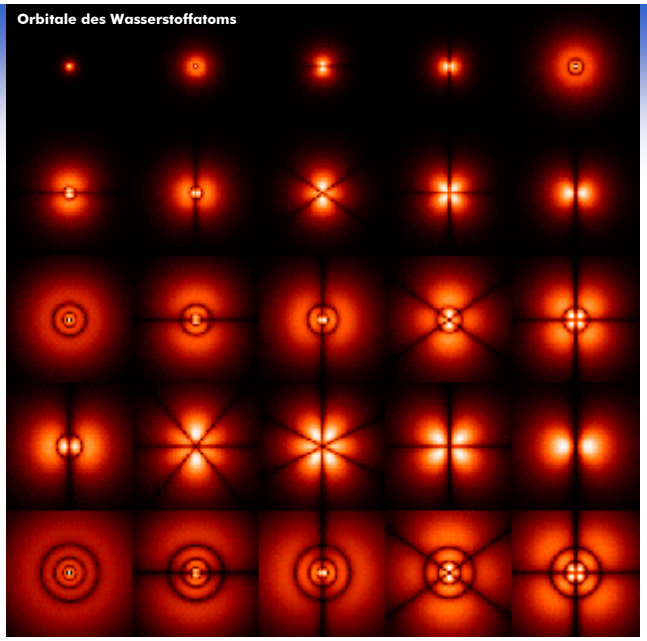
Was war relevant für die Klausur?

- Die Grundzüge des Bohrschen Atommodells
- Die Hauptquantenzahl n
- deBroglie Bedingung für die Bahn des Elektrons um das Wasserstoffatom (Gl. 16.9):

$$\frac{1}{\lambda_e} = \frac{1}{2\,\pi}\frac{n}{r_n}$$

- Bohrsche Postulate
- Absorption und Emission im Bohrschen Wasserstoffatom
- Eigenschaften wasserstoffähnlicher Atome und Ionen
- Ritzsches Kombinationsprinzip

Beyond Bohr^{4LP}



Beyond Bohr

Erwin kann mit seinem Ψ
kalkulieren wie noch nie.
Doch wird jeder leicht einsehn
Ψ lässt sich nicht recht verstehn.

Erich Hückel

No.	No.	No.	No.	No.	No.	No.	No.
H 1	F 8	Cl 15	Co & Ni 22	Br 29	Pd 36	I 42	Pt & Ir 50
Li 2	Na 9	K 16	Cu 23	Rb 30	Ag 37	Cs 44	Tl 51
G 3	Mg 10	Ca 17	Zn 25	Sr 31	Bd [sic-Cd] 38	Ba & V 45	Pb 54
Bo 4	Al 11	Cr 19	Y 24	Ce & La 33	U 40	Ta 46	Th 56
C 5	Si 12	Ti 18	In 26	Zr 32	Sn 39	W 47	Hg 52
N 6	**P 13**	Mn 20	**As 27**	Di & Mo 34	**Sb 41**	Nb 48	**Bi 55**
O 7	S 14	Fe 21	Se 28	Ro & Ru 35	Te 43	Au 49	Os 51

NOTE. Where two elements happen to have the same equivalent, both are designated by the same number.

Abb. 16.34: If the elements are arranged in the order of their equivalents, with a few slight transpositions, as in the accompanying table, it will be observed that elements belonging to the same group usually appear on the same horizontal line. It will also be seen that the numbers of analogous elements generally differ either by 7 or by some multiple of seven; in other words, members of the same group stand to each other in the same relation as the extremities of one or more octaves in music. Thus, in the nitrogen group, between nitrogen and phosphorus there are 7 elements; between phosphorus and arsenic, 14; between arsenic and antimony, 14; and lastly, between antimony and bismuth, 14 also. This peculiar relationship I propose to provisionally term the Law of Octaves [**?**].

[41]Was ist ein Element?

Wenn sich die Masse und das chemische Verhalten nicht ändert, wenn man der Substanz thermische oder elektrische Energie gingen die Chemiker davon aus, dass es sich hier um ein Element handelt. Aufgrund dieser Kriterien identifizierte man bis 1800 schon 28 Elemente. Im Jahr 1850 kannte man sechzig Elemente. Tab. 16.3 liefert eine Historie der Entdecker und ihrer Entdeckungen. Es gab allerdings keinen zwingender Beweis für ihre Existenz. Lavoisier betrachtete eine Substanz dann als Element, wenn sie chemisch nicht weiter zerlegt werden konnte. Weiter erkannte man, dass Atome verhakt werden können. Beispielsweise hat Wasserstoff einen Haken und verhakt H_2 bildet. Sauerstoff hat zwei Haken und Wasserstoffatome andocken, ergibt sich H_2O oder auch H_2O_2. Die Chemiker nennen die Anzahl der Haken die Valenz eines Atoms. De Morveau erstellte im Jahr 1772 eine erste Tabelle *chemisch einfacher Substanzen*. Zusammenhänge vermutete er bei Elementen mit ähnlichen Eigenschaften. Jeremias Benjamin Richter verfasste die *Meßkunst chemischer Elemente* und ist Begründer der Stöchiometrie. Johann Wolfgang Döbereiner fand im Jahre 1817, dass sich bei den Erdalkalis (Kalzium, Strontium, Barium) nicht nur die chemischen Eigenschaften ähnelten. Die Atommasse des mittleren

[41]Dieses Kapitel der Modernen Physik ist für die Klausur nicht relevant.

Jahr	Entdecker	Element
1797	Vauquelin	Chrom
1804	Wollaston	Palladium, Rhodium
1804	Tennant	Iridium, Osmium
1807	Davy[a]	Natrium, Kalium
1807	John	Mangan
1809	Davy	Magnesium, Kalzium, Strontium, Barium
1811	Courtois	Jod
1817	Berzelius	Selen
1817	A1fvedson	Lithium
1817	Stromeyer	Cadmium
1823	Berzelius	Silizium
1825	Berzelius	Titan
1825	Oersted	Aluminium
1826	Balard	Brom
1827	Wöhler	Beryllium
1828	Berzelius	Thorium

Tab. 16.3: Tabelle der Entdeckung von Elementen des Periodensystems.
[a] Siehe auch das Kapitel *Der Weg zum Atom*

Elements entsprach in etwa dem arithmetischen Mittel der Atommassen der beiden anderen Elemente (Triadenregel, 1829). John Newlands (1864) stellte eine Elementtabelle auf, in denen die Elemente in waagerechten Gruppen von Oktaven zusammengefasst waren, siehe Abb. 16.34. Die Elemente Wasserstoff bis Thorium (1-56) unterteilte er in acht Gruppen zu je sieben Elementen, wobei sich die Eigenschaften der Elemente nach jedem siebten Element in abgewandelter Form wiederholten. Der Beitrag von Dmitri Mendelejew und Julius Lothar Meyer war, unabhängig voneinander im Jahr 1869, die Elemente nach Kriterien in Gruppen einzuteilen. Beispielsweise gehen die Alkalimetalle ähnliche chemische Verbindungen ein, z.B. die Alkalioxide: Li_2O, Na_2O, K_2O, Rb_2O, Cs_2O. Bemerkenswerterweise ist, dass die Schemata von Mendelejew und Meyer Jahrzehnte vor der Entdeckung von Elektron und Proton, eine subatomare Struktur der Elemente zu Grunde legten. Diese frühen Erfolge der Chemie sind eng verbunden mit dem Bohrschen Atommodell und seinen Erweiterungen.

Wo stehen wir mit unserem Wissen um die Natur der Materie?

- Materie ist aufgebaut aus Atomen, wobei unabhängig vom Element $6 \cdot 10^{23}$ Atome die Molare Masse[42] bestimmen.

- Alle Atome sind ähnlich aufgebaut. Eine positiv geladener Kern einer Größe von 10^{-15} m in der sich praktisch die gesamte Masse konzentriert.

[42] *Lexikon:* Die **Molare Masse** ist der Quotient aus der Masse und der Stoffmenge dieser Substanz. Die Einheit ist [g/Mol].

- Die chemischen Elemente unterscheiden sich in Bezug auf ihre Kernladung und die Anzahl der Elektronen.
- Das Verhalten der Elektronen in Bezug auf andere Elektronen, den Kern oder externe Felder wird durch die Quantenphysik bestimmt. Sie unterscheidet sich damit in radikaler Weise von der Newtonschen Mechanik. Die Unterschiede sind aller im Limit makroskopischer Dimensionen marginal.
- Man findet Atome nur in diskreten Zuständen in Bezug auf die Gesamtenergie
- Die Wechselwirkung mit der Atme mit seiner Umgebung erfolgt ausschließlich über den Austausch diskreter Energiepakete der Größenordnung $h \cdot \nu$.

Was haben wir bislang gelernt und welche offenen Fragen bleiben? Dazu betrachten wir vor- und Nachteile des Bohrschen Atommodells.

Welche Argumente sprechen für das Bohrsche Atommodell?

- Der Ansatz bricht mit den Vorstellungen der klassischen Physik.
- Bohr postuliert die strahlungsfreie Beschleunigung von Ladungen und fordert, dass nur bestimmte Kreisbahnen erlaubt sind.
- Die Analyse liefert die richtige Größenordnung für den Durchmesser des Wasserstoffatoms.
- Lichtemission und -absorption resultieren aus der Änderung der Energie des Elektronen.
- Das Bohrsche Atommodell liefert eine schlüssige Erklärung für das Spektrum von Wasserstoff und wasserstoffähnlichen Ionen (He^{2+}, Li^{2+}, ...).
- Die Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms lässt sich mit Hilfe des Modells berechnen.

Wo liegen die Grenzen des Bohrschen Atommodells?

- Das Teilchenbild der Mechanik wird übernommen und mit willkürlich erscheinenden Zusatzbedingungen (Bohrschen Postulate) versehen.
- Es liefert keine Erklärung dafür, warum sich Elektronen nur auf bestimmten Bahnen bewegen. Die strahlungslose Bewegung der Elektronen um den Atomkern widerspricht den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik.
- Zur Erklärung der Emission aus Wasserstoff muss man annehmen, dass sich das Elektron auf einer Kreisbahn um das Proton bewegt. Bei der Annahme einer solchen Planetenbewegung ergäbe sich ein flaches Wasserstoffatom.

- Das Elektron wird so behandelt, als wäre es ein Miniplanet mit definiertem Bahnradius und definiertem Impuls. Die Annahme einer deterministischen Bahn widerspricht der Heisenbergschen Unschärferelation, denn Bahnradius, Elektronengeschwindigkeit, Lebensdauer der angeregten Zustände und Energieabgabe sind nicht gleichzeitig und genau bestimmbar.

- Der Bahndrehimpuls des Elektrons[43] im Grundzustand müsste nach dem Bohr-Modell $\hbar$ sein, tatsächlich ist er aber NULL.

- Die Emissionslinien im Wasserstoff zeigen eine Feinstruktur, die das Modell nicht erklären kann.

- Bestimmte Spektrallinien des Wasserstoffs erweisen sich bei genaueren Messungen als Doppellinien. Diese nach ihrem Entdecker Lamb-Verschiebung benannte Trennung kann das Bohr-Modell nicht erklären.

- Die Spektrallinien weisen eine unterschiedliche Intensität auf, die im Rahmen des Bohrschen Modell nicht erklärt werden kann. Der Mechanismus, der zu unterschiedlichen Übergangswahrscheinlichkeiten führt, bleibt unklar.

- Die in der Radioastronomie wichtige 21 cm-Linie des Wasserstoffs (siehe Vorlesung *Relativistischer Dopplereffekt*) kann nicht aus dem Bohr-Modell abgeleitet werden.

- Die Aufspaltung vieler Spektrallinien unter dem Einfluss von magnetischen (Zeeman-Effekt) und elektrischen (Stark-Effekt)[44] Feldern kann nicht erklärt werden.

- Die Spektren von Atomen mit mehr als einem äußeren Elektron können im Rahmen des Modells nicht berechnet werden. Sobald ein Atom mehr als ein Elektron besitzt, passen die mit dem Bohr-Modell berechneten Linienpositionen nicht zu den gemessenen Spektren.

- Die Chemische Bindung kann mit dem Bohr-Modell nicht erklärt werden.

Die Beschreibung des Atoms durch das Bohrsche Modell ist deshalb unvollständig. Das Elektron kann sich in eng beieinander liegenden Zuständen mit unterschiedlicher Gesamtenergie befinden. Jede der Hauptenergiestufen, charakterisiert durch die Hauptquantenzahl ist unterteilt in weitere Zustände. Um die Eigenschaften des Atoms genauer zu charakterisieren, bedarf es weiterer Quantenzahlen.

Wie kann man das motivieren?

Im Kapitel *Wellenfunktion* haben wir gelernt, dass es zur Lösung eines Problems in der Quantenphysik folgender Schritte bedarf:

[43] *Lexikon:* Der Name **Bahndrehimpuls** wurde aufgrund der Bewegung des Elektrons um den Kern gewählt. Wie sich zeigen wird, folgt das Elektron aber keiner exakt festgelegten Bahntrajektorie. Diese Sichtweise ergibt sich schon aufgrund der Unschärferelation.

[44] The Nobel Prize in Physics 1919 was awarded to Johannes Stark *for his discovery of the Doppler effect in canal rays and the splitting of spectral lines in electric fields*

- Aufstellen einer Potentialfunktion, in dem sich das Teilchen bewegt.

- Lösung der Schrödingergleichung, um die Wellenfunktion zu ermitteln, die erlaubten Energiezustände und andere Eigenschaften des Quantensystems

Der große Fortschritt in der Behandlung der Atome gegenüber dem Bohrschen Ansatz war, dass man mit der Schrödingergleichung die Analyse auf Atome mit mehreren Atomen erweitern konnte und damit chemische Eigenschaften, wie die molekulare Bindung erfassen konnte. Strategisch geht man so vor, dass man diese Systeme im Rahmen der independent electron approximation behandelt. Das bedeutet, dass man die Wechselwirkung der Elektronen untereinander vernachlässigt. Das Vorgehen ist vergleichbar zur Behandlung der Bewegung der Planeten um die Sonne. Man berechnet zunächst die Bahnen einzelner Planeten allein aufgrund der dominanten Gravitationswechselwirkung mit der Sonne. Erst im nächsten Schritt berücksichtigt man die deutlich schwächere Gravitation der anderen Himmelkörper und verfeinert seine Beschreibung der Verhältnisse. Im Mehrelektronenatom mit Z Elektronen beschreibt man die Bewegung eines Elektrons durch die Wechselwirkung mit dem Feld der positiven Kernladung und der Feldverteilung, die sich durch die Anwesenheit aller anderen Elektronen ausbildet. Das betrachtete Elektron bewegt sich also im Feld der anderen (Z-1) Elektronen. Die Elektron-Elektron-Wechselwirkung zeigt sich beispielsweise durch die Abschirmung der Kernladung. Wie einem sofort klar wird, kann man diesen Effekt nicht wirklich außer acht lassen. In einem iterativen Verfahren, genannt Hartree-Fock Methode nähert man sich schrittweise der Lösung und erhält schließlich die Wellenfunktion.

Das Vorgehen für das Wasserstoffatom ist zunächst einfach. Elektron und Proton tragen die Ladung $q = \pm e$ und die Bewegung erfolgt aufgrund des Coulombpotenzials

$$U(r) = \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{16.72}$$

Die Schwierigkeiten beginnen mit dem zweiten Schritt. Bislang haben wir nur eindimensionale Systeme betrachtet. Atome sind aber dreidimensionale Objekte und die Schrödingergleichung muss für den dreidimensionalen Fall gelöst werden. [45]

Das erfordert einen nicht unerheblichen mathematischen Aufwand. Unsere bislang gemachten Erfahrungen versetzen uns aber in die Lage, die Resultate zu interpretieren und anzuwenden, ohne die Lösung tatsächlich herzuleiten. Wir interessiert ist, schaue in

[45] Wie sich herausstellt, würde eine Momentaufnahme der Bewegung der Elektronen um den Atomkern eher das Bild einer diffusen Elektronenwolke hervorbringen. Hier äußert sich das Konzept der Wahrscheinlichkeitsdichte (Kapitel *Wellenfunktion*). Unter bestimmten Umständen kommt man in Simulationen der Vorstellung von Bohr allerdings sehr nahe [**?**]. Dazu bestrahlt man Alkaliatome mit geeignetem Laserlicht und regt das Valenzelektron in Energiezustände hoher Hauptquantenzahl n an. Diese Zustände nennt man Rydberg-Zustände, in denen sich das Elektron weitab vom Atomkern aufhält. Damit gelingt es, ein kompaktes Wellenpaket zu erzeugen, dass, wie ein Planet die Sonne, den Kern im Abstand von 5 μm mit einer Umlaufperiode von 4 ns umkreist.[46] So präpariert, kann man die Zeitentwicklung des Wellenpakets etwa 10 Umläufe lang verfolgen, bevor es wieder zerfließt, siehe Abb. 16.35.

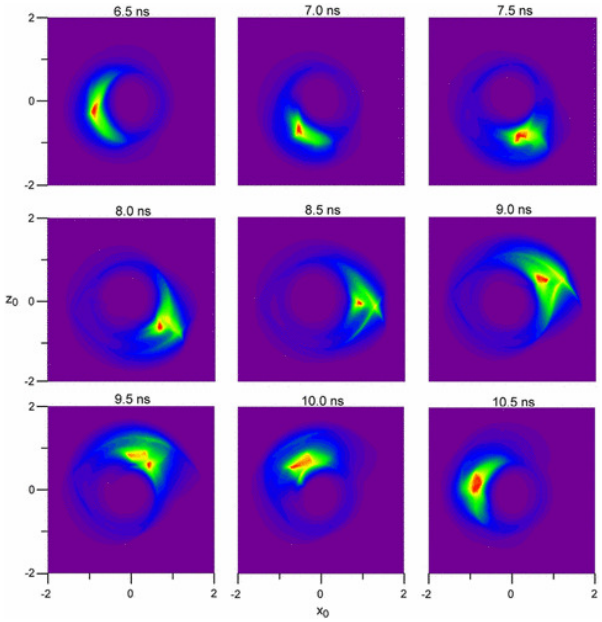


Abb. 16.35: Schnappschüsse eines simulierten Wellenpakets nach Anregung mit einem elektrischen Feld [**?**].

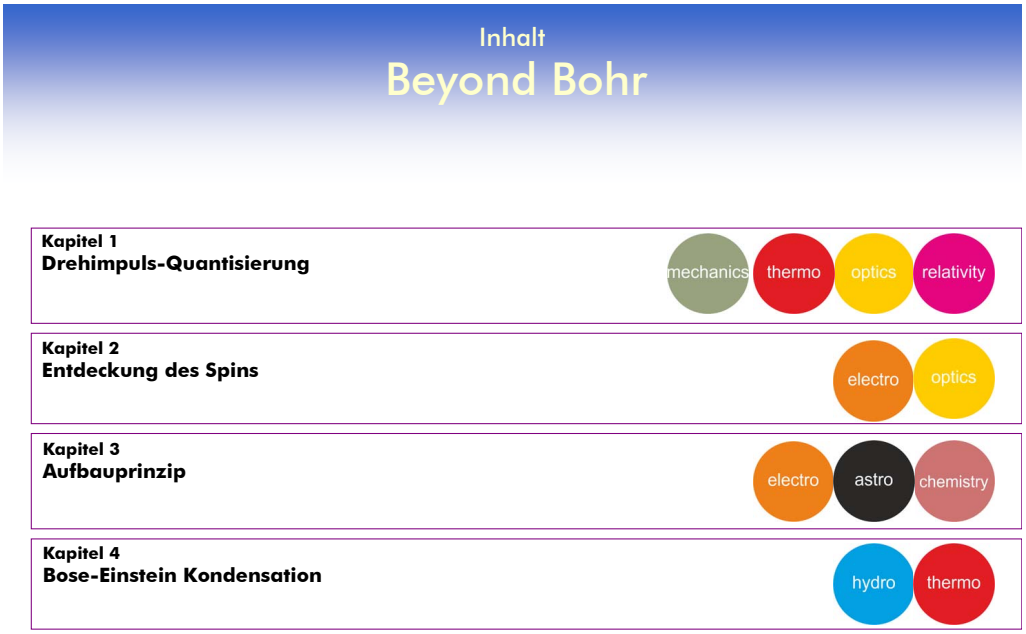
die gängigen Lehrbücher [**? ? ? ? ?**]. In einer Dimension ergab sich die Energiequantisierung aus den eindimensionalen Randbedingungen für die Wellenfunktion. Dies führte zur Quantenzahl n. Im dreidimensionalen Atom müssen drei unterschiedliche Randbedingungen erfüllt werden. Dies führt zu insgesamt DREI Quantenzahlen und DREI quantisierten Parametern. Das gesamte Geschehen in der Chemie und damit auch in der Biologie wird hervorgerufen durch ein Durchnummerieren der möglichen Energiezustände. Berücksichtigt man die Regeln des Pauli-Prinzips, nach denen sich Elektronen um den Atomkern ordnen, ergibt sich ein Verständnis des Aufbaus des Periodensystems der Elemente. Darüber hinaus hat das Pauli-Prinzip erhebliche Auswirkungen auf mikroskopische aber auch makroskopische Objekte.

Muss man relativistische Effekte berücksichtigen?

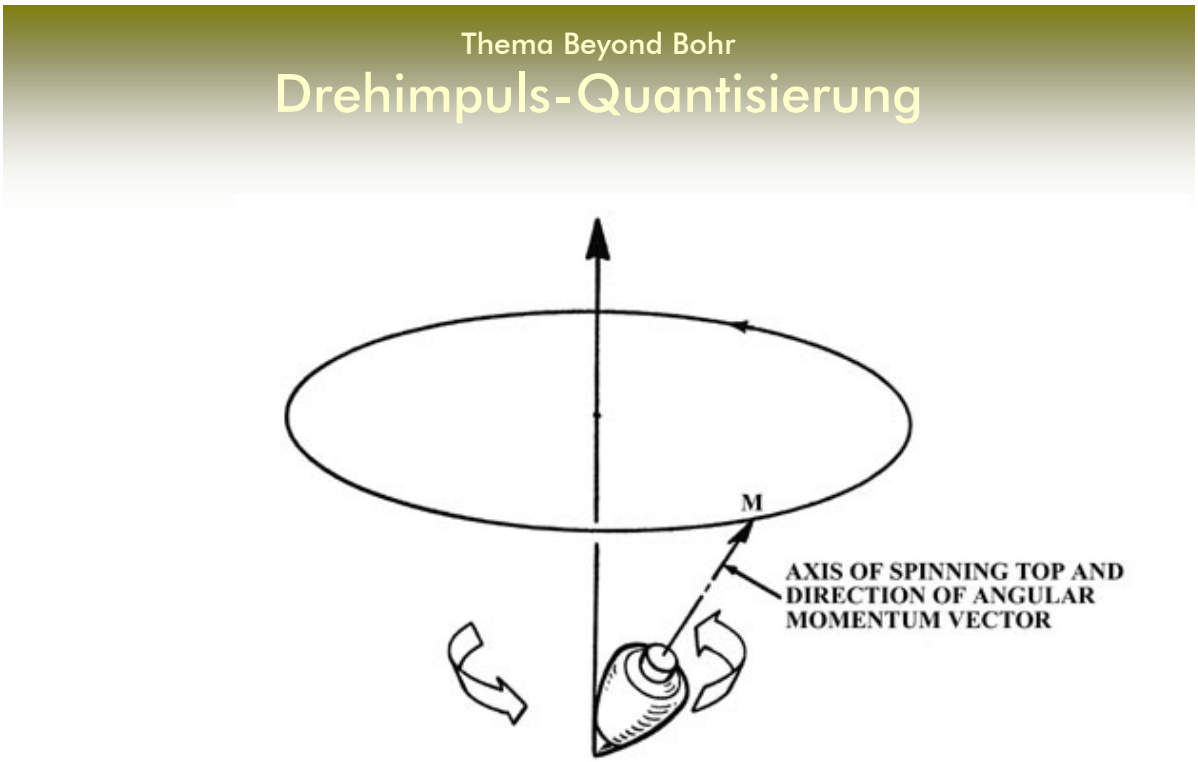
- Die vollständig relativistische Behandlung des Wasserstoffatoms im Rahmen der Dirac-Theorie beinhaltet zusätzliche Beiträge durch schwache magnetische Kräfte, die durch die Bewegung der Elektronen hervorgerufen werden.

- Die relativistischen Korrekturen führt zu Energieniveaus, die eine schwache Abhängigkeit der Hauptquantenzahl von den anderen Quantenzahlen zeigen.

- Man stellt fest, dass relativistische Effekte bei Vielelektronensysteme immer deutlicher betragen. Die Ursache ist in der Wechselwirkung der Elektronen untereinander begründet.


Inhalt
Beyond Bohr
Kapitel 1
Drehimpuls-Quantisierung
mechanics
thermo
optics
relativity
Kapitel 2
Entdeckung des Spins
electro
optics
Kapitel 3
Aufbauprinzip
electro
astro
chemistry
Kapitel 4
Bose-Einstein Kondensation
hydro
thermo

Drehimpuls-Quantisierung



Bei der Bewegung eines Teilchens unter der Einwirkung einer Zentralkraft $\vec{r} \to r$ gilt, dass der Drehimpuls des Körpers $\vec{L}=\vec{r} \times \vec{p}$ konstant bleibt (Drehimpulserhaltung). Aufgrund der Bewegung um den Atomkern hat das Elektron ebenfalls einen Drehimpuls. Wie sich herausstellt, sind die Werte, die der Drehimpuls annehmen kann, quantisiert. Im Bohrmodell umkreist das Elektron das Proton auf einer Kreisbahn. Eine ähnliche Situation haben wir schon bei der Behandlung der Bewegung der Planeten um die Sonne kennengelernt. In der Himmelmechanik spielt der damit verbundene Drehimpuls eine

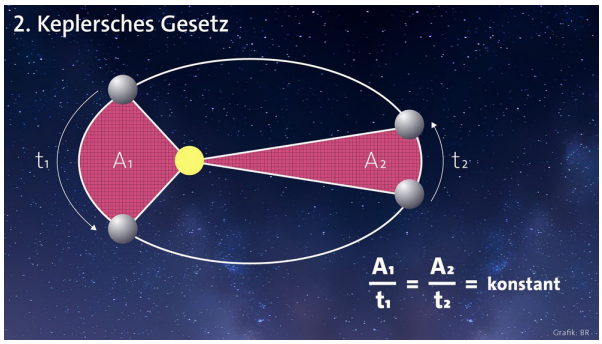


Abb. 16.36: Illustration des 2. Keplerschen Gesetzes. Die Verbindungslinie zwischen Sonne und dem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

wichtige Rolle. Man denke insbesondere an das 2. Keplersche Gesetz, im dem sich die Drehimpulserhaltung ausdrückt.[47] Die Bahnen der Planeten um die Sonne sind keine Kreise sondern Ellipsen, für die bestimmte Regeln gelten. Die Frage stellt sich: Was passiert, wenn man das Bohrsche Modell von Elektronenkreisbahnen um den Kern in dieser Weise erweitert?

- 1. Keplersches Gesetz: Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, wobei in einem der Brennpunkte die Sonne steht.
- 2. Keplersches Gesetz: Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeitabständen Flächen gleicher Größe, siehe Abb. 16.36.
- 3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Planetenbahn.

In the early days of atomic physics [before quantum field theory revealed the true meaning of the fine structure constant to be the strength of the coupling between the electron and photon], it was thought to have a value so close to being precisely 1/137 that numerologists started to establish cultish associations with the number 137 [**?**].

Bruce A. Schumm, 2004

Hinweise, dass eine solche Erweiterung notwendig ist, ergeben sich aus hochauflösenden Messungen der Emissionslinien der Elemente. Bei genauerem Hinsehen sind die Linien unterteilt in klar getrennte Gruppen von Spektrallinien. Diese Feinstruktur kann nur erklärt werden durch Elektronenbahnen, die zu leicht unterschiedlichen Energiezuständen gehören.[48] Statt Kreisbahnen, wie im Bohr-Modell, werden deshalb elliptische Bahnen betrachtet (Bohr-Sommerfeld Modell), siehe Abb. 16.37. Die beiden Quantenzahlen stehen folgendermaßen mit der Ellipsenform in Beziehung

$$\frac{n}{k} = \frac{\text{Länge der Hautachse}}{\text{Länge der Nebenachse}} \tag{16.73}$$

Die Werte von k für einen gegebenen Wert von n sind $k = n-1, n-2, n-3 \ldots$. Elliptische Bahnen mit unterschiedlichen Exzentrizitäten führen zu unterschiedlichen Werten von k. Für gegebenes n kann k Werte von 1 bis n annehmen. Ist $n = k$ ergibt sich eine Kreisbahn. Durch diese Erweiterung gelingt es, die Feinstruktur der Spektrallinien -allerdings nur im Ansatz- zu entschlüsseln.

[47] Im Gegensatz zu den anderen beiden Gesetzen gilt diese Aussage für beliebige Zentralkraftsysteme $(1/r, 1/r^2, \ldots)$!

[48] Die Aufspaltung der Spektrallinien in nahe zusammen liegende Emissionslinien resultiert aus der Aufhebung der Entartung der Energiezustände. Sie wird hervorgerufen durch zusätzliche Beitrag zur Coulombwechselwirkung. Das kann eine relativistische Korrektur oder die Tatsache sein, dass der Kern nicht punktförmig ist. Die Feinstruktur Aufspaltung wurde von Michelson und Morley im Jahr 1887 mit Hilfe eines Interferometers erstmals beobachtet [**?**].

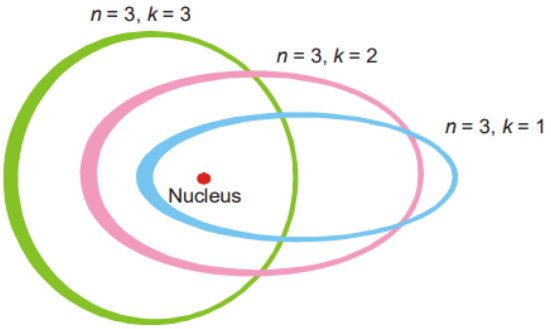


Abb. 16.37: Nach dem Bohr-Sommerfeld Modell mögliche exzentrische Bahnen des Elektrons um den Atomkern. Die Form der elliptischen Bahn wird über die Prameter n und k charakterisiert.

Nicht nur die Energie und die Ladung, sondern auch der Drehimpuls ist quantisiert.[49]

Die unterschiedlichen Werte für den Bahndrehimpuls führen zu einer Verschiebung der Energieniveaus. Der niedrigste Energiewert ergibt sich beim Atom für den Bahndrehimpuls $\ell = 1$. Ein Wert von $\ell = 0$ erscheint im Bohr-Sommerfeld Modell unphysikalisch, da dies dem Pendeln des Elektrons auf einer gradlinigen Bahn durch den Atomkern entsprechen würde. Für das Verhältnis der beiden Halbachsen ergibt sich eine Quantisierung für den Wert des Bahndrehimpuls, ausgehend von einer vorgegebenen Hauptquantenzahl n.

$$\frac{a}{b} = \frac{\ell + 1}{n} \tag{16.74}$$

Das Sommerfeld-Modell erfasst weitere Eigenschaften der Atome, beispielsweise die Ursache der Feinstruktur-Aufspaltung. Es zeigt sich aber, dass die Anzahl der erwarteten Linien nicht mit der Messung übereinstimmt. Auch für die Stärke der Emissionslinien liefert das Modell keine befriedigende Antwort. Betrachtet man die elliptischen Orbits, bewegt sich das Elektron in Kernnähe schneller. Das sollte einen an das Zweite Keplersche Gesetz erinnern. Nach der Speziellen Relativitätstheorie ändert sich, durch die Erhöhung der Geschwindigkeit, die Masse des Elektrons. Dadurch bewegt sich das Elektron auf einer Rosettenbahn. Im Kapitel *Allgemeine Relativitätstheorie* wurde die Rosettenbahn des Merkur (Abb. 16.38) von Einstein [**?**] in ähnlicher Weise erklärt. Die Änderung in der Energie des Elektrons wird durch die Feinstrukturkonstante α beschrieben.

$$E_{n,\ell} = -R_y \cdot h \cdot c \frac{Z^2}{n^2} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 \cdot Z^2}{n^2}\left(\frac{n}{\ell} - \frac{3}{4}\right) + \ldots\right) \tag{16.75}$$

Der Wert der Feinstrukturkonstante α ergibt sich mit[50]

$$\alpha = \frac{1}{137} \tag{16.79}$$

[49] *Lexikon:* Der **Drehimpuls** $\vec{L}_R$ ist eine physikalische Größe, die den Bewegungszustand eines rotierenden Körper in Abhängigkeit von seiner Winkelgeschwindigkeit und seinem Trägheitsmoment charakterisiert. In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Drehimpulse konstant (Drehimpulserhaltungssatz).

[50] *Lexikon:* Die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung ($k_C \cdot e^2$) hat die Einheit

Der relativistische Beitrag ($\approx \alpha^2$) ist damit gering.

When I die, my first question to the devil will be: What is the meaning of the fine structure constant.

Wolfgang Pauli

Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion [?]: The standard model of particle physics is remarkably successful because it is consistent with (almost) all experimental results. However, it fails to explain dark matter, dark energy and the imbalance between matter and antimatter in the Universe. Because discrepancies between standard-model predictions and experimental observations may provide evidence of new physics, an accurate evaluation of these predictions requires highly precise values of the fundamental physical constants. Among them, the fine-structure constant α is of particular importance because it sets the strength of the electromagnetic interaction between light and charged elementary particles, such as the electron and the muon. Here we use matter-wave interferometry to measure the recoil velocity of a rubidium atom that absorbs a photon, and determine the fine-structure constant $1/\alpha = 137.035999206(11)$ with a relative accuracy of 81 parts per trillion. The accuracy of eleven digits in α leads to an electron g factor - the most precise prediction of the standard model - that has a greatly reduced uncertainty. Our value of the fine-structure constant differs by more than 5 standard deviations from the best available result from caesium recoil measurements. Our result modifies the constraints on possible candidate dark-matter particles proposed to explain the anomalous decays of excited states of ^{8}Be nuclei and paves the way for testing the discrepancy observed in the magnetic moment anomaly of the muon in the electron sector.

Um die Bedeutung des Bahndrehimpulses im Rahmen der erweiterten Quantenphysik zu erfassen, betrachten wir zunächst die Definition aus der klassischen Mechanik

(Abstand·Energie). Als dimensionslose Zahl kann man deshalb einfach mal schreiben:

$$\text{dimensionslose Zahl} = \frac{k_C \cdot e^2}{R_0 \cdot E_0} \tag{16.76}$$

Die Wahl von R_0 und E_0 erscheint zunächst willkürlich, ist jedoch eindeutig in Bezug auf die Wechselwirkung von Licht und Materie, da es über die Plancksche Gleichung $E_{ph} = h \cdot \nu$ einen direkten Zusammenhang zwischen Energie und Wellenlänge gibt ($c = \nu_{ph} \cdot \lambda_{ph}$):

$$E_{ph} \cdot \lambda_{ph} = h \cdot c = \text{konstant} \tag{16.77}$$

Wir definieren deshalb die Konstante α folgendermaßen

$$\alpha = \frac{2\,\pi \cdot k_C \cdot e^2}{E_{ph} \cdot \lambda_{ph}} \tag{16.78}$$

Für eine Wellenlänge von 1 nm ergibt sich eine Photonenenergie von 1240 eV. Setzt man diesen Wert in die Gleichung ein ergibt sich 1/137.

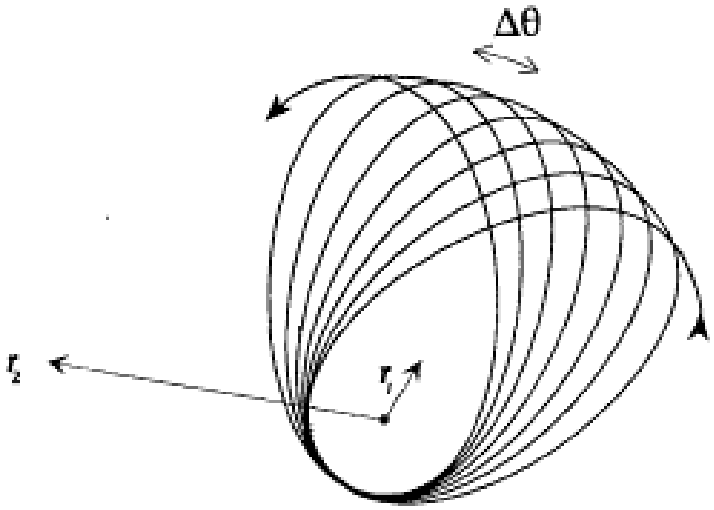


Abb. 16.38: Da sich das Elektron auf einer exzentrischen Bahn teils nahe am Kern bewegt, kommt es zu einer Änderung der Bahngeschwindigkeit. Dies führt zu einer Rosettenbahn, die das Elektron ausführt.

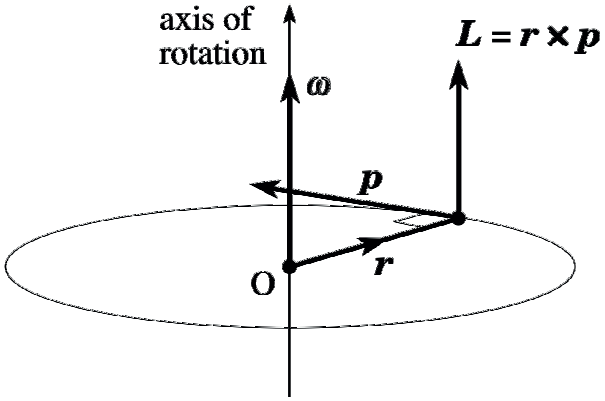


Abb. 16.39: Definition des Bahndrehimpulses, wie er auch in der klassischen Mechanik verwendet wird.

(Abb. 16.39)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{16.80}$$

$$L = |\vec{L}| = m \cdot v \cdot r \tag{16.81}$$

und passen $\vec{L}$ an die mikroskopischen Verhältnisse an.

A limit on variations in the fine-structure constant from spectra of nearby Sun-like stars [?]: The fine structure constant a sets the strength of the electromagnetic force. The Standard Model of particle physics provides no explanation for its value, which could potentially vary. The wavelengths of stellar absorption lines depend on α but are subject to systematic effects owing to astrophysical processes in stellar atmospheres. We measured precise line wavelengths from observations of 17 stars, selected to have almost identical atmospheric properties to those of the Sun (solar twins), which reduces those systematic effects. We found that a varies by $\lesssim$50 parts per billion within 50

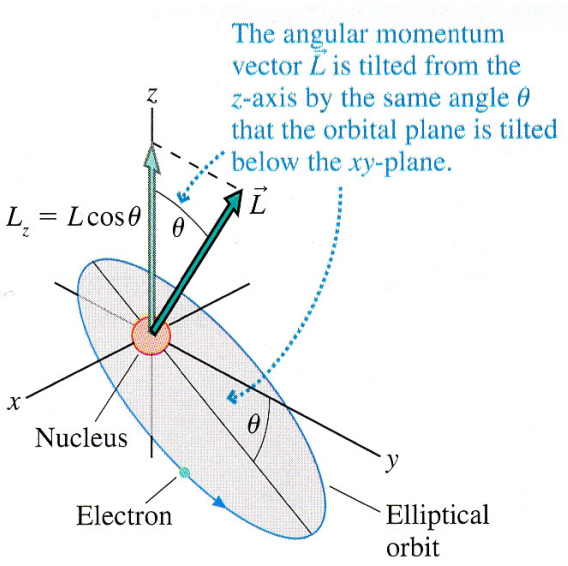


Abb. 16.40: Orientierung des Bahndrehimpulses in einem elliptischen Elektronenorbit. Die z-Komponente ist $L_z = L \cdot \cos\Theta$ [?].

parsecs from Earth. Combining the results from all 17 stars provides an empirical local reference for stellar measurements of α, with an ensemble precision of 12 parts per billion.

Man erinnere sich daran, dass der Vektor $\vec{L}$ senkrecht auf der Bahnebene der Elektronenbewegung steht, siehe Abb. 16.40. Unter der Annahme, dass es sich beim Elektron um eine Materiewelle handelt (siehe Vorlesung *Materiewellen*), ergibt sich, wie bei der Hauptquantenzahl n, eine Bedingung für den Drehimpuls.[51]

$$n \cdot \lambda_{dB} = n\frac{h}{m_e \cdot v_n} = 2\,\pi \cdot r_n \tag{16.82}$$

$$m_e \cdot v_n \cdot r_n = \frac{h}{2\,\pi} \cdot n \tag{16.83}$$

$$\ell = n \cdot \hbar \tag{16.84}$$

Aus dieser Analyse folgt, dass der Bahndrehimpuls ebenfalls quantisiert ist, und zwar in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantum h. Wie die Herleitung demonstriert, ist die Quantisierung des Bahndrehimpulses im Atom eine direkte Konsequenz der Welleneigenschaften der Materie. Wie sich später zeigen wird, führt diese Eigenschaft auf charakteristische Elektronenschalen in den komplexeren Atomen.

Die Drehimpulsquantenzahl ℓ kann, wie die exakte Rechnung ergibt, Werte von 0 bis $n-1$ annehmen. Der Wert von $\ell = 0$ ist also im Gegensatz zum Sommerfeld-Modell erlaubt. Hier zeigt sich ein zentraler Unterschied zwischen dem Bohrschen Atommodell und der Beschreibung durch die Schrödinger-Gleichung. Für den Bahndrehimpuls ergeben sich

[51] *Lexikon:* Zur **Hauptquantenzahl** n gehören eine Anzahl von n Zuständen mit unterschiedlichem Bahndrehimpuls ℓ.

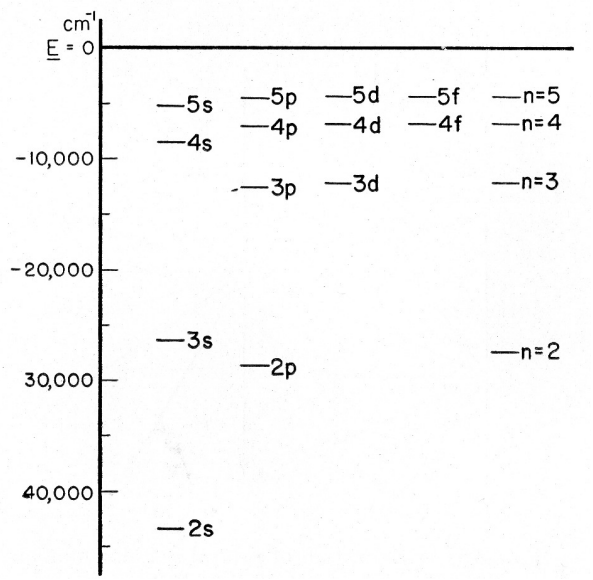


Abb. 16.41: Energieniveaus im Lithiumatom im Vergleich zu Wasserstoff (ganz rechts) [**?**].

diskrete Werte von:

$$L^2 = \hbar^2 \cdot \ell \cdot (\ell+1), \text{ wobei } \quad \ell = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \ldots \tag{16.85}$$

$$L = \hbar\sqrt{\ell \cdot (\ell+1)} = 0,\, \sqrt{2}\hbar,\, \sqrt{6}\hbar,\, \sqrt{12}\hbar, \ldots \tag{16.86}$$

Keine anderen Werte von L erfüllen die Randbedingungen im Rahmen der Schrödingergleichung. In der Atomphysik werden die Werte für $\ell = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \ldots$ mit $s,\, p,\, d,\, f, \cdots$ bezeichnet, siehe Tab. 16.4. Die Buchstaben sind historisch bedingt [**?**] und stammen von der spektroskopischen Charakterisierung der Spektrallinien ab (s : sharp; p : principle, d : diffus, f : fundamental, ...). Es sei angemerkt, dass die Kernphysik diese Notation im Wesentlichen übernommen hat (Kapitel *Kernmodelle*).

Jeder Drehimpulszustand ℓ spaltet in $(2\,\ell + 1)$ Energiezustände auf.

Betrachten wir Lithium. Das Element hat die Ordnungszahl 3. Die Alkalis sind, chemisch vergleichbar zum Element Wasserstoff. Im Periodensystem findet man alle diese Atome ganz links. Abb. 16.41 zeigt das Termschema von Lithium, wie man es aus

	s	p	d	f	g	h
	ℓ=0	ℓ=1	ℓ=2	ℓ=3	ℓ=4	ℓ=5
n=1	$1s$					
n=2	$2s$	$2p$				
n=3	$3s$	$3p$	$3d$			
n=4	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$		
n=5	$5s$	$5p$	$5d$	$5f$	$5g$	
n=6	$6s$	$6p$	$6d$	$6f$	$6g$	$6h$

Tab. 16.4: Symbolische Bezeichnung der atomaren Zustände im Wasserstoffatom.

der Analyse der Emissionsspektren bestimmt hat. Trotz der chemischen Ähnlichkeit stellt man deutliche Unterschiede fest. Bei Wasserstoff sind die Elektronen in $2s$ und $2p$ mit derselben Bindungsenergie gebunden. Gleiches gilt für $3s$, $3p$, $3d$, ... In Lithium ist die Entartung aufgehoben und die Niveaus energetisch aufgespalten. Die Zustände $4f$, $5f$, $6f$ liegen ungefähr dort, wo man sie auch im Wasserstoff findet. $3d$, $4d$ ... liegen tiefer, $3p$, $4p$, ... noch tiefer, die s-Zustände noch tiefer. Eine frühe Erklärung geht auf Schrödinger zurück [**?**]. Danach beschreibt man die inneren Elektronen von Lithium durch eine kugelförmige Ladungsverteilung mit einem Radius von 0.28 Å. Die Valenzelektonen bewegen sich unter dem Einfluss der Kernladung $(+3e)$ und der beiden inneren Elektronen $(-2e)$, also letztendlich $(+e)$. Das äußerste Elektron *spürt* also nur die Anwesenheit einer einzigen positiven Ladung. Die Bewegung der Elektronen ist damit so wie im Wasserstoffatom, solange die Elektronen nicht in Kernnähe geraten. Diese Annahme stimmt gut für die hohen ℓ-Zustände. Die Elektronen in den niedrigen ℓ-Zuständen kommen näher an den Kern heran und spüren die höhere Kernladung und werden dadurch immer stärker an den Kern gebunden. Die Bindungsenergie dieser Zustände erhöht sich.

Auswahlregel

Die Alkaliatome sind, aufgrund ihres so genannten Leuchtelektrons,[52] dem Wasserstoffatom am ähnlichsten. Das äußerste Elektron bewegt sich im Feld der Z Protonen und $(Z-1)$ Elektronen. Man kann erwarten, dass man die optischen Spektren dieser Elemente durch eine leichte Modifikation der Bohrschen Gleichungen anpassen kann. Tatsächlich ergeben sich Energiezustände:

$$E_s = R_y \cdot \frac{h \cdot c}{(n+\varepsilon_s)^2} \tag{16.87}$$

$$E_p = R_y \cdot \frac{h \cdot c}{(n+\varepsilon_p)^2} \tag{16.88}$$

$$E_d = R_y \cdot \frac{h \cdot c}{(n+\varepsilon_d)^2} \tag{16.89}$$

$$E_f = R_y \cdot \frac{h \cdot c}{(n+\varepsilon_f)^2} \tag{16.90}$$

$$\ldots \quad \ldots$$

wobei ε_s, ε_p,... ℓ-abhängige Korrekturglieder sind. Für Wasserstoff sind diese NULL. Je höher die Ordnungszahl des Alkalis, desto größer wird die Korrektur. Damit kann man die optischen Übergänge für beispielsweise Natrium berechnen.

Das Konzept des Drehimpulses in der Quantenphysik hat wichtige Auswirkungen auf die Wechselwirkung zwischen Atomen und elektromagnetischer Strahlung. Die Möglichkeiten des Energieaustausches zwischen Atom und Strahlungsfeld werden dadurch eingeschränkt. Ursache ist, dass das Photon einen Drehimpuls in Höhe von EINEM $\hbar$ hat, der bei der

[52] *Lexikon:* Das **Leuchtelektron** ist ein schwach gebundenes Elektron der Atomhülle, das sich in einem Orbital außerhalb der abgeschlossenen Schalen des Atoms befindet.

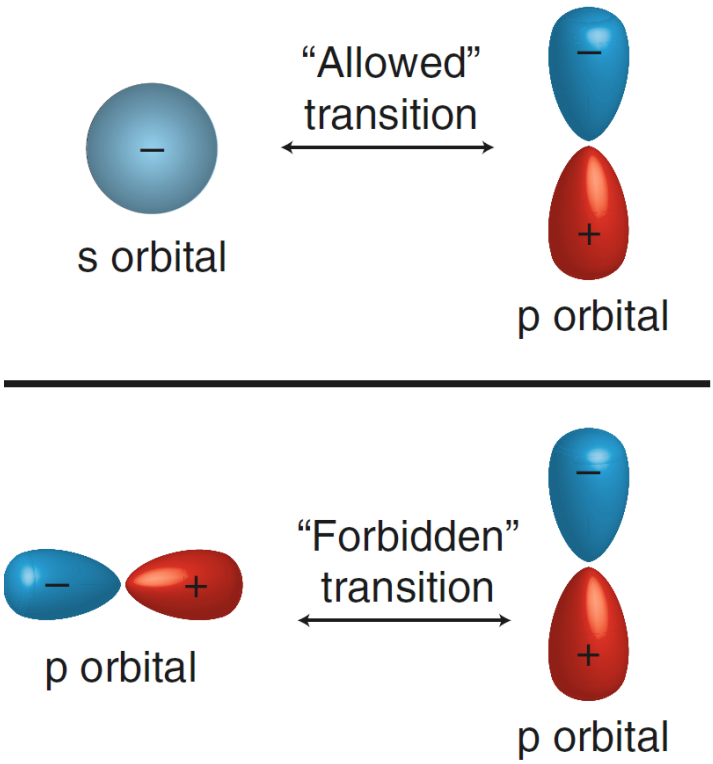


Abb. 16.42: *oben:* Optisch erlaubter Übergang ℓ=0 nach $\ell = 1$, da $\Delta\ell$=+1; *unten:* Nach der Auswahlregel nicht erlaubter Dipolübergang ℓ=0 nach ℓ=1, da kein Drehimpuls in Höhe von $\hbar$ übertragen wird ($\Delta\ell$=0).

Wechselwirkung entweder vom Atom aufgenommen oder abgegeben werden muss. Für optische Übergänge zwischen den Energieniveaus eines Atoms gilt damit aufgrund der Drehimpulserhaltung:[53]

Auswahlregel: $\Delta\ell = \pm 1$

Zur Illustration betrachten wir folgende Szenarien:

- Optisch erlaubte Übergänge (Abb. 16.42, oben):

$$d \;\rightarrow\; p, \quad \text{also} \quad \ell_i = 2 \rightarrow \ell_f = 1$$

ist erlaubt, da $\Delta\ell$=-1

$$\begin{aligned} d &\rightarrow f \\ \ell_i &= 2 \rightarrow \ell_f = 3 \end{aligned} \tag{16.91}$$

[53] *Lexikon:* Die **Dipol-Auswahlregel** gibt in der Quantenphysik Auskunft darüber, ob ein Übergang zwischen Energiezuständen durch Emission oder Absorption von elektromagnetischer Strahlung möglich ist. Ausdruck elektronischer Übergänge in Atomen ist elektrische Dipolstrahlung.

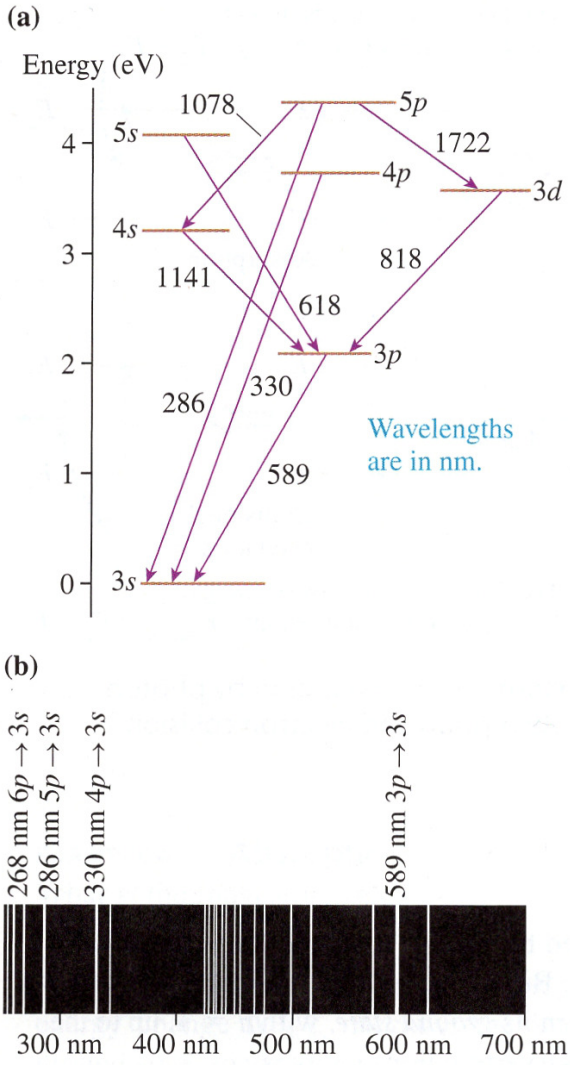


Abb. 16.43: Emissionsspektrum von Natrium [**?**].

ist erlaubt, da $\Delta\ell$=+1

- Optisch nicht erlaubte Übergänge (Abb. 16.42, unten):

$$\begin{aligned} d &\rightarrow d \\ \ell_i &= 2 \rightarrow \ell_f = 2 \end{aligned} \tag{16.92}$$

ist nicht erlaubt, da $\Delta\ell$=0

$$\begin{aligned} d &\rightarrow s \\ \ell_i &= 2 \rightarrow \ell_f = 0 \end{aligned} \tag{16.93}$$

ist erlaubt, da $\Delta\ell$=-2

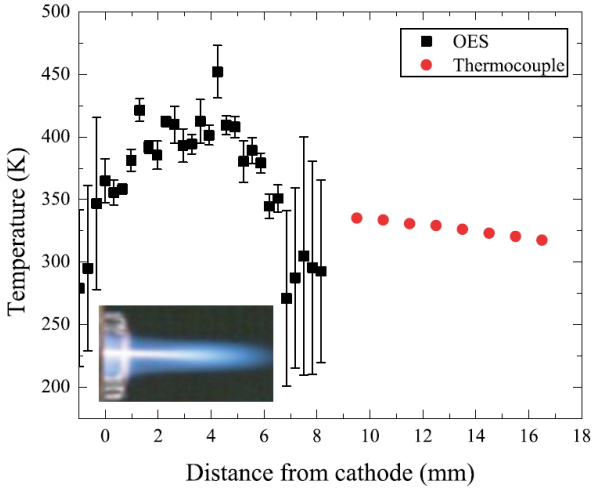


Abb. 16.44: Axiales Gastemperaturprofil des Plasma mit ortsaufgelöster optischer Emissionsspektroskopie und Thermoelement [**?**].

Die Dipol-Auswahlregel bestimmt, zwischen welchen Energiezuständen (n, ℓ) optische Übergänge (Emission/ Absorption von Licht) erlaubt sind. Nur Übergänge von $\ell = 1$ nach $\ell = 0$ oder 2 führen beispielsweise zu Lichtemission. Wie kann man sich intuitiv die Physik, die hinter den Auswahlregeln steckt, klarmachen? Bei einem erlaubten optischen Übergang von $2p$ nach $1s$ ändert sich räumliche Verteilung der Elektronenwolke und es bildet sich eine Dipolantenne. Bei einem nicht erlaubten Übergang von $2s$ nach $1s$ ändert sich nur die Ausdehnung der kugelsymmetrischen Elektronenverteilung. Die Elektronenwolke atmet und es bildet sich kein Dipol. Diese Atmungsbewegung führt zu keiner Abstrahlung elektromagnetischer Strahlung.[54] Abb. 16.43, oben zeigt das Termschema von Natrium und die erlaubten optischen Übergängen zwischen den $n\ell$-Zuständen. Im zugehörigen optischen Spektrum (unten) ergeben sich eine Reihe von Linien. Unter anderem kann man Serien erkennen, die durch Übergängen zwischen $2p \leftarrow ns$ bzw. $2p \leftarrow nd$ Zuständen zustande kommen.

Beispiele aus der Plasmaphysik

Die Stärke der Emissionslinien hängt davon ab, wie stark die angeregten Energieniveaus in den Atomen durch Elektronen besetzt sind. In Gasentladungslampen zum Beispiel ergibt sich die Intensität der Linien aus der Temperatur der Umgebung. Zustände, die energetisch weit vom Grundzustand entfernt sind, sind in der Regel auch bei hohen Temperaturen kaum durch Elektronen besetzt. Die Lichtemission ist deshalb deutlich geringer gegenüber anderen Energiezuständen, die durch eine geringere Energie angeregt werden können. Dieses Verhalten nutzt man, um auf optischem Weg Temperaturen zum Beispiel in einem Plasma zu bestimmen. Abb. 16.44 zeigt ein Beispiel [**?**].

Optische Emissions-Spektrometrie an einem induktiv gekoppeltem Plasma ist eine Ana-

[54] In der Quantenphysik gibt es allerdings Schlupflöcher. Tatsächlich erlaubt die Natur solche Übergänge mit $\Delta\ell$=0; sie sind nur extrem unwahrscheinlich. Wegen der daraus resultierenden langen Lebensdauer sind solche Übergänge wegen Heisenberg äußerst interessant für hochauflösende Spektroskopie [**?**].



Abb. 16.45: Das im Bild zu sehende Bevatron ist der Name des ersten großen Synchrotron-Teilchenbeschleunigers zur Beschleunigung von Protonen

lytik zum Nachweis chemischer Elemente. Durch das Plasma werden angeregte Atome und Ionen erzeugt, deren emittiertes Licht analysiert wird. Die im Plasma generierten Temperaturen liegen im Bereich von 6 000 bis 10 000 K. Man nutzt aus, dass die Intensität in der Emission bei den betrachteten Wellenlängen proportional zur Konzentration der Elemente in der Probe ist. Anwendungsgebiete sind die Bestimmung von Metallen in Wein [**?**], Arsen in Lebensmitteln[**?**] oder Proteine gebundenen an Spurenelemente [**?**]. Im Jahr 2008 wurde mit Hilfe dieser Methode gezeigt, dass das Chi-Rho-Amulett, das in Shepton Mallet gefunden wurde und als eines der frühesten Zeugnisse des Christentums in England galt, tatsächlich aus dem 19. Jahrhundert stammte [**?**].

Exotische Atome

Nach der Entdeckung des Positrons im Jahr 1933 war es naheliegend auch nach dem Antiproton zu fahnden. In Atom-Atom Kollisionen sollten sich, Rechnungen zufolge, bei Stoßenergien von 6 GeV ($p + p \rightarrow p + p + \overline{p} + p$) Antiprotonen erzeugen lassen (siehe Kapitel *Einsteingleichung*). Die Aussicht auf einen erfolgreichen Nachweis führte zum Bau eines der ersten größeren Beschleuniger, des Bevatrons in Berkeley (Abb. 16.45). Die Maximalenergie betrug 6.2 GeV, also gerade ausreichend um die $p\overline{p}$-Paare zu erzeugen [**?**]. Abb. 16.46 zeigt das Resultat des Experimente, in dem die Existenz des Antiprotons bestätigt wurde [**?**]. Später wurden das Anti-Deuterium (2009), Anti-Tritium, Anti-^{3}He (1999) und Anti-^{4}He (2011) nachgewiesen.

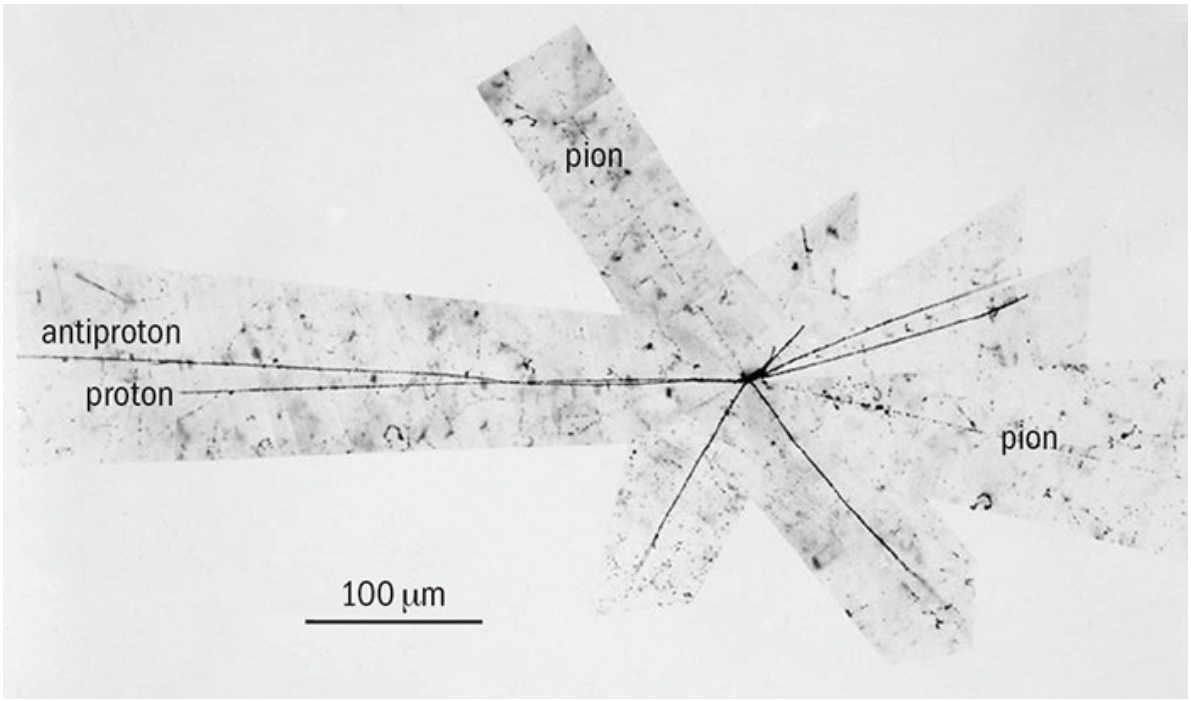


Abb. 16.46: Im Bevatron beobachtete Annihilation eines Antiprotons mit Hilfe einer einer fotografischen Emulsion. Das Antiproton kommt von links. Die dickeren Spuren stammen von langsamen Protonen oder Kernfragmenten, die schwachen Spuren von schnellen Pionen [**?**].

Confinement of antihydrogen for 1 000 seconds: Atoms made of a particle and an antiparticle are unstable, usually surviving less than a microsecond. Antihydrogen, made entirely of antiparticles, is believed to be stable, and it is this longevity that holds the promise of precision studies of matter–antimatter symmetry. We have recently demonstrated trapping of antihydrogen atoms by releasing them after a confinement time of 172 ms. A critical question for future studies is: how long can anti-atoms be trapped? Here, we report the observation of anti-atom confinement for 1 000 s, extending our earlier results by nearly four orders of magnitude. Our calculations indicate that most of the trapped anti-atoms reach the ground state. Further, we report the first measurement of the energy distribution of trapped antihydrogen, which, coupled with detailed comparisons with simulations, provides a key tool for the systematic investigation of trapping dynamics. These advances open up a range of experimental possibilities, including precision studies of charge–parity–time reversal symmetry and cooling to temperatures where gravitational effects could become apparent.

Antiwasserstoff ist, wenn es zu keiner Wechselwirkung mit anderen Teilchen kommt, ein stabiles System. Man kann aber auch versuchen, wasserstoffähnliche Atome mit instabilen Elementarteilchen zu erzeugen. Beispielsweise kann man das Proton durch ein Positron (Positronium) oder ein positiv geladenes Myon (Myonium [**?**]) ersetzen. An-

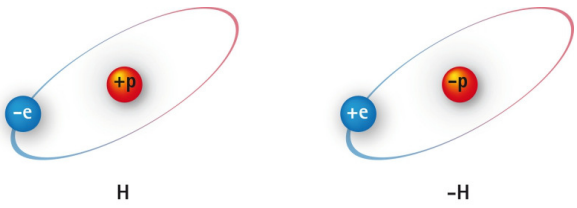


Abb. 16.47: Wasserstoff (p^+, e^-) und Antiwasserstoff (p^-, e^+).

dere Beispiele sind das pionische [**?**] und das kaonische Atom [**?**], das Protonium [**?**], sowie πK [**?**]. Myonische Atome sind interessant, weil aufgrund der großen Masse im Vergleich zum Elektron, die Radien der Bohrschen Bahnen extrem klein werden.

Observation of the 1S-2S transition in trapped antihydrogen [?]: The spectrum of the hydrogen atom has played a central part in fundamental physics over the past 200 years. Historical examples of its importance include the wavelength measurements of absorption lines in the solar spectrum by Fraunhofer, the identification of transition lines by Balmer, Lyman and others, the empirical description of allowed wavelengths by Rydberg, the quantum model of Bohr, the capability of quantum electrodynamics to precisely predict transition frequencies, and modern measurements of the 1S-2S transition by Hänsch to a precision of a few parts in 10^{15}. Recent technological advances have allowed us to focus on antihydrogen-the antimatter equivalent of hydrogen. The Standard Model predicts that there should have been equal amounts of matter and antimatter in the primordial Universe after the Big Bang, but today's Universe is observed to consist almost entirely of ordinary matter. This motivates the study of antimatter, to see if there is a small asymmetry in the laws of physics that govern the two types of matter. In particular, the CPT (charge conjugation, parity reversal and time reversal) theorem, a cornerstone of the Standard Model, requires that hydrogen and antihydrogen have the same spectrum. Here we report the observation of the 1S-2S transition in magnetically trapped atoms of antihydrogen. We determine that the frequency of the transition, which is driven by two photons from a laser at 243 nanometres, is consistent with that expected for hydrogen in the same environment. This laser excitation of a quantum state of an atom of antimatter represents the most precise measurement performed on an anti-atom. Our result is consistent with CPT invariance at a relative precision of about $2 \cdot 10^{-10}$.

Ein Beispiel aus der Atomphysik

Man tausche im Wasserstoff die beiden Ladungen aus und ersetzte das Elektron e^- durch ein Positron e^+ und das Proton p^+ durch das Anti-Proton p^- (Abb. 16.47).[55] Bis auf das Vorzeichen der Ladung sind Wasserstoff und Anti-Wasserstoff identisch. Die Frage, die die Forscher bewegt ist, ob sich durch diesen Ladungstausch merkliche Änderungen in

[55] The Nobel Prize in Physics 2005 was divided, one half awarded to Roy J. Glauber *for his contribution to the quantum theory of optical coherence*, the other half jointly to John L. Hall and Theodor W. Hänsch *for their contributions to the development of laser-based precision spectroscopy, including the optical frequency comb technique.*

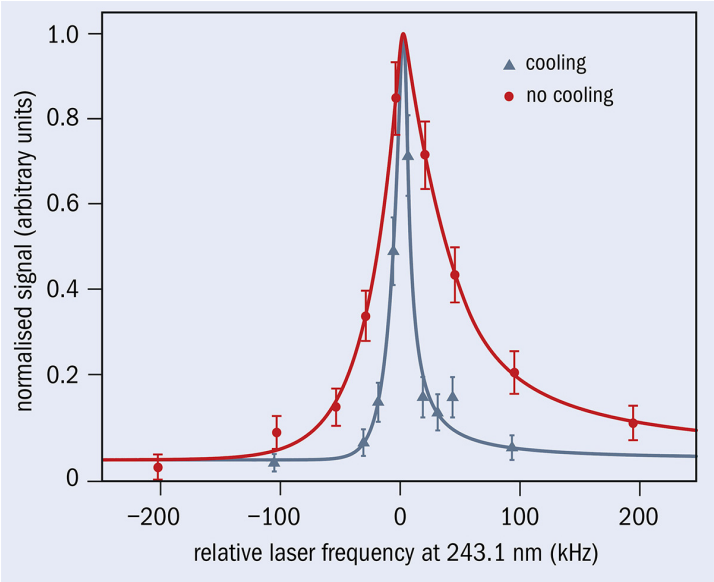


Abb. 16.48: Experimentelles $1s-2s$ Spektrum von Antiwasserstoff mit und ohne Laserkühlung [**?**].

den physikalischen Eigenschaften ergeben. Dazu bedarf es höchstauflösender Messungen. Der direkte optische Übergang von $1s$ nach $2s$ oder in umgekehrter Richtung ist aufgrund der Auswahlregel ($\Delta\ell \neq 1$) optisch verboten. Das bedeutet, dass ein Elektron im Zustand $2s$ nicht in den Grundzustand zurückkehren kann. Tatsächlich ist die quantenphysikalisch berechnete Wahrscheinlichkeit nicht NULL - aber fast NULL. Das Elektron verbleibt damit lange Zeit (Δt) in diesem $2s$ Zustand. Die Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ (siehe Vorlesung *Unschärferelation*) sagt in diesem Fall voraus, dass die Linienbreite (ΔE) des verbotenen optischen Übergangs ($1s \leftarrow 2s$, $\Delta\ell = 0$) extrem gering ist. Die sich daraus ergebende natürliche Linienbreite beträgt nur 1.3 Hz.[56] Durch einen Trick (bei Anregung durch die Absorption von zwei Photonen ist $\Delta\ell = (+1)+(-1) = 0$) können Laserphysiker diesen Übergang testen und versuchen Abweichungen nachzuweisen. Abb. 16.48 zeigt jüngste Erfolge bei hochpräzisen Messungen der Linienbreite in Antiwasserstoff [**? ?**]. Diese wurden durch das Prinzip der Laserkühlung erreicht.[57]

Two-photon frequency comb spectroscopy of atomic hydrogen [?]: We have performed two-photon ultraviolet direct frequency comb spectroscopy on the 1S-3S transition in atomic hydrogen to illuminate the so-called proton radius puzzle and to demonstrate the potential of this method. The proton radius puzzle is a significant discrepancy between data obtained with muonic hydrogen and regular atomic hydrogen that could not be explained within the framework of quantum electrodynamics. By combining our result [f_{1S-3S}=2 922743278665.79(72) kilohertz] with a previous measure-

[56] Man setze diesen Wert in Relation zu optischen Lichtfrequenzen 10^{15} Hz.

[57] The Nobel Prize in Physics 1997 was awarded jointly to Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji and William D. Phillips *for development of methods to cool and trap atoms with laser light.*

ment of the 1S-2S transition frequency, we obtained new values for the Rydberg constant [R_∞=10973731.568226(38) per meter] and the proton charge radius [r_p=0.8482(38) femtometers]. This result favors the muonic value over the world-average data as presented by the most recent published CODATA 2014 adjustment.

Diese Messungen haben eine erhebliche Bedeutung für die Elementarteilchenphysik. Mit Antiwasserstoff kann das so genannte CPT-Theorem (Charge-Parity-Time) der Quantenfeldtheorie überprüft werden, siehe Abb. 16.49. Das Theorem macht eine Aussage für den Fall, dass man gleichzeitig Materie mit Antimaterie vertauscht, den Raum spiegelt und die Zeitrichtung umkehrt. Trotz erheblicher experimenteller Anstrengungen konnte bislang kein Unterschied zwischen Wasserstoff und Antiwasserstoff festgestellt werden. Das CPT Theorem ist also nicht verletzt!

Observation of the 1S-2S transition in trapped antihydrogen [?]: The spectrum of the hydrogen atom has played a central part in fundamental physics over the past 200 years. Historical examples of its importance include the wavelength measurements of absorption lines in the solar spectrum by Fraunhofer, the identification of transition lines by Balmer, Lyman and others, the empirical description of allowed wavelengths by Rydberg, the quantum model of Bohr, the capability of quantum electrodynamics to precisely predict transition frequencies, and modern measurements of the 1S-2S transition by Hänsch1 to a precision of a few parts in 10^{15}. Recent technological advances have allowed us to focus on antihydrogen-the antimatter equivalent of hydrogen. The Standard Model predicts that there should have been equal amounts of matter and antimatter in the primordial Universe after the Big Bang, but today's Universe is observed to consist almost entirely of ordinary matter. This motivates the study of antimatter, to see if there is a small asymmetry in the laws of physics that govern the two types of matter. In particular, the CPT (charge conjugation, parity reversal and time reversal) theorem, a cornerstone of the Standard Model, requires that hydrogen and antihydrogen have the same spectrum. Here we report the observation of the 1S-2S transition in magnetically trapped atoms of antihydrogen. We determine that the frequency of the transition, which is driven by two photons from a laser at 243 nanometres, is consistent with that expected for hydrogen in the same environment. This laser excitation of a quantum state of an atom of antimatter represents the most precise measurement performed on an anti-atom. Our result is consistent with CPT invariance at a relative precision of about $2 \cdot 10^{-10}$.

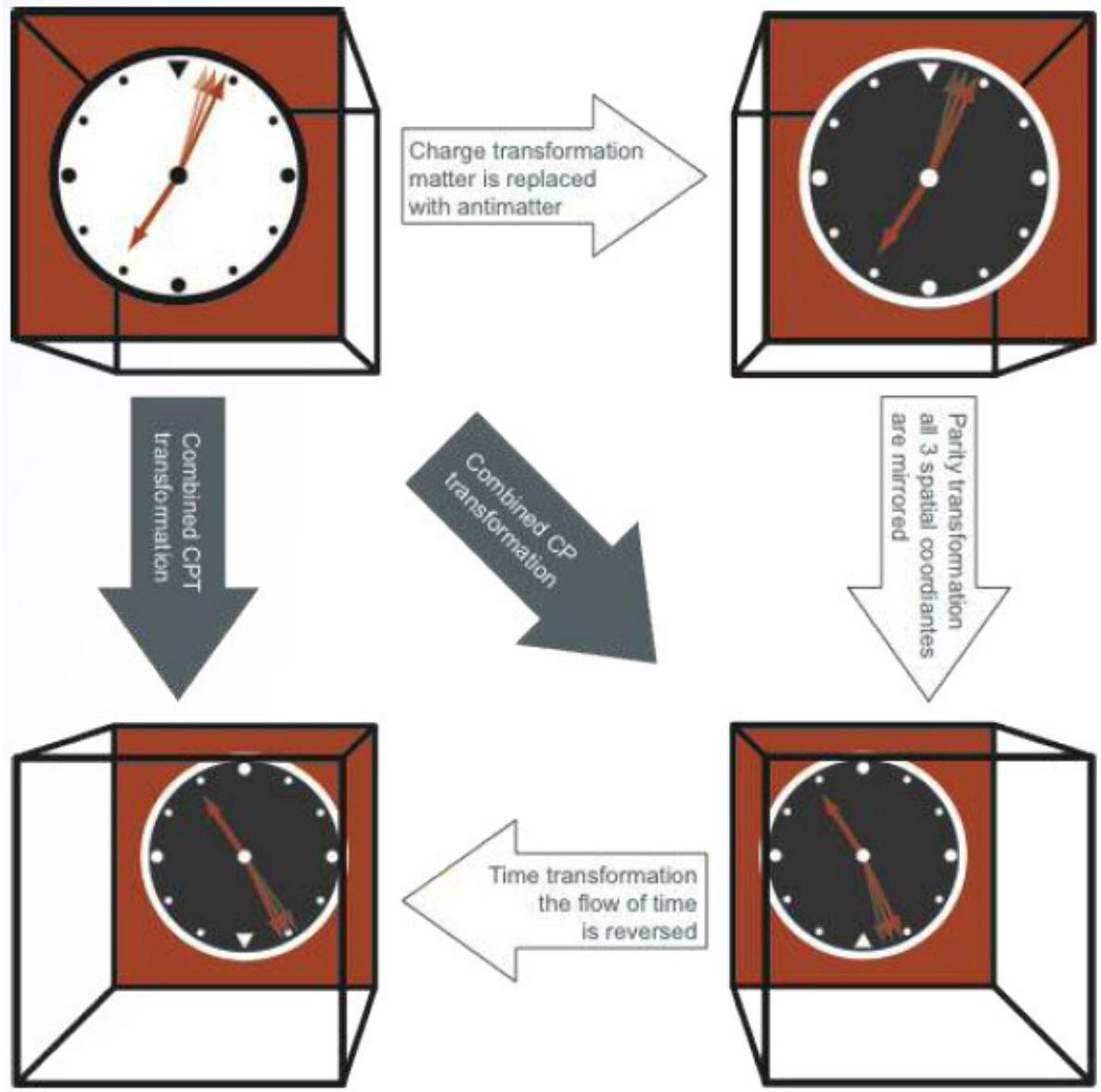


Abb. 16.49: Das CPT-Theorem besagt, dass eine gleichzeitige Spiegelung des Raumes (P), eine Umkehrung der Zeitrichtung (T) und ein Austausch von Teilchen mit seinem Antiteilchen (C) nicht bemerkt werden würde. Man geht davon aus, dass das CPT-Theorem in unserem Universum nicht verletzt ist.

Well up beyond the tropostrata
There is a region stark and steller
Where, on a streak of anti-matter,
Lived Dr Edward Anti-Teller.

Remote from fusion's origin
He lived unguessed and unawares
With all his anti-kith and kin,
And kept macassars[58] on his chairs.

One morning, idling by the sea
He spied a tin monstrous girth
That bore three letters: A E C[59]
Out stepped a vistitor from earth.

Then, shouting gladly o'er the sands,
Met two who in their alien ways
Were like as lentils. Their right hands
Clapsed, and the rest was gamma rays.

The Perils of Modern Living by Harold P. Furth

Zeeman-Effekt

According to the classical theory, then, the electron orbits-and spins-in an atom should precess in a magnetic field. Is it also true quantum-mechanically? It is essentially true, but the meaning of the precession is different. In quantum mechanics one cannot talk about the direction of the angular momentum in the same sense as one does classically; nevertheless, there is a very close analogy-so close that we continue to call it precession [**?**].

Richard Feynman

Was passiert, wenn man ein angeregtes Atom einem magnetischen Feld aussetzt?

Die Frage wird durch das schon in der Kapitel *Elektrodynamik* eingeführte Larmor-Theorem[60] beantwortet. Das Elektron führt eine zusätzliche Rotation um die Feldachse

[58] An antimacassar is the doily that we used on arms and backs of sofas and chairs to protect them from hair oil (of Macassar was a brand) Obviously, an anti-antimacassar must be a macassar.
[59] AEC: Atomic Energy Commission
[60] *Lexikon:* Jeder magnetische Dipol, der unter einem Winkel einem homogenen Magnetfeld ausgesetzt ist, vollführt eine charakteristische Präzessionsbewegung mit der **Larmorfrequenz** aus, da der Dipol

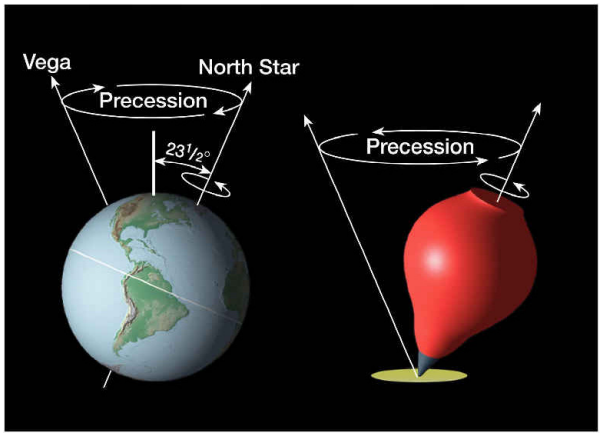


Abb. 16.50: Eine Präzessionsbewegung findet man sowohl für die Erde als auch für einen Kreisel. In beiden Fällen wird die externe Kraft durch die Gravitation hervorgerufen.

aus. Abb. 16.50 zeigt das mechanische Analogon. The Kreisfrequenz errechnet sich aus der magnetischen Feldstärke H und dem gyromagnetischen Verhältnis von magnetischem Moment und Drehimpuls $(e/2\,m_e \cdot c)$:

$$\omega_{Larmor} = \frac{H \cdot g \cdot e}{2\,m_e \cdot c} \tag{16.94}$$

Dabei bezeichnet der Eintrag g den Landé-Faktor[61]. Die möglichen Werte (g=1 oder 2), ergeben sich aus der Natur des Elektrons [**?**].

Welche Bedeutung hat eine Ausrichtung im Raum für das Wasserstoffatom?

Die Antwort ergibt sich aus der Betrachtung elektrischer Ströme, wobei sich die Bewegung auf die einer einzelnen Ladung, nämlich des Elektrons, reduziert. Die Kreisbahn des Elektrons (Ladung $q = e$) um den Atomkern mit einem Radius r_e mit einer Kreisfrequenz $\omega_e = 2\pi/\,T_e$ entspricht einem Kreisstrom ($I_e = e/\,T_e = e \cdot \omega_e/\,2\pi$). Durch eine Drahtschleife fließt ein zeitlich konstanter Strom.[62] Die in der Schleife liegende Fläche wird von Magnetfeldlinien durchsetzt, wobei die Richtung von der Bewegungsrichtung bestimmt wird (Rechte-Hand-Regel), siehe Abb. 16.51. Diese Betrachtung führt auf ein magnetisches Dipolmoment:

$$\mu = I_e \cdot \pi \cdot r_e^2 = \frac{1}{2} e \cdot r_e^2 \cdot \omega_e \tag{16.95}$$

versucht, sich in Feldrichtung auszurichten. Aufgrund des Drehimpulses kommt es dabei zu einer Auslenkung deren Richtung senkrecht zur der von Dipol- und Feldvektor aufgespannten Fläche. Die Kreisfrequenz der Präzession ist nach dem **Larmor-Theorem** unabhängig vom Winkel zwischen Feld und Dipol.

[61] Der g-Faktor ist eine dimensionslose Größe, die das magnetische Moment und den Drehimpuls eines Teilchens (Atom, Kern,...) charakterisiert. Diese Proportionalitätskonstante setzt das magnetischen Moment des Teilchens mit ihren Drehimpulsquantenzahlen und einem charakteristischen magnetischen Moments in Beziehung (Bohrsches Magneton oder Kernmagneton).

[62] Eine zeitliche Änderung hätte einen Abstrahlung von Energie zur Folge!

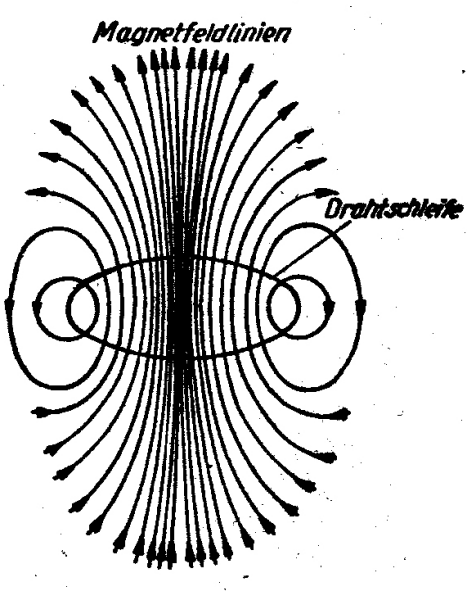


Abb. 16.51: Magnetfeldlinien, erzeugt durch einen Kreisstrom in einer Leiterschleife [**?**].

Die Höhe und Ausrichtung des magnetischen Dipols bestimmt die potenzielle Energie im magnetischen Feld B_M. Dies sieht man beispielsweise am resultierenden Drehmoment τ:

$$\tau = \mu \cdot B_M \cdot \sin \Theta \tag{16.96}$$

wobei Θ der Winkel zwischen μ und B_M ist. Das Drehmoment ist maximal, wenn $\mu \perp B_M$ und NULL, wenn $\mu || B_M$. Zur Berechnung der potenziellen Energie wählen wir E_{pot}=0, wenn μ parallel zu B_M ist.

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \int_{90^o}^{\Theta} \tau \, d\Theta \\ E_{pot} &= \mu \cdot B_M \int_{90^o}^{\Theta} \sin \Theta, d\theta \\ E_{pot} &= -\mu \cdot B_M \cdot \cos \Theta \end{aligned} \tag{16.97}$$

Wenn die Richtung μ und B_M übereinstimmen, ist die potenzielle Energie mit $E_{pot} = -\mu B_M$ minimal und es ergibt sich das schon aus der Elektrodynamik bekannte Verhalten, dass ein magnetischer Dipol versucht, sich im Magnetfeld auszurichten. Der Betrag des Bahndrehimpulses ($L_e = m_e \cdot r_e^2 \cdot \omega_e$) ist von der derselben Größenordnung. Damit ergibt sich mit $q = -e$

$$\mu_q = \frac{q}{2\,m_e} L_e \tag{16.98}$$

$$\mu_e = -\frac{e}{2\,m_e} L_e \tag{16.99}$$

μ_e ist das magnetische Bahnmoment einer kreisenden Punktladung. Das Vorzeichen der Ladung entscheidet darüber, ob die Vektoren $\vec{\mu_e}$ und $\vec{L_e}$ parallel (q positiv) oder antiparallel (q negativ) ausgerichtet sind. Das magnetische Moment wird also vom Bahndrehimpuls bestimmt und unterliegt damit -nicht überraschend- Quantisierungsregeln.

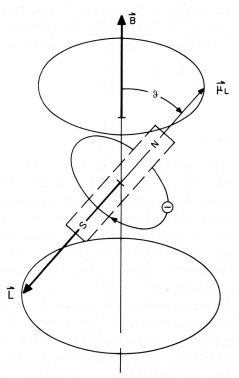


Abb. 16.52: Die Ausrichtung des Bahndrehimpulse unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes führt zu einer quantisierten Präzessionsbewegung, die mit Hilfe der magnetischen Drehimpulsquantenzahl m_ℓ beschrieben wird [**?**].

Die Bahnebene des kreisenden Elektrons richtet sich in einem magnetischen Feld (z-Richtung) aus, siehe Abb. 16.52. Die quantenphysikalische Behandlung des Problems ergibt eine Auswahlregel hinsichtlich ihres Betrages von μ_e

$$\begin{aligned} \mu_e &= \frac{e \cdot \hbar}{2\, m_e} \sqrt{\ell(\ell+1)} \\ \mu_e &= \mu_B \sqrt{\ell(\ell+1)} \end{aligned} \tag{16.100}$$

wobei μ_B eine Naturkonstante ist.[63]

Bohrsches Magneton: $\mu_B = \dfrac{e \cdot \hbar}{2\, m_e} = 9.273 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{A{\cdot}m^2} = 5.79 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV/T}$

Das bedeutet, dass die Energieniveaus in einem Magnetfeld von 1 Tesla sich nur um $5.79 \cdot 10^{-5}$ eV unterscheiden. Eine experimentelle Herausforderung, wenn man bedenkt, dass typische Energieabstände in der Größenordnung von eV sind!

Is the standard model broken? Physisits cheer muon result [**? ?**]**:** Muons keep on misbehaving. An experiment in the United States has confirmed an earlier finding that the particles - massive, unstable cousins of the electron - are more magnetic than researchers originally expected. If the results hold up, they could ultimately force major changes in theoretical physics and reveal the existence of completely new fundamental particles.

Die Bahndrehimpuls L kann folgende Werte annehmen:

[63] In der Kernphysik definiert man analog das Kernmagneton

$$\mu_N = \frac{e \cdot \hbar}{2\, m_p} = 3.15 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{eV/T} \tag{16.101}$$

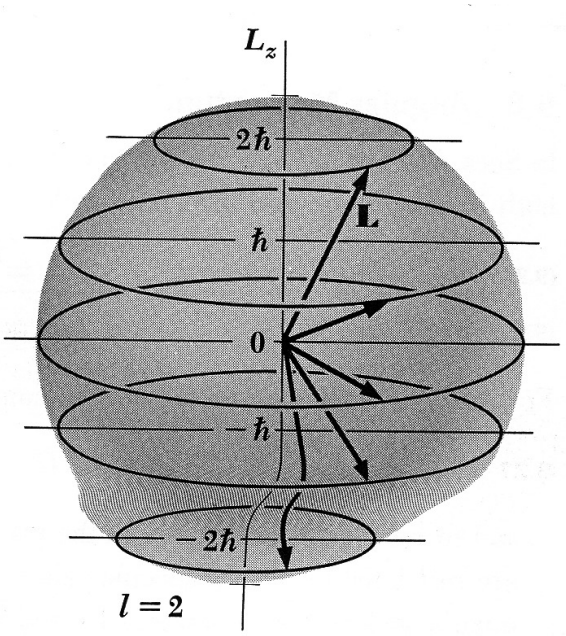


Abb. 16.53: Richtungsquantisierung für den Fall $\ell = 2$ [?].

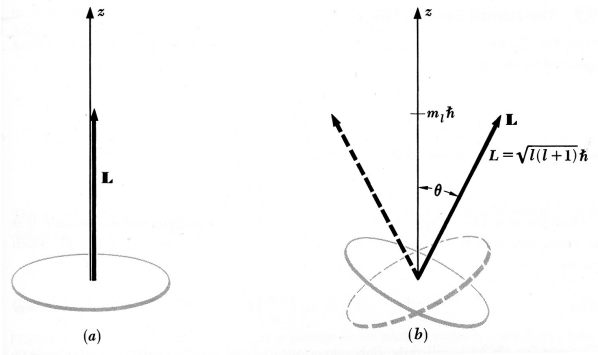


Abb. 16.54: Die Heisenbergsche Unschärferelation verhindert, dass sich der Bahndrehimpuls im Magnetfeld in eine bestimmte Richtung einstellt [?].

Bahndrehimpuls: $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$

Durch ein äußeres Magnetfeld prädiziert der Drehimpuls um die Magnetfeldachse und kann nur bestimmte Werte in Bezug auf diese Achse einnehmen. Bezüglich der z-Komponente des Bahndrehimpulsvektors L_z sind nur folgende diskrete Werte erlaubt:

z-Komponente des Drehimpulses: $L_z = m_\ell\hbar$, $m = -\ell \ldots, -1, 0, 1, \ldots \ell$

wobei $m_\ell = 0, \pm 1 \pm 2, \cdots \pm \ell$ die magnetische Quantenzahl ist. Insgesamt ergeben sich also $2\ell + 1$ mögliche Richtungseinstellungen, beispielsweise eine für $\ell = 0$ und drei für $\ell = 1$. Abb. 16.53 illustriert die Richtungsquantelung. Der Winkel Θ ergibt sich aus

$$\cos\Theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \tag{16.102}$$

Warum ist nur eine Komponente von L quantisiert?

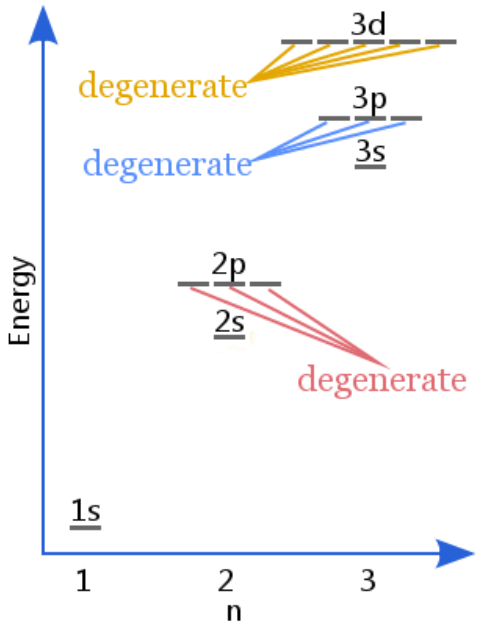


Abb. 16.55: Die Richtungsquantisierung führt auf Zustände, die im Magnetfeld in Abhängigkeit von der magnetischen Quantenzahl m_ℓ aufspalten. Man spricht von der Aufhebung der Entartung.

Der Bahndrehimpuls stellt im Magnetfeld sich nicht in eine bestimmte Richtung ein, sondern vollführt eine Präzessionsbewegung um die Magnetfeldachse, so dass für die Projektion von L auf die Feldachse gilt: $L_Z = m \cdot \ell \cdot \hbar$. Man kann das Verhalten auf der Grundlage der Heisenbergschen Unschärferelation verstehen. Wenn L eine feste Richtung im Raum hätte (Abb. 16.54, links), dann könnte man definierte Werte für L_x, L_y und L_z angeben. Zeigt beispielsweise L in Richtung z, müsste sich das Elektron stets in der xy-Ebene bewegen. Das würde bedeuten, dass die Unsicherheit in z-Richtung maximal unbestimmt sein müsste ($p_z = \infty$). Das ist aber unphysikalisch, denn das Elektron ist Teil des Atoms und kann nicht irgendwo im Universum herumschwirren. Wenn nur der Betrag von L, also $|L|$, und die z-Komponente von L, also L_z definierte Werte annehmen, ist die Bahnebene frei wählbar (Abb. 16.54, rechts). Die Richtung von L ändert sich dauernd und damit sind die Werte von L_x und L_y im Mittel NULL, während die z-Komponente einen definierten Wert von $L_z = m_\ell \cdot \hbar$ hat, siehe Abb. 16.53.

Durch ein äußeres Magnetfeld kommt es aufgrund der magnetischen Quantenzahl m_ℓ zu einer Aufspaltung der Energiezustände in Bezug auf einen gegebenen Bahndrehimpuls L (Abb. 16.55). Man spricht in diesem Fall von einer Aufhebung der Entartung der Zustände. Die Änderung in der potenzielle Energie ist

$$\Delta E_{pot} = m_\ell \cdot \mu_B \cdot B_M \tag{16.103}$$

Die Aufspaltung der Spektrallinien eines Aoms im Magnetfeld nennt man den Zeeman-Effekt.[64] In der Emission beobachtet man, dass sich die Spektrallinien aufspalten, wobei

[64] The Nobel Prize in Physics 1902 was awarded jointly to Hendrik Antoon Lorentz and Pieter Zeeman *in recognition of the extraordinary service they rendered by their researches into the influence of magnetism upon radiation phenomena.*

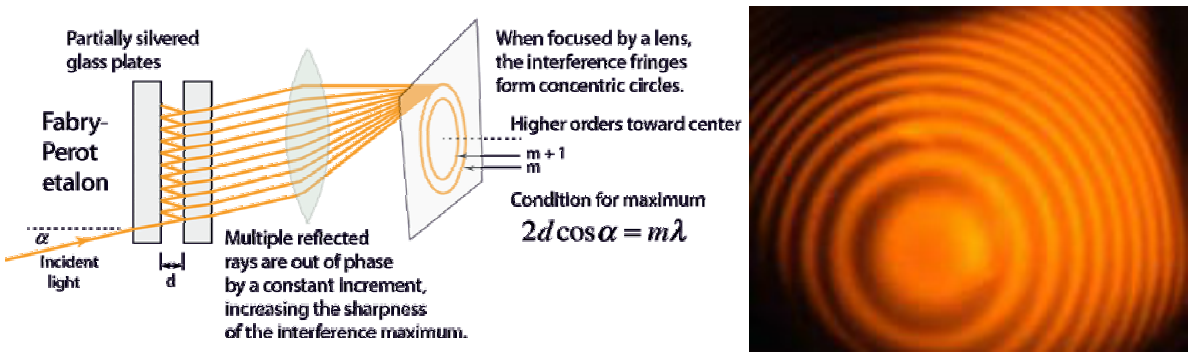


Abb. 16.56: Nachweis der Zeemanaufspaltung einer Emissionslinie mit Hilfe eine Fabry-Perot Interferometers.

die Frequenzen von der Beobachtungsrichtung abhängen. Der Zeeman-Effekt[65] [66] ist damit ein klarer Nachweis der Drehimpuls-Quantisierung. An dieser Stele muss ergänzt werden, dass die oben aufgerufenen Auswahlregel für optische Übergänge auch von m_ℓ abhängt.

Dipol-Auswahlregel für den Bahndrehimpuls: $\Delta\ell = \pm 1$

Dipol-Auswahlregel für den magnetische Drehimpulsquantenzahl: $\Delta m_\ell = 0, \pm 1$

Die experimentelle Beobachtung des Zeeman-Effekts erfordert hochauflösende Spektrometer, da die spektrale Verschiebung der Spektrallinien äußerst gering ist. Die spektrale Aufspaltung ΔE hängt dabei von der Stärke des äußeren Magnetfeldes B_M ab.

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{Zeeman}} &= \frac{e}{2\,m_e} \cdot L_z \cdot B_M \\ \Delta E_{\text{Zeeman}} &= \frac{e \cdot \hbar}{2\,m_e} \cdot m_\ell \cdot B_M \\ \Delta E_{\text{Zeeman}} &= \mu_B \cdot m_\ell \cdot B_M \end{aligned} \tag{16.104}$$

da $L_z = m_\ell \cdot \hbar$. Der Energie- bzw. Frequenzabstand benachbarter Zeeman-Niveaus

[65] *Lexikon:* Der **Zeeman-Effekt** bezeichnet die Aufspaltung einer Spektrallinie in zwei oder mehr Komponenten mit leicht unterschiedlicher Frequenz, wenn die Lichtquelle in ein Magnetfeld gebracht wird. Zuerst wurde dieser Effekt als geringfügige Verbreiterung der gelben D-Linien von Natrium in Flammen beobachtet, die zwischen starken magnetischen Polen gehalten wurde. Zur spektralen Auflösung benötigt man hochauflösende Spektrometer, wie beispielsweise ein Fabry-Pérot-Interferometer (Abb. 16.56). Durch das Magnetfeld kann in bestimmten Elementen eine Aufspaltung der Spektrallinien in bis zu 15 Komponenten erreicht werden. Es stellt sich heraus, dass sich eine unterschiedliche Aufspaltung der Spektrallinien ergibt, wenn man aus unterschiedlichen Richtungen in Bezug auf die Achse des Magnetfeldes auf die Lichtemission schaut (Abb. 16.57).

[66] *Lexikon:* Ein **Fabry-Pérot-Interferometer** besteht aus zwei planparallelen Spiegeln hoher Reflektivität, die miteinander einen optischen Resonator bilden. Verwendet man ein Fabry-Pérot-Interferometer mit einem festem Spiegelabstand, wird das Instrument als Etalon bezeichnet.

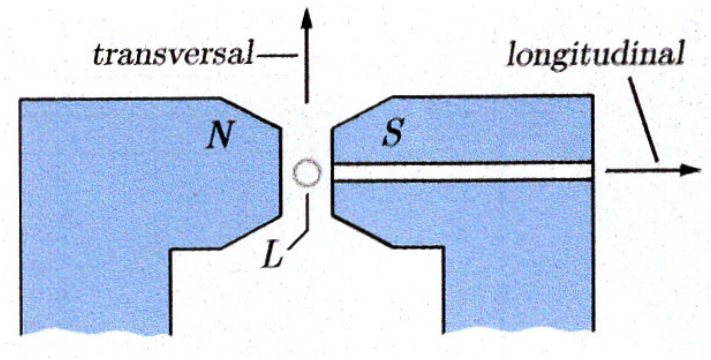


Abb. 16.57: Die genaue Analyse des Zeeman-Effekts führt darauf, dass Polarisation des emittieren Licht von der Beobachtungsrichtung in Bezug auf die Magnetfeldachse abhängt.

($\Delta m_\ell = 1$) ergibt sich mit:

$$\Delta E_{\text{Zeeman}} = h \cdot \Delta\nu_{\text{Zeeman}} = \mu_B \cdot B_M = 5.788 \cdot 10^{-5} \cdot B_M \frac{\text{eV}}{\text{T}} \tag{16.105}$$

$$\Delta\nu_{\text{Zeeman}} = \frac{e \cdot B_M}{4\,\pi \cdot m_e} = 1.4 \cdot 10^{10} \cdot \frac{B_M}{\text{T} \cdot \text{s}} \tag{16.106}$$

Wie wirkt sich die Quantenzahl m_ℓ auf die Dipolauswahlregel aus?

Abb. 16.58 zeigt die optischen Übergänge im Atom Cadmium. Offensichtlich gilt folgende Auswahlregel:

$$\Delta m_\ell = 0, \pm 1 \tag{16.107}$$

Das ist aber genau das, was man der Dipolauswahlregel ($\Delta\ell = \pm 1$) erwarten würde, denn $\Delta m_\ell > 1$ würde bedeuten, dass ein Drehimpuls größer als $\hbar$ übertragen würde.

Anwendungen

Ein Beispiel aus der Sonnenforschung

Der Zeeman-Effekt eröffnet Möglichkeiten, durch optische Methoden, entfernte Magnetfelder zu vermessen. Bei einem Sonnenfleck[67] werden die Spektrallinien, die normalerweise bei einer einzigen Wellenlänge liegen, bei Anwesenheit eines Magnetfelds in Zeeman-Komponenten aufgespalten. Dabei ist der Abstand zu den äußeren Komponenten proportional zur Stärke des Magnetfelds. In Abb. 16.59 beträgt die Stärke des Magnetfeldes etwa 0.4 Tesla. Dazu wurde die 525.02 nm Linie des Elements Eisen analysiert.

[67] *Lexikon:* Die dunklen Sonnenflecken sind Gebiete eines starken Magnetfeldes auf der Sonnenoberfläche. Struktur und Dynamik resultiert aus der Wechselwirkung des Magnetfeldes mit konvektiven Strömungen, die Energie aus dem Sonneninnern an die Oberfläche transportieren.

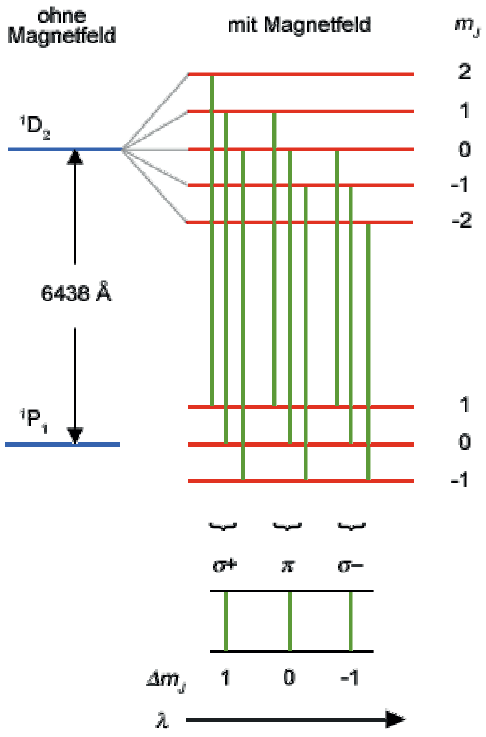


Abb. 16.58: Der normale Zeeman-Effekt bei der 6438 Å Linie des Cadmiums. Jede Linie $(\pi, \sigma^+, \sigma^-)$ stammt in Wirklichkeit von drei Übergängen mit identischer Frequenz bzw. Wellenlänge.

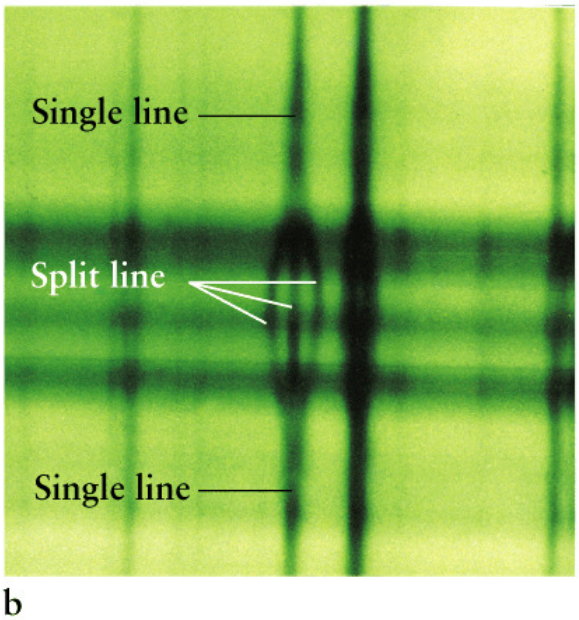


Abb. 16.59: Die starken Magnetfelder in Sonnenflecken bewirken eine Zeeman-Aufspaltung des Sonnenlichts [?].

Ein Beispiel aus der Astrophysik

Im Jahr 1938 fand Minkowski im ansonsten fast kontinuierlichen Spektrum des Weißen Zwerg Grw+70^o 8247 zwei breite Absorptionslinien bei 4135 und 4475 Å. Eine Zuordnung zu den vermutlichen als Ursache verantwortlichen Elementen H, He, C, O oder auch anderen Elementen war nicht möglich. Die spektralen Merkmale blieben bis Mitte der 80er Jahre unklar, bis erste Rechnungen zu Wasserstoffübergängen in starken Magnetfeldern zur Verfügung standen. Es stellte sich heraus, dass es sich bei den spektralen Merkmalen um stark Zeeman-verschobene Linien handelte [**?**]. Das berühmte Minkowski-Band in der Nähe von 4135Å wurde als Zeeman verschobene Komponente von H_β identifiziert. Die Linie war um etwa 700 Å von ihrer Position ohne externes Magnetfeld verschoben. Die zur Erklärung der Verschiebung notwendigen magnetischen Felder sind von der Größenordnung 10^3 bis 10^4 T. Zum Vergleich: Im Labor erreicht man mit supraleitenden Magneten nur etwa 10 T.

Der Zeemaneffekt resultiert aus der Wechselwirkung mit einem externen Magnetfeld. In vielen Atomen gibt es aber auch ein permanentes internes Magnetfeld, das sich aus der Bewegung der Ladungen ergibt und ebenfalls zu einer Aufspaltung der Energieniveaus führt. Die Aufspaltung aufgrund des internen magnetischen Feldes nennt man Feinstruktur. Zum Verständnis dieses Phänomens betrachten wir Wasserstoff in einem bestimmten $n\ell$-Zustand, wobei ($\ell \neq 0$). Im Ruhesystem des Elektrons kreist das Proton um das Elektron, das aufgrund der durch das Proton bereitgestellten Leiterschleife, ein magnetisches Feld spürt. Das Stärke des Magnetfelds ist proportional zur Frequenz, mit der sich das Proton um das Elektron bewegt und damit proportional zum Bahndrehimpuls. Wie groß ist der Effekt? Dazu betrachten wir die Bewegung eines $2p$-Elektrons um das Proton. Das zugehörige magnetische Feld hat eine Stärke von etwa B_M=0.39 T. Das $2p$-Niveau spaltet auf, wobei der Energieabstand $2\,\mu_B \cdot B_M$ beträgt. Das ergibt einen Energiewert von $4.5 \cdot 10^{-5}$ eV, was extrem gering ist im Vergleich zum Energieabstand zwischen den $1s$- und $2p$-Zuständen von 10.2 eV. Dementsprechend fällt die Wellenlängenverschiebung mit $5.4 \cdot 10^{-4}$ äußerst gering ist.[68]

[68] Die Wechselwirkung mit dem magnetischen Moment des Elektrons führt zur Aufspaltung der Niveaus, genannt Spin-Orbit Aufspaltung. Die Ursache für das magnetische Moment des Elektrons erfahren wir im nächsten Kapitel.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Der Drehimpuls des Elektrons ist durch die Drehimpulsquantenzahl $\ell = 2$ ($m_\ell = -2, -1, 0, +1, +2$) charakterisiert. Wie groß ist der minimale Winkel zwischen $\vec{L}$ und Magnetfeldachse?

Der minimale Winkel $\cos\Theta_{\min}$ ergibt sich für $m_\ell = 2$:

$$\begin{aligned} \cos\,\Theta_{\min} &= \frac{2}{\sqrt{2(\ell+1)}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0.816 \\ \Theta_{\min} &= 35.3^o \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann verallgemeinert werden. Der Bahndrehmimpuls des Elektrons kann sich nicht parallel oder antiparallel zu einem externen Magnetfeld ausrichten!

Aufgabe 1.2:

a: Berechnen Sie für Wasserstoff die maximale Zeemanaufspaltung für den $3d$ Zustand in einem Magnetfeld von 1 Tesla?

b: Wie groß ist die Wellenlängenverschiebung, wenn man von $1s$ in den $2p$ Zustand anregt?

c: Welche Auflösungsvermögen ($\mathcal{A} = \lambda/\Delta\lambda$) eines Spektrometers ist erforderlich?

a. Im Zustand $3d$ ist ℓ=2 und die maximale Energieaufspaltung ΔE ergibt sich zwischen m_ℓ=–2 und m_ℓ=+2, also Δm_ℓ=4.

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta m_\ell \cdot \mu_B \cdot B_M \\ \Delta E &= 4 \cdot 9.274 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J/T} \cdot 1.0\,\mathrm{T} \\ \Delta E &= 3.7 \cdot 10^{-23}\mathrm{J} = 0.0232\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

b. Der Übergang $2p \leftarrow 2s$ ist aufgrund der Dipol-Auswahlregel optisch erlaubt. Der Zustand $1s$ spaltet im Magnetfeld wegen $\ell = 0$ nicht auf. Anders dagegen $2p$: $m_\ell = \pm 1$. Der Energieabstand ohne Magnetfeld berechnet sich mit

$$E_{12} = R_y \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = (13.6 - 3.4)\,\mathrm{eV} = 10.2\,\mathrm{eV} = 1.66 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$$

Dies entspricht einer Wellenlänge (Ly-α) von

$$\lambda_{12} = \frac{h \cdot c}{E_{12}} = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{1.66 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}} = 121.5\,\mathrm{nm}$$

Die Zeeman-Aufspaltung beträgt

$$E_{\text{Zeeman}} = \mu_B \cdot B_M = 9.274 \cdot 10^{-24}\,\text{J/T} \cdot 1\,\text{T} = 116 \cdot 10^{-6}\,\text{meV}$$

Die resultierende Wellenlängenverschiebung beträgt

$$\Delta\lambda_{\text{Zeeman}} = \lambda_{12} - \lambda_{\text{Zeeman}} \rightarrow \pm 1.38 \cdot 10^{-3}\,\text{nm}$$

c. Das benötigte Auflösung $\mathcal{A}$ des optischen Spektrometers muss besser sein als

$$\mathcal{A} = \frac{\lambda_{12}}{\Delta\lambda_{\text{Zeeman}}} = \frac{121.5\,\text{nm}}{1.38 \cdot 10^{-3}\,\text{nm}} = 88\,000$$

Aufgabe 1.3: Ein Elektron im Wasserstoff befindet sich im Zustand $4p$.

a. Welche optischen Übergänge sind erlaubt?

b. Wie stark sind die Zustände entartet?

a. Die Dipol-Auswahlregel erlaubt Übergänge mit $\Delta\ell = \pm 1$. Das bedeutet es kommt zur Emission von Licht beim Wechsel des Elektrons in die Zustände $3s$, $2s$, $1s$ und $3d$.

b. Die s-Zustände sind wegen $(m_\ell = -\ell, \ldots, \ell)$ jeweils 1-fach entartet und der d-Zustand 5-fach, da $\ell = 2$.

Aufgabe 1.4: In dem in Abb. 16.60 gezeigten Termschema eines Atoms kommt es zur Lichtemission aus dem $5p$ Zustand. Welcher Übergang zeichnet sich durch die geringste Photonenenergie aus?[69]

(a) 1 eV

(b) 2 eV

(c) 3 eV

(d) 4 eV

Aufgabe 1.5: Eine gleiche Anzahl (N_A^*, N_B^*) an angeregten Atomen A* und B* werden zum Zeitpunkt t=0 angeregt. Die Zerfallsrate von Atom B ist doppelt so hoch, wie die von Atom A. Wie ist das Verhältnis N_B^*/N_A^* nach einer Halbwertszeit des Atoms A?[70]

(a) > 2

(b) 2

(c) 1

[69] Antwort: (c)

[70] Antwort: (e) Falls ihnen die Thematik nicht mehr bekannt vorkommt, werfen sie nochmal einen Blick in das Kapitel *Zerfall des Myons*.

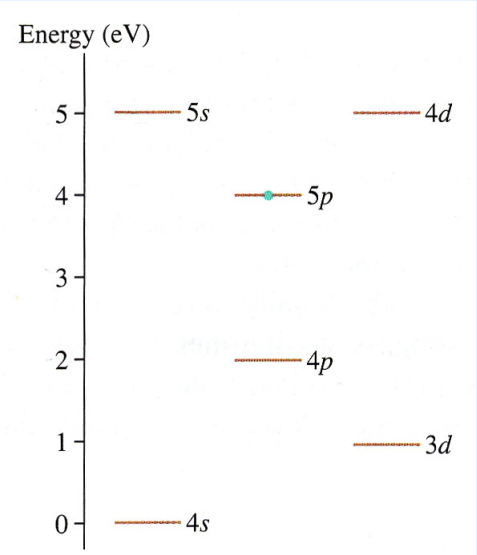


Abb. 16.60:

(d) 1/2

(e) $< 1/2$

Aufgabe 1.6: Ist die Elektronenkonfiguration $1s^2\,2s^2\,2p^4\,3s$ der Grundzustand des Atoms oder ein angeregter Zustand?[71]

(a) Grundzustand

(b) angeregter Zustand

(c) Kann kann nichts angeben, weil man nicht weiß, um welches Element es sich handelt.

Aufgabe 1.7: Cadmium zeigt eine rote Emissionslinie bei einer Wellenlänge von 6438 Å. Welche Zeeman-Energieverschiebung (m_ℓ=1) ergibt sich in einem Magnetfeld der Stärke 9 mT ($9 \cdot 10^{-3}$ T)?

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{\text{Zeeman}} &= \mu_B\, B_M \\
\Delta E_{\text{Zeeman}} &= \frac{e \cdot \hbar}{2m_e}\, B_M \\
\Delta E_{\text{Zeeman}} &= 9.27 \cdot 10^{-24}\,\text{J/ T}) \cdot (9 \cdot 10^{-3}\text{T}) \\
\Delta E_{\text{Zeeman}} &= 8.36 \cdot 10^{-26}\,\text{J} \\
\Delta E_{\text{Zeeman}} &= 5.8 \cdot 10^{-5}\,\text{eV/ T}) \cdot (9 \cdot 10^{-3}\text{T}) \\
\Delta E_{\text{Zeeman}} &= 5.22 \cdot 10^{-7}\,\text{eV}
\end{aligned}
$$

[71] Antwort (b)

Wir berechnen, welche Wellenlängenverschiebung sich dadurch ergibt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{h \cdot c}{\lambda} \\ dE &= \frac{dE}{d\lambda} d\lambda \\ dE &= -h \cdot c \frac{d\lambda}{\lambda^2} \\ |dE| &= h \cdot c \frac{|d\lambda|}{\lambda^2} \\ |\Delta E_{\text{Zeeman}}| &= h\, c \frac{|d\lambda|}{\lambda^2} \end{aligned} \tag{16.108}$$

$$\begin{aligned} |d\lambda| &= \frac{\lambda^2}{h \cdot c} |\Delta E_{\text{Zeeman}}| \\ |d\lambda| &= \frac{(643.8 \cdot 10^{-9}\text{m})^2}{1.98 \cdot 10^{-25}\,\text{J} \cdot \text{m}} \cdot (8.36 \cdot 10^{-26}\text{J}) \\ |d\lambda| &= 1.74 \cdot 10^{-3}\text{Å} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Änderung in der Wellenlänge äußerst gering ist im Vergleich zur Emissionslinie.

Aufgabe 1.8: Welche Aussage trifft in Bezug auf das Bohrsche Atommodell nicht zu?[72]

(a) Die Energie der Elektronen auf den Bahnen ist quantisiert!

(b) Das Elektron in der kernnächsten Bahn hat die geringste Energie!

(c) Position und Geschwindigkeit der Elektronen auf den Bahnen kann nicht gleichzeitig bestimmt werden!

Aufgabe 1.9: Die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte für den Grundzustand ($1s$) im Wasserstoffatom ist

$$P_{1s} = 4\,\pi \cdot A_{1s}^2 \cdot r^2 \exp\left(-\frac{2\,r}{r_{bohr}}\right)$$

wobei der wahrscheinlichste Abstand des Elektrons vom Kern der Bohrsche Radius r_{Bohr} ist. Für den Grundzustand ist bei n=1 der zugehörige Drehimpulsquantenzahl ℓ=0 und m=0. Die Wellenfunktion $\Psi_{1s} = R_{1s}(r)$ ist daher radialsymmetrisch und hängt nur von r ab und man findet:

$$R_{1s}(r) = A_{1s} \cdot \exp\left(-\frac{r}{r_{Bohr}}\right)$$

Bestimmen Sie die Konstante A_{1s}!

[72] Antwort: (c)

	n	ℓ	m_ℓ
a	50	0	1
b	1	1	1
c	2	1	2
d	3	1	0
e	3	2	1

Tab. 16.5: Tabelle zu Aufgabe 1.10

Die Normalisierungsbedingung liefert mit der Information; dass das Integral einen Wert von $r_{Bohr}^3/4$ ergibt:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty P(r)\mathrm{d}r \\ 1 &= 4\,\pi \cdot A_{1s}^2 \int_0^\infty r^2 \exp\left(-\frac{2\,r}{r_{bohr}}\right)\mathrm{d}r \\ 1 &= \pi \cdot A_{1s}^2 \cdot r_{Bohr}^3 \\ A_{1s} &= \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot r_{Bohr}^3}} \end{aligned} \tag{16.109}$$

Aufgabe 1.10: Welche der in Tab. 16.5 folgenden Kombinationen von Quantenzahlen gibt es und wie bezeichnet man das Orbital?[73]

Aufgabe 1.11: Die Quantenzahl m eines Atoms charakterisiert[74]

(a) die Kontur des Orbitals

(b) das effektive Volumen des Orbitals

(c) die räumliche Ausrichtung des Orbitals

(d) die Energie des Orbitals ohne Magnetfeld

(e) Stimmt alles nicht

Aufgabe 1.12: Wie viele unterschiedliche Werte kann m_ℓ annehmen, wenn die Hauptquantenzahl n=2 ist?[75]

[73]

a Notation: $50s$

b Gibt es nicht!

c Gibt es nicht!

d Notation: $3p$

e Notation: $3d$

[74] Antwort: (c)

[75] Antwort: (a)

(a) 3

(b) 2

(c) 9

(d) 6

(e) 1

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie lauten die Keplerschen Gesetze?
2. Was ist der Unterschied zwischen Bindungsenergie und Ionisierungsenergie?
3. Was ist der Unterschied zwischen Bindungsenergie und Anregungsenergie?
4. Wer hat Bohrs Theorie erweitert, indem er elliptische Bahnen für die Elektronenbahnen eingeführte?
5. Welche Bedeutung hat der Drehimpuls für das Verständnis des Atoms?
6. Was sind mögliche L- und L_z-Werte für $3p$ und $3d$ Zustände?
7. Was versteht man unter der Notation $3d^8$?
8. Wie ist das Bohrsche Magneton definiert?
9. Wie lauten die Auswahlregeln für optische Übergänge im Atom?
10. Was ist ein Termschema?
11. Was ändert sich, wenn man ein Atom einem magnetischen Feld aussetzt?
12. Was ist der Zeeman-Effekt und welche Art von Quantisierung wurde aufgrund dieses Effekts entdeckt?
13. Warum orientiert sich das magnetische Moment eines Atoms nicht parallel zum Magnetfeld?
14. Welche Bedeutung hat der Zeeman-Effekt für die Astrophysik?
15. Wie ist Antimaterie aufgebaut und was ist das CPT-Theorem?

Entdeckung des Spins

Thema Beyond Bohr

Entdeckung des Spins

Otto Stern
1888-1933

Walther Gerlach
1889-1979

1921-1922
Professor in Rostock



Die grundlegenden physikalischen Gesetze, die zum Aufbau einer mathematisch fundierten Theorie für einen bedeutenden Teil der Physik und den gesamten Bereich der Chemie erforderlich sind, sind jetzt bekannt.

Paul Dirac, 1929

Was berücksichtigt die Schrödinger-Gleichung bei der Beschreibung der Elektronendynamik im Atom?

- Die kinetische Energie der Elektronen.
- Die Coulombwechselwirkung mit dem Kern.
- Die Wechselwirkung der Elektronen untereinander.
- Die magnetische Wechselwirkung des Elektronen mit den magnetischen Feldern der anderen Elektronen aufgrund ihrer Bewegung relativ zueinander.
- Die Wechselwirkung der Elektronen mit dem magnetischen Moment des Kerns.

- Die Wechselwirkung der Elektronen mit dem möglicherweise nichtisotropen magnetischen Feld des Kerns.

Das sieht sieht ziemlich vollständig aus. Fehlt noch was?

Zunächst eine Analogie: Die Bewegung der Erde um die Sonne ist charakterisiert durch einen Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$, der sich aus zwei Anteilen zusammensetzt:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{16.110}$$

Der erste Term $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ errechnet sich aus der Position der Erde in Bezug auf die Sonne ($\vec{r}$) und seine linearen Impuls ($\vec{p}$). Beschrieben wird die Planetenbahn und man nennt diesen Term den Bahndrehimpuls. Hinzu kommt der Term $\vec{S}$, der sich aus Trägheitsmoment $\vec{I}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ errechnet und die Drehung (Spin) der Erde beschreibt. In ähnlicher Weise ergibt sich ein zusammengesetzter Drehimpuls für das Elektron.

Welche Hinweise gibt es auf eine zusätzliche Quantenzahl? Mutmaßungen darüber, dass nicht nur Elektrizität und Magnetismus miteinander zu tun haben (man denke an den Oersted-Versuch), sondern auch Magnetismus und Licht wurden schon früh durch Experimente bestätigt.

1845 Michael Faraday gelingt es mit Hilfe magnetischer Felder, die Polarisationsebene des Lichts zu drehen.

1876 John Kerr dreht die Polarisationsachse des Lichts bei der Reflexion an den Polen eines Magneten

How a Bad Cigar Helped Reorient Atomic Physics [?]: The demonstration of space quantization, carried out in Frankfurt, Germany, in 1922 by Otto Stern and Walther Gerlach, ranks among the dozen or so canonical experiments that ushered in the heroic age of quantum physics. Perhaps no other experiment is so often cited for elegant conceptual simplicity. From it emerged both new intellectual vistas and a host of useful applications of quantum science. Yet even among atomic physicists, very few today are aware of the historical particulars that enhance the drama of the story and the abiding lessons it offers. Among the particulars are a warm bed, a bad cigar, a timely postcard, a railroad strike, and an uncanny conspiracy of Nature that rewarded Stern and Gerlach. Their success in splitting a beam of silver atoms by means of a magnetic field startled, elated, and confounded pioneering quantum theorists, including several who beforehand had regarded an attempt to observe space quantization as naive and foolish. Descendants of the Stern-Gerlach experiment and its key concept of sorting quantum states via space quantization are legion. Among them are the prototypes for nuclear magnetic resonance, optical pumping, the laser, and atomic clocks, as well as incisive discoveries such as the Lamb shift and the anomalous increment in the magnetic moment of the electron, which launched quantum electrodynamics. The means to probe nuclei, proteins, and galaxies; image bodies and brains; perform eye surgery; read music or data from compact disks; and scan bar codes on grocery packages or DNA base pairs in the human genome all

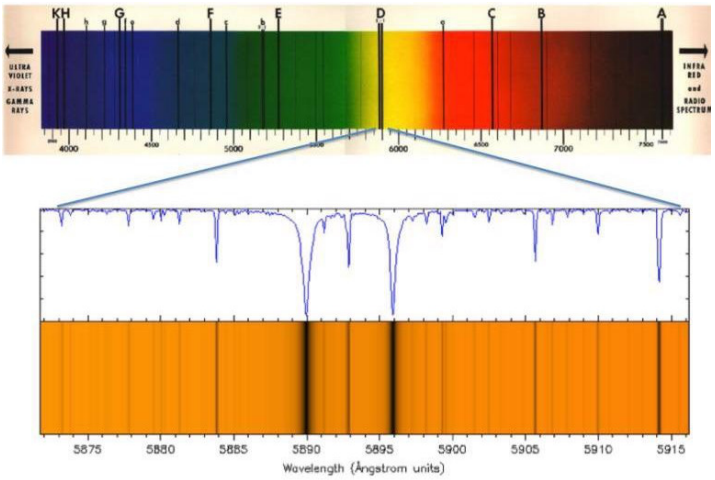


Abb. 16.61: Na-d Dublett im Fraunhoferspektrum der Sonne

stem from exploiting transitions between space-quantized quantum states.

Löst man die Linien des Wasserstoffs mit höchstauflösender Spektroskopie auf, so beobachtet man bei der H_α Linie (6563 Å) eine Aufspaltung in zwei Linien, die 1.4 Å auseinander liegen. Kein großer Effekt, aber die bisher besprochene Theorie sagt eben nur eine Linie voraus. Ähnliches ergibt sich für Lithium. Beim optischen Übergang $1s \leftarrow 2p$ sollte eigentlich nur eine einzelne Linie bei 6707 Å im Spektrum erscheinen. Tatsächlich findet man ein Dublett. Die beiden Linien unterscheiden sich nur um 0.15 Å. Am bekanntesten ist die gelbe Na-D Linie. Hier erscheint ebenfalls ein Dublett bei 5889.95 Å und 5895.92 Å. Abb. 16.61 zeigt die Linien, wie sie im Fraunhoferspektrum der Sonne auftauchen. Die Schrödingergleichung liefert keinen Hinweis auf besondere Eigenschaften des Elektrons. Die erste Idee, dass das Elektron möglicherweise in irgendeiner noch unbekannten Weise beträgt, stammt von Uhlenbeck und Gouldsmit:

Spinning Electrons and the Structure of Spectra [?]: So far as we know, the idea of a quantised spinning of the electron was put forward for the first time by A. K. Compton (Journ. Frankl. Inst., Aug. 1921, p. 145), who pointed out the possible bearing of this idea on the origin of the natural unit of magnetism. Without being aware of Comptons suggestion, we have directed attention in a recent note (Naturwissenschaften, Nov. 20, 1925) to the possibility of applying the spinning electron to interpret a number of features of the quantum theory of the Zeeman effect, which were brought to light by the work especially of van Lohuizen, Sommerfeld, Landé and Pauli, and also of the analysis of complex spectra in general. In this letter we shall try to show how our hypothesis enables us to overcome certain fundamental difficulties which have hitherto hindered the interpretation of the results arrived at by those authors.

Behandelt man das Atom unter Berücksichtigung relativistischer Effekte ergibt sich, dass das Elektron eine Eigenschaft genannt Spin aufweist. Auch diese Größe ist quantisiert

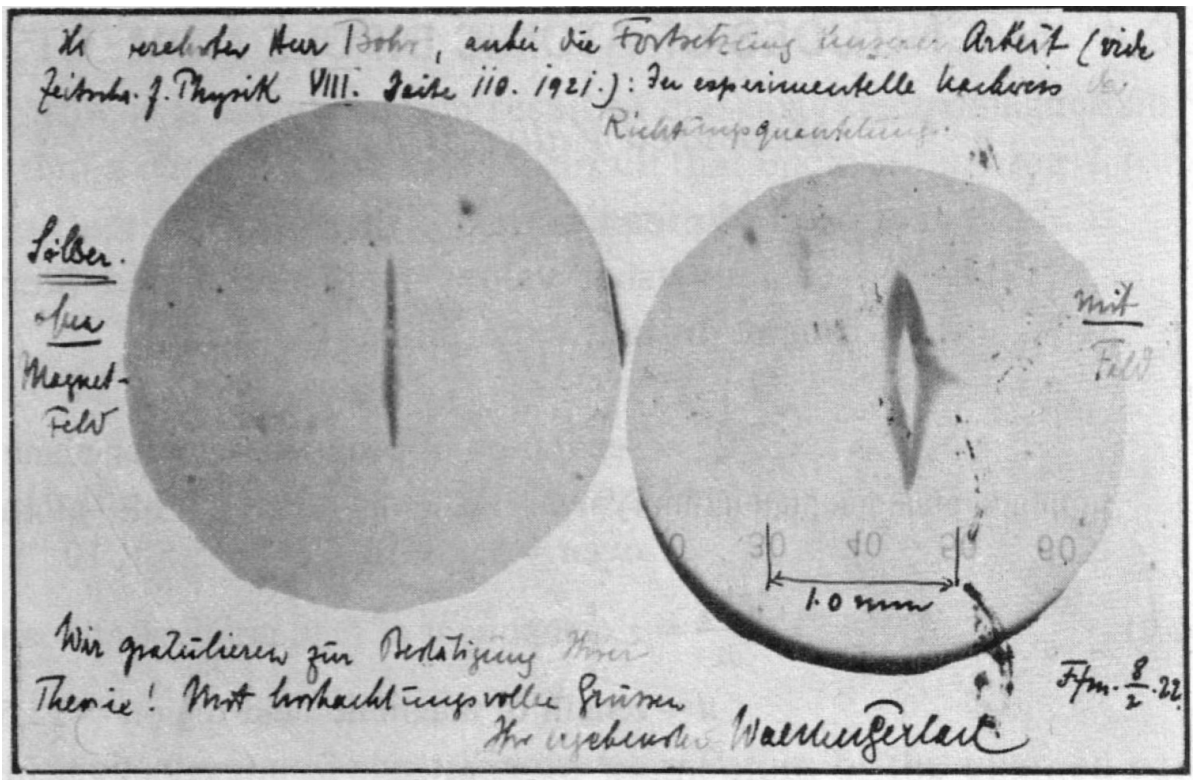


Abb. 16.62: Sehr geehrter Herr Bohr, anbei die Fortsetzung unserer Arbeit (vide Zeitschr. f. Physik VIII Seite 110. 1921): Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung. Wir gratulieren zur Bestätigung Ihrer Theorie!
Mit hochachtungsvollen Grüßen
Ihr ergebener Walter Gerlach

und hat einen Wert von 1/2. Der Nachweis erfolgte 1922 durch Stern[76] und Gerlach [**?**]. Es sei angemerkt, dass Otto Stern von 1921 bis 1922 Professor für Physik an der Universität Rostock war. Abb. 16.62 zeigt den Brief, den Gerlach an Bohr schrieb, um ihm von ihren Ergebnissen zu berichten. Das Experiment, mit Atomstrahlen durchgeführt, wies nach, dass es nicht nur eine Quantisierung des Elektronenspins gibt, sondern dass es auch eine Quantisierung für die Projektion in Bezug auf ein äußeres Magnetfeld gibt (Richtungsquantisierung). Anhand des Abdrucks des Atomstrahls auf der photographischen Platte konnte direkt gezeigt werden, dass die klassische Beschreibung das Resultat nicht erklärt und statt dessen eine erweiterte quantenphysikalische Betrachtung notwendig ist.
Eine klassisch nicht beschreibbare Art von Zweideutigkeit [**?**].

Wolfgang Pauli (1925)

[76] The Nobel Prize in Physics 1943 was awarded to Otto Stern *for his contribution to the development of the molecular ray method and his discovery of the magnetic moment of the proton.*

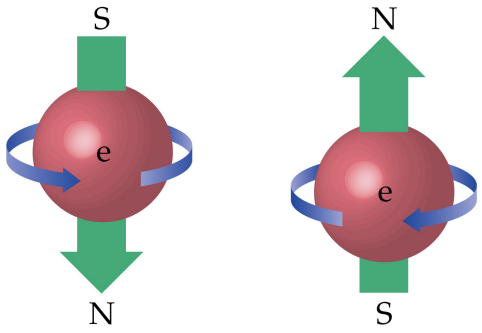


Abb. 16.63: Der Elektronenspin kann nur ZWEI Werte einnehmen, nämlich spin-up und spin-down.

Stern-Gerlach Experiment

In der Struktur der Emissionsspektren der Atome finden sich Hinweise, dass es wenigstens eine zusätzliche Quantenzahl geben muss.

- In Experimenten an Atomen in einem magnetischen Feld stellt man eine Aufspaltung der Energieniveaus fest.
- Man beobachtet aber auch Atome, bei denen keine Energieverschiebung auftritt.
- In einigen Atomen beobachtet man -auch ohne das ein Magnetfeld anliegt- eine Aufspaltung der Spektrallinien. Man spricht in diesem Fall von Dubletts.

Der Begriff Dublett stammt aus dem 19. Jahrhundert, als beobachtet wurde, dass sich bestimmte Spektrallinien eines ionisierten, angeregten Gases unter dem Einfluss eines stärkeren Magnetfeldes in zwei einzelne Linien aufspalteten. Solche Spektrallinien wurden nicht nur im Labor beobachtet, sondern auch in der astronomischen Spektroskopie. Astronomen konnten dadurch auf die Existenz von Magnetfeldern der Sterne und Galaxien schließen und deren Stärke zu vermessen. Dubletts spielen eine wichtige Rolle in den *life sciences* im Rahmen der Kernspintomographie.

Das Elektron hat möglicherweise einen intrinsischen Drehimpuls (Abb. 16.63). Beobachtete Effekte könnten damit auf die magnetischen Momente von Bahndrehimpuls und intrinsischem Drehimpuls und deren Wechselwirkung miteinander zurückgeführt werden.

In der Vorlesung *Magnetismus* haben Sie die Lorentzkraft F_M kennengelernt. Diese Kraft wirkt auch auf Elektronen in einem Leiter. Dies ist beispielsweise eine Leiterschleife, die ein klassisches Analogon für die Bewegung des Elektrons um den Atomkern darstellt. Für den experimentellen Nachweis des Elektronenspins betrachten wir, wie sich klassisch im Magnetfeld ein Drehmoment durch einen Kreisstrom erzeugen lässt. Dabei stellt man fest, dass sich dies in einem homogenen Magnetfeld nicht realisieren lässt, da sich die durch die Lorentzkraft verursachten Kräfte auf die Elektronen gegenseitig aufheben, siehe Abbildung. Man benötigt deshalb ein inhomogenes magnetisches Feld, dessen Stärke

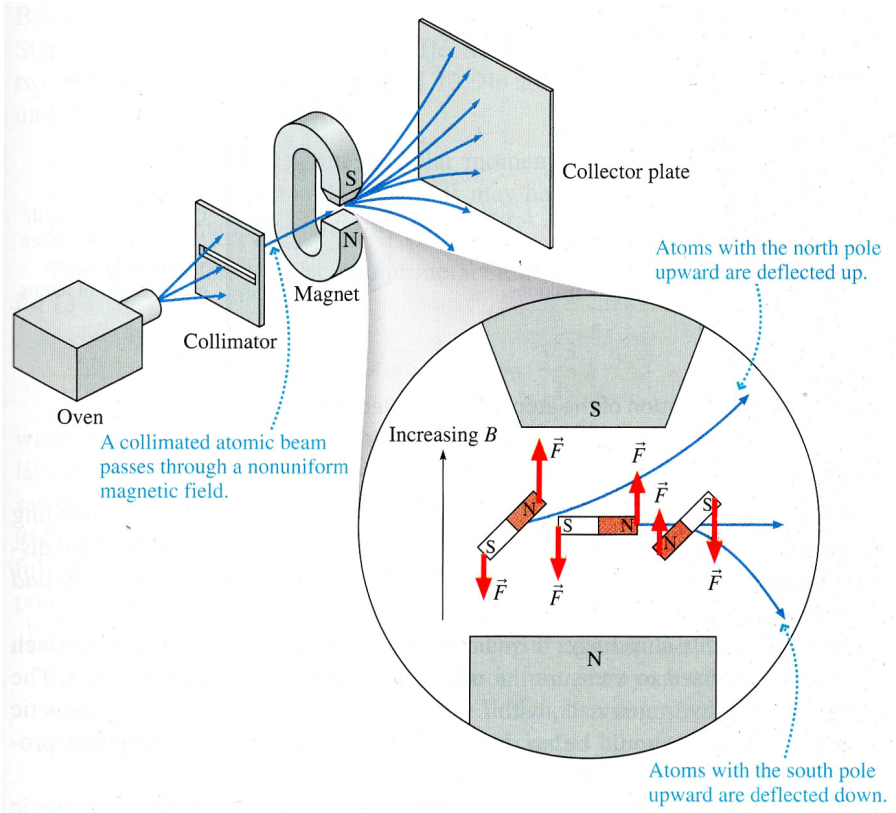


Abb. 16.64: Aufbau des Stern-Gerlach Experiments [**?**].

sich in der Richtung senkrecht zur Ebene der Leiterschleife ändert. Die Lorentzkräfte liegen dann nicht mehr in der Ebene der Schleife und es ergibt sich ein resultierendes Drehmoment. Für die Analyse betrachten wir Wasserstoff.[77] Die Berechnung der Ablenkung ergibt folgendes Ergebnis:

$$F_M = -\frac{e}{2\,m_e}\frac{\partial B_M}{\partial z}L_z \tag{16.111}$$

Eine Ablenkung erfolgt also aufgrund der quantenphysikalischen Werte, die L_z annimmt. Die Stärke der Ablenkung hängt vom Gradienten $(\partial B_M/\partial z)$ des magnetischen Feldes ab.

Im Stern-Gerlach Experiment wird im Vakuum ein nadelfeiner Strahl aus Atomen erzeugt, der durch ein inhomogene Magnetfeld fliegt. Die Ablenkung wird auf einem empfindlichen Film beobachtet, siehe Abb. 16.64.

Der Erfolg des Experiments ist wesentlich auf die von Stern entwickelte Molekularstrahlmethode zurückzuführen. Die Relevanz dieses Verfahren sieht man daran, dass auf der

[77] Tatsächlich wurde das Experiment mit Silberatomen durchgeführt. Wie Wasserstoff zeichnet sich Silber durch ein einzelnes Valenzelektron aus, so dass die Voraussetzungen vergleichbar sind (isoelektronisch).

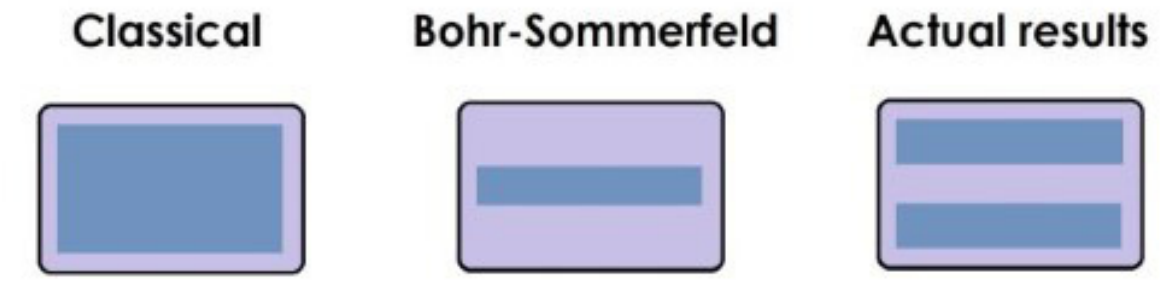


Abb. 16.65: Vermutete Ergebnisse des Stern-Gerlach Experiments. *Links:* klassische Erwartung; *Mitte:* Erwartetes Ergebnis nach der Behandlung im Rahmen der Schrödingergleichung; *Rechts:* Experimentelles Resultat.

Grundlage dieser Technik allein 20 Nobelpreise an Forscher vergeben wurden, die diese Methode für ihrer Experimente nutzten, darunter die Nobelpreise für NMR[78], MASER[79] und Atomuhren.[80]

Bohr hat doch Recht

Walter Gerlach an Otto Stern (1922)

Im Grundzustand ($1s$) hat das H-Atom folgende Quantenzahlen ($n = 1$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$). Da m_ℓ=0 und damit $L_z = 0$ ist, erwartet man nach den bisher gemachten Vorhersagen im Experiment keine Ablenkung des Atomstrahls. Die Trajektorien der Atome sollten durch das Magnetfeld nicht beeinflusst werden. Das Strahlprofil des Atomstrahls ist demnach vor und hinter dem Magneten unverändert (Abb. 16.65, Mitte).

Sollte sich das Atom wider erwarten klassisch verhalten, können beliebige Werte für L_z auftreten und man erwartet eine Verbreiterung des Strahlprofils des Atomstrahls auf dem Detektor (Abb. 16.65, links). Überraschenderweise liefert das Experiment ein Ergebnis, dass sowohl von der klassischen als auch von der quantenphysikalischen Vorhersage abweicht. Man beobachtet eine Aufspaltung des Strahls in zwei Komponenten (Abb. 16.65, rechts). Die Vermutung, dass es sich einen anderen präparierten Zustand mit $\ell \neq 0$ handelt, ist nicht tragbar. In diesen Fällen würde man stets eine Aufspaltung

[78] The Nobel Prize in Physics 1952 was awarded jointly to Felix Bloch and Edward Mills Purcell *for their development of new methods for nuclear magnetic precision measurements and discoveries in connection therewith.*

[79] The Nobel Prize in Physics 1964 was divided, one half awarded to Charles Hard Townes, the other half jointly to Nicolay Gennadiyevich Basov and Aleksandr Mikhailovich Prokhorov *for fundamental work in the field of quantum electronics, which has led to the construction of oscillators and amplifiers based on the maser-laser principle.*

[80] The Nobel Prize in Physics 1989 was divided, one half awarded to Norman F. Ramsey *for the invention of the separated oscillatory fields method and its use in the hydrogen maser and other atomic clocks*, the other half jointly to Hans G. Dehmelt and Wolfgang Paul *for the development of the ion trap technique.*

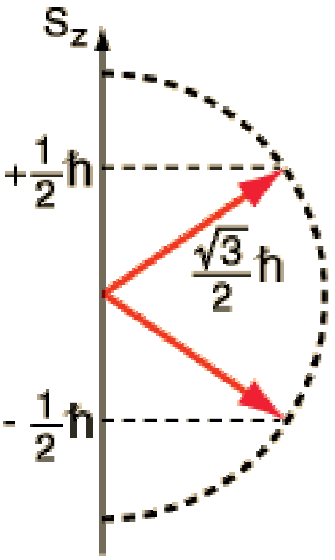


Abb. 16.66: Mögliche Einstellungen des Spin in einem extrenen Magnetfeld sind $S_z = \pm\hbar/2$

des Strahls in $2\ell + 1$ Komponenten, d.h. $1, 3, 5, \ldots$ erwarten. Der Effekt muss also von einer bislang nicht berücksichtigten Quantenzahl herrühren. Diese vierte Quantenzahl trägt den Namen Spin und beschreibt den Eigendrehimpuls des Elektrons.

Kann man sich das Elektron als eine schnell rotierende Ladung vorstellen? Nimmt man an, dass das Elektron eine Kugel mit einer homogenen Ladungsdichte ist, dann errechnet sich der experimentelle Wert des magnetischen Moment nur unter folgenden unrealistischen Randbedingungen:

- Das Elektron ist so groß wie das Atom.
- Die Oberfläche der Kugel bewegt sich mit Überlichtgeschwindigkeit.

The term spin must be used with cation. Although a classical charged particle could generate a magnetc moment by spinning, the electron most assured is not a classical particle. It is not spinning in any literal sense. It simply has an inherent magnetic moment, just as it has a inherent mass and charge, and that magnetic moment makes it look as if the electron is spinning. It is a convinient of speech, not na factual statement. The electron has a spin but is NOT a spinning electron!

Die theoretische Erklärung des Elektronenspins gelingt erst unter Verwendung der relativistischen Quantenmechanik [**?**]. Der Spin ist eine fundamentale Eigenschaft des Elektrons und erzeugt ein magnetisches Moment.[81] Im Stern-Gerlach-Versuch wird dieses Phänomen experimentell offengelegt.Welche Eigenschaften hat der Elektronenspin?

[81] Proton und Neutron haben ein Magnetisches Moment. Die ermittelten Werte sind (i) deutlich kleiner als das des Elektrons (Verhältnis m_e/m_p=1/1800) und deuten (ii) auf eine Substruktur der Teilchen hin.

Es stellt sich heraus, dass der Spin in einem Magnetfeld nur ZWEI diskrete Werte (*spin-up*, *spin-down*) annehmen kann, siehe Abb. 16.66.

Spinquantenzahl des Elektrons: $s = +1/2$ und -1/2

Spin des Elektrons: $|\vec{S}| = \sqrt{s \cdot (s+1)} = \sqrt{1/2 \cdot (1/2+1)} = \sqrt{3}/2 \cdot \hbar$

S_z-Komponente des Elektronenspin im Magnetfeld: S_z=+1/2 $\hbar$ und S_z=-1/2 $\hbar$

Wie sich herausstellt sind die Energien im Wasserstoff nahezu unabhängig von der Orientierung des Spins. Durch den Spin verdoppelt sich aber die Anzahl der möglichen Zustände von n^2 auf $2\,n^2$.

Entartung des n-ten Zustands im Wasserstoff: $2\,n^2$

At the moment physics is again terribly confused. In any case, it is too difficult for me, and I wish I had been a movie comedian or something of the sort and had never heard of physics.

Wolfgang Pauli an Ralf Kronig (1925)

Neben Elektronen haben auch andere fundamentale Teilchen einen Spin, wie beispielsweise das Neutrino. Alle Teilchen mit einem halbzahligen Gesamtspin nennt man Fermionen, die mit ganzzahligem Spin Bosonen. Zu den Fermionen ihnen gehören die Atombausteine Elektron, Proton und Neutron sowie alle Atome mit einer ungeraden Zahl an Neutronen. Bosonen sind Teilchen mit ganzzahligem Spin: Photonen, Mesonen sowie Atome mit gerader Neutronenzahl. So ist ^{4}He mit zwei Protonen und zwei Neutronen ein Boson, ^{3}He mit nur einem Neutron ein Fermion. Bosonen können sich dann in großer Zahl im gleichen Quantenzustand ansammeln und ein so genanntes Kondensat bilden.[82] [83] Fermionen zeigen dieses Verhalten nicht!

Anwendungen

Ein Beispiel aus der Medizin

Der Spin wird in der Medizin verwendet, um detailreiche tomographische Aufnahmen zu erhalten. Sie kennen bestimmt die Kernspintomographie (Kapitel *Bildgebende Verfahren*). Diese nutzt den Spinzustand bestimmter Kerne, um Molekülgruppen im Körper zu lokalisieren. Ein vergleichbares Verfahren nutzt die Spin-Eigenschaften des Elektrons

[82] The Nobel Prize in Physics 1996 was awarded jointly to David M. Lee, Douglas D. Osheroff and Robert C. Richardson *for their discovery of superfluidity in helium-3.*

[83] The Nobel Prize in Physics 2001 was awarded jointly to Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle and Carl E. Wieman *for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates.*

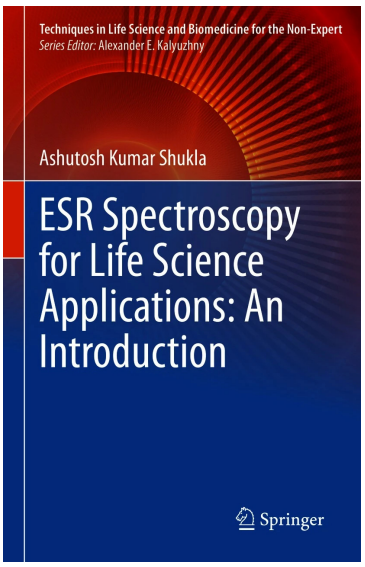


Abb. 16.67: Anwendung der ESR-Methode in den *life sciences* [**?**].

(*electron spin resonance spectroscopy*, ESR), siehe Abb. 16.67

Electron paramagnetic resonance imaging [**?**]**:** Electron paramagnetic resonance (EPR) imaging involves the spatial mapping of the distribution of free radicals (molecules with unpaired electrons, known as spin probes) in vivo. The phenomenon is entirely analogous to nuclear MRI, a key diagnostic radiological procedure in looking at anatomical details based on the mapping of water-tissue protons with vivid contrasts based on tissue density, relaxation, blood flow and other physiological functional properties. Unlike MRI, which addresses the intrinsic abundant water, in vivo EPR imaging requires the administration of nontoxic paramagnetic free radicals into the living system prior to monitoring their distribution. The principle behind imaging is to generate profiles of EPR spectra in the presence of spatially encoding linear field gradients rotated in all directions centered on a sphere and a magnetic field sweep and construct the image with filtered back projection (FBP), well known in ultrasound and computerized tomography imaging. Alternatively, one can employ radiofrequency pulses analogous to MRI and monitor the response of the spin system in a constant magnetic field in the presence of gradients and generate the images via Fourier transform. Very narrow-line nontoxic spin probes have been developed recently based on the triarylmethyl radicals and these enable EPR imaging in small animals with good resolution. One unique characteristic of EPR is that the line width of paramagnetic spin probes depends on the concentration of dissolved oxygen and as such this creates contrast in EPR images, which can be used to quantitatively measure oxygen partial pressure (pO_2). The majority of tumors exhibit a hypoxic ($pO_2 < 5\,\mathrm{mmHg}$) core that is nearly four-times as resistant to radiation compared with normal tissue. EPR imaging, therefore, can noninvasively provide a quantitative oxygen profile of tumors to the oncologist who can monitor the same and employ fractionated radiation dose or hyperbaric oxygen treatment, increasing the proportion of oxygen in the breathing air and/or to improve the effectiveness of radiotherapy. EPR imaging will also help research in studying the effectiveness of antiangiogenic drugs in

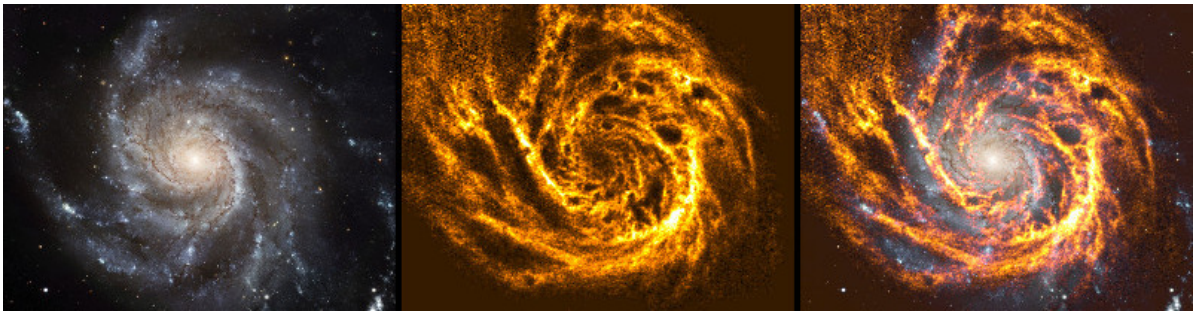


Abb. 16.68: Die magnetische Wechselwirkung zwischen Elektron und Proton im Wasserstoffatom wird genutzt, um die Spiralarme der Feuerradgalaxie (NGC 5457) zu kartieren. (a) sichtbarer Spektralbereich; (b) 21-cm Wasserstofflinie (Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*); (c) zusammengesetztes Bild aus (a) und (b).

tumor treatment.

Ein Beispiel aus der Astrophysik

Im Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt* wurde die 21-cm Linie vorgestellt und ihre Bedeutung für die Astrophysik erläutert. Die 21-cm Linie ist ein spektraler Fingerabdruck, der es erlaubt, interstellaren Wasserstoff nachzuweisen. Diese Spektrallinie des neutralen Wasserstoff im Grundzustand resultiert aus dem Umklappen des Elektronenspins relativ zum Spin des Protons und über Spektroskopie beobachtet werden, z.B. in Emission beim Übergang vom parallelen zum antiparallelen Spinzustand. Im Rahmen der Quantenphysik ist dieser Übergang -man sagt- verbotenen, was heißt, dass es äußerst selten zur Emission aus dem angeregten Zustand kommt. In der Astronomie wird die 21-cm-Linie zur Untersuchung von Wasserstoffwolken verwendet. Hier tritt auf Grund der erheblichen großen Anzahl an H-Atomen dieser verbotene Übergang häufig genug auf und kann durch Radioteleskope nachgewiesen werden. Aus den Daten kann auf die Rotation der Galaxien geschlossen werden. Weiter ermöglicht die 21-cm Linie eine Radiokartierung der Milchstraße und deren Dichteverlauf. Abb. 16.68 zeigt Aufnahmen der Feuerrad-Galaxie Messier 101. Die rechte Abbildung zeigt die Kombination aus optischer (links) und 21-cm (rechts) Beobachtung. Es gibt deutliche Unterschiede zwischen den Wasserstoff- und den optischen Daten: Die 21-cm Resultate sind äußerst detailliert und enthüllen Löcher in der Wasserstoffemission. Auffällig ist auch, dass Wasserstoffemission aus einem deutlich größeren Raumgebiet beobachtet wird und Strukturen enthüllt, die optischen durch staubige Bereich verdeckt sind. Dagegen liefern die optischen Daten detaillierte Informationen über das Zentrum der Galaxis.

Zusammenfassung

Die Eigenschaften der Elektronen, das heißt ihre Orbitale,[84] lasen sich über vier Quantenzahlen beschreiben:

- Die Hauptquantenzahl n (n=1, 2, 3,...) beschreibt das Hauptenergieniveau eines Elektrons. Sie entspricht der Schale n im Bohrschen Atommodells. Die Hauptquantenzahl beschreibt ein Raumgebiet, in dem die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons hoch ist. Je größer n wird, desto weiter ist das Elektron im Mittel vom Atomkern entfernt.

- Die Nebenquantenzahl (Bahndrehimpuls-Quantenzahl) ℓ (ℓ=1, 2, 3,...,n-1) beschreibt den Bahndrehimpuls des Elektrons. Die Zahl ℓ bestimmt die Form des Orbitals. Häufig verwendet man die Bezeichnungen s, p, d, f,... für ℓ=0, 1, 2, 3... Die Anzahl an unterschiedlichen ℓ ergibt sich aus der Hauptquantenzahl n. Für n=3 ergibt sich ℓ=0, 1, 2.

- Für jede Unterschale gibt es 2ℓ+1 unterschiedliche Orbitale. In einem externen Magnetfeld wird die Entartung dieser Zustände aufgehoben und die Energieniveaus separieren in ihrer Energie. Die Magnetische Quantenzahl m_ℓ (m_ℓ=$-l$, $-(\ell-1), \ldots, 0, \ldots +(\ell-1), +\ell$) beschreibt das Raumgebiet des Orbitals, wenn das Atom einem äußeren Magnetfeld ausgesetzt wird. Für die Projektion des Drehimpulsvektors auf die Richtung des Magnetfeldes gilt $L_z = \hbar \cdot m_\ell$

- Die Spinquantenzahl S erlaubt nur zwei unterschiedliche Zustände (S_z=+1/2, -1/2). Der halbzahlige Spin lässt sich weder anschaulich noch halbklassisch über eine Drehbewegung erklären.

Wie verfährt die Quantenphysik mit diesen Erkenntnissen?

- Die Energieniveaus eines Atoms ergeben sich durch Lösung der Schrödingergleichung. Dabei hängt die Lage der Niveaus von den Quantenzahlen n und ℓ ab.

- Für jede Wert von ℓ gibt es $2\ell + 1$ mögliche Werte von m_ℓ und weiter jeweils zwei Möglichkeiten, wie sich der Spin einstellen kann. Demnach gibt es $2 \cdot (2\ell + 1)$ unterschiedliche Einstellungsmöglichkeiten. Ohne ein externes Magnetfeld haben alle Zustände ein und den denselben Energiewert (Entartung).

Was hat das für Konsequenzen? Die Antwort liefert das nächste Kapitel. Unter anderem wird geklärt, warum Quantenzahlen m_ℓ und S entscheidend für das Verständnis der

[84] *Lexikon:* **Orbitale** sind Einzelelektronen-Wellenfunktionen. Im Orbitalmodell existieren keine Bahnen wie beispielsweise im Atommodell von Bohr. Da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen $|\Psi|^2$ mit dem Abstand vom Atomkern asymptotisch gegen NULL geht, wählt man als Orbital den Aufenthaltsraum, in dem sich das betrachtete Elektron mit ca. 90% Wahrscheinlichkeit aufhält. Man erhält damit Volumina, die etwa der Größe der Atome entsprechen.

Struktur der Atome ist.

Überprüfen wir unsere Überlegungen am Beispiel von Helium. Die Elektronenkonfiguration ist $1s^2$. Alle Zustände in ℓ=1 sind also besetzt. Aufgrund des unterschiedlichen Spins zeigen die magnetischen Momente in entgegengesetzte Richtungen. Man kann also vermuten, dass Helium kein magnetisches Moment hat. Experimentell wird das durch ein Stern-Gerlach Experiment bestätigt.

Ein Teilchen mit dem Spin 0 ist ein Punkt: Es sieht aus allen Richtungen gleich aus. Ein Teilchen mit dem Spin 1 ist dagegen wie ein Pfeil: Es sieht aus verschiedenen Richtungen verschieden aus. Nur bei einer vollständigen Umdrehung (360 Grad) sieht das Teilchen wieder gleich aus. Ein Teilchen mit dem Spin 2 ist wie ein Pfeil mit einer Spitze an jedem Ende. Es sieht nach einer halben Umdrehung (180 Grad) wieder gleich aus. Entsprechend sehen Teilchen mit höherem Spin wieder gleich aus, wenn man Drehungen um kleinere Bruchteile einer vollständigen Umdrehung vollzieht. Zudem gibt es Teilchen, die nach einer Umdrehung noch nicht wieder gleich aussehen: Es sind dazu vielmehr zwei vollständige Umdrehungen erforderlich! Der Spin solcher Teilchen wird mit 1/2 angegeben [**?**].

Stephen Hawking

Elektronenorbitale

Nun sind wir bereit, uns ein Bild über die Bewegung der Elektronen im Atom zu machen. Im Bohrschen Atommodell kreist das Elektron auf einer Kreisbahn mit einem definierten Radius r_{Bohr} um den Kern. Diese Aussage ist unbefriedigend, denn es besagt, dass das Atom einen Bahndrehimpuls aufweist. Dies widerspricht aber der experimentellen Beobachtung. Wasserstoff hat einen Bahndrehimpuls von NULL. Wie sähe das entsprechende klassische System aus? Ein Bahndrehimpuls von NULL wäre der Extremfall einer Ellipsenbahn. Das Elektron bewegt sich auf einer geraden Linie und die Bahn hätte damit keine räumliche Ausdehnung. Dies entspricht klassisch den Bewegung eines Körpers in Bezug auf einen Attraktor. Das Elektron bewegt sich in diesem Fall vom Proton bis zum Abstand $2\,r_{Bohr}$ und zurück. Tatsächlich erfolgt die Bewegung des Elektron im gesamten dreidimensionale Raum um den Kern und führt damit zu einer hohen Symmetrie. Weiter ist die Auslenkung nicht rigoros beschränkt auf Entfernungen kleiner $2\,r_{Bohr}$. Die Heisenbergsche Unschärferelation macht uns keine Hoffnung, dass wir die Bewegung des Elektrons durch definierte Bahnen beschreiben können. Allerdings stellt sich bei genauerer Analyse heraus, dass Aspekte der klassischen Beschreibung überleben.

Die Abb. 16.69 zeigt, wie durch die Beträge der einzelnen Quantenzahlen die Energieniveau immer stärker aufspalten. Wie kann man sich die einzelnen $n\ell$-Orbitale vorstellen? Da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen mit dem Abstand vom Atomkern asymptotisch gegen null geht, definiert man ein Orbital als den Raumbereich, in dem sich das Elektron mit hoher Wahrscheinlichkeit (90%) aufhält. Die sich daraus ergebende

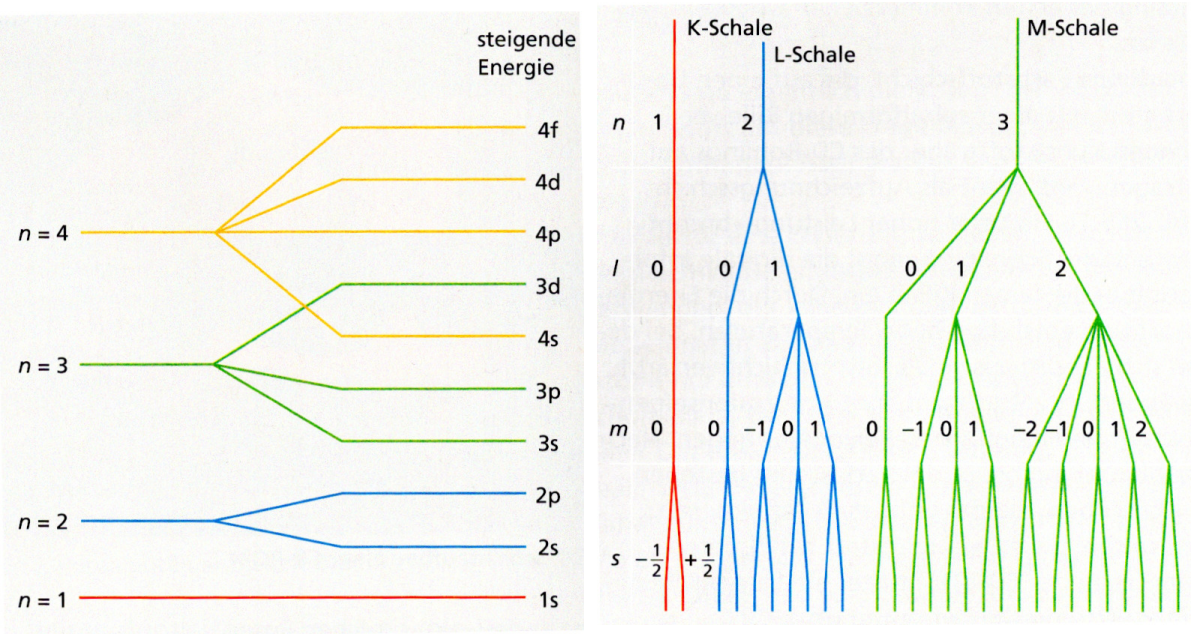


Abb. 16.69: *links:* Aufhebung der Entartung aufgrund der Drehimpuls-Quantisierung. Die Grad der Aufspaltung hängt von ℓ ab. Die Absenkung der Energieniveaus führt zu einem Austausch in der Reihenfolge der Orbitale. *rechts:* Zusätzliche Aufspaltung der Zustände in Dubletts aufgrund der magnetischen Wechselwirkung und der Spin-Quantisierung.

Größe entspricht in etwa der Größe der Atome und den von Bohr berechneten Bahnen. Die Begrenzungsflächen in den Abbildungen sind dabei Flächen gleicher Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Man beachte, dass die Hauptquantenzahl n Einfluss auf die Orbitale hat, da sich die räumlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten ändern. Abb. 16.70 illustriert dies am Beispiel einer Punktdichtedarstellung der s-Orbitale. Exemplarisch zeigt Abb. 16.71 die Radialfunktionen der p-Orbitale. Abb. 16.72 schließlich gibt eine erweiterte Übersicht der Radialfunktionen für verschiedene Kombinationen von Quantenzahlen n und ℓ.

Die Kopplung zwischen dem Bahndrehimpuls und dem Elektronenspin führt zu komplexen Energieverhältnissen im Atom (siehe Abb. 16.73) und damit auch zu linienreichen Spektren. Die genaue Behandlung geht über das Ziel der Vorlesung hinaus und soll hier nicht weiter behandelt werden. Die Kenntnis der Zusammenhänge erlaubt es aber, komplexe Verhältnisse, wie im Krebsnebel zu analysieren (Abb. 16.74).
Die Analysen haben gezeigt, dass es durch unterschiedlichste Effekte zur Aufspaltung von Spektrallinien kommt. Dabei sind die Energieunterschiede teilweise äußerst gering. Mann lernt also viel über die Energieverhältnisse in den Atomen. Die Frage stellt sich aber: Was kann man noch damit anfangen? Dazu ein Beispiel, dass illustriert, dass hochauflösende Spektroskopie für die Grundlagenforschung von eminenter Bedeutung ist:

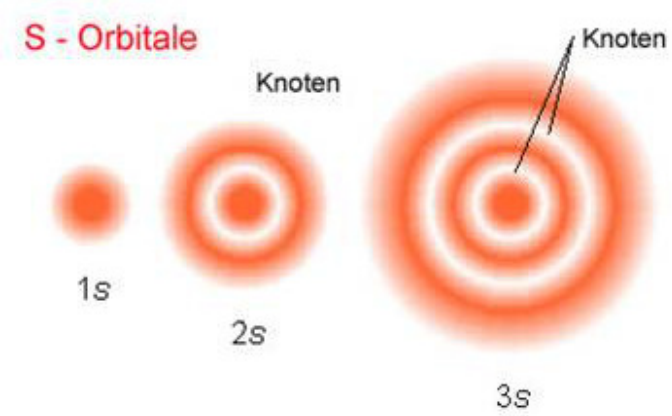


Abb. 16.70: Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in s-Orbitalen, dargestellt als Punktdichte in einer dünnen Scheibe.

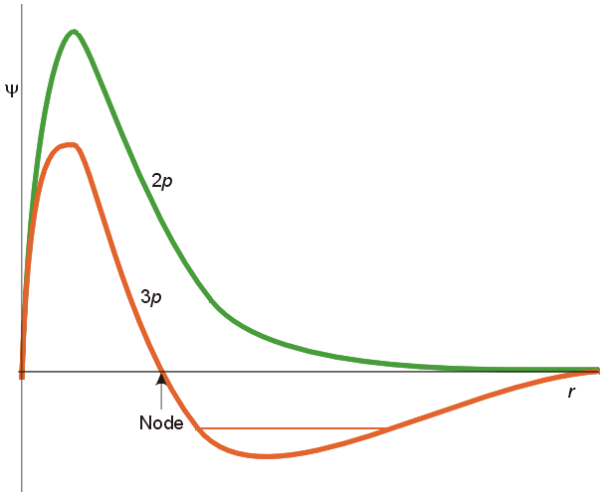


Abb. 16.71: Radiale Wellenfunktionen für unterschiedliche p Orbitale.

Coherent laser spectroscopy of highly charged ions using quantum logic [?]: Precision spectroscopy of atomic systems is an invaluable tool for the study of fundamental interactions and symmetries. Recently, highly charged ions have been proposed to enable sensitive tests of physics beyond the standard model and the realization of high-accuracy atomic clocks, owing to their high sensitivity to fundamental physics and insensitivity to external perturbations, which result from the high binding energies of their outer electrons. However, the implementation of these ideas has been hindered by the low spectroscopic accuracies (of the order of parts per million) achieved so far. Here we cool trapped, highly charged argon ions to the lowest temperature reported so far, and study them using coherent laser spectroscopy, achieving an increase in precision of eight orders of magnitude. We use quantum logic spectroscopy to probe the forbidden optical transition in $^{40}Ar^{13+}$ at a wavelength of 441 nanometres and measure its excited-state lifetime and g-factor. Our work unlocks the potential of highly charged ions as ubiquitous atomic systems for use in quantum information processing, as frequency standards and in highly sensitive tests of fundamental physics, such as searches for dark-matter

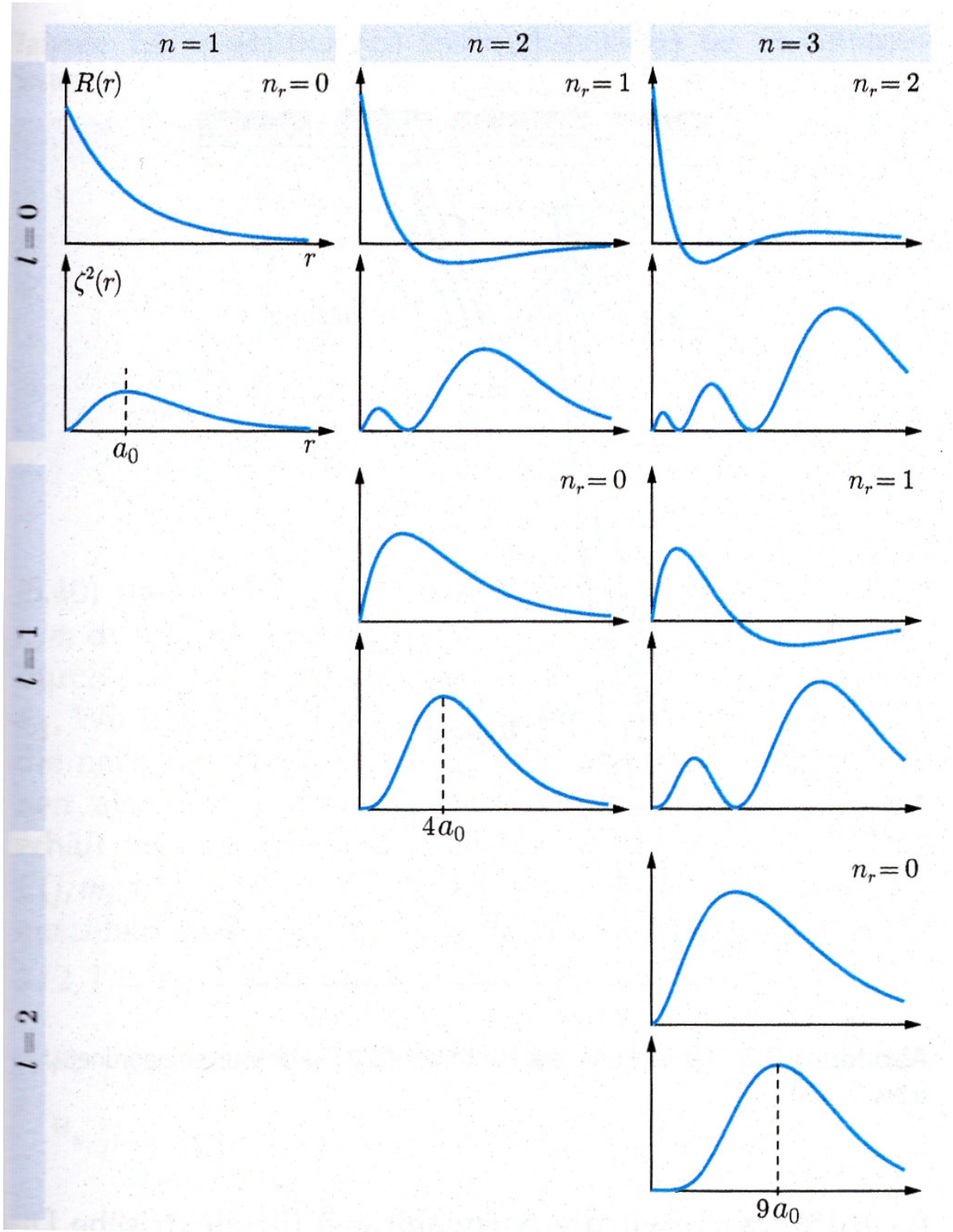


Abb. 16.72: Übersicht über die Radialfunktionen unterschiedlicher Haupt- und Drehimpulsquantenzahlen [**?**].

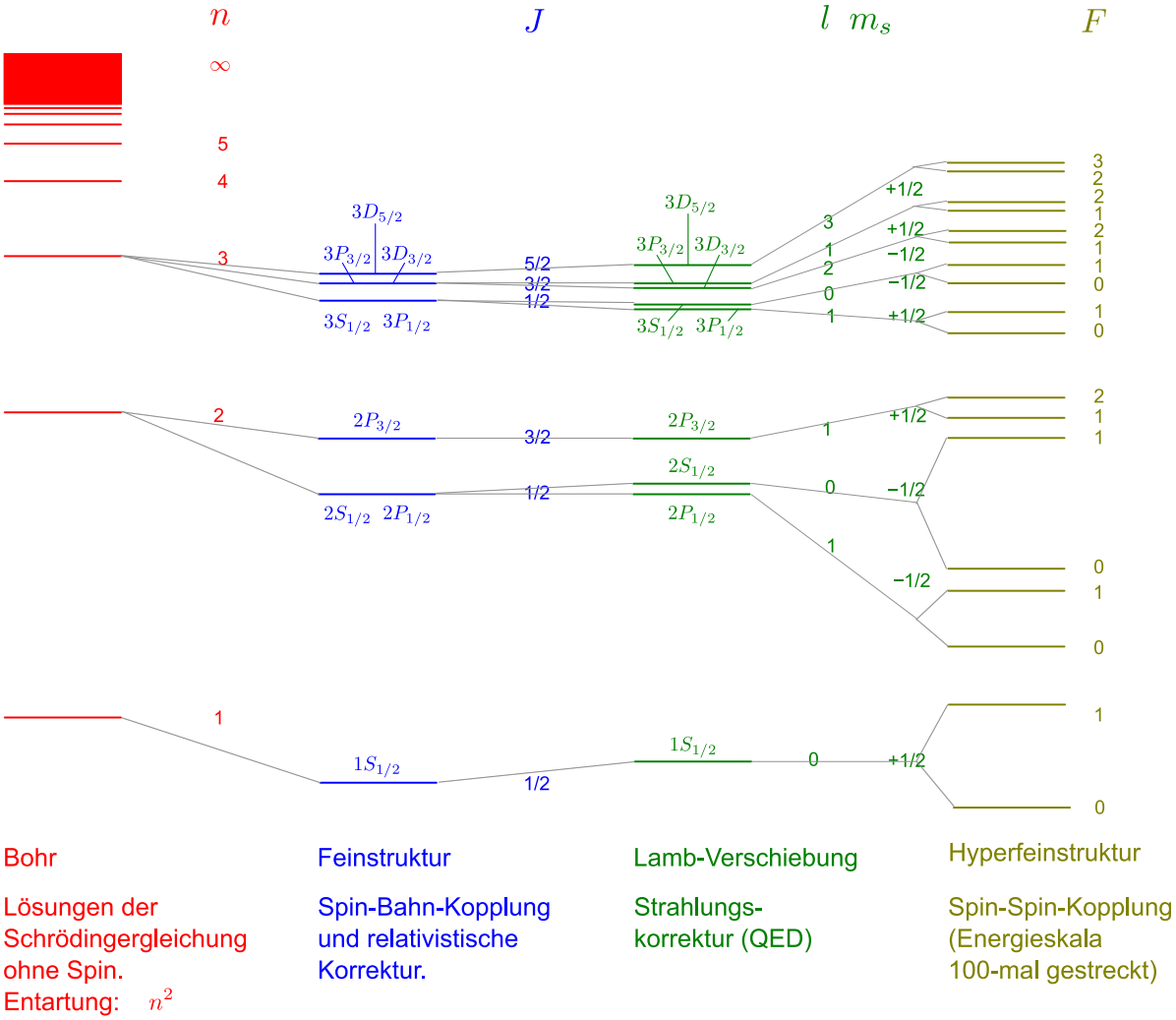


Abb. 16.73: Feinstruktur-, Lamb- und Hypefeinstrukturaufspaltung der Energieniveaus des Wasserstoffatoms.

candidates or violations of fundamental symmetries.

As a beginning graduate student back in 1923, I . . . hoped with ingenuity and inventiveness I could find ways to fit the atomic phenomena into some kind of mechanical system. . . . My hope to do that died when I read about the Stern-Gerlach experiment. . . The results were astounding, although they were hinted at by quantum theory. . . This convinced me once and for all that an ingenious classical mechanism was out and that we had to face the fact that the quantum phenomena required a completely new orientation.

Isidor I. Rabi[85]

[85] The Nobel Prize in Physics 1944 was awarded to Isidor Isaac Rabi *for his resonance method for recording the magnetic properties of atomic nuclei.*

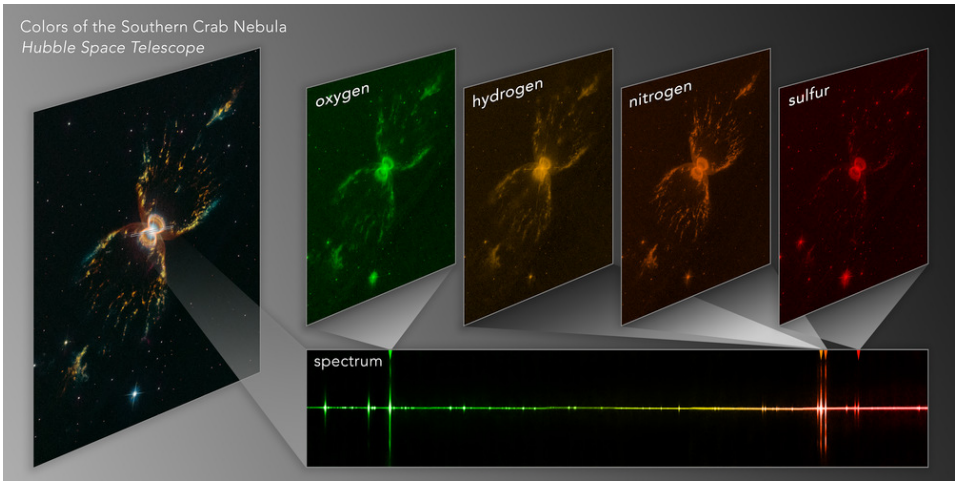


Abb. 16.74: Astronomische Beobachtung des Krebsnebels. Durch die Wahl des Spektralbereichs gelingt es, die im Nebel vorhandenen Elemente zu identifizieren.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Vervollständigen Sie Tabelle 16.6!

Ortital	Hauptquantenzahl n	Drehimpulsquantenzahl ℓ	Magnetische Drehimpulsquantenzahl
$4f$	...	...	...
...	4	1	...
...	7	...	...
$5d$	...	...	...

Tab. 16.6: zu Aufgabe 2.1

Aufgabe 2.2: Geben Sie die Elektronenkonfiguration folgender Ionen und Anionen an! Starten Sie mit der Elektronenkonfiguration des neutralen Atoms.

(a) Na^+

(b) P^{3-}

(c) Al^{2+}

Aufgabe 2.3: Welche der folgenden Aussagen geht über das Bohrsche Atommodell des Wasserstoffatoms hinaus?[86]

(a) Die Energie der Elektronen auf ihrer Bahn ist quantisiert.

(b) Das Elektron auf der kernnächsten Bahn hat die niedrigste Energie.

(c) Elektronen kreisen auf unterschiedlichen Bahnen um den Kern.

(d) Position und Geschwindigkeit der Elektronen auf der Bahn können nicht gleichzeitig bestimmt werden.

Aufgabe 2.4: Das Bohr-Modell des Wasserstoffatoms kann folgende Signatur nicht erklären:[87]

(a) Emissionsspektrum

(b) Absorptionsspektrum

(c) Lymanspektrum von Wasserstoff

(d) Feinstruktur des Wasserstoffspektrums

[86] Antwort: (d)
[87] Antwort: (d)

Aufgabe 2.5: Im Jahr 1927 führten Phipps und Taylor das Stern-Gerlach-Experiment mit Wasserstoffatomen aus [**?**]. Die Atome wurden in einen T_K=663 K heißen Ofen erzeugt, in x-Richtung stark kollimiert und durch ein Δx=3 cm langes inhomogenes Magnetfeld (Gradient dB_M/dz=1240 T/m) geleitet. Wie rß st ie Aufspaltung (d) des Strahl in z-Richtung, wenn das magnetische Moment des Wasserstoffatoms ein μ_B beträgt?

Die mittlere Geschwindigkeit der Atome v_x ergibt sich nach Maxwell aus der Temperatur:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} m_H \cdot v_x^2 = \frac{3}{2} k.T_K \\ v_x\text{‘}2 &= \frac{3\, k_B \cdot T_K}{m_H} \\ v_x^2 &= \frac{3\,(1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}) \cdot (663\,\mathrm{K})}{1.673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} \\ v_x^2 &= 1.64 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Die Kraft und damit die Beschleunigung a_z=F_z/m auf das Atom, kann man aus dem Gradientn des magnetischen Potenzials (U_B) bestimmen:

$$F_z = -\frac{dU_B}{dz} = \mu_z \frac{dB_M}{dz} \tag{16.112}$$

Die Aufspaltung entlang der z-Achse ist d=$a_z \cdot t^2/2$. Die Zeit, die sich das Atom im Magnetfeld aufhält ist $\Delta x/v_x$.
Damit ergibt sich für die Aufspaltung

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} a_z \cdot t^2 \\ d &= \frac{1}{2} \frac{F_z \cdot t^2}{m_e} \\ d &= \frac{\mu_z}{2\, m_e} \frac{dB_M}{dz} \left(\frac{\delta x}{v_x}\right)^2 \\ d &= \frac{9.274 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J/T}}{2\,(9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg})} (1240\,\mathrm{T/m}) \cdot \\ d &= 190 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Orbital	Hauptquantenzahl n	Drehimpulsquantenzahl ℓ	Magnetische Drehimpulsquantenzahl
$4f$	4	3	7
$4p$	4	1	2
$7f$	7	3	7
$5d$	5	2	5

Tab. 16.7: Lösung zu Aufgabe 2.1.

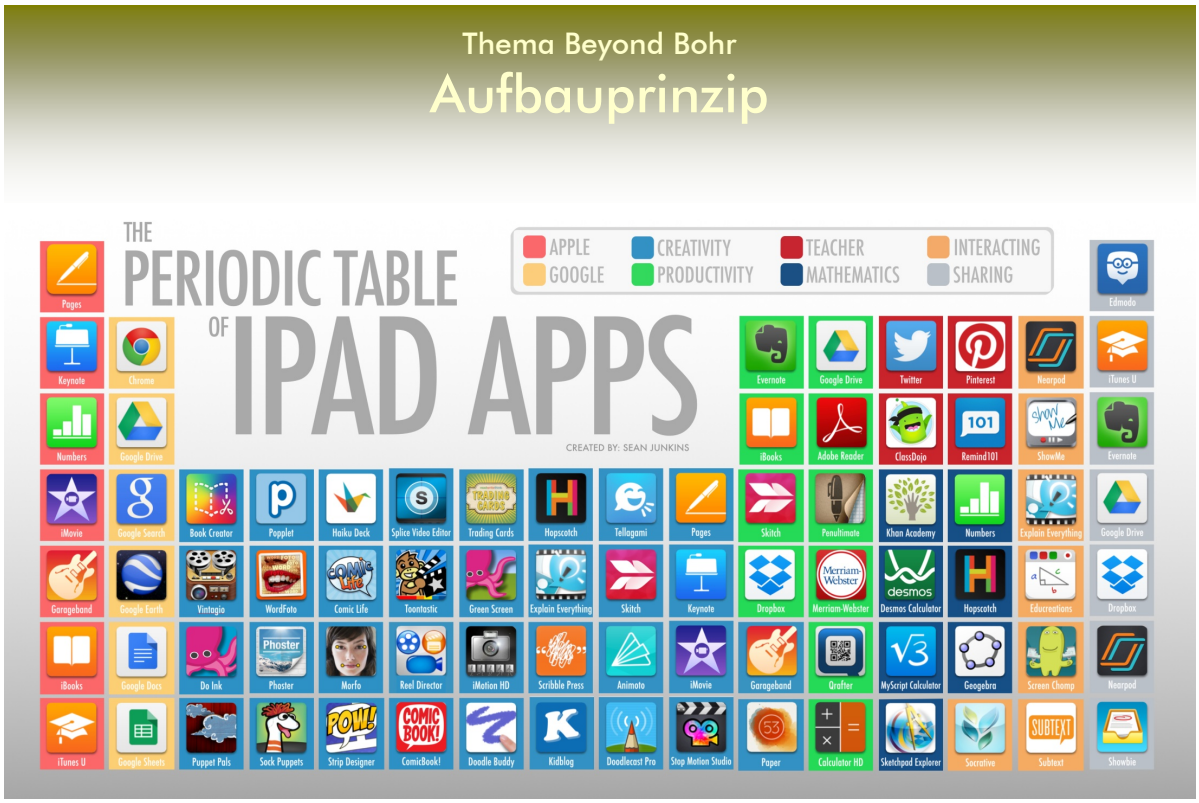
Element	Atom		Ion/ Anion	
Natrium	Na	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s$	Na^+	$1s^2\,2s^2\,2p^6$
Phosphor	P	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^3$	P^{3-}	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6$
Aluminium	Al	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^1$	Al^{2+}	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^1$

Tab. 16.8: Lösung zu Aufgabe 2.2.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Erklären Sie, warum Spektrallinien des Wasserstoffatoms durch ein äußeres Magnetfeld aufgespalten werden.
2. Warum wurde im Stern-Gerlach Experiment ein inhomogenes Magnetfeld verwendet?
3. Erläutern Sie, wie der Stern-Gerlach Versuch durchgeführt wurde?
4. Erklären Sie, warum ein Wasserstoffatom im Grundzustand mit einem äußeren Magnetfeld wechselwirkt.
5. Was beobachtet man im Stern-Gerlach Experiment, wenn ein Atom mit ℓ=0 den Magneten passiert?
6. Welche Bedeutung haben die Quantenzahlen n, ℓ, m_ℓ, s, m_s?
7. Was könnte die Schwierigkeit sein, das Stern-Gerlach Experiment mit Elektronen durchzuführen?

Aufbauprinzip



By state we mean energy levels in its most detailed sense, including not only the main level as defined in the Bohr atom but also subdivisions that depend on such factors as the spin orientation of the electron and the angular momentum of the electron in its orbit. No two electrons can have all these properties in common.

Wolfgang Pauli

Elektronen besetzen tief gebundene Zustände so,
dass die Gesamtenergie insgesamt ein Minimum erreicht.

Gibt es eine Choreographie der Elektronen?

Im Wasserstoffatom befindet sich das einzige Elektron im tiefsten möglichen Energiezustand. Aber wie ordnen sich die Elektronen in den anderen Elementen an. Sind alle 92 Elektronen im Uran im selben Quantenzustand und verteilen sich in irgendeiner Weise auf der ersten Bohrschen Bahn?[88] Die chemischen Eigenschaften der Atome sprechen

[88]Das würde man von einem klassischen System erwarten. Der unterste Energiezustand ist der, bei dem



Abb. 16.75: Niels Bohr und Wolfgang Pauli bei der Erforschung der Eigenschaften eines *top-spin* Kreisels im Jahr 1954.

dagegen. Im Periodensystem sind die Elemente an den Positionen 9 bis 11 ein Halogen, ein Edelgas und ein Alkalimetall.

Warum sollten sich die chemischen Eigenschaften so abrupt ändern, obwohl nur eine geringe Änderung in der Protonen und Elektronenzahl erfolgt?

Das im Folgenden formulierte Pauli-Prinzip spiegelt das wichtige Identitätsprinzip der Quantenphysik wieder: Die Vertauschung zweier Teilchen in einem System, die sich durch keinen physikalischen Parameter unterscheiden, führt zu keinem neuen Zustand. Für nicht unterscheidbare Teilchen addieren sich die Wellenfunktionen, während sich für prinzipiell unterscheidbare Teilchen die Wahrscheinlichkeiten addieren. Für Fermionen bedeutet dies, dass sich keine zwei Fermionen im gleichen Zustand befinden können. Das hat Folgen für die Verteilung der Elektronen im Atom auf die Energieniveaus. Nach dem Aufbauprinzip von Pauli werden die energetisch niedrigsten Orbitale als erstes besetzt. Ein Atomorbital kann dabei maximal von zwei Elektronen besetzt werden. Dabei sind die beiden Spins entgegengesetzt ausgerichtet, siehe als mechanisches Analogon den *top-spin* Kreisel[89] in Abb. 16.75. Das Pauli-Prinzip bestimmt die Besetzung der Energiezustände in den Atomen und liefert eine Erklärung für das Periodensystem der Elemente, siehe Abb. 16.76. Für die Besetzung der Atomorbitale in größeren Mehrelektronensystemen verwendet man zusätzlich die Hundschen Regeln. Dabei werden Orbitale mit der höchsten Anzahl ungepaarter Elektronen besetzt.

Effektive Kernladung

In Mehrelektronensystemen wechselwirken die Elektronen untereinander. Beschäftigen wir uns deshalb zunächst mit der Frage: Wie reagiert ein Elektron auf die Anwesenheit

das System keine Energie mehr abgeben kann, wenn es seinen Zustand ändert. George Gamow hat es mal so ausgedrückt [**?**]: *All the additional electrons in heavier atoms might be expected to drop into the first quantum orbit and play Ring-around-a-rosy oder ring around a nucleus.*

[89] Die Akteure auf dem Photo sind Wolfgang Pauli und Niels Bohr (1954)

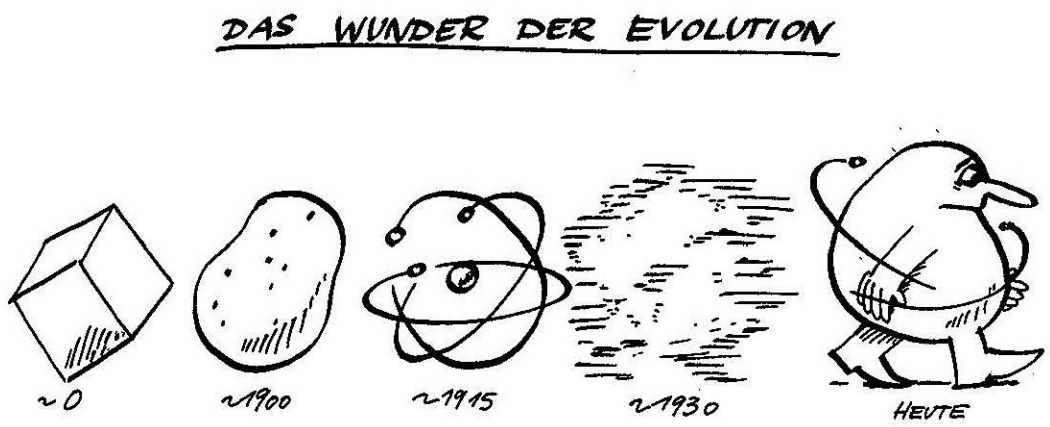


Abb. 16.76: Evolution der Atommodelle [**?**].

anderer Elektronen? Betrachten wir das Coulombpotenzial U_C eines Kerns der Ordnungszahl Z. Da das Atom neutral ist, hat es ebenfalls Z Elektronen. In unmittelbarer Nähe zum Kerns ($r \to 0$) sieht das Elektron die volle Kernladung:

$$U_C(r) = -\frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}\frac{Z \cdot e^2}{r} \tag{16.113}$$

Bewegt sich das Elektron weit außerhalb ($r \to \infty$) wird das Kernpotenzial durch die restliche $(Z-1)$ Elektronen weitestgehend abgeschirmt:

$$U_C(r) = -\frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{16.114}$$

Abb. 16.77 zeigt diese beiden Extremfälle. Zur Vereinfachung wird in der theoretischen Beschreibung die Bewegung jedes Elektrons (Index i) im Coulombpotenzial des Kerns und im mittleren Feld U_{mean} aller anderen Elektronen betrachtet. Das Verfahren ist ähnlich zu dem, wie man die Bewegung der Planeten um die Sonne annähert, wobei man auch zunächst den Einfluss der anderen Planeten vernachlässigt.[90]

$$U_i(r) = -\frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}\frac{Z \cdot e^2}{r} + U_{mean}(r_i) \tag{16.115}$$

Die Schrödingergleichung für das Gesamtsystem wird dadurch vereinfacht und durch Gleichungen für jedes der beteiligten Elektron ersetzt (independent particle approximation). Im Gegensatz zum Wasserstoffatom ist die Lage der Energiezustände viel stärker

[90] Für unser Sonnensystem ist die Näherung allerdings deutlich näher an der Realität als für Elektronen, da die Masse der Sonne deutlich größer ist als die der Planeten.

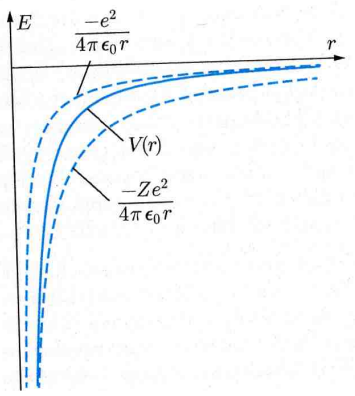


Abb. 16.77: Nahe des Kerns fühlt das Elektron den Z-fach geladenen Kern, während es in weiter Entfernung nur das Potenzial von Z Protonen und $Z-1$ Elektronen wahrnimmt. Die effektive Ladung ist daher in diesem Fall EINS. Aus diesen Extremfällen lässt sich der Verlauf eines effektiven Potenzial V_{eff} motivieren [**?**].

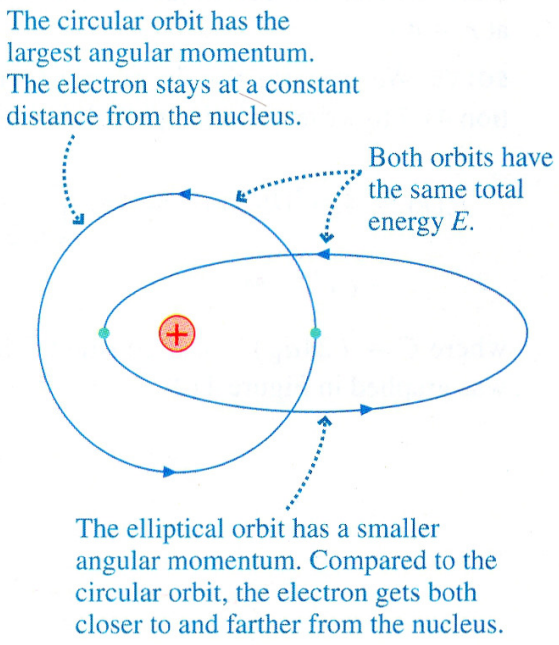


Abb. 16.78: Bewegung der Elektronen in unterschiedlichen ℓ-Zuständen in Mehrelektronensystemen [**?**].

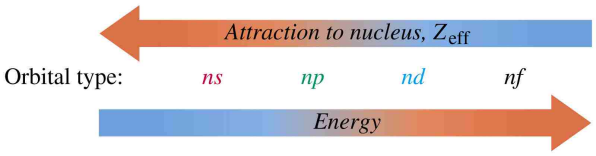


Abb. 16.79: Entwicklung von Z_{eff} und Bindungsenergien in Abhängigkeit von der Drehimpulsquantenzahl ℓ.

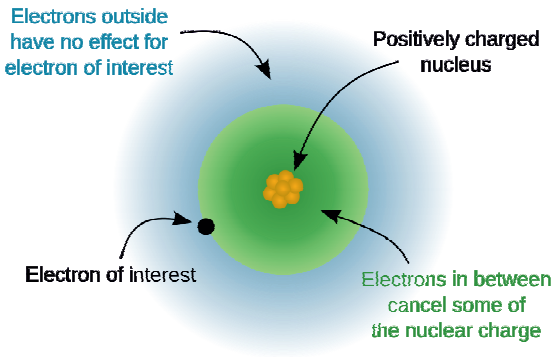


Abb. 16.80: Illustration de Phänomens der Abschirmung in Mehrelektronensystemen.

vom Wert der Drehimpulsquantenzahl abhängig. Das Verhalten kann unter Berücksichtigung der Elliptizität der Elektronenbahnen verstanden werden (Abb. 16.78). Vereinfacht kann man sich merken, dass sich, als Funktion von ℓ, Z_{eff} und Bindungsenergie gegenläufig entwickeln, wie Abb. 16.79 demonstriert. Klar ist, dass sich durch weitere Elektronen die Verhältnisse ändern. In sofern ist es nicht verwunderlich, dass sich die Lage der Energieniveaus ändert. Man kann sich vorstellen, dass andere Elektronen durch ihrer Anwesenheit die attraktive Coulombwechselwirkung zwischen Elektron und Kern (Anzahl der Protonen Z) reduzieren (Z-$Z_{screening}$). Man nennt diesen Effekt Abschirmung, der über eine effektive Kernladungszahl in die Bohrsche Formel integriert wird (Abb. 16.80). Damit lassen sich grob die Lage der Energieniveaus in Mehrelektronensystemen berechnen. Die allgemeine Gleichung lautet:

$$Z_{\text{eff}} = Z - Z_{\text{screening}} \tag{16.116}$$

Bei der Berechnung spielen eine Reihe von Effekten eine Rolle, die man über die Slater-Regeln berücksichtigt [**?**].[91] An dieser Stelle sei nur das Ergebnis einer solchen Analyse für Natrium ($Z = 11$) genannt:

$$Z_{\text{eff}} = 11 - 8.8 = 2.2 \tag{16.117}$$

Die Rechnung liefert eine effektive Kernladungszahl $Z_{\text{eff}} = 2.2$ für Natrium. Der Wert hat keine Einheit. Abb. 16.81 zeigt die Z- und Z_{eff}- Werte für die Elemente zu Beginn des Periodensystems. Man erkennt, dass die Werte bei den Alkalis besonders stark auseinander klaffen.

Für ein Z-fach aufgeladenes Atom ergibt sich

$$E_n^Z = -\frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2} \cdot E_0 \tag{16.118}$$

Im Heliumatom beeinflusst die Anwesenheit der beiden Elektronen die Lage der Energieniveaus. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen im Atom, also die Unschärfe

[91] Mehr zum Thema Slater-Regeln in Kapitel *Röntgen*

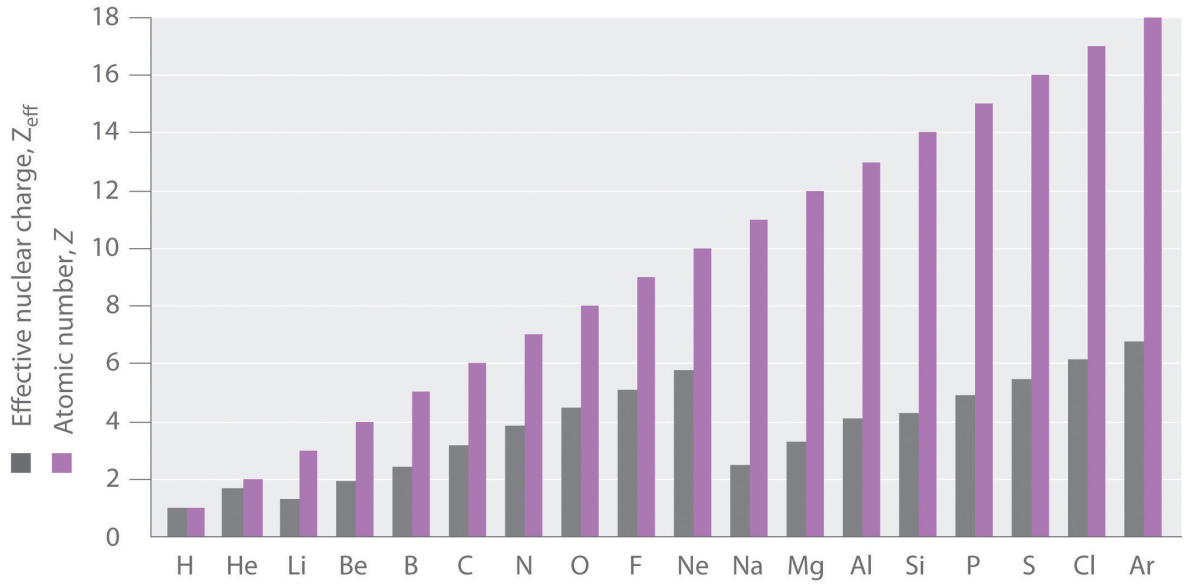


Abb. 16.81: Effektive Kernladung der Elemente. Am Beispiel des Elements Natrium bemerkt man, dass Alkalimetalle im Vergleich zu Neon ein äußerst geringes Z_{eff} aufweisen [**?**].

in der Position führt dazu, dass der Kern durch das jeweils andere Elektrons teilweise abgeschirmt wird. In erster Näherung *sieht* jedes Elektron die Hälfte der Zeit eine Kernladung von EINS und die andere Hälfte der Zeit eine Kernladung von ZWEI. Daher sollte man in der Bohrschen Gleichung ein Z_{eff}=0.5(2+1)=1.5 einsetzen. Allerdings ergibt sich eine Abstoßung der Elektronen aufgrund der gleichen Ladungsvorzeichens. Die Abschirmung der Kernladung wird damit reduziert. Dieser Effekt reduziert den Wert der effektiven Ladung auf etwa 1.7. Es ergibt sich

$$E_{2e} = -\frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2} \cdot E_0 - \frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2} \cdot E_0 \tag{16.119}$$

$$E_{2e} = -2\frac{(1.7)^2}{1^2} \cdot E_0 \tag{16.120}$$

$$E_{2e} = -79\,\text{eV} \tag{16.121}$$

Nimmt man eine Ladung weg, sieht das verbleibende Elektronen die volle Kernladung Z_{eff}=2. In diesem Fall ergibt sich eine Bindungsenergie von

$$E_{1e} = -\frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2} \cdot E_0 \tag{16.122}$$

$$E_{1e} = -\frac{(2)^2}{1^2} \cdot E_0 \tag{16.123}$$

$$E_{1e} = -54\,\text{eV} \tag{16.124}$$

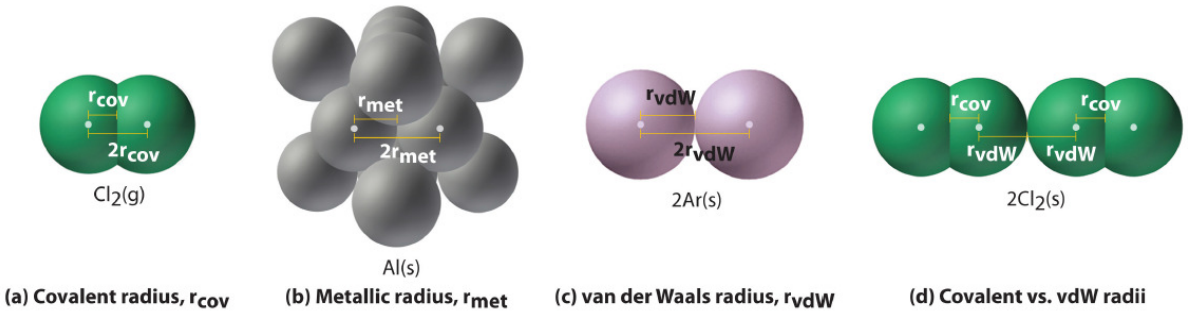


Abb. 16.82: Definition des Atomradius für unterschiedliche Bindungstypen. (a) Für den kovalenten Atomradius r_{cov}nimmt man den halben Atomabstand (Beispiel Chlor).(b) Der Atomradius eines Metalls r_{met} ist die Hälfte des Abstands benachbarter Atome (Beispiel: Aluminium). (c) Für den Van-der-Waals Atomradius r_{vdW} nimmt man den halben Atomabstand (Beispiel Argon) (d) Vergleich von kovalenter und Van-der-Waals-Radien am Beispiel von Chlor [**?**].

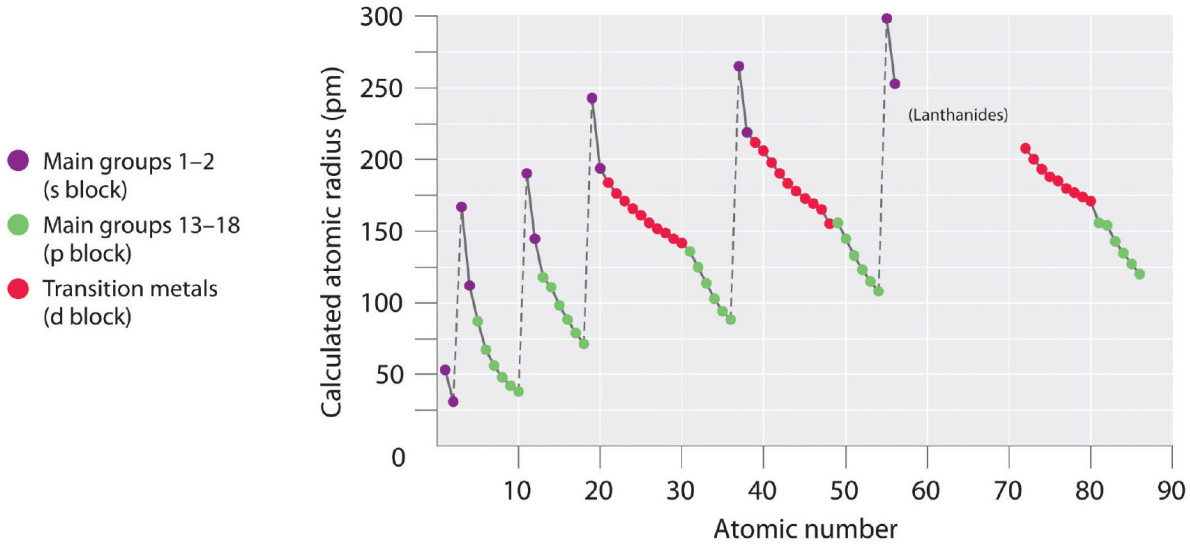


Abb. 16.83: Werte für den Atomradius als Funktion der Ordnungszahl. Man erkennt Trends. Geht man im Periodensystem nach unten steigt der Radius an. Allerdings ändert sich der Radius insgesamt nur wenig. Das liegt daran, dass die Radien im Bohrschen Modell nur mit $1/Z$ anwachsen. Die Alkalis haben besonders große Atomradien, während Atome mit halb gefüllten Schalen sich durch geringe Radien auszeichnen [**?**].

Bildet man die Differenz ΔE=(-54 eV)-(-79 eV)=25 eV ergibt sich die Energie, die man aufbringen muss, um ein Elektron aus dem neutralen Helium abzulösen, das Ionisationspotenzial des neutralen Heliumatoms. Experimentell ergibt sich ein Wert von 24.5 eV. Die Slater-Regeln ist ein guter Ansatz, die Eigenschaften der Mehrelektronenatome zu beschreiben. Wie man sieht, ist diese Energie aufgrund der höheren Kernladung höher als die entsprechende Ablöseenergie im Wasserstoffatom (13.6 eV). Den Effekt der Kernladung und der Kernabschirmung zeigt sich auch in den Atomradien.[92] Die Alkaliatome zeichnen sich durch große Atomradien aus. Bei schweren Atomen führt die hohe Kernladung zu einer starken Anziehung der Elektronen in Richtung Kern. Abb. 16.83 zeigt die Trends im Periodensystem der Elemente. Die geringsten Atomradien weisen die Elemente mit halb gefüllter Schale auf.

Pauli-Prinzip

Für Wasserstoff befindet sich das Elektron im tiefsten gebundenen Zustand. Die Frage stellt sich, wie man Elektronen in Vielelektronenatomen auf die Energiezustände verteilt sind. Befinden sich alle Elektronen im tiefsten elektronischen Zustand? Es zeigt sich, dass nur wenige Elektronen den untersten Energiezustand besetzen können. Alle anderen findet man in weniger stark gebundenen Zuständen. Das wichtige Aufbauprinzip regelt die Verteilung auf der Grundlage der vier Quantenzahlen (n, ℓ, m_ℓ, S).

Das **Pauli-Prinzip**, auch Aufbauprinzip genannt, besagt, dass keine zwei Elektronen in einem Atom die GLEICHEN Quantenzahlen aufweisen.

Allgemein gilt dieses Prinzip nicht nur für Elektronen, sondern für alle Teilchen mit einem halbzahligen Spin, also Fermionen. Für Teilchen mit ganzzahligem Spin gilt das Pauli-Prinzip nicht. Man spricht von Bosonen. Das Pauli-Prinzip spielt eine wichtige Rolle in der Physik mikroskopischer Teilchen und hat Auswirkungen bis hin zu astrophysikalischen Objekten:

- Das Pauli-Prinzip erklärt den Aufbau des Periodensystems.
- Elektronen in einem Festkörper besetzen nicht das gleiche Energieniveau. Dadurch ergibt sich die Bandstruktur und das Ferminiveau (Kapitel *Festkörper*).
- Neutronen und Elektronen unterliegen dem Pauli-Prinzip. Unter bestimmten Bedingungen führt der Kollaps eines Stern zur Bildung eines Neutronenstern oder eines weißen Zwergs. Abb. 16.85 zeigt Aufnahmen des Pulsars im Krebsnebel.

  Link to video `Crab Nebula Movie Animations`
- Das Pauli-Prinzip spielt weiter eine Rolle bei der Ionen- und der kovalenten Bindung, beim Schalenmodell der Kerne, sowie bei der Kernbindungsenergie (siehe Vorlesung *Kerne*).

[92] *Lexikon:* Der **Atomradius** beschreibt die ungefähre Ausdehnung eines Atoms. Dazu berücksichtigt man die Bindungsverhältnisse, wie Abb 16.82.

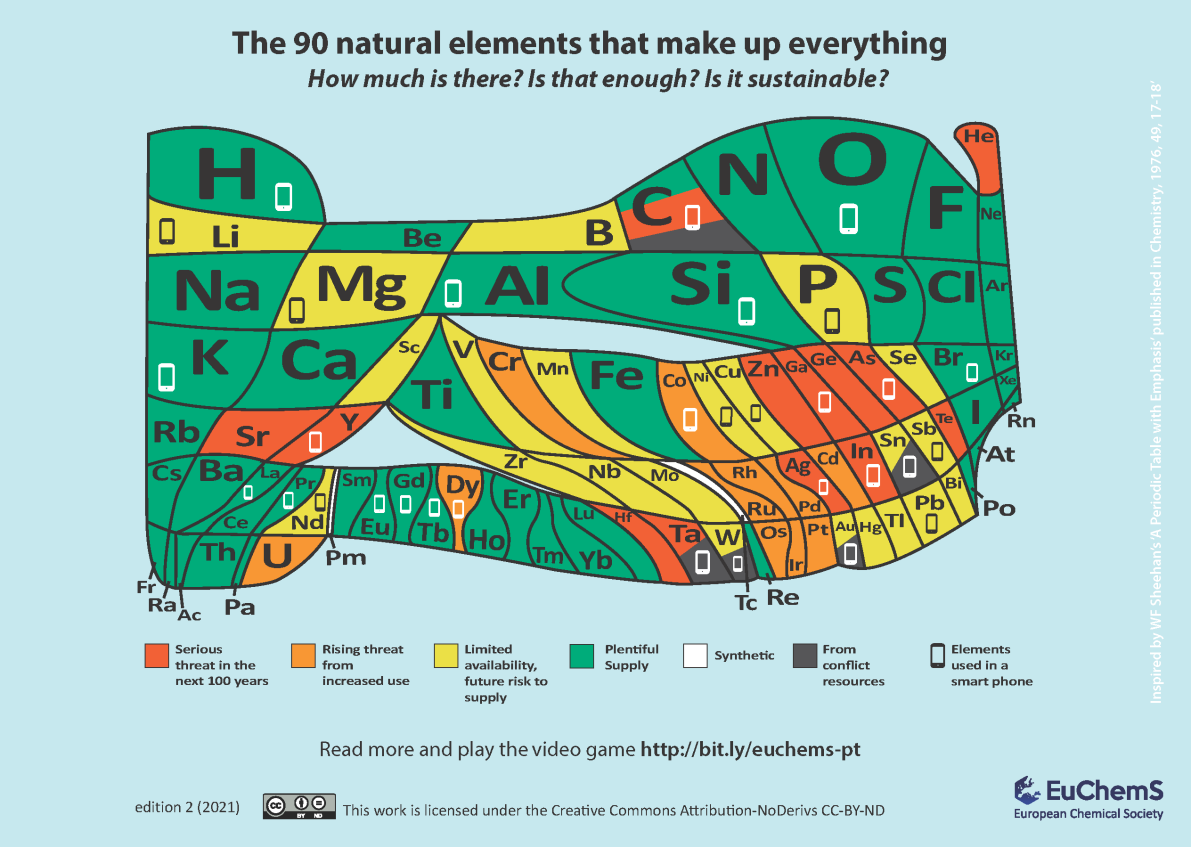


Abb. 16.84: Ein anderer Blick auf das Periodensystem 1: Jedes Element ist in einem Block dargestellt, dessen Fläche seiner Verfügbarkeit (logarithmisch dargestellt) entspricht.

In Abb. 16.84 ist jedes Element in einem Block, dessen Fläche seiner Verfügbarkeit auf der Erdoberfläche entspricht dargestellt. Die Fläche ist in etwa proportional zum Logarithmus der Anzahl der Atome dieses Elements. Ausnahmen sind Tc, Pr , Po, At, Rn, Fr, Ra, Ac und Pa, die übertrieben gezeichnet sind, da sie sonst nicht sichtbar wären. Die Farben zeigen die relative Besorgnis hinsichtlich der zukünftigen Verfügbarkeit an. Das Symbol des Mobiltelefons weist auf Elemente an, die derzeit bei der Herstellung verwendet werden. Abb. 16.86 eine Darstellung, die den Versuch unternimmt, die chemische mit der visuellen Sprache zu vereinen, um zu zeigen, wie sich Chemikalien auf unser tägliches Leben auswirken. Schließlich ist in Abb. 16.87 gezeigt, welche der Elemente im Periodensystem eine wichtige Funktion im menschlichen Körper haben.

Die Elemente des Periodensystems

$1s$-Orbital: Wasserstoff und Helium

Wenden wir das Pauli-Prinzip an, indem wir versuchen, Energiezustände in einem Atom zu besetzen. Der niedrigste Zustand in einem Atom ist das Orbital $1s$. Ist dieses Orbital

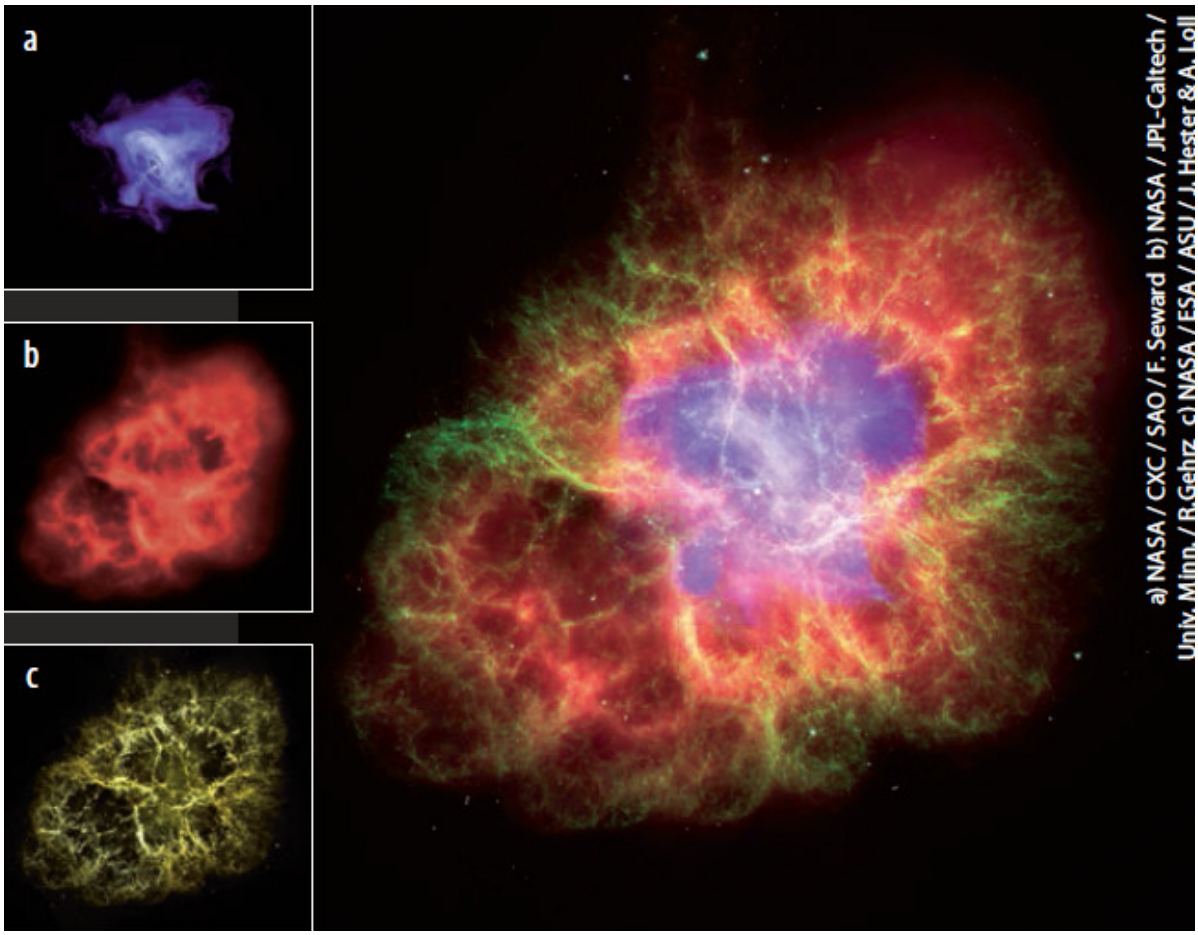


Abb. 16.85: Der Krebsnebel entstand infolge einer Supernova-Explosion im Jahr 1054. Der Überrest des Sterns, ein Pulsar mit einer Frequenz von 33 ms, zeigt sich als heller Punkt im emittierten Röntgenlicht (a), während sich die Strukturen des Nebels im infraroten (b) und sichtbaren Licht (c) über etwa 10 Lj Durchmesser erstrecken.

mit einem Elektron und der gleichen Anzahl Protonen besetzt, kommt man zum Element Wasserstoff. Das Atom ist elektrisch neutral und steht ganz links im Periodensystem. Wie viele Elektronen können zusätzlich in dieses Orbital eingespeist werden?

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ \ell &= 0 \\ m_\ell &= 0 \\ s &= \pm 1/2 \end{aligned}$$

Damit gibt es aufgrund der Wahlfreiheit des Spins nur zwei Möglichkeiten Elektronen in dieses Orbital einzufüllen. Das Element, das zwei Elektronen und zwei Protonen hat, ist Helium und steht ganz rechts im Periodensystem [**?**].

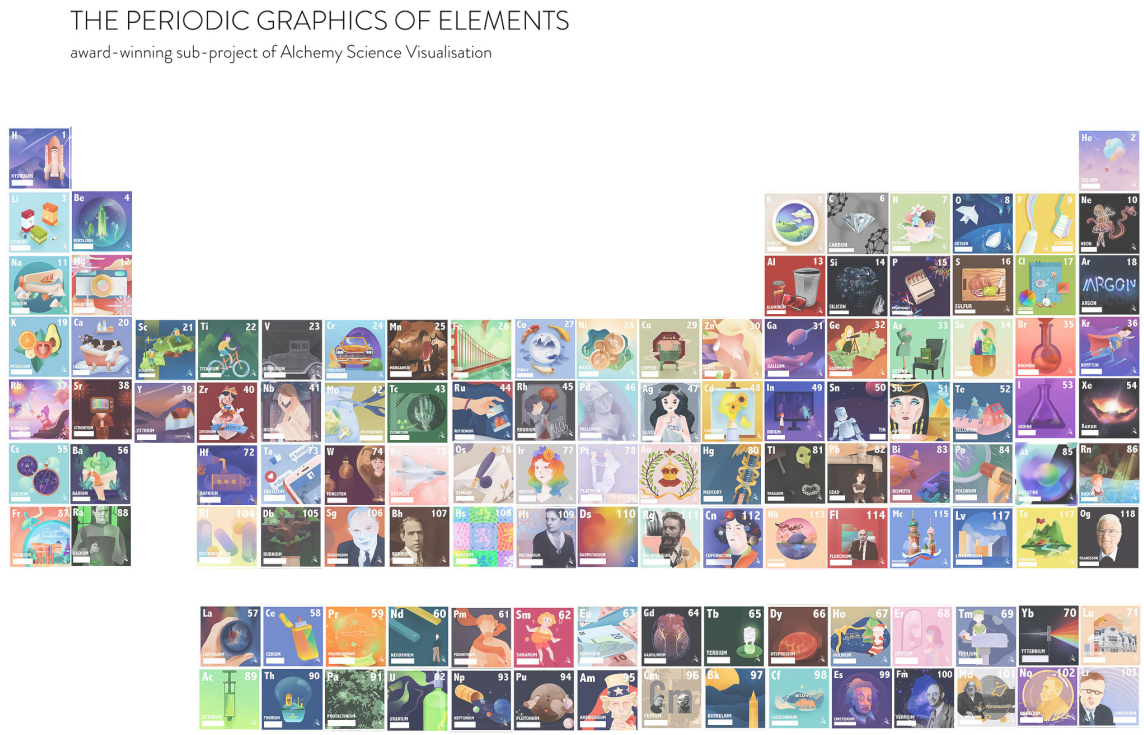


Abb. 16.86: Ein anderer Blick auf das Periodensystem 2: Relevanz der Elemente für unser tägliches Leben.

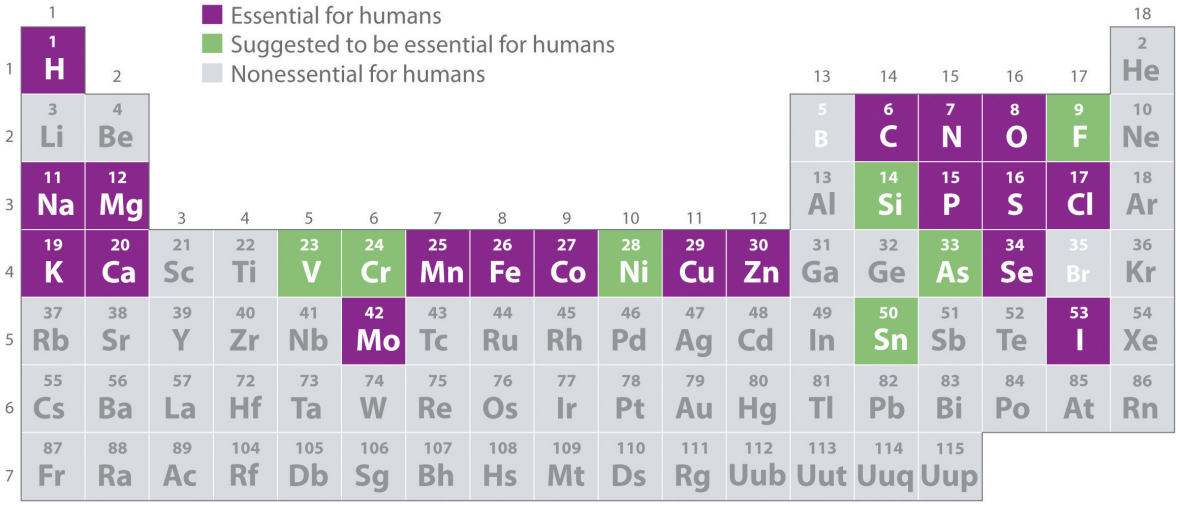


Abb. 16.87: Ein anderer Blick auf das Periodensystem 3: Nur leichte Elemente sind für die menschliche Ernährung zwingend erforderlich. Nur wenige schwere Elemente wie Molybdän, Jod und Zinn tragen bei. Bestimmte Pflanzen benötigen Bor für das Wachstum, Brom taucht in Meeresorganismen auf und Wolfram wird von Mikroorganismen verwendet.

$2s$-Orbital: Lithium und Beryllium

Da das $1s$ Orbital mit zwei Elektronen voll aufgefüllt ist ($1s^2$), muss das dritte Elektronen in ein schwächer gebundenes Niveau ausweichen. Das energetisch nächstliegende Orbital ist $2s$:

$$\begin{aligned} n &= 2 \\ \ell &= 0 \\ m_\ell &= 0 \\ s &= \pm 1/2 \end{aligned}$$

Hier handelt es sich um das Element im Periodensystem: Lithium (Li).Das doppelt geladenen Lithium Li^{2+} hat ein wasserstoffähnliches Spektrum, wobei die Energieniveaus aufgrund von Z=3 um einen Faktor $3^2 = 9$ höhere Bindungsenergien haben. Bei Li^+ findet man ein heliumähnliches Spektrum. Die effektive Kernladungszahl ist nicht Z_{eff}=2-1/2 wie bei He, sondern Z_{eff}=3-1/2=2.5. Das führt zu einer hohen Ionisierungsenergie von I_P=75.6 eV. Im neutralen Li findet man das dritte Elektron aufgrund des Pauli-Prinzips in n=2. Da Z_{eff} größer als EINS ist, erwartet man eine leicht erhöhte Ionisierungsenergie (13.6 eV/n^2=3.4 eV) im Vergleich zu Wasserstoff mit einem Elektron in $n = 2$. Man findet 5.4 eV, woraus sich $Z_{\text{eff}} = 1.25$ ableiten lässt. Chemisch führen die Werte der I_P zu einer Wertigkeit[93] von +1.

In das $2s$-Niveau kann man nur zwei, also das Gesamtsystem hat damit vier Elektronen. Ein Blick ins Periodensystem liefert das Element Beryllium (Be). Damit ergibt sich folgende Abfolge in der Besetzung der Energieniveaus. Man schreibt es folgendermaßen auf:

Wasserstoff: H $1s^1$

Helium: He $1s^2$

Lithium: Li $1s^2 2s^1$

Beryllium: Be $1s^2 2s^2$

Da sich in Beryllium das zweite Elektron ebenfalls im $2p$ Orbital befindet, ist die zweite Ionisierungsenergie deutlich geringer als bei Lithium. Deshalb gibt die Chemie die Wertigkeit mit +2 an.

[93] *Lexikon:* Die **Wertigkeit** (**Valenz**) gibt die Anzahl der Einfachbindungen an, die ein Atome bei einer einfachen chemischen Bindung mit anderen Atomen eingehen müsste, um den Oktettzustand zu erreichen.

$2p$-Orbital: Bor bis Neon

Als nächst höherliegendes Orbital wird $2p$ besetzt. Hier ergeben sich aufgrund des Pauli-Prinzips mehr Möglichkeiten zur Besetzung der Zustände:

$$\begin{aligned} n &= 2 \\ \ell &= 1 \\ m_\ell &= 0, \pm 1 \\ s &= \pm 1/2 \end{aligned}$$

Die Drehimpulsquantenzahl $\ell = 1$ hat drei magnetische Unterzustände (m_ℓ=–1, 0, +1), die mit jeweils zwei Elektronen besetzt werden können. Damit können sechs Elektronen einfüllt werden. Insgesamt sind dies ($2e + 2e + 6e = 10e$). Im Element Bor (B) findet man ein Elektron im $2p$ Orbital. Die Auffüllung des Orbitals führt zun den Elementen Kohlenstoff (C), Stickstoff (N), Sauerstoff (O) und Fluor (F). Das Element im Periodensystem mit 10 Protonen und 10 Elektronen ist Neon (Ne), dass wieder ganz rechts im Periodensystem steht.[94] Die zweite Reihe im Periodensystem sieht also folgendermaßen aus:

Li: $1s^2 2s^1$

Be: $1s^2 2s^2$

B: $1s^2 2s^2 2p^1$

C: $1s^2 2s^2 2p^2$

N: $1s^2 2s^2 2p^3$

O: $1s^2 2s^2 2p^4$

F:[95] $1s^2 2s^2 2p^5$

Ne: $1s^2 2s^2 2p^6$

Erkennen Sie die Zusammenhänge? Das Pauli-Prinzip liefert eine physikalische Erklärung für die Struktur des Periodensystems der Elemente. Die gesamte Chemie beruht auf einer einfachen Annahme: Das Elektrons hat einen Spin 1/2. Immer wenn eine neues

[94] The Nobel Prize in Chemistry 1904 was awarded to Sir William Ramsay *in recognition of his services in the discovery of the inert gaseous elements in air, and his determination of their place in the periodic system.*

[95] The Nobel Prize in Chemistry 1906 was awarded to Henri Moissan *in recognition of the great services rendered by him in his investigation and isolation of the element fluorine, and for the adoption in the service of science of the electric furnace called after him.*

s-Energieorbital mit Elektronen gefüllt wird, sind dies die Elemente auf der ganz linken Seite des Periodensystems. Dies sind die reaktiven Alkalimetalle. Sind die p-Schalen voll aufgefüllt, findet man auf der rechten Seite des Periodensystems die nicht-reaktiven Edelgase.

Wie viele Elektronen N_e kann eine Schale aufnahmen?

$$\begin{aligned} N_e &= \sum 2\,(2\,\ell+1)_{\ell=1}^{n-1} \\ N_e &= 2\,(1+3+5+\ldots+(2(n-1)+1)) \\ N_e &= 2\frac{n}{2}(1+2(n-1)) \\ N_e &= 2n^2 \end{aligned} \tag{16.125}$$

Bei der Aufklärung der Anordnung der Elemente im Periodensystem zeigte es sich, dass die Anordnung der Elemente mit der Verteilung der Elektronen in den Elementen im Zusammenhang steht. Elektronen besetzen stets das energetisch niedrigste freie Orbital.

Hundsche Regeln

Allgemein ordnen sich die Elemente in der folgender Reihenfolge der elektronischen Schalen. Zunächst folgt die Besetzung der Energieniveaus dem Bohr-Sommerfeld Schema. Das heißt, dass zu einem gegebenen n erst alle ℓ-Zustände besetzt werden. Dieses Vorgehen stimmt bis zum Element Argon ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$). Dann ändert sich das Schema und die $n\ell$ Orbitale geraten durcheinander, siehe Abb. 16.88 und Abb. 16.89. Beispielsweise hat Arsen (As) die Elektronenkonfiguration

$$\text{As: } 1s^2,\ 2s^2,\ 2p^6,\ 3s^2,\ 3p^6,\ 4s^2,\ 3d^{10},\ 4p^3 \tag{16.126}$$

Die Beobachtung, dass die $4s$-Schale zuerst und erst dann die $3d$-Schale aufgefüllt wird, kann man verstehen, wenn man sich vor Augen führt, dass im Zustand $4s$ der Bahndrehimpuls ℓ=0 ist und diese Elektronen, im Vergleich zu $3d$-Elektronen mit ℓ=2, mit höherer Wahrscheinlichkeit in Kernnähe zu finden sind. Dies führt zu einer stärkeren Bindung an den Kern. In Abb. 16.90 erkennt man die Systematik, mit der die elektronischen Zustände im Periodensystem auf der Grundlage des Pauli-Prinzips und der Hundschen Regeln[96] aufgefüllt werden.

$$1s,\ 2s,\ 2p,\ 3s,\ 3p,\ 4s,\ 3d,\ 4p,\ 5s,\ 4d,\ 5p,\ 6s,\ 4f,\ 5d,\ 6p,\ 7s \tag{16.127}$$

[96] *Lexikon:* Der Abstand der Energieniveaus hängt auch von der Zahl der schon vorhandenen Elektronen ab. Dies führt bei schwereren Atome zu Abweichungen. Hier erfolgt die Besetzung in den Unterschalen zusätzlich unter Berücksichtigung der **Hundschen Regeln**: Der Gesamtspin nimmt den maximal möglichen Wert an. Die Spins der einzelnen Elektronen orientieren sich zunächst parallel zueinander. Dies führt zu einer -man sagt- **maximalen Multiplizität**. Dieses Verhalten ist die Ursache für die magnetischen Eigenschaften der Übergangsmetalle (Ni, Fe, Cr). Beispielsweise ordnen sich im Eisen fünf der sechs $3d$-Elektronen in ihren Spins parallel an, wodurch sich das außer-

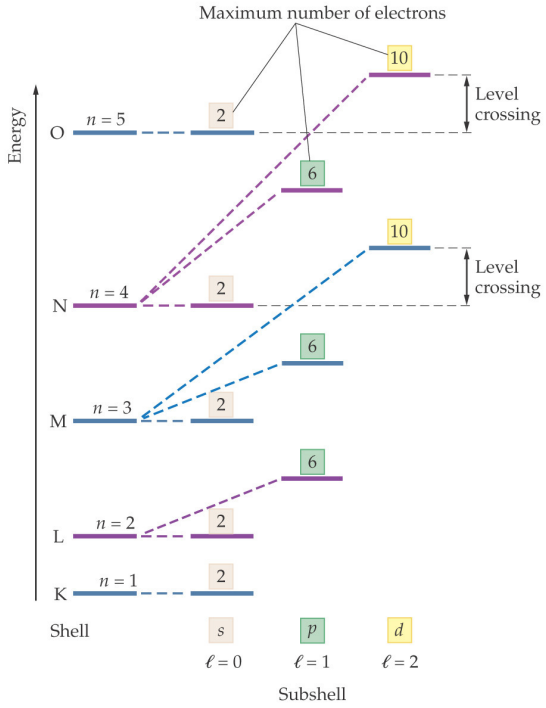


Abb. 16.88: Die Verschiebung zu niedrigeren Bindungsenergien bei den hohen ℓ-Zuständen führt dazu, dass nicht alle ℓ-Zustände von Elektronen besetzt werden. Statt dessen wird ein höherer ns-Zustand zuerst besetzt.

Bei den ersten 56 Elementen des Periodensystem gibt es nur 8 Elemente, die von dieser Regel abweichen: Cr, Cu, Nb, Mo, Ru, Rh, Pd, Ag. Nehmen wir als Beispiel Chrom:

$$Cr : 1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 4s^1\, 3d^5 \tag{16.128}$$

Die Entdeckung des Elements Hafnium mit der Ordnungszahl Z=72 ist aus historischer Sicht aufschlussreich. Der französische Chemiker Georges Urbain behauptete im Jahr 1911, dass dieses Element, er nannte es Celtium, zu den Seltenen Erden gehöre. Niels Bohr dagegen war der Meinung, dass das Element ein Übergangsmetall und chemisch vergleichar zu Zirkonium (Z=40) sei. Diese Vermutung wurde von Coster und von Hevesy[97] bestätigt. Die zugehörigen Röntgenspektren wurden 1923 veröffentlicht. Ende der Debatte? NEIN! Urbain bestand weiterhin seinen Anspruch und behauptete, dass die Röntgenmethode nicht empfindlich genug sei, was von Rutherford[98] bestätigt wurde. Dieser Streit uferte aus und spaltete die Wissenschaftsgemeinde [**?**]. Erst im Jahr 1930

gewöhnlich große magnetische Moment ergibt. Die Ursache für dieses Verhalten ist das Bestreben der Elektronen, möglichst nichts miteinander zu tun haben zu wollen. Dadurch wird die Gesamtenergie minimiert.

[97] The Nobel Prize in Chemistry 1943 was awarded to George de Hevesy *for his work on the use of isotopes as tracers in the study of chemical processes.*

[98] The Nobel Prize in Chemistry 1908 was awarded to Ernest Rutherford *for his investigations into the disintegration of the elements, and the chemistry of radioactive substances*

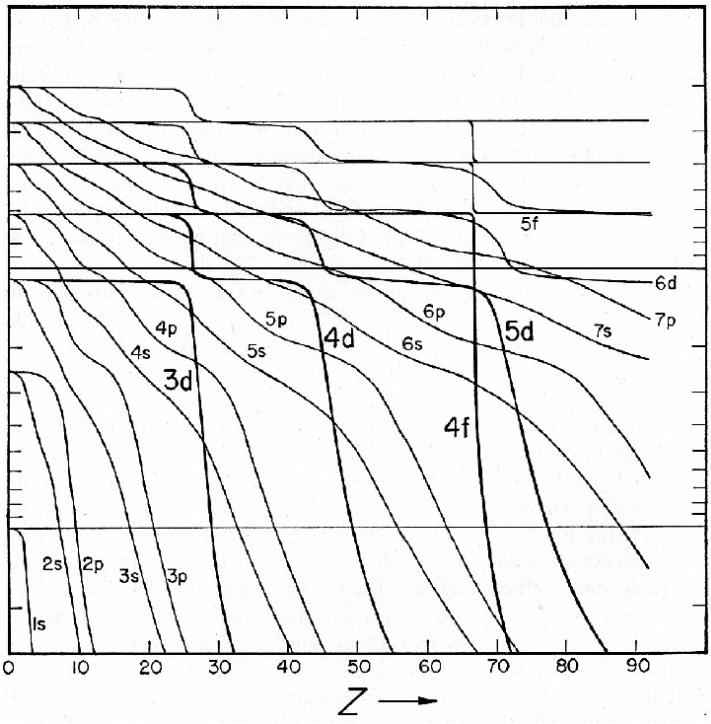


Abb. 16.89: Kurven, die die Bindungsenergie der Elektronen als Funktion der Ordnungszahl darstellen [**?**].

wurde Hafnium von der *International Union of Pure and Applied Chemistry* offiziell anerkannt. In Frankreich setzte man trotzdem weiter auf Celtium das Element 72 zählte es bis in die 40er Jahre zu dem Seltenen Erden.

Abb. 16.91 gibt eine Übersicht wie sich das Pauli-Prinzip auf den Aufbau des Periodensystems der Elemente auswirkt. Wie verteilen sich die Elektronen auf die einzelnen Orbitale (z.B. p_x, p_y, p_z), wenn die Subschalen (hier p) noch nicht voll aufgefüllt sind? Als allgemeine Regel kann man sich merken, das zunächst alle Orbitale gleichmäßig besetzt werden, bevor eines der Orbitale mit 2 Elektronen aufgefüllt wird. Die Ursache ist die gegenseitige Abstoßung, die dazu führt, dass Elektronen, die sich im gleichen Orbital aufhalten schwächer gebunden sind. Die Besetzung von Orbitalen, die räumlich weiter von einander entfernt sind, ist also energetisch günstiger. Abb. 16.92 zeigt, wie sich die Bindungsenergien der einzelnen $n\ell$-Orbitale mit der Ordnungszahl entwickeln. Man beachte die logarithmische Skala. Im Vergleich zu Wasserstoff ist das $1s$ Elektron in Brom (Z=25) erheblich stärker an das Atom gebunden. Diese starke Erhöhung liefert einen Hinweis auf die hohe Photonenenergie in der Röntgenemission (Kapitel *Röntgen*). Die Konfiguration der Valenzelektronen hat einen erheblichen Einfluss auf die chemischen Eigenschaften. Hier entscheidet sich, ob es sich dem Element um ein Metall, einen Halbleiter oder einen Isolator handelt, siehe Abb. 16.93.

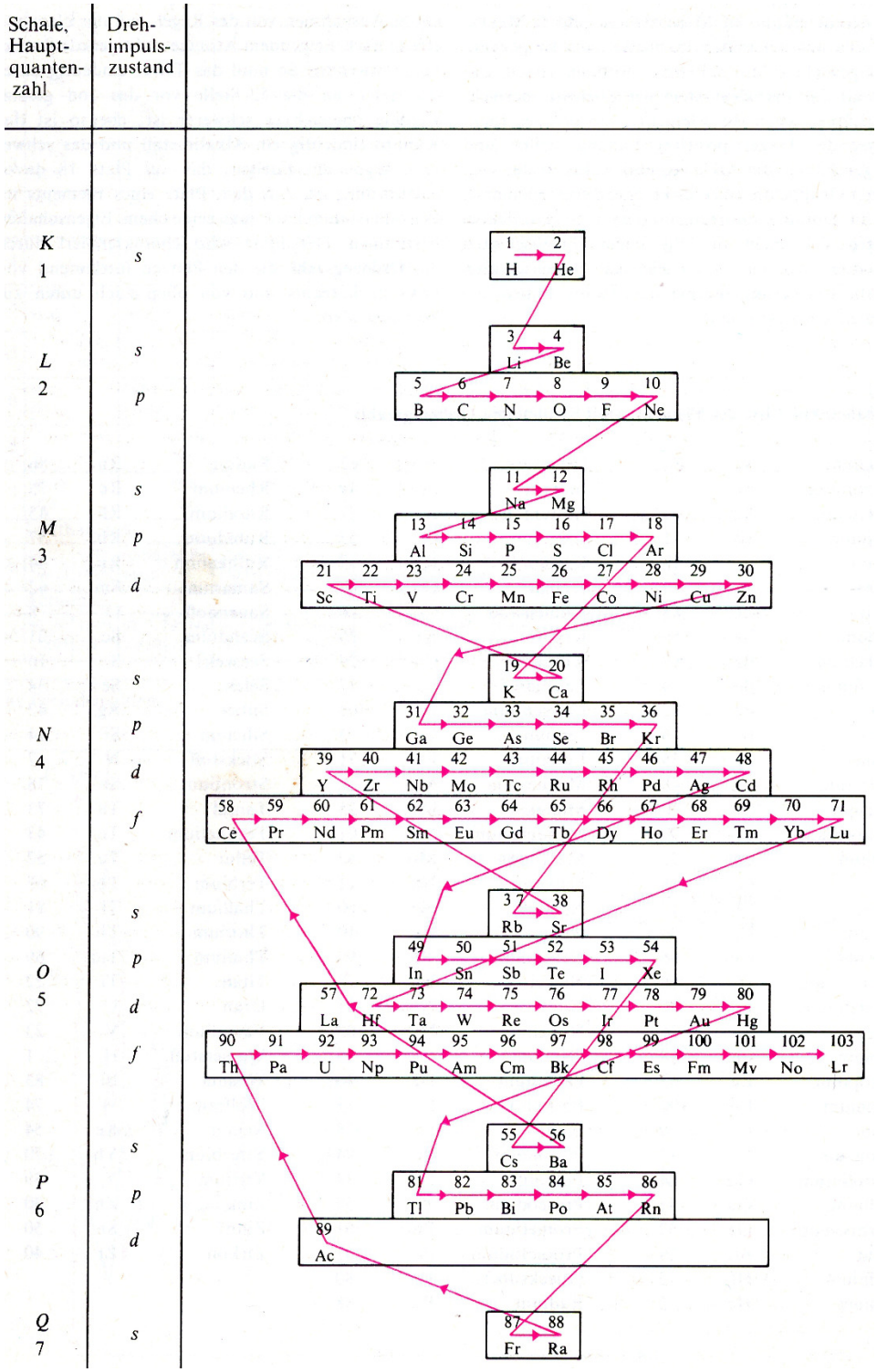


Abb. 16.90: Schema, nachdem die Orbitale in den Elementen aufgefüllt werden [**?**].



Abb. 16.91: Periodensystem der Elemente mit Fokus auf den ℓ-Charakter der Valenzelektronen.

Wahrscheinlichkeitsdichte

Abschließend ist noch zu klären, wie sich die Elektronen in den einzelnen Orbitalen anordnen. Wir hatten schon kennengelernt, dass sich die Elektronen nicht auf Planetenbahnen um den Kern bewegen. Diese Vorstellung in den Modellen von Bohr und Sommerfeld (siehe Kapitel *Bohrsches Atommodell*) führt zu Konflikten mit der klassischen Elektrodynamik: Beschleunigte Ladungen strahlen! Aus den Welleneigenschaften mikroskopischer Teilchen (Wellenpaket) und der Unschärferelation ergibt sich, dass man Teilchen nicht exakt lokalisieren kann. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit wird bestimmt durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion. Die genaue Rechnung liefert, dass es eine Wolke um den Kern gibt, die das Elektron repräsentiert, siehe Tab. 16.9. Stellen Sie sich in einem Gedankenexperiment vor, sie teilen das Elektron in abertausende von Splittern. Da wo das Elektron sich bevorzugt aufhält, ist die Wolke dicht; da wo sich das Elektron selten aufhält, ist die Dichte gering. Im Wasserstoffatom gibt es im $1s$-Zustand eine hohe Wahrscheinlichkeit $|\Psi^2|$, das Elektron in Kernnähe aufzufinden. Stimmt das auch? Bei $\ell = 0$ ist die Elektronenwolke radialsymmetrisch und man kann sich überlegen, wo das Elektron sich hauptsächlich befindet. Abb. 16.94 veranschaulicht die Zusammenhänge. Die Bindungsenergie des Elektrons im Wasserstoffatom entspricht nach dem Energieerhaltungssatz einer potenziellen kinetischen Energie von NULL im Abstand $2a_{Bohr}$. Klassisch betrachtet findet man das Elektron niemals in einem Bereich $r > r_{Bohr}$. Die Wellenfunktion zeigt aber eine Amplitude größer NULL in diesem Bereich. Quantenphysikalisch gibt es eine Chance, das Elektron in diesem Bereich zu lokalisieren.

Man sollte an dieser Stelle nicht annehmen, dass das Elektron als Wolke über den Bereich verteilt ist. Jede experimentelle Messung würde ein Elektron an einem bestimmten Ort nachweisen.

Die radialen Wellenfunktionen $R_{n\ell}$ haben eine Form, die sich einem nicht gleich er-

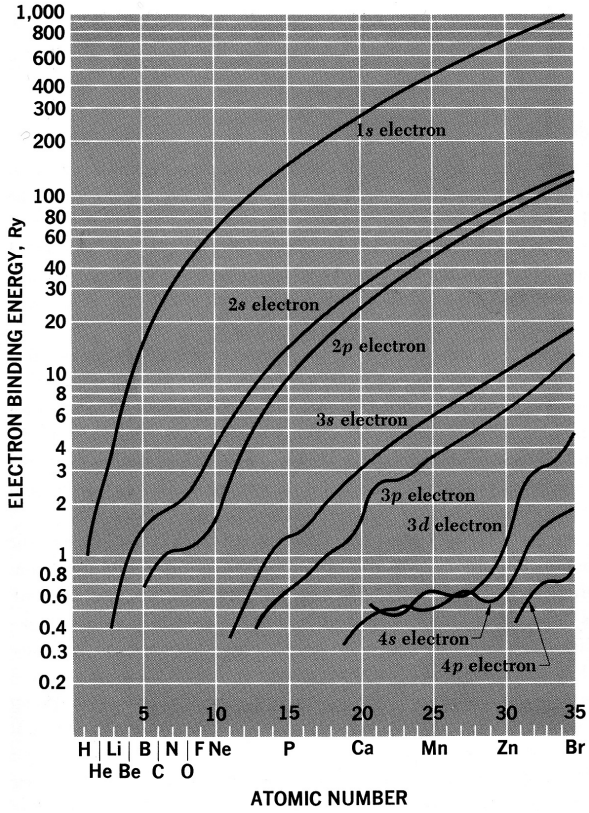


Abb. 16.92: Bindungsenergien der Elektronen in den leichten Elementen. Die Werte sind in der Energieeinheit Rydberg[a] angegeben [**?**].

[a] 1 Ry=13.6 eV

schließt. Beispielsweise findet man für R_{1s}, R_{2s} und R_{3s}:

$$R_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot r_{Bohr}^3}} \exp(-r/r_{Bohr}) \tag{16.129}$$

$$R_{2s}(r) = \frac{1}{\sqrt{8\,\pi \cdot r_{Bohr}^3}} \left(1 - \frac{r}{2\,r_{Bohr}}\right) \exp(-r/2\,r_{Bohr}) \tag{16.130}$$

$$R_{3s}(r) = \frac{1}{\sqrt{24\,\pi \cdot r_{Bohr}^3}} \left(\frac{r}{2\,r_{Bohr}}\right) \exp(-r/2\,r_{Bohr}) \tag{16.131}$$

ℓ	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	$\frac{2}{\sqrt{a^3}} \exp(-\varrho)$	$\frac{1}{\sqrt{2\,a^3}} \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{2}\right) \cdot \exp(-\varrho/2)$	$\frac{1}{\sqrt{27\,a^3}} \cdot \left(1 - \frac{2\,\varrho}{3} + \frac{2\,\varrho^2}{27}\right) \cdot \exp(-\varrho/3)$
1		$\frac{\varrho}{\sqrt{24 \cdot a^3}} \exp(-\varrho/2)$	$\frac{8\,\varrho}{27\sqrt{6\,a^3}} \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{6}\right) \cdot \exp(-\varrho/3)$
2			$\frac{4\,\varrho^2}{81\sqrt{30\,a^3}} \cdot \exp(-\varrho/3)$

Tab. 16.9: Radiale Wellenfunktionen $R_{n\ell}(r)$ des Wasserstoffatoms. Die Variable ϱ wurde als Abkürzung für den Ausdruck r/r_{Bohr} und $a = r_{Bohr}$verwendet.

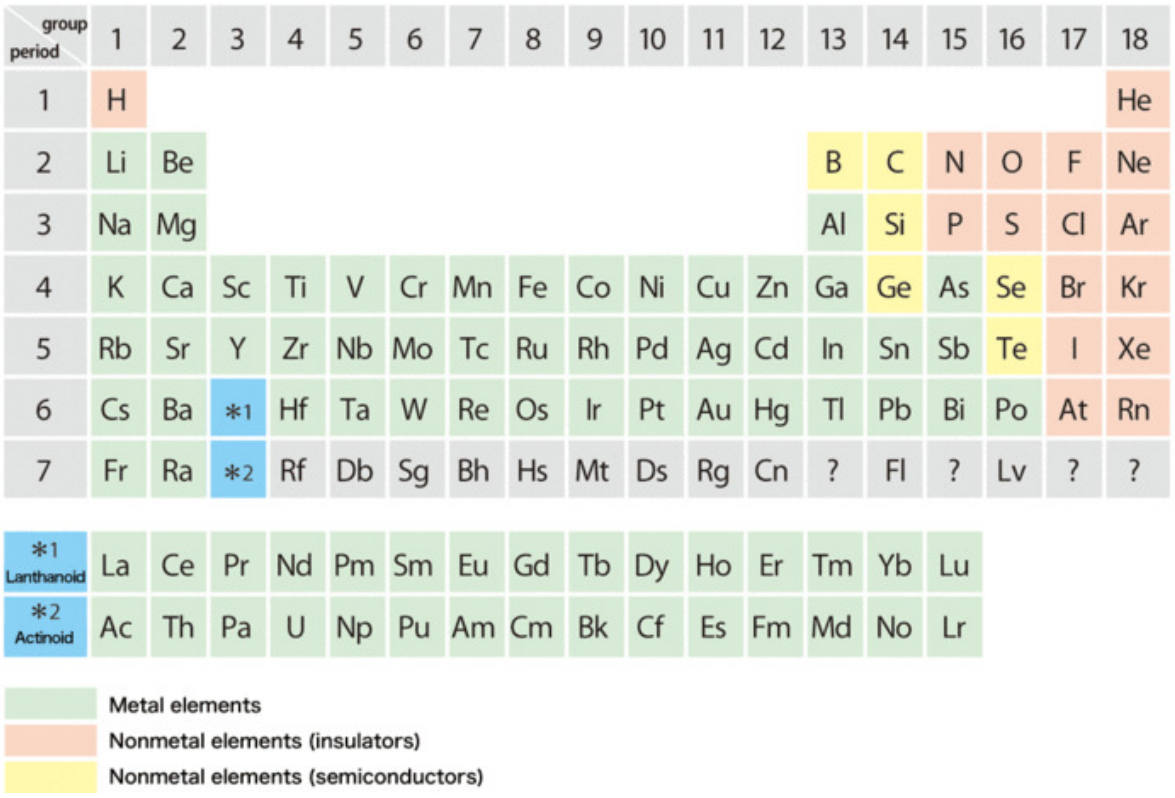


Abb. 16.93: Metalle, Nichtmetalle und Halbleiter im Periodensystem.

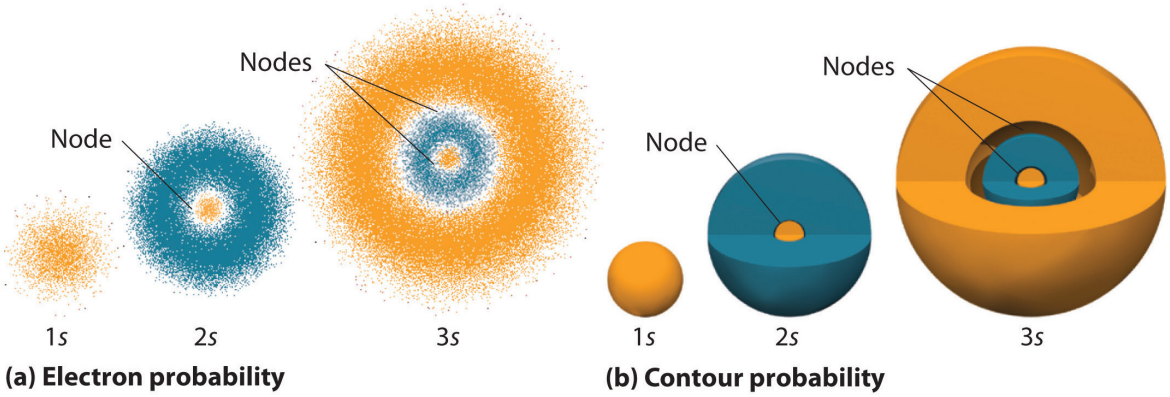
Tatsächlich haben diese Wellenfunktion einen starke Ähnlichkeit zu denen, die wir schon in Kapitel *Wellenfunktion* für den eindimensionalen Fall kennengelernt haben. Ein gravierender Unterschied ist, dass die Funktionen von $[0:\infty]$ reichen, während sie sich im eindimensionalen Fall von $[-\infty:\infty]$ ausdehnen. Was man findet, ist, dass man für das Elektron eine hohe Wahrscheinlichkeit gibt, sich am Ort des Kerns zu befinden. Nun kommt die Geometrie ins Spiel, denn um die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Wasserstoffatom zu bestimmen, muss man Kugelschalen

$$\mathrm{d}V = 4\,\pi \cdot r^2 \cdot \mathrm{d}r \tag{16.132}$$

betrachten siehe Abb. 16.95. Auf dieser Grundlage definiert man die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P_r(r)$:

$$P_r(r) = 4\,\pi \cdot r^2 |R_{n\ell}|^2 \tag{16.133}$$

Je größer der Abstand vom Kern, desto größer wird die Fläche bei gleicher Schrittweite. Nahe des Kerns ist die Elektronenwolke zwar dicht, aber die Fläche der zugehörigen Schale ist gering. Bei großen Abständen ist die Dichte gering - allerdings bei großer Fläche der Kugelschale. Berechnet man den Wert der höchsten Aufenthaltswahrscheinlichkeit ergibt sich der Bohrsche Radius. Das ist ein bemerkenswertes Resultat. Bohr hatte mit seiner Analyse also nicht völlig unrecht. Jedes Orbital hat eine ganz charakteristische Elektronendichteverteilung. Wie sehen die Orbitale der höheren ℓ-Zustände



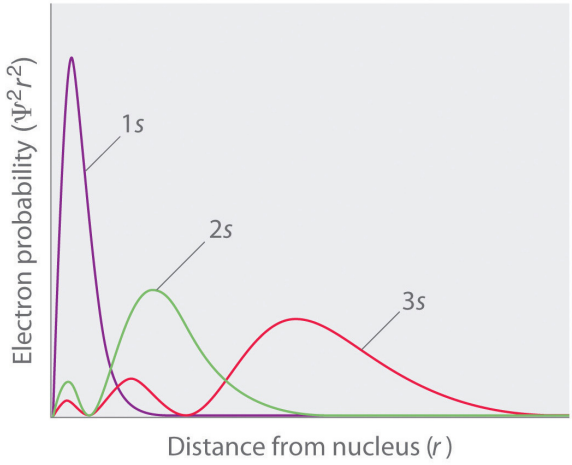


Abb. 16.94: Radiale Wahrscheinlichkeit, wo man das Elektron im $1s$, $2s$ und $3s$ Orbital im Wasserstoffatom finden würde [**?**].

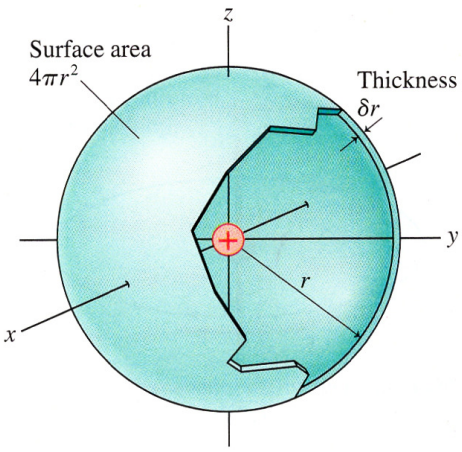


Abb. 16.95: Die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P_r(r)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, das Elektron im Abstand r in einer Kugelschale der Dicke δr zu finden [**?**].

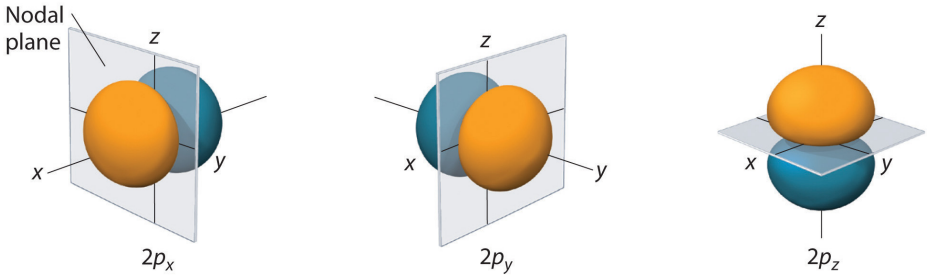


Abb. 16.96: Die drei äquivalenten $2p$-Orbitale des Wasserstoffatoms [**?**].

aus. Abb. 16.96 zeigt die drei Keulen des p-Orbitals. Diese gerichtete Ausrichtung erlaubt diesen Elektronen mit anderen Atomen in Interaktion zu treten und das führt zur Ausbildung molekularer Bindung. Abb. 16.97 zeigt die entsprechenden d-Orbitale. Das $3d$ Orbital zeigt eine Elektronenverteilung, die am nächsten zur Verstellung von Bohr ist. Woran liegt das? An der Energie kann es nicht liegen. Im Bohratom haben alle ℓ-Zustände zu einem gegeben n ein und dieselbe Energie. Man nennt dieses Phänomen Entartung. Aber der Zustand mit $\ell{=}n-1$ hat den höchsten Bahndrehimpuls und dies entspricht am ehesten einer Kreisbahn um das Atom, wie von Bohr postuliert. Betrachtet man die hohen Drehimpulszustände $2p$ und $3d$ findet man, dass die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte jeweils nur EIN Maximum in einem bestimmten Abstand zum Kern hat. Auch das entspricht am ehesten einer klassischen Bahn. Abschließend zeigt Abb. 16.98 einen Vergleich der radialen Wahrscheinlichkeitsdichten der Elemente Helium, Neon und Argon. In bestimmten Abständen ergeben sich, abhängig vom Element, Maxima der Gesamtelektronendichte. Jeder Peak entspricht der Elektronendichte in einer bestimmten Hauptschale. Im Helium haben die $1s$-Elektronen eine maximale radiale Wahrscheinlichkeit bei etwa 30 pm Abstand vom Kern, in Neon bei 8 pm, in Argon bei 2 pm. Die $2s$- und $2p$-Elektronen in Neon zeigen ein weiteres Maximum bei 35 pm ($n{=}2$ Schale), in Argon bei 18 pm. Im Argon findet man ein drittes Maximum, verursacht durch die $3s$- und $3p$-Elektronen bei 70 pm.

Relevanz des Aufbauprinzips

Die Besetzung der unterschiedlichen Schalen im Atom führt zu starken Änderungen im Ionisationspotential. Die Edelgase zeichnen sich durch hohe Ionisationsenergien aus. Auf der anderen Seite führt die Besetzung schwächer gebundener Energiezustände bei den Alkalimetallen zu einen starker Reduzierung der Ablösenergien und ihrer erhöhten chemischen Reaktivität. Das so genannte Leuchtelektron der Alkalis bewegt sich außerdem in einem größeren Abstand zum Atomkern. Abb. 16.99 demonstriert den engen Zusammenhang zwischen diesen beiden Effekten. Betrachtet man das Natriumatom, kann man ein Termschema aufstellen und die Lage der höheren angeregten Zustände einzeichnen, siehe Abb.16.100. Setzt man den Energienullpunkt der Bindungsenergieskala bei der Grundzustandsenergie auf den Wert NULL, kann man aus der Differenz zur Ioni-

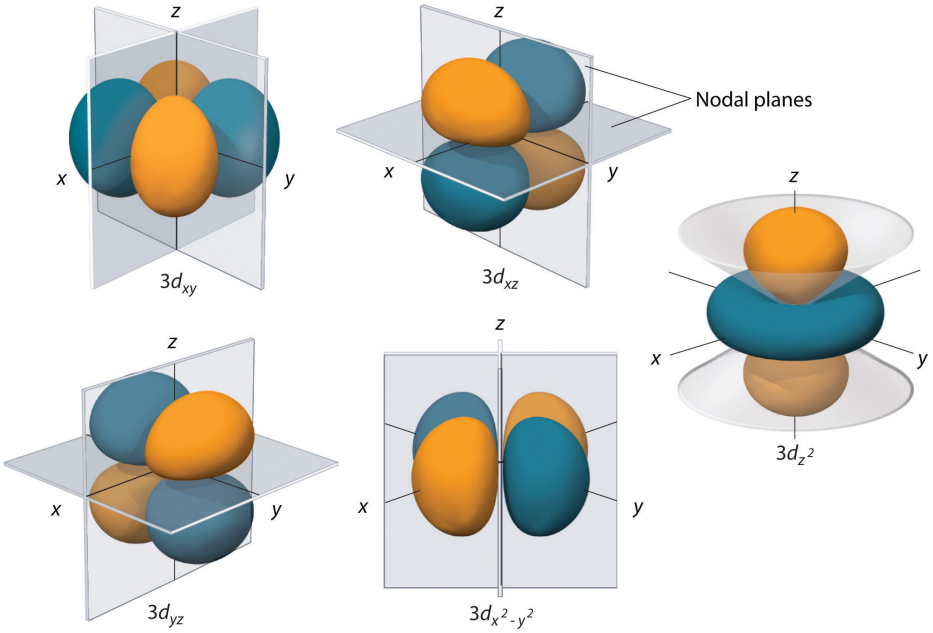


Abb. 16.97: Die fünf äquivalenten 3*d*-Orbitale des Wasserstoffatoms. Vier der fünf 3*d*-Orbitale unterscheiden sich nur in ihrer Orientierung Das fünfte Orbital hat eine deutlich andere Form [**?**].

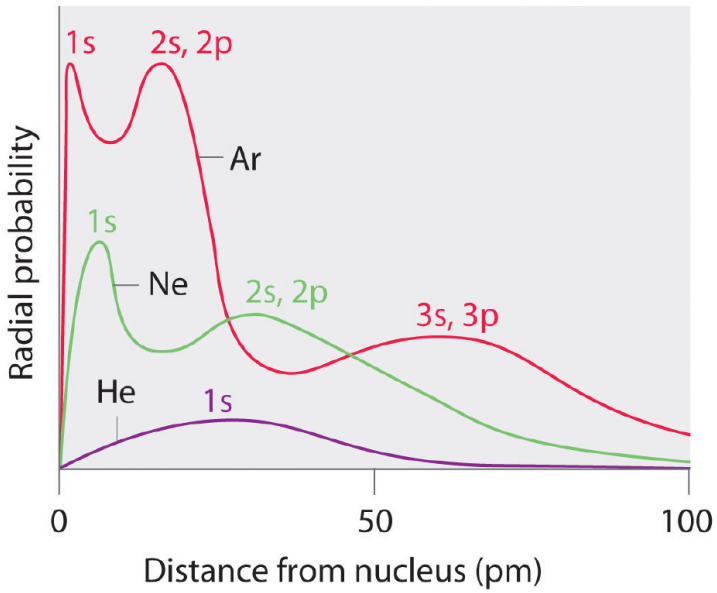


Abb. 16.98: Radiale Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion des Abstands vom Kern für He, Ne und Ar [**?**].

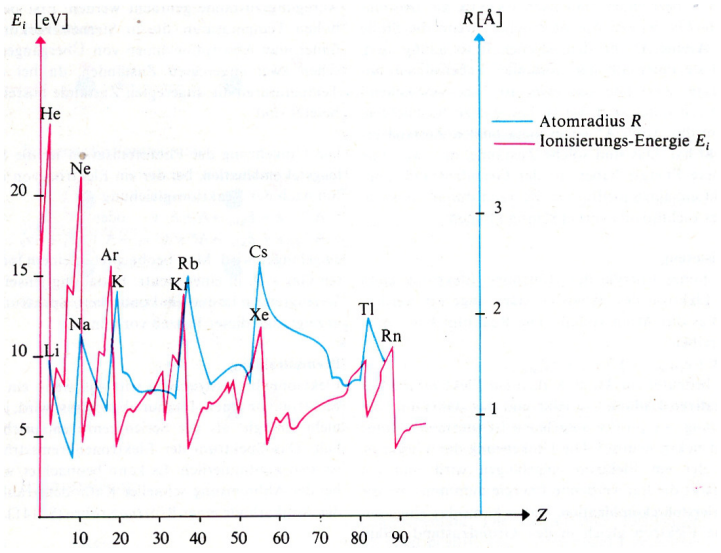


Abb. 16.99: Vergleich von Ionisierungsenergien und Atomradien der Elemente [**?**].

Element Z	I_P^1 1	I_P^2 2	I_P^3 3	I_P^4 4	I_P^5 5	I_P^6 6	I_P^7 7
K	418.8	**3 051.8**	4 419.6	5 876.9	7 975.5	9 590.6	11 343.0
Ca	589.8	1 145.4	**4 912.4**	6 490.6	8 153.0	10 495.7	12 272.9
Sc	633.1	1 235.0	2 388.7	**7 090.6**	8 842.9	10 679.0	13 315.0
Ga	578.8	1 979.4	2 964.6	**6 180.0**	8 298.7	10 873.9	13 594.8
Ge	762.2	1 537.5	3 302.1	4 410.6	**9 021.4**		

Tab. 16.10: Ionisierungsenergien ausgewählter Elemente als Funktion des Ladungszustands Z, angegeben in der Einheit kJ/mol. Wenn eine elektronische Schale entleert ist, kommt es zu einem größeren Sprung im Ionisationspotenzial (fett unterlegt)

sierungsenergie die Bindungsenergien der Zuständen berechnen. Weiter sieht man den Übergang zu den unteren Schalen anhand der Ionisationsenergien der höheren Ladungszustände, wie Tab. 16.2 demonstriert.

The Periodic Table of Chemical Elements is one of the most significant achievements in science, capturing the essence not only of chemistry, but also of physics and biology. It is a unique tool, enabling scientist to predict the appearance and properties of matter on the Earth and in the rest of the Universe. The Periodic Table of Chemical Elements is more than just a guide or catalogue of the entire known atoms in the universe; it is essentially a window on the universe, helping to expand our understanding of the world around us. The year 2019 marks the 150th anniversary of its creation by Russian scientist Dmitry Ivanovich Mendeleev. The Year was proclaimed by the United Nations General Assembly and approved by UNESCO's General Conference.

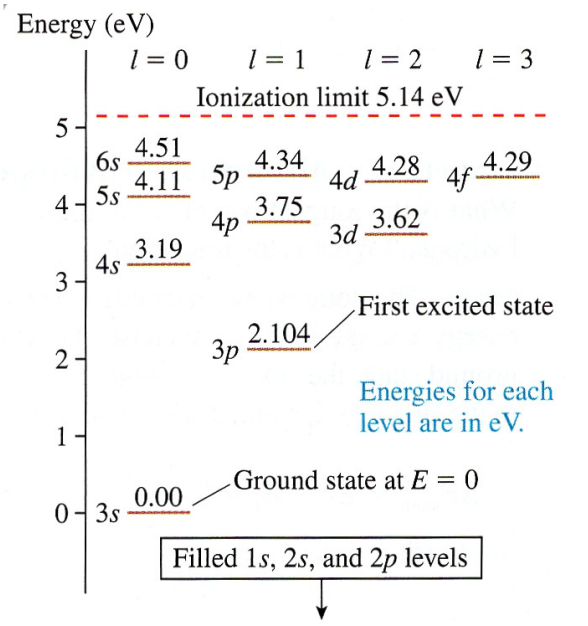


Abb. 16.100: Der [Ne]3s Grundzustand[a] des Natrium Atoms und einige der angeregten Zustände [**?**].

[a]Um die Angabe der Elektronenkonfiguration nicht ausarten zu lassen, kürzt man ab und stellt die Konfiguration eines Edelgasatoms mit seinen abgeschlossenen Schalen voran, hier Neon.

Wie viele Elektronen können in einer Schale Platz finden? Zu jedem ℓ und m gibt es

$$\begin{aligned} \ell &= 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \ell \end{aligned}$$

mögliche unterschiedliche Zustände ohne Berücksichtigung des Spins. Zählt man alle Möglichkeiten zusammen, ergibt sich einen Anzahl von $2\,n^2$ Zuständen. Ein Atom, in dem alle diese Zustände besetzt sind, hat kein elektrisches Dipolmoment. Diese Atome ziehen deshalb keine anderen Elektronen an und sind chemisch passiv. Die Edelgase verhalten sich so und tatsächlich haben alle Edelgase voll abgeschlossenen Elektronenschalen. Elemente mit ähnlichen chemischen Eigenschaften bilden Gruppen, die vertikal im Periodensystem angeordnet sind.

- Die Gruppe I bilden Wasserstoff und die Alkalimetalle. Die Stoffe sind chemisch sehr reaktiv und haben eine Wertigkeit von +1.
- Die Gruppe VII sind die Halogen, flüchtige, stark reaktive nichtmetallische Substanzen mit einer Wertigkeit von –1. Die Atome bilden in der Gasphase zweiatomige Moleküle wie HCl.
- Die Gruppe VIII sind die Edelgase, die chemisch so inaktiv sind, dass sie keine Verbindung mit anderen Atomen eingehen.

Für die Alkalimetalle steigt die Reaktivität mit der Ordnungszahl, während sie für die Halogen abnimmt. Die horizontale Anordnung im Periodensystem nennt man Periode. Allgemein ändert sich die Chemie von einem reaktiven zu einem wenigen reaktivem Metall und dann von einem weniger chemisch reaktiven Nichtmetall zu einem stark reaktivem Nichtmetall und schließlich zu einem Edelgas. In der vierten Periode tauchen



Abb. 16.101: The year 2019 has been designated by UNESCO as the International Year of the Periodic Table (IYPT), marking the 150th anniversary of the Mendeleev periodic table, which is an iconic image and a vital tool to all who learn and work in science, at all stages of their learning and careers.

zwischen der Gruppe II und III die Übergangsmetalle auf. Ihre chemischen Eigenschaften, insbesondere die der Lanthanoiden und der Aktindien, sind kaum unterscheidbar.

The Elements[99]

There's antimony, arsenic, aluminum, selenium,
And hydrogen and oxygen and nitrogen and rhenium,
And nickel, neodymium, neptunium, germanium,
And iron, americium, ruthenium, uranium,
Europium, zirconium, lutetium, vanadium,
And lanthanum and osmium and astatine and radium,
And gold and protactinium and indium and gallium, (gasp)
And iodine and thorium and thulium and thallium.

There's yttrium, ytterbium, actinium, rubidium,
And boron, gadolinium, niobium, iridium,
And strontium and silicon and silver and samarium,
And bismuth, bromine, lithium, beryllium, and barium.

There's holmium and helium and hafnium and erbium,
And phosphorus and francium and fluorine and terbium,
And manganese and mercury, molybdenum, magnesium,
Dysprosium and scandium and cerium and cesium.
And lead, praseodymium and platinum, plutonium,
Palladium, promethium, potassium, polonium,
And tantalum, technetium, titanium, tellurium, (gasp)
And cadmium and calcium and chromium and curium.

There's sulfur, californium and fermium, berkelium,
And also mendelevium, einsteinium, nobelium,
And argon, krypton, neon, radon, xenon, zinc and rhodium,
And chlorine, carbon, cobalt, copper, tungsten, tin and sodium.

These are the only ones of which the news has come to Hahvard,
And there may be many others but they haven't been discahvered.

`Tom Lehrer - The element song (1959)`

[99] *The Elements* is a song by musical humorist and lecturer Tom Lehrer, which recites the names of all the chemical elements known at the time of writing, up to number 102, nobelium.

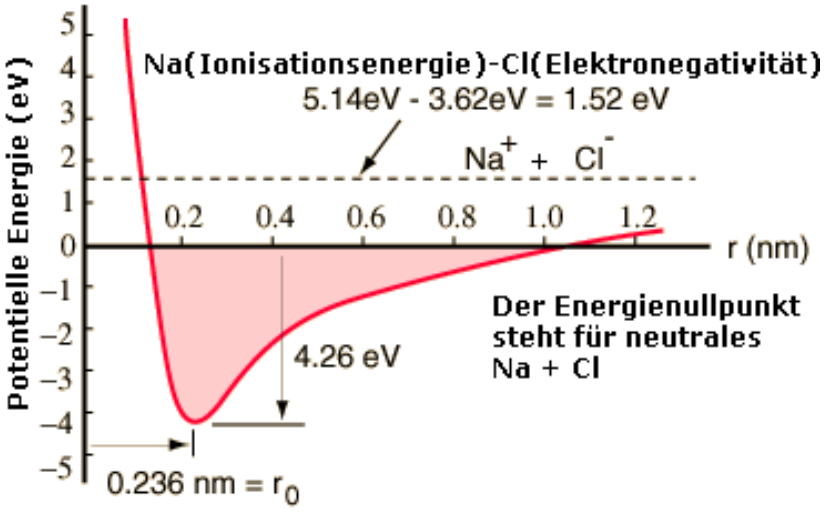


Abb. 16.102: Bindungspotenzial des Salzmoleküls NaCl.

Anwendungen

Ein Beispiel aus der Molekülphysik

Natriumchlorid bildet sich durch die Ionisierung von Natrium und Chlor. Die elektrostatische Anziehung der Ionen formt das Molekül, Natriumatome haben drei Elektronen, wobei man 5.14 eV benötigt, um das äußere Elektron abzulösen. Dem Element Chlor fehlt ein Elektron, um die p-Schale aufzufüllen. Eine Energie von 3.62 eV wird freigesetzt, wenn das System dieses Elektron aufnimmt (Elektronenaffinität). In der Summe ergibt sich für große Abstände, dass man 1.52 eV an Energie benötigt, um das Valenzelektron vom Natrium auf das Chlor zu übergeben. Bei Annäherung der Ionen, wird ihre Potentielle Energie immer negativer und erreicht einen Wert von -1.52 eV bei einem Abstand von etwa 0.94 nm. Für neutrale Natrium- und Chloratome in einem Abstand geringer 0.94 nm voneinander ist es energetisch günstiger, ein Elektron vom Natrium auf das Chloratom zu übertragen und so eine ionische Bindung einzugehen. Die Kurve für die potentielle Energie von NaCl (Abb. 16.102) zeigt in der ionischen Bindung ein Minimum bei einem Abstand von 0.236 nm und einen steilen Anstieg aufgrund einer abstoßenden Kraft. Die Abstoßung erfolgt nicht nur aufgrund der elektrostatischen Wechselwirkung, sondern ist Folge des Aufbauprinzips. Das erklärt sich so: Wenn die Ionen weit voneinander entfernt sind, kommt es kaum zum Überlapp der Wellenfunktionen. Die Systeme sind klar separiert und die Elektronen besetzten die niedrigsten zur Verfügung stehenden Energiezustände. Bei Annäherung kommt es zur Überlagerung der Wellenfunktionen. Niedrige Zustände sind schon besetzt und Elektronen müssen höhere Energiezustände, d.h. bei niedrigerer Bindungsenergie, besetzen.

Ein Beispiel aus der Kernphysik

Auf Nukleonen im Atomkern wirken enorm starke Kräfte, so dass sie andauert mit anderen Nukleonen zusammenstoßen sollten. Das Pauli-Prinzip fordert aber, dass zwei Fermionen nicht den gleichen Quantenzustand besetzen dürfen. In einem Stoß wird Energie ausgetauscht und das Nukleon muss in einen anderen Quantenzustand wechseln. In der Quantenphysik kommt es deshalb zu einem ungewöhnlichen Szenarium: Es findet keine Wechselwirkung zwischen den Nukleonen statt, wenn ein solcher Zustand energetisch nicht erreichbar ist. Klassisch lässt sich ein solches Verhalten nicht erklären.

Ein Beispiel aus der Festkörperphysik

Wenn man 10^{23} Atome immer näher zusammen bringt und einen Festkörper bildet, spalten die Energiezustände auf, da die Elektronen aufgrund des Pauli-Prinzips nicht mehr dieselben Energiezustände besetzten können. Diesen Vorgang zeigt Abb. 16.103. Bei einer solch großen Anzahl an Atomen liegen die Zustände so dicht beieinander, dass man die einzelnen Zustände in einer Messung nicht mehr separieren kann. Man spricht deshalb von Energiebändern. Die Energiezustände haben aber immer noch die Charakteristik des einzelnen Atoms und deshalb bündeln sich die Zustände in bestimmten Energiebereichen. Im Festkörper stellt sich nun aufgrund der gegenseitigen Wechselwirkung ein gewisser mittlerer Abstand der Atome ein, der so genannte Gleichgewichtsabstand. Dieser bestimmt, wie das Energieniveauschema im Festkörper aussieht, wie in Abb. 16.104 schematisch gezeigt.

Beispiele aus der Astrophysik

I found a bit of scruff when studying tens of meters of chart recordings: Im Jahr 1967 beobachtete Jocelyn Bell die schnellen Änderungen im Signal einiger Radioquellen. Dabei stellte sie fest, dass eine der Quelle mit konstanter Rate pulsiert, alle 1.337001 Sekunden. Das Signal war so mysteriös, dass Astronomen kurzzeitig dachten, sie könnten künstliche Radiosignale einer außerirdischen Zivilisation entdeckt haben. Es konnte auch kein Stern sein, denn es ist nicht wahrscheinlich, dass in einer Sonne solch massive Änderungen in so kurzer Zeit stattfinden können. Am wahrscheinlichsten war es, dass es sich um einen schnell rotierenden Neutronenstern handelte. Dieser entsteht, wenn der Kern einer Supernova kollabiert. Durch die Kontraktion erhöht sich aufgrund der Drehimpulserhaltung seine Rotationsgeschwindigkeit. Das Magnetfeld steigert sich dadurch ebenfalls. Für Neutronensterne ergeben sich Feldstärken, die um einen Faktor 10^{12} höher sind als das Erdmagnetfeld. Weiter sind in der Regel Rotationsachse und Magnetfeldachse nicht identisch. Das starke rotierende Magnetfeld beschleunigt geladene Teilchen in Richtung der Pole und führt zu Emission stark gerichteter Strahlung. Geht die Strahlung im Verlauf der Rotation in Richtung Erde beobachtet man in regelmäßigen Abständen einen kurzzeitigen Anstieg des Signals aus diesem Raumgebiet.

Wenn massereichen Sternen der Brennstoff ausgeht, verursacht ihre enorme Gravitation einen Kollaps. Dieses Phänomen bezeichnet man als Supernova. Die Schwerkraft

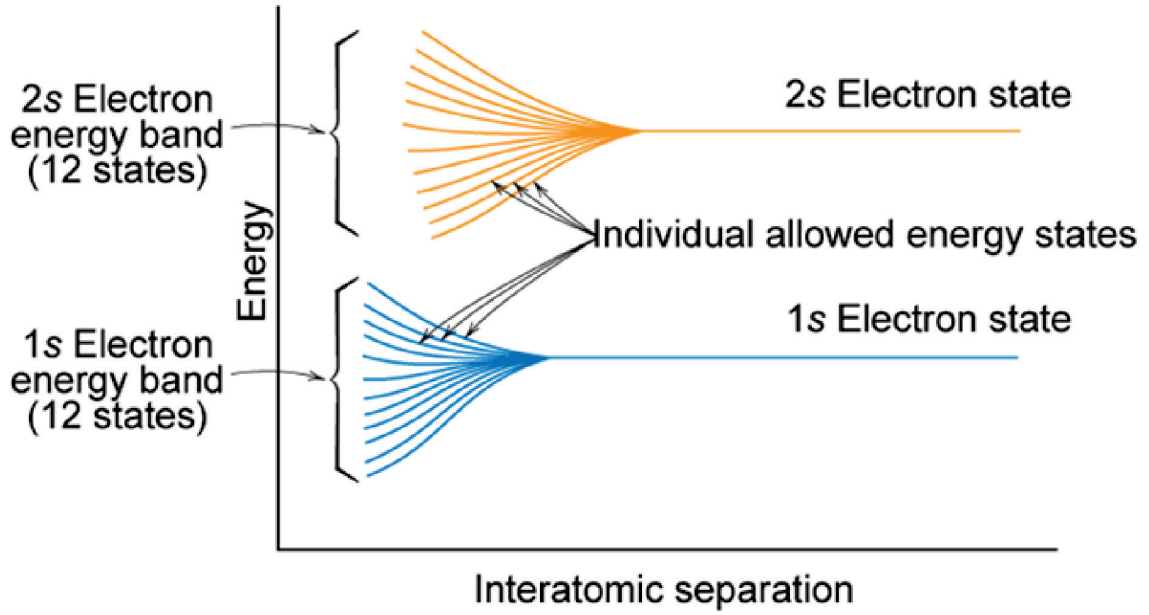


Abb. 16.103: Aufspaltung der atomaren Energieniveaus aufgrund des Pauli-Prinzips, wenn man den Abstand der Atome zueinander reduziert.

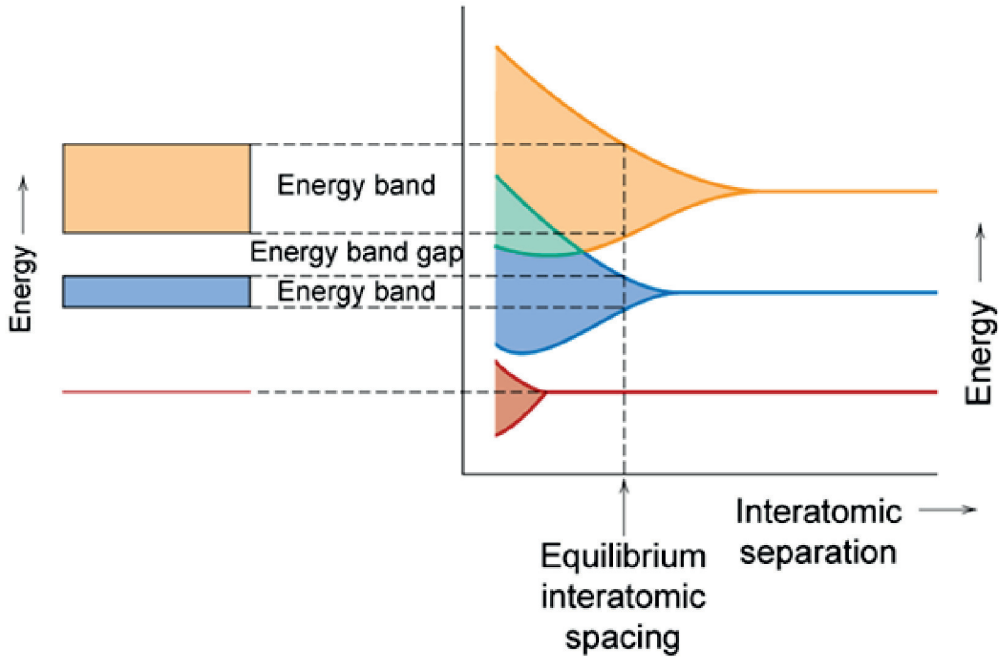


Abb. 16.104: Wie Abb. 16.103, Bei weiterer Reduzierung wird der Abstand der Energieniveuas so gering, dass man von Energiebändern spricht. Mehr dazu im Kapitel *Festkörperphysik*.

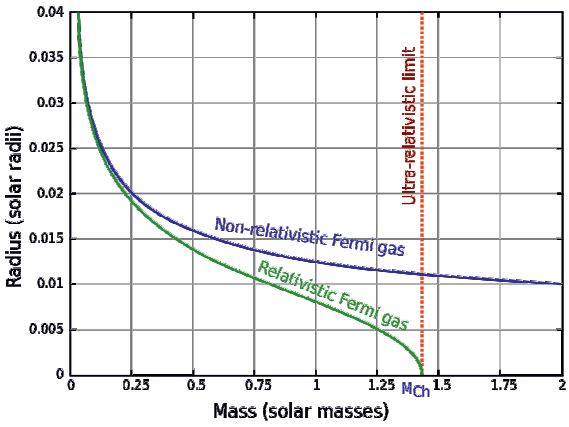


Abb. 16.105: Die Chandrasekhar-Grenze von 1.4 Sonnenmassen ist die maximale Masse, die ein Weißer Zwerg haben kann. Bei größerer Masse reicht der Entartungsdruck der Elektronen nicht aus, den Schwerkraftkollaps des Stern in einen Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch zu verhindern.

komprimiert den Kern so stark, dass neue Materiezustände entstehen. Das Beispiel der Schwarzen Löcher hatten wir schon kennengelernt (Kapitel *Unschärferelation*).Die aus der Supernova Explosion entstehenden Objekte (Weiße Zwerge, Neutronensterne) bestehen aus Fermionen. Die Frage stellt sich: Spielt das Pauli Prinzip bei der Bildung dieser Objekte eine Rolle? Weiße Zwerge sind, wenn alle Fusionsprozesse zum Erliegen kommen, das Endstadium der Entwicklung der meisten Sterne, deren nuklearer Energievorrat versiegt ist. Sie sind die heißen Kerne Roter Riesen, wenn sie ihre äußere Hülle abgestoßen haben. Allerdings darf die Masse einen Wert von 1.44 Sonnenmassen nicht überschreiten (Chandrasekhar-Grenze), siehe Abb. 16.105. Weiße Zwerge haben in etwa die Größe der Erde. Allerdings hat der weiße Zwerg die Masse der Sonne. Das führt zu einer mittlere Dichte des weißen Zwergs von 10^6 g/cm^3. Typische Oberflächentemperaturen liegen bei 20 000 bis 30 000 Kelvin. Das Pauli-Prinzip, das sich im fermionischen Entartungsdruck der Elektronen ausdrückt, verhindert einen Kollaps der ausgebrannten Sonne. Der Entartungsdruck wirkt dem Gravitationsdruck entgegen. Warum stellt sich ein Gleichgewicht ein? Für eine weitere Kompression des Weißen Zwergs müssen Fermionen in höhere Energiezustände angeregt werden. Erst dann könnten weitere Fermionen freiwerdende Energiezustände besetzen und die Massendichte weiter erhöhen. Diese angeregten Zustände liegen aber energetisch so weit oberhalb, dass sie für die Elektronen nicht erreichbar sind. Damit stellt sich eine charakteristische Größe des Weißen Zwergs ein. Kürzlich wurde ein mit LAMOST J024048.51+195226.9 der am schnellsten rotierende Weiße Zwerg entdeckt. Er rotiert in 25 Sekunden einmal um seine Achse [**?**]. Bei diesem kataklysmisch veränderlichen Stern handelt es sich um einen so genannten Magnetischen Propeller. Der Weiße Zwerg zieht die Masse seines Begleiters und stößt es mit Hilfe seines starken Magnetfelds ins Alls hinaus.

Optical Tomography of Chemical Elements Synthesized in Type Ia Supernovae [?]: We report the discovery of optical emission from the nonradiative shocked ejecta of three young type Ia supernova remnants (SNRs): SNR 0519-69.0, SNR 0509-67.5, and N103B. Deep integral field spectroscopic observations reveal broad and spatially resolved [Fe XIV] 5303 Åemission. The width of the broad line reveals, for the first time, the reverse shock speeds. For two of the remnants we can constrain the underlying superno-

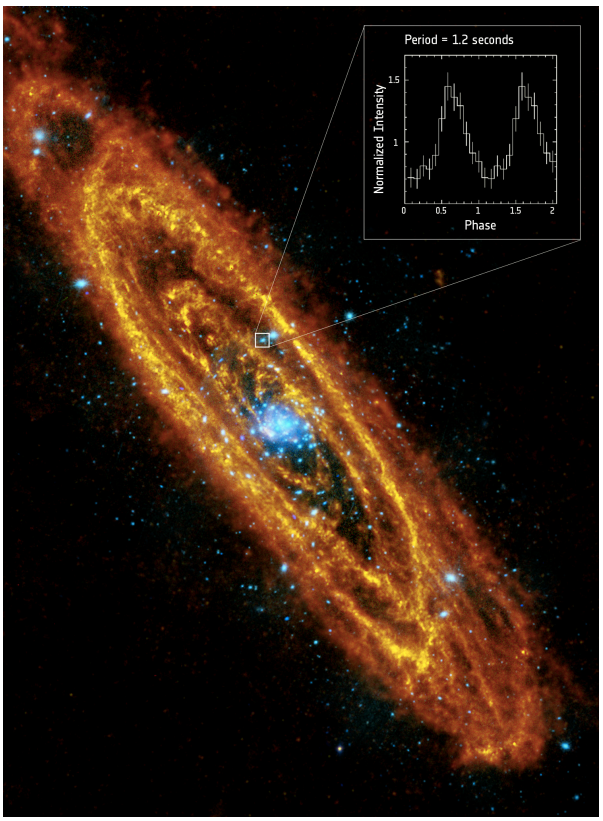


Abb. 16.106: Andromeda's first spinning neutron star found by ESA's XMM-Newton space telescope [**?**].

va explosions with evolutionary models. SNR 0519-69.0 is well explained by a standard near-Chandrasekhar mass explosion, whereas for SNR 0509-67.5 our analysis suggests an energetic sub-Chandrasekhar mass explosion. With [S XII], [Fe IX], and [Fe XV] also detected, we can uniquely visualize different layers of the explosion. We refer to this new analysis technique as *supernova remnant tomography*

Neutronensterne entstehen in Supernova-Explosionen vom Typ II. Es markiert das Ende von Hauptreihensternen mit mehr als 8 Sonnenmassen. Die Geburt von Neutronensternen ist ein selten zu beobachtendes Phänomen, das in der Milchstraße im Durchschnitt alle hundert Jahre auftritt. Daher gibt es nur wenige Beobachtungsinformationen, die es uns ermöglichen würden, die Eigenschaften von Neutronensternen bei der Geburt direkt zu messen. Neutronensterne, die einen Großteil ihres Lebens als Pulsare beobachtbar sind, besitzen jedoch kinematische Signaturen, die Spuren ihrer Entstehung beinhalten. Diese Eigenschaften werden verwendet, um auf die Physik der Neutronensternentwicklung zu schließen.

Lange galt die Meinung, dass man Neutronensterne, die sich nicht in Doppelsternsystemen befinden, nur nachweisen könnte, wenn sie aufgrund ihrer hohen Oberflächentemperaturen Röntgenstrahlen aussenden. Es stellte sich aber heraus, dass alle am Himmel entdeckten Röntgenquellen keine Neutronensterne waren. Das änderte sich am 24.2.1968, als man erstmals einen Pulsar entdeckte [**?**], der, wie sich herausstellte, ein schnell ro-

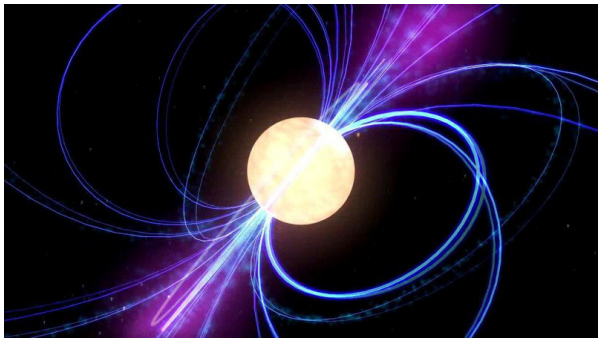


Abb. 16.107: Pulsare sind Neutronensterne mit starker und anisotroper elektromagnetischer Strahlungsemission. Ein Beobachter auf der Erde beobachtet eine Modulation der Strahlung aufgrund des Leuchtturmeffekts.

tierender Neutronenstern war.[100]

Übersteigt die Masse der ausgebrannten Sterne die Chandrasekhar-Grenze, kollabiert der Stern zu einem Neutronenstern. Der Entartungsdruck der Elektronen reicht in diesem Fall nicht mehr aus. Protonen und Elektronen verbinden sich und bilden Neutronen (Kapitel *Kernphysik*). Der Entartungsdruck der Neutronen -ebenfalls Fermionen- verhindert, dass aus dem Neutronenstern ein Schwarzes Loch wird. Dafür darf die Masse des Kerns drei Sonnenmassen nicht übersteigen. Neutronensterne haben eine Radius von nur 15 km und sind mit Abstand die dichtesten Objekte im Universum (10^{15} g/cm^3), Die Oberflächentemperaturen betragen 10^6 Kelvin. Beim Kollaps des ausgebrannten Sterns bleibt der Drehimpuls erhalten. Drehimpulserhaltung bewirkt, dass Neutronensterne sehr schnell rotieren. Hinzu kommt, dass in diesem Zusammenhang die Magnetfelder auf 10^4-10^9 Tesla ansteigen.[101] Die hohen Magnetfelder und die schnelle Rotation kann zu einer starken und gerichteten Strahlungscharakteristik führen (Abb. 16.107). Die Emission zeichnet sich durch eine starke Anisotropie der elektromagnetischen Strahlung aus. Pulsare sind quasi die Leuchttürme des Universums.[102] Wie muß man sich das vorstellen? Nachts sendet ein Leuchtturm Lichtstrahlen aus, die über den Himmel streichen. Obwohl das Licht ständig scheint, sehen wir den Lichtstrahl nur, wenn er direkt in unsere Richtung zeigt. Man nennt diese Neutronensterne deshalb auch Pulsare (Abb. 16.106)

Cosmic Explosion Among the Brightest in Recorded History (NASA): Scientists have detected a flash of light from across the Galaxy so powerful that it bounced off the Moon and lit up the Earths upper atmosphere. The flash was brighter than anything ever detected from beyond our Solar System and lasted over a tenth of a second. NASA and European satellites and many radio telescopes detected the flash and its aftermath

[100] Shortly after the discovery of pulsars I wished to present an interpretation of what pulsars were, at this first pulsar conference: namely that they were rotating neutron stars. The chief organiser of this conference said to me, *Tommy, if I allow for that crazy an interpretation, there is no limit to what I would have to allow.* I was not allowed five minutes floor time, although I in fact spoke from the floor. A few months later, this same organiser started a paper with the sentence, *It is now generally considered that pulsars are rotating neutron stars'[***?***].*

[101] Zum Vergleich: Das Erdmagnetfeld beträgt nur 20 mT.

[102] The Nobel Prize in Physics 1974 was awarded jointly to Sir Martin Ryle and Antony Hewish *for their pioneering research in radio astrophysics: Ryle for his observations and inventions, in particular of the aperture synthesis technique, and Hewish for his decisive role in the discovery of pulsars.*

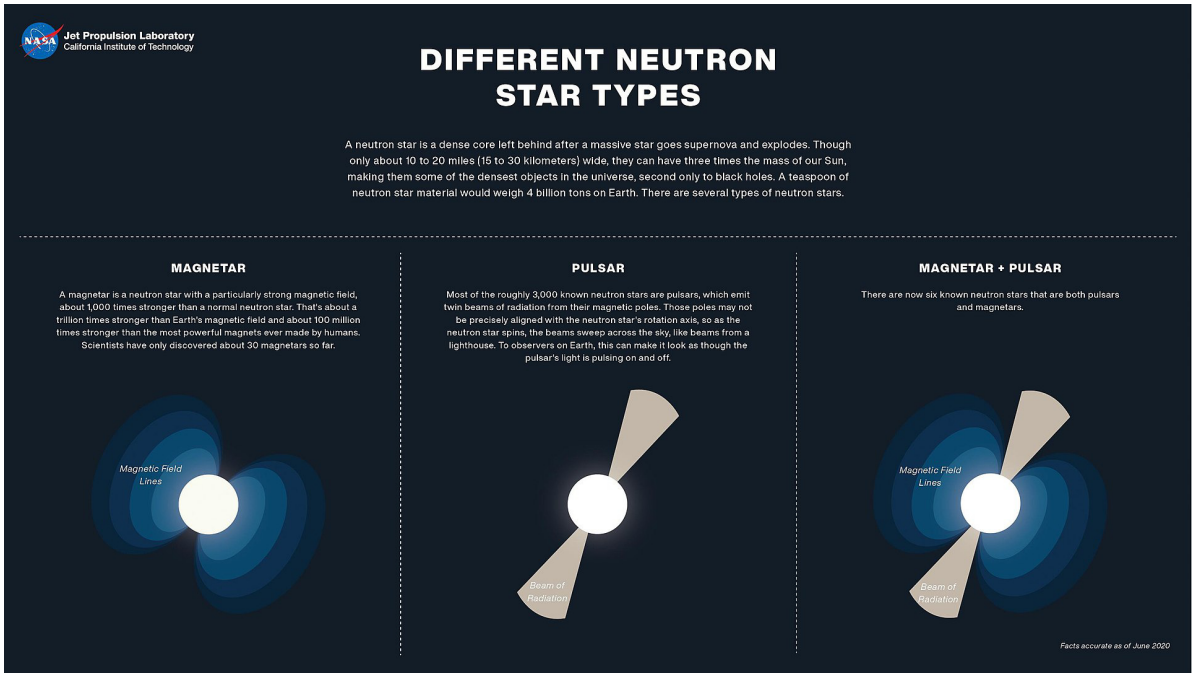


Abb. 16.108: Zusammenstellung der unterschiedlichen Typen von Neutronensternen.

on December 27, 2004. The scientists said the light came from a *giant flare* on the surface of an exotic neutron star, called a magnetar. The apparent magnitude was brighter than a full moon and all historical star explosions. The light was brightest in the gamma-ray energy range, far more energetic than visible light or X-rays and invisible to our eyes.

Einige Neutronenstern werden zu so genannten Magnetaren (Abb. 16.108). In diesen Neutronensternen ist das Magnetfeld gegenüber einem *normalen* Neutronenstern nochmal um einen Faktor 10^3 stärker. Bei Neutronensternen ist die Kruste des Sterns mit dem Magnetfeld verbunden. Jegliche Änderung wirkt sich sofort auf die andere Komponente aus. Die Kruste des Neutronensterns ist enormen Belastungen ausgesetzt und Verspannungen führen zu heftigen Explosion, wobei sich die ausgestoßenen Materie in dem starken Magnetfeld bewegt. Dies führt zu heftiger Energiefreisetzung in Form von elektromagnetischer Strahlung. Ein Ausbruch des Magnetars SGR 1806-20 setzte in einer 1/10 Sekunde mehr Energie freisetzte, als die Sonne in den letzten 100 000 Jahren abgegeben hat!

Aufgaben

Aufgabe 3.1: There is an astonishhing amount of diversity in the world. The patterns on the skin of our fingerss, for example, are unique to us. No two fingertips of all the world's people are the same. But uniqueness does NOT apply to[103]

(a) the faces of penguins.

(b) leaves on all the world's trees.

(c) spots on the bodies of ladybugs.

(d) electrons.

(e) All the above.

(f) None of the above.

Aufgabe 3.2: Welche der folgenden Konfigurationen ist nicht erlaubt?[104]

(a) $1p^3$

(b) $2p^8$

(c) $3g^{11}$

(d) $4f^2$

Aufgabe 3.3: Analysieren sie die Ionisationspotenziale von Kalium und Kalzum und bestimmen Sie Z_{eff}!

Im Alkalielement Kalium findet man, dass so genannte Leuchtelektron im Zustand 4s. Dadurch, dass eine neue Schale mit geringerer Bindungsenergie besetzt wird, reduziert sich das Ionisationspotenzial gegenüber dem davor stehenden Edelgas Argon von 15.6 eV auf nur noch 4.3 eV. Setzt man diesen Wert in die Bohrsche Gleichung ein, ergibt sich die effektive Kernladungszahl $Z^{\text{K}}_{\text{eff}}$:

$$\begin{aligned} E^{\text{K}}_{n=4} &= -13.6\,\text{eV} \cdot \frac{Z^{\text{K}}_{\text{eff}}}{n^2} \\ Z^{\text{K}}_{\text{eff}} &= 4 \cdot \frac{4.3\,\text{eV}}{13.6\,\text{eV}} \\ Z^{\text{K}}_{\text{eff}} &= 2.25 \end{aligned} \tag{16.134}$$

Nehmen wir das nächste Element im Periodensystem und betrachten das zugehörige Ion. Dieses hat genauso viele Elektronen wie Kalium aber ein Proton mehr. Im Kalzium-Ion

[103] Antwort: (d)
[104] Antwort: (b)

erhöht sich deshalb die Kernladung um EINS und $Z_{\text{eff}}^{\text{Ca}}=Z_{\text{eff}}^{\text{K}}+1=3.25$.

$$\begin{aligned} E_{n=4}^{\text{Ca}} &= -13.6\,\text{eV}\cdot\frac{(Z_{\text{eff}}^{\text{K}}+1)^2}{n^2} \\ E_{n=4}^{\text{Ca}} &= -13.6\,\text{eV}\cdot\frac{(3.125)^2}{4^2} \\ E_{n=4}^{\text{Ca}} &= -8.98\,\text{eV} \end{aligned} \tag{16.135}$$

Damit ergibt sich ein Wert von I_P=8.98 eV für das Ionisationspotenzial von Ca^+. Das ist die Energie, um das zweite Elektron abzulösen. In der Literatur ist der Wert für das Ionisationspotenzial des neutralen Atoms mit I_P=6.08 eV angegeben. Insgesamt benötigt man also 15.07 eV um beide Elektronen abzulösen und Kalzium zweifach zu ionisieren, d.h. Ca^{2+} zu erzeugen. Mit diesen Angaben kann man auf die effektive Kernladung im neutralen Ca schließen:

$$\begin{aligned} E_{n=4}^{\text{Ca}} &= -13.6\,\text{eV}\cdot\frac{(2\cdot Z_{\text{eff}}^{\text{K}}+1)^2}{n^2} \\ E_{n=4}^{\text{Ca}} &= -13.6\,\text{eV}\cdot\frac{2\cdot(15.08)^2}{4^2} \\ Z_{\text{eff}}^{\text{K}} &= \sqrt{8\frac{15.08\,\text{eV}}{15.08\,\text{eV}}} \\ Z_{\text{eff}}^{\text{K}} &= 2.98 \end{aligned} \tag{16.136}$$

Die effektive Kernladung ist im neutralen Ca mit 2.98 also geringer als in Ca^+. Die Ursache ist klarerweise die reduzierte Abschirmung durch das zweite Elektron.

Aufgabe 3.4: Das Bohrsche Atommodell wird ausgehebelt durch[105]

(a) das Aufbauprinzip.

(b) die Plancksche Theorie.

(c) die Heisenbergsche Unschärferelation.

(d) Alles ist richtig!

Aufgabe 3.5: Geben Sie die Grundzustandskonfiguration des Elements Titan an!

Ein neutrales Titanatom hat 22 Protonen und 22 Elektronen. $4s$ wird zuerst und dann $3d$ besetzt. Die Besetzung im Grundzustand ist deshalb:

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3s^2 4d^2$$

Aufgabe 3.6: Die Energien der Orbitale in einer bestimmten Schale des Atome ordnen sich folgendermaßen[106]

[105] Antwort: (c)
[106] Antwort: (a)

(a) $s > d > p > f$

(b) $s < d < p < f$

(c) $d > p > f > s$

(d) $p > f > d > s$

(e) $f > d > s > p$

Aufgabe 3.7: Krypton (Ordnungszahl 36) hat die elektronische Konfiguration (^{18}Ar) $4s^2$, $3d^{10}$, $4p^6$. Das Elektron 37 ordnet sich wo ein?[107]

(a) $4f$

(b) $4d$

(c) $3p$

(d) $5s$

[107] Antwort: (d)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Warum versagt das Bohrsche Atommodell bei Mehrelektronensystemen?
2. Angenommen man entfernt die beiden Elektronen des Elements Helium. Braucht man im Vergleich zum ersten Elektron, mehr oder weniger Energie, um das zweite Elektron abzulösen?
3. Welche Bedeutung hat Z_{eff}?
4. Welche Faktoren bestimmen die Periodizität des Periodensystems?
5. Stellen Sie sich vor, die Erkenntnisse von Mendelejew und Meyer wären nie veröffentlicht worden. Wie hätte sich unsere Vorstellung vom Atom entwickelt?
6. Was ist das Pauli-Prinzip? Welche Bedeutung hat das Prinzips für das Verständnis der Atome und Moleküle?
7. Wie viele Elektronen braucht es, um die $1s$, $2p$ und $3d$ Schale zu füllen?
8. Wie ist die Grundzustandskonfiguraiton von Stickstoff und Sauerstoff?
9. Vergleichen Sie die Elektronenkonfigurationen der Elemente in derselben Spalte des Periodensystems.
10. Vergleichen Sie die Elektronenkonfigurationen der Elemente in derselben Zeile des Periodensystems.
11. Wenn eine Unterschale eines Atoms 9 Elektronen enthält, wie groß müssen n und ℓ mindestens sein?
12. Liegt es am Pauli-Prinzip, dass die Elemente im wesentlichen alle denselben Durchmesser haben?
13. Mal abgesehen von den superschweren Elemente die Frage: Ist das heutige Periodensystem komplett oder hat man noch Elemente übersehen?
14. Wie würde das Periodensystem aussehen, wenn es den Elektronenspin nicht gäbe, aber alle anderen Quantenzahlen existierten?
15. Bei welchen physikalischen Objekten spielt das Pauli-Prinzip eine Rolle?
16. Auf ihrem Exoplaneten gibt es nur drei Quantenzahlen (n, ℓ, m_ℓ) Wie viele Elektronen passen in ein $3p$-Orbital unter der Annahme, dass das Ausschlussprinzip weiterhin gilt?
17. Nehmen wir mal an, sie leben in einem Gebiet des Kosmos, in dem das Pauli-Prinzip gilt. Allerdings hat das Periodensystem nur 36 Elemente und das Elektron vier unterschiedliche Spineinstellungen (+1/2, +1/4, -1/4, -1/2). Wie würde das Periodensystem aussehen und welche der Elemente wären Edelgase?

18. Was ist der Unterschied zwischen Fermionen und Bosonen?

19. Wie würde das Universum aussehen, wenn es keinen Unterschied zwischen Fermionen und Bosonen gäbe?

20. Kennen Sie fermionische Elementarteilchen?

21. Auf der Erde findet man die schweren Elemente wie Eisen hauptsächlich im Erde, während man Silizium oder Aluminium im wesentlichen in der Erdkruste vorkommen. Woran liegt das?

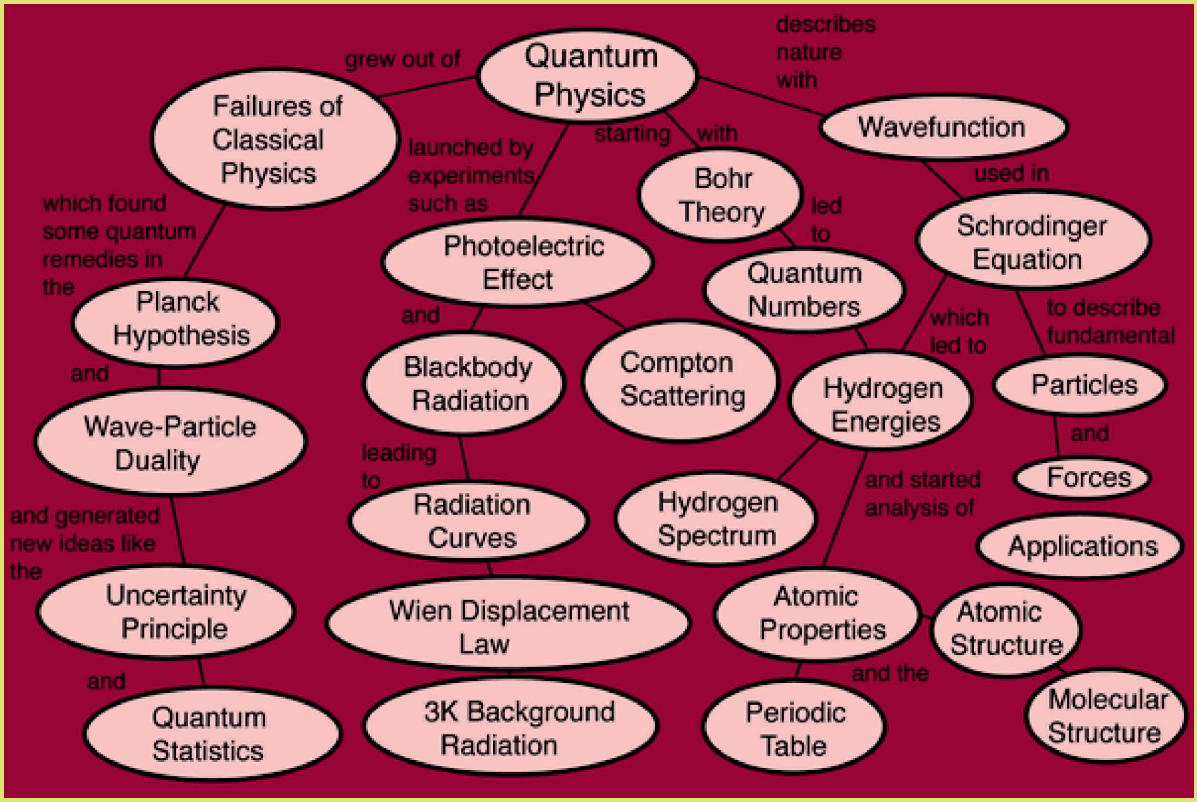


Abb. 16.109: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

Dieses Kapitel ist nicht Gegenstand der Klausur!

18 Röntgen



Röntgen

Das spätere Geschäft der Verwesung sah er vorweggenommen durch die Kraft des Lichtes, das Fleisch, worin er wandelte, zersetzt, vertilgt, zu nichtigem Nebel gelöst, und darin das ziemlich kleinlich gedrechselte Skelett seiner rechten Hand, um deren oberes Ringfingerglied sein Siegelring, vom Großvater her ihm vermacht, schwarz und lose schwebte ein hartes Ding dieser Erde, womit der Mensch seinen Leib schmückt, der bestimmt ist, darunter wegzuschmelzen.

Thomas Mann - Der Zauberberg (1924)

[1]In seinem Roman *Der Zauberberg* [**?**] liefert Thomas Mann eine detaillierte Beschreibung einer Röntgenuntersuchung in einem Sanatorium in Davos. Das Kapitel enthält eine philosophische Diskussionen zwischen Arzt und Patient über den wissenschaftlichen

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

Fortschritt und die Natur des Menschen. Die Kapitelüberschrift fasst die wissenschaftliche und öffentliche Reaktion auf Röntgens Entdeckung zusammen: *Mein Gott, ich sehe!*

Der photoelektrische Effekt gibt einen deutlichen Hinweis darauf, dass Photonen Energie an Elektronen übertragen können. Ist der umgekehrte Effekt auch möglich und kann ein Teil der kinetischen Energie eines Elektrons in Licht umgewandelt werden? Tatsächlich kann dieser Prozess beobachtet werden und man nennt ihn den inversen Photoeffekt. Die physikalisch und technisch-medizinisch interessanteste Auswirkung dieses Phänomens ist Röntgenstrahlung. Eine bahnbrechende Entwicklung auf dem Gebiet hochenergetischer Strahlung wurde durch die Versuche von W.C. Röntgen[2] angestoßen, siehe Abb. 18.1 [**?**]. Eine entscheidende Rolle spielte dabei das Lennard-Fenster[3] (Abb. 18.2) [**?**]. Man beobachtet, dass die Luft hinter einer hauchdünnen Aluminiumfolie über mehrere Zentimeter anfängt zu leuchten. Das das Kathodenstrahlrohr durch die Folie abgedeckt ist, scheiden Kathodenstrahlen als Ursache aus. Gegenstände zwischen Röhre und Schirm erschienen durchsichtig oder zeichneten sich als Schattenbild ab, wie die historische Aufnahme der Hand von Röntgens Frau beweist. Was zeichnet Röntgenstrahlung unter anderem aus?

- Die Strahlung ist für das Auge unsichtbar.
- Die Strahlung durchringt Materie.
- Die Strahlung schwärzt lichtempfindliche Materialien.
- Die Strahlung regt Stoffe zur Fluoreszenz an.
- Die Strahlung ionisiert Gase.

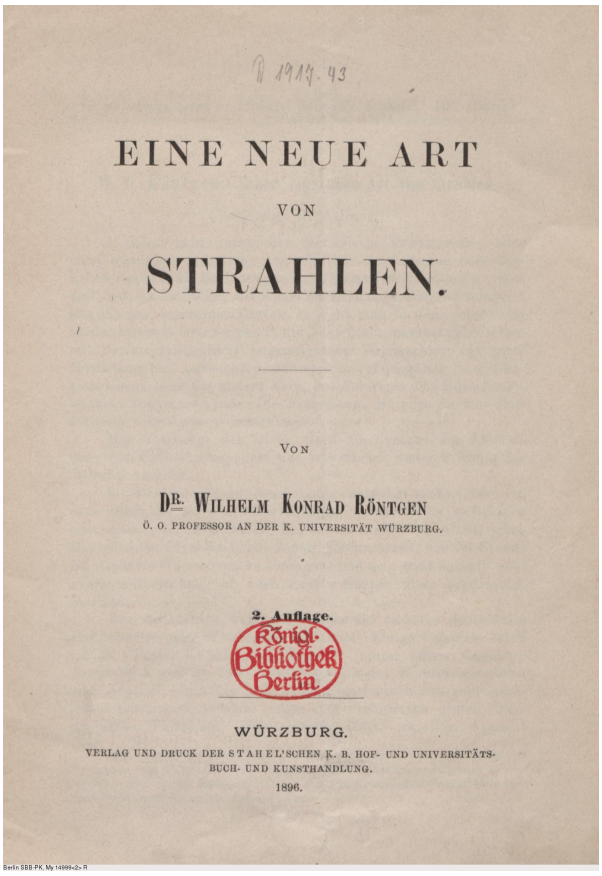
Man findet bald, dass alle Körper für dasselbe durchlässig sind. . . Papier ist sehr durchlässig: hinter einem eingebundenen Buch von ca. 1000 Seiten sah ich den Fluorescenzschirm noch deutlich leuchten. . . Ebenso zeigte sich Fluorescenz hinter einem doppelten Whistspiel. . . Dicke Holzblöcke sind noch durchlässig. . . Eine ca. 15 mm dicke Aluminiumschicht schwächte die Wirkung recht beträchtlich, war aber nicht im Stande, die Fluorescenz ganz zum Verschwinden zu bringen. . . Glasplatten gleicher Dicke verhalten sich verschieden, je nachdem sie bleihaltig sind (Flintglas) oder nicht. . . Hält man die Hand zwischen den Entladungsapparat und den Schirm, so sieht man die dunkleren Schatten der Handknochen in dem nur wenig dunklen Schattenbild der Hand [**?**].

Die Bedeutung der Entdeckung von Röntgen zeigt sich beispielsweise an der Anzahl der Nobelpreise, die für Arbeiten im Zusammenhang mit Röntgenlicht verliehen wurden [**?**]:[4]

1901 W.C. Röntgen in Physik für die Entdeckung der Röntgenstrahlen

[2] The Nobel Prize in Physics 1901 was awarded to Wilhelm Conrad Röntgen *in recognition of the extraordinary services he has rendered by the discovery of the remarkable rays subsequently named after him.*

[3] Experimente an Kathodenstrahlen (1893) führten zur Entdeckung von Elektronen und Röntgenstrahlen. Dazu wurde eine Glasröhre mit einem dünnen (0.1μm) Aluminiumfenster ver-



EINE NEUE ART

VON

STRAHLEN.

VON

DR. WILHELM KONRAD RÖNTGEN

O. O. PROFESSOR AN DER K. UNIVERSITÄT WÜRZBURG.

2. Auflage.

Königl. Bibliothek Berlin

WÜRZBURG.

VERLAG UND DRUCK DER STAHEL'SCHEN K. B. HOF- UND UNIVERSITÄTS-BUCH- UND KUNSTHANDLUNG.

1896.

Abb. 18.1: Am 28. 12. 1895 überreichte Konrad Röntgen sein Manuskript *Über eine neue Art von Strahlen* der Würzburger Physikalisch-Medizinischen Gesellschaft zur Veröffentlichung [**?**].

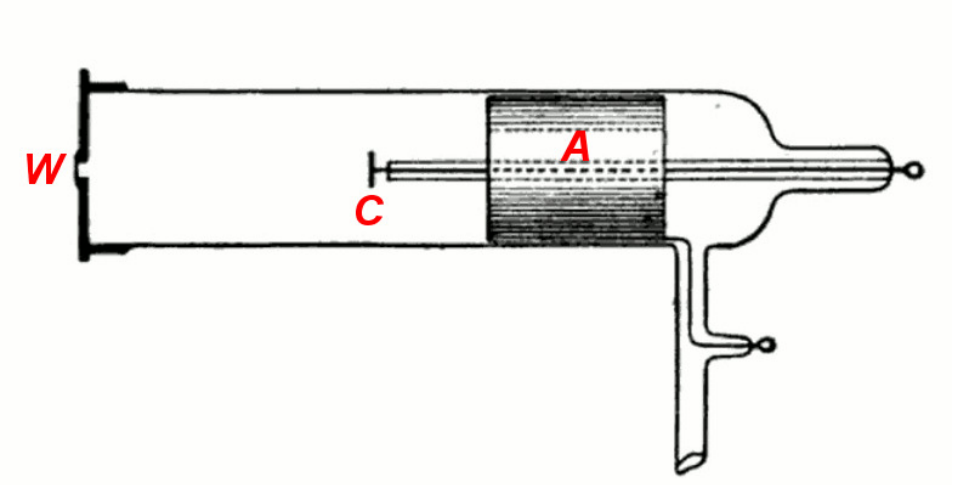


Abb. 18.2: Kathodenstrahlen waren, da sie nur in evakuierten Glaskolben erzeugt werden konnten, experimentell schwer zugänglich. Lenard entwickelte eine Methode dünne metallische Fenster (W) im Glas herzustellen, die dem Druckunterschied standhielten und für Strahlung transparent waren. Mit Hilfe phosphoreszierender Stoffe war es möglich, die Strahlen außerhalb der Glasröhre nachzuweisen [**?**].

1914 M. von Laue in Physik für Röntgenbeugung an Kristallen[5]

1915 W. H. Bragg und W. L. Bragg in Physik für Bestimmung Kristallstruktur mit Röntgenbeugung[6]

1917 C. G. Barkla in Physik für die charakteristische Strahlung der Elemente[7]

1924 K. M. G. Siegbahn in Physik für Röntgenspektroskopie[8]

1927 A. H. Compton in Physik für die Streuung von Röntgenstrahlen durch Elektronen[9]

1936 P. Debye in Chemie für die Beugung von Röntgenstrahlen und Elektronen in Gasen[10]

1946 H. J. Muller in Medizin für die Entdeckung von Mutationen durch Röntgenstrahlung[11]

1954 L. Pauling in Chemie für Entwicklungen in der Strukturchemie[12]

1956 A. F. Cournand, W. Forssmann und D. W. Richards in Medizin für die Entwicklung des Herzkatheters unter Röntgenkontrolle[13]

1962 J. Watson, M. Wilkins und F. Crick in Medizin für die Strukturaufklärung des DNA-Moleküls[14]

1962 M. Perutz und J. Kendrew in Chemie für die Strukturaufklärung von Hämoglobin[15]

1964 D. C. Hodgkin in Chemie für die Röntgenstrukturanalyse von Penicillin und anderen biochemischen Substanzen[16]

---

sehen, um die Strahlung außerhalb der Röhre zu untersuchen

[4] Eine Anekdote der Physikgeschichte ist die Entdeckung der N-Strahlen durch den französischen Physiker Rene Blondlot im Jahr 1903. Die Strahlung stellte sich als nichtexistent heraus und macht deutlich, dass der Glaube manchmal Berge versetzt [**?**].

[5] The Nobel Prize in Physics 1914 was awarded to Max von Laue *for his discovery of the diffraction of X-rays by crystals.*

[6] The Nobel Prize in Physics 1915 was awarded jointly to Sir William Henry Bragg and William Lawrence Bragg *for their services in the analysis of crystal structure by means of X-rays.*

[7] The Nobel Prize in Physics 1917 was awarded to Charles Glover Barkla *for his discovery of the characteristic Röntgen radiation of the elements.*

[8] The Nobel Prize in Physics 1924 was awarded to Karl Manne Georg Siegbahn *for his discoveries and research in the field of X-ray spectroscopy.*

[9] The Nobel Prize in Physics 1927 was divided equally between Arthur Holly Compton *for his discovery of the effect named after him* and Charles Thomson Rees Wilson *for his method of making the paths of electrically charged particles visible by condensation of vapour.*

[10] The Nobel Prize in Chemistry 1936 was awarded to Petrus (Peter) Josephus Wilhelmus Debye *for his contributions to our knowledge of molecular structure through his investigations on dipole moments and on the diffraction of X-rays and electrons in gases.*

[11] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1946 was awarded to Hermann Joseph Muller *for the discovery of the production of mutations by means of X-ray irradiation.*

[12] The Nobel Prize in Chemistry 1954 was awarded to Linus Carl Pauling *for his research into the nature of the chemical bond and its application to the elucidation of the structure of complex substances.*

[13] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1956 was awarded jointly to André Frédéric Cournand, Werner Forssmann and Dickinson W. Richards *for their discoveries concerning heart catheterization and pathological changes in the circulatory system.*

[14] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1962 was awarded jointly to Francis Harry Compton Crick, James Dewey Watson and Maurice Hugh Frederick Wilkins *for their discoveries concerning the molecular structure of nucleic acids and its significance for information transfer in living material.*

[15] The Nobel Prize in Chemistry 1962 was awarded jointly to Max Ferdinand Perutz and John Cowdery Kendrew *for their studies of the structures of globular proteins.*

[16] The Nobel Prize in Chemistry 1964 was awarded to Dorothy Crowfoot Hodgkin *for her determinations by X-ray techniques of the structures of important biochemical substances.*

1976 W. N. Lipscomb in Chemie für Röntgenstrukturuntersuchungen an Boranen[17]

1979 A. M. Cormack und G.N. Hounsfield in Medizin für Computertomographie[18]

1981 K. M. Siegbahn in Physik für hochaufgelöste Elektronenspektroskopie[19]

1985 H. A. Hauptmann und J. Karle in Chemie für die Entwicklung direkter Methoden zur Bestimmung von Röntgenstrukturen[20]

1988 J. Deisenhofer, R. Huber und H. Michel in Chemie für die Bestimmung der dreidimensionalen Struktur von Proteinen für die Photosynthese[21]

1996 R. Curl, H. Kroto and and R. Smalley in Chemie für die Entdeckung der Fullerene[22]

1997 P. D.Boyer, J.E. Walker und J.C. Skou in Chemie für Aufklärung der Funktion des Enzyms ATP[23]

2002 R. Giacconi in Physik für die Entwicklung der Röntgenastronomie[24]

2003 R. MacKinnon in Chemie für Röntgenstrukturbestimmung von Ionenkanälen in Zellmembranen[25]

2009 V. Ramakrishnan, T.A. Steitz und A.E. Yonath in Chemie für Arbeiten zur Struktur und Funktion von Ribosomen[26]

2010 A. Geim und K. Novoselov für Physik zu Graphen[27]

2011 D. Shechtman in Chemie für die Entdeckung der Quasikristallen[28]

[17] The Nobel Prize in Chemistry 1976 was awarded to William N. Lipscomb *for his studies on the structure of boranes illuminating problems of chemical bonding.*

[18] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1979 was awarded jointly to Allan M. Cormack and Godfrey N. Hounsfield *for the development of computer assisted tomography.*

[19] The Nobel Prize in Physics 1981 was divided, one half jointly to Nicolaas Bloembergen and Arthur Leonard Schawlow *for their contribution to the development of laser spectroscopy* and the other half to Kai M. Siegbahn *for his contribution to the development of high-resolution electron spectroscopy.*

[20] The Nobel Prize in Chemistry 1985 was awarded jointly to Herbert A. Hauptman and Jerome Karle *for their outstanding achievements in the development of direct methods for the determination of crystal structures.*

[21] The Nobel Prize in Chemistry 1988 was awarded jointly to Johann Deisenhofer, Robert Huber and Hartmut Michel *for the determination of the three-dimensional structure of a photosynthetic reaction centre.*

[22] The Prize in Chemistry 1996 was awarded jointly to Robert F. Curl Jr., Sir Harold W. Kroto and Richard E. Smalley *for their discovery of fullerenes.*

[23] The Nobel Prize in Chemistry 1997 was divided, one half jointly to Paul D. Boyer and John E. Walker *for their elucidation of the enzymatic mechanism underlying the synthesis of adenosine triphosphate (ATP)* and the other half to Jens C. Skou *for the first discovery of an ion-transporting enzyme,* Na^+, K^+ *-ATPase.*

[24] The Nobel Prize in Physics 2002 was divided, one half jointly to Raymond Davis Jr. and Masatoshi Koshiba *for pioneering contributions to astrophysics, in particular for the detection of cosmic neutrinos* and the other half to Riccardo Giacconi *for pioneering contributions to astrophysics, which have led to the discovery of cosmic X-ray sources.*

[25] The Nobel Prize in Chemistry 2003 was awarded *for discoveries concerning channels in cell membranes* jointly with one half to Peter Agre *for the discovery of water channels* and with one half to Roderick MacKinnon *for structural and mechanistic studies of ion channels.*

[26] The Nobel Prize in Chemistry 2009 was awarded jointly to Venkatraman Ramakrishnan, Thomas A. Steitz and Ada E. Yonath *for studies of the structure and function of the ribosome.*

[27] The Nobel Prize in Physics 2010 was awarded jointly to Andre Geim and Konstantin Novoselov *for groundbreaking experiments regarding the two-dimensional material graphene.*

[28] The Nobel Prize in Chemistry 2011 was awarded to Dan Shechtman *for the discovery of quasicrystals.*

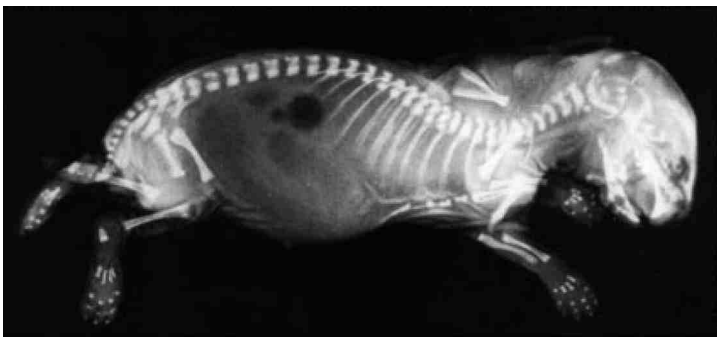


Abb. 18.3: Röntgenaufnahme eines neugeborenen Kaninchens (Eder und Valenta, Wien, 1896) [**?**].

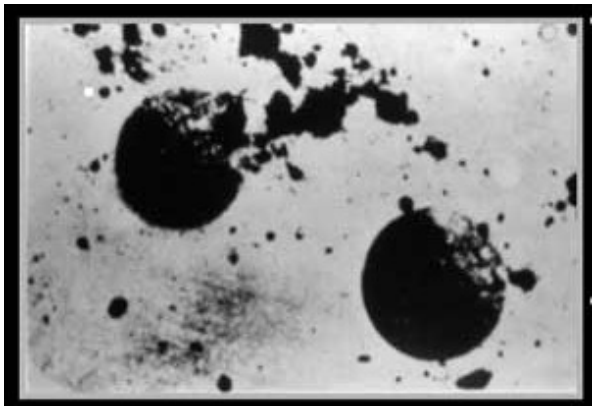


Abb. 18.4: Historische gesehen die erste Röntgenaufnahme erstellt durch Goodspeed und Jennings vom 22.2.1890. Die Forscher erkannten damals nicht das Potenzial ihrer Entdeckung [**?**].

2012 R.J. Lefkowitz und B.K. Kobilka in Chemie für Studien zu G-Protein-gekoppelte Rezeptoren[29]

Die Bedeutung der Röntgenstrahlung für die Medizin ist ebenfalls enorm, wie nicht nur die Tabelle der Nobelpreise demonstriert, sondern auch die folgende Übersicht:

1896 Krankenhäuser schaffen Röntgengeräte an, die auch von nicht-qualifiziertem Personal verwendet wird

1897 American X-Ray Journal (Vol 1 No 1, May 1897)

1896 Sydney Rowland founds the first radiology journal, *Archives of Clinical Skiagraphy*

1896 Thomas Edison invents the first commercially-available fluoroscope

1896 John Macintyre opens the world's first radiology department in Glasgow

1913 Albert Salomon commences research leading to mammography

1913 William Coolidge introduces his eponymous x-ray tube [30]

1927 Egas Moniz develops cerebral angiography

1939 Kitty Clark publishes Clark's Positioning in Radiography

[29] The Nobel Prize in Chemistry 2012 was awarded jointly to Robert J. Lefkowitz and Brian K. Kobilka *for studies of G-protein-coupled receptors.*

[30] U.S. Patent: US1203495A

1953 Sven-Ivar Seldinger develops his famous technique to obtain safe access to blood vessels and other hollow organs

1960 Robert Egan proves mammography's effectiveness in early diagnosis.

1964 Charles Dotter introduces image-guided intervention

1965 Benjamin Felson publishes his Principles of Chest Roentgenology

1971 Godfrey Hounsfield and Allan Cormack introduce the Computer Tomography scanner

1989 Spiral Computer Tomography introduced

2012 Since 2012, November 8 is dedicated to the International Day of Radiology

Die Medizin, die bis dahin auf äußere Symptome (Abhören, Abtasten) angewiesen war und erst über die Pathologie Veränderungen von Gewebe, Knochen und Organe feststellen konnte, konnte nun am lebenden Körper Untersuchungen anstellen (Abb. 18.3).

Any one who is watching the progress of anatomy in Britain must have noted a very definite change - almost a revolution - in the outlook of our younger anatomists. . . It is not difficult to define the nature of the changes which are taking place in our dissecting rooms. the older school studied and described the dead body; the aim of the newer school is to study and teach the anatomy of the living body. . . the discovery of Roentgen rays was the factor which ultimately killed the dead, unimaginative study of the human body [**?**].

Wie sich herausstellte, war Röntgen nicht der erste, der diese neue Art von Strahlung entdeckt hat, siehe Abb. 18.4:

On February 22, 1890, Dr Arthur Goodspeed and William Jennings made the first x-ray photograph, in the physical lecture room of the University of Pennsylvania. On that evening, Goodspeed and Jennings had been making brush electrographs of coins and brass weights. After they finished their experiments, Jennings stacked all of the photographic plates; two coins-either left from the experiments or Jennings' trolley fare-were placed on top of the plates. Goodspeed then demonstrated to Jennings the university's collection of Crookes tubes, with the idea of photographing the glow from the tube. While the two men were talking, however, the Crookes tube was emitting x radiation that affected the nearby plates. After the plates were developed, Jennings noted that one had the shawdow(s) of a disk(s) on it; neither man could explain the image. On hearing of Roentgen's work in 1896, Goodspeed and Jennigns retrieved the original plate and reproduced their accident. The glass plate was subsequently lost among library archives. [**?**]

Erst im Jahre 1911 konnten Friedrich und Knipping durch Beugung an Kristallen nachweisen, dass es sich bei Röntgenstrahlen um kurzwellige elektromagnetische Wellen handelt [**?**]. Der Nachweis der Polarisation von Röntgenstrahlen durch Barkla[31] hat Bedeutung, weil es demonstriert, dass Röntgenstrahlung wie gewöhnliches Licht angesehen werden kann. Anhand von Interferenzexperimenten konnte geklärt werden, dass es sich

[31]siehe Fußnote 27

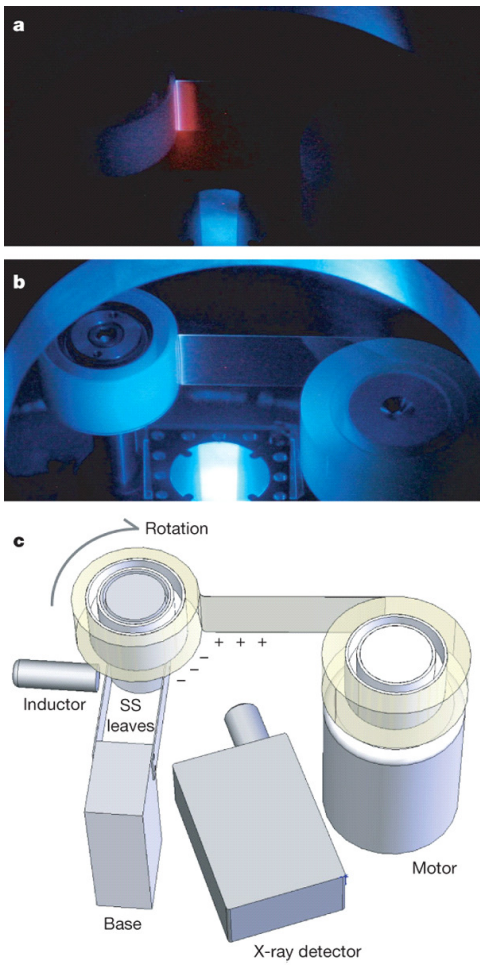


Abb. 18.5: Vorrichtung zur Untersuchung der Röntgenemission, hervorgerufen durch das Abziehen von Klebeband [**?**].

bei der Strahlung tatsächlich um elektromagnetische Wellen handelt [**?**]. Konzeptionell lässt sich ein Röntgenspektrum anhand von Überlegungen aus der Elektrodynamik und dem Bohrschen Atommodell verstehen. Wie sich zeigt, enthält die Lichtemission Informationen über die Elementzusammensetzung der Anode. Die Analyse der Röntgenspektren verschiedener Materialien durch Moseley lieferte darüber hinaus weitere Einsichten in den Aufbau des Periodensystems. Auf der Grundlage der Arbeiten von Moseley, von Hevsey und Barkla entwickelte sich die Röntgendiagnostik, die vielfältige Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik hat. Röntgenfluoreszenz eignet sich beispielsweise zum Aufspüren von Minen, da Sprengstoffe Nitrat an die Umwelt abgeben. Röntgenpulse regen in den Stoffen Fluoreszenz an, die man noch in einer Entfernung von wenigen Metern nachweisen kann. Die Spektroskopie erlaubt es, Nitrat in Düngemitteln von Nitrat aus Sprengstoffen zu unterscheiden. Das Alter der Minen spielt dabei keine Rolle. Bis zu $2000\,\mathrm{m}^2/\mathrm{h}$ können mit dieser Technik abgesucht werden.

It has been found that each of the elements Cr, Fe, Co, Ni, Cu, Zn, As, Se, Ag, when subject to a suitable primary beam of X-rays, emits an almost perfectly homogeneous beam of X-rays, the penetrating power of which is characteristic of the element emitting

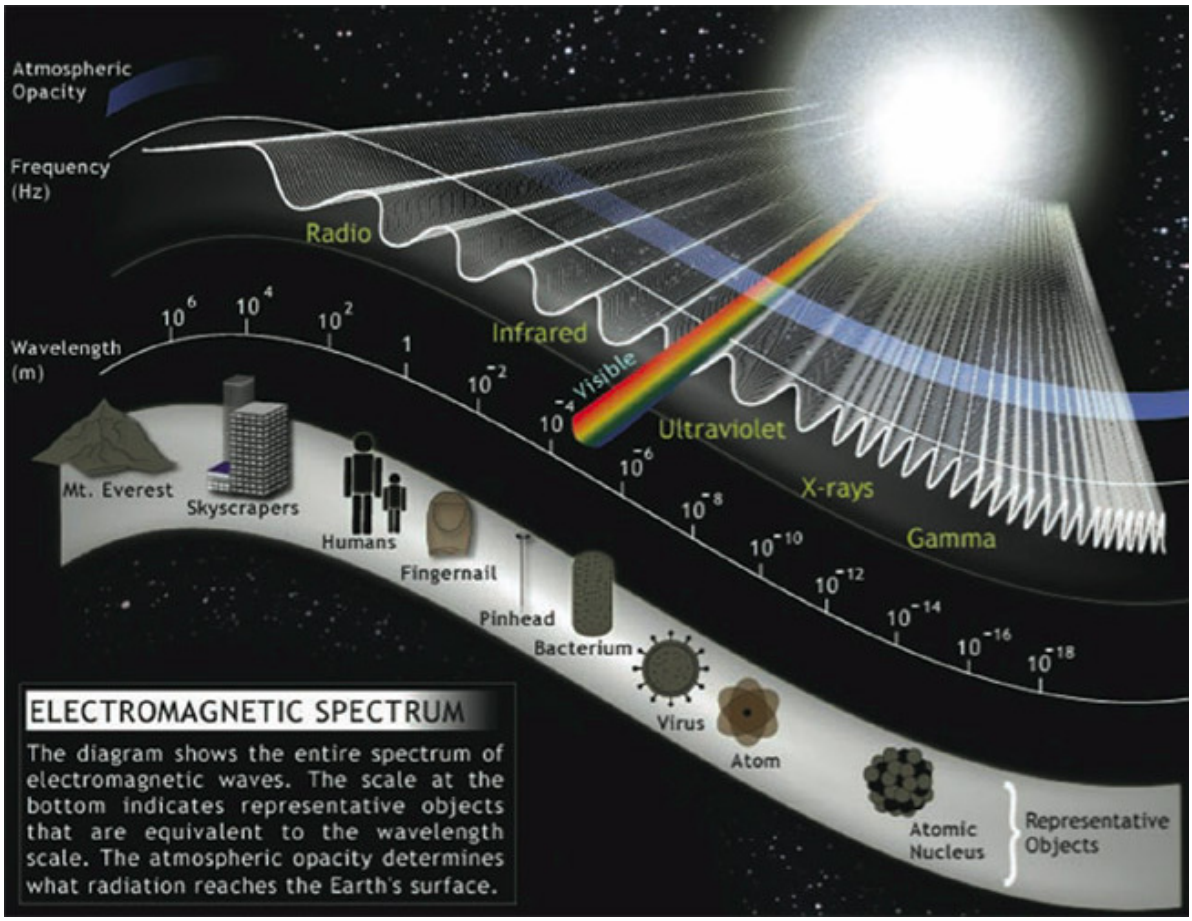


Abb. 18.6: Elektromagnetisches Spektrum zur Einordnung der energiereichen Röntgenstrahlung [**?**]

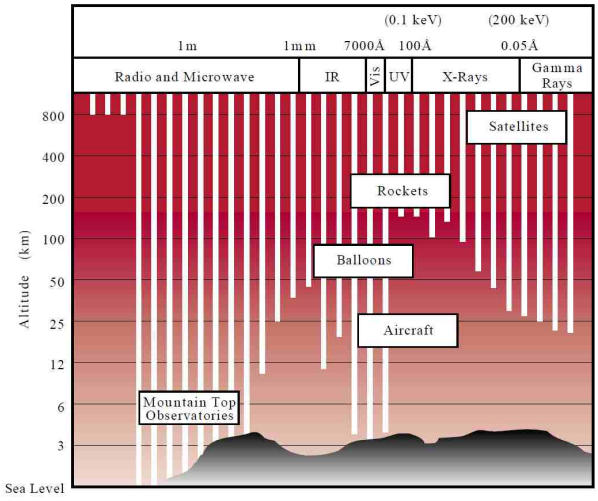


Abb. 18.7: Die Absorption durch die Erdatmosphäre schränkt die Beobachtung kosmischer Röntgenstrahlung stark ein [**?**].

it.

Charles Glover Barkla, 1911

Im Rahmen dieses Kapitels werden wir die Erzeugung von hochenergetischer Strahlung durch Röntgenröhren besprechen, wie sie auch von Röntgen verwendet wurden. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten diese hochenergetische Strahlung im Labor zu erzeugen, beispielsweise dadurch, dass man einen Klebefilm abzieht, siehe Abb. 18.5. Das Phänomen nennt sich Tribolumineszenz[32] Die Marke Scotch scheint hier besonders geeignet und die Entwicklung könnte in naher Zukunft zu einfachen, *low-cost* Röntgenröhren führen [**?**]

Correlation between nanosecond X-ray flashes and stick-slip friction in peeling tape [?]: Relative motion between two contacting surfaces can produce visible light, called triboluminescence. This concentration of diffuse mechanical energy into electromagnetic radiation has previously been observed to extend even to X-ray energies. Here we report that peeling common adhesive tape in a moderate vacuum produces radio and visible emission, along with nano-second, 100-mW X-ray pulses that are correlated with stick-slip peeling events. For the observed 15 keV peak in X-ray energy, various models give a competing picture of the discharge process, with the length of the gap between the separating faces of the tape being 30 or 300 mm at the moment of emission. The intensity of X-ray triboluminescence allowed us to use it as a source for X-ray imaging. The limits on energies and flash widths that can be achieved are beyond current theories of tribology.

Elektromagnetisches Spektrum

Zu Beginn eine Einordnung in das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung, siehe Abb. 18.6. Man erkennt, dass die Strahlung an den optisch-und ultravioletten Spektralbereich anschließt. Abb. 18.7 zeigt, wie tief elektromagnetische Strahlung in die Erdatmosphäre eindringt. Die Wellenlänge ist mit 10^{-10} bis 10^{-12} m aber deutlich kürzer und damit weitaus energiereicher ($E_{ph}{=}h \cdot c/\lambda$) als sichtbares ($\approx 10^{-6}$ m) Licht. Ein Raketenflug auf 150 km Höhe lieferte den Nachweis auf Röntgenstrahlung außerhalb der Erdatmosphäre [**?**] Seit 1962 ist bekannt, dass es einen nahezu konstanten und isotropen Röntgenstrahlungseintrag auf die Erde gibt [**? ?**], siehe Abb. 18.10. Bei diesen Messungen wurde auch die Röntgenquelle Scorpio X-1 entdeckt.[33] Scorpiio X-1 ist nach der Sonne die hellste Röntgenquelle. Abb. 18.8 zeigt als Beispiel einen Röntgenblick auf die heimische Milchstraße. Die Frage stellt sich, wie diese hochenergetische Strahlung entsteht. Das sichtbare Universum ist dominiert durch Objekte, die ihre Energie aus Kernreaktionen beziehen. Schaut man in den Röntgenbereich entsteht Strahlung in diesem Energiebereich aus Prozessen bei der die Gravitaion, magnetische Felder oder

[32] *Lexikon:* **Tribolumineszenz** konzentriert ungeordnete mechanische Energie in Licht, indem man Materialien auseinanderzieht, zerreißt oder kratzt.

[33] siehe Fußnote 24

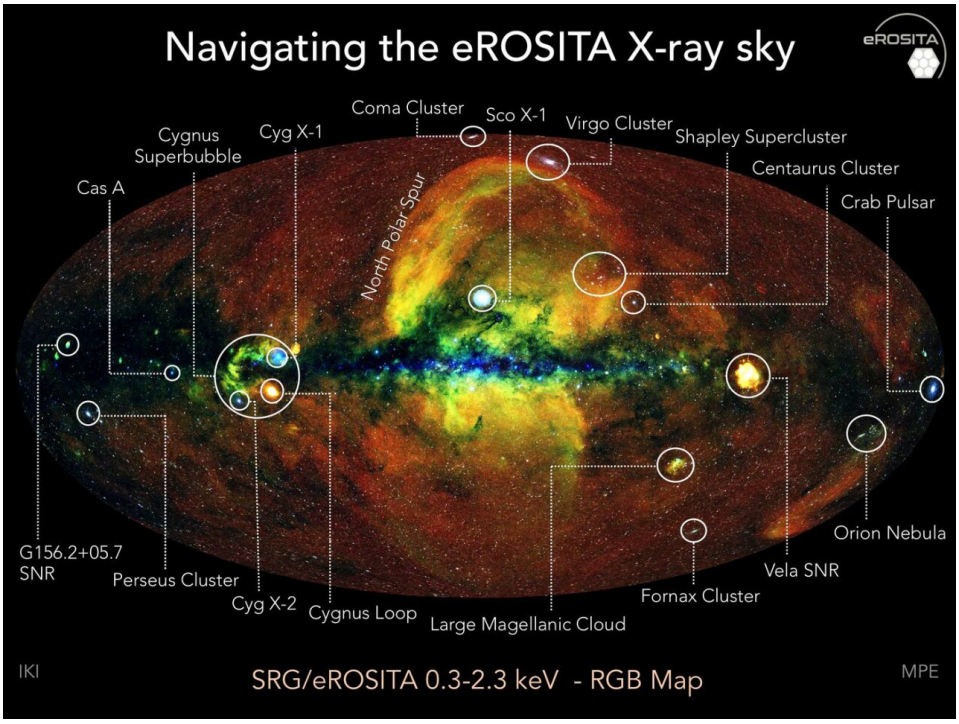


Abb. 18.8: Die Milchstraße, aufgenommen im Röntgenbereich zwischen 0.3 und 2.3 keV. Quellen starker Röntgenemission sind angegeben. Die Daten wurden durch das eROSITA xray Teleskop aufgezeichnet [**?**].

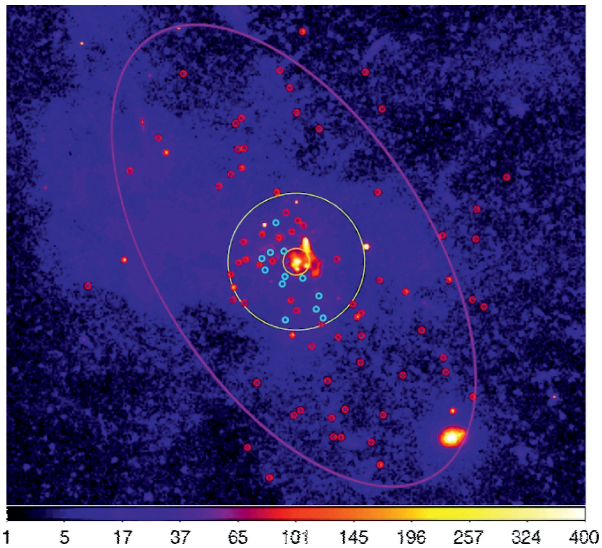


Abb. 18.9: Röntgenaufnahme des Zentrums der Milchstraße, aufgenommen mit dem Weltraumteleskop Chandra: Rote Kreise: Weiße Zwerge; blaue Kreise: Doppelsternsystem mit Neutronenstern oder Schwarzem Loch. Mittig befindet sich das supermassive Schwarze Loch Sagittarius A*. Der gelber Kreis um Srg A* hat einen Durchmesser von 6.6 Lj [**?**].

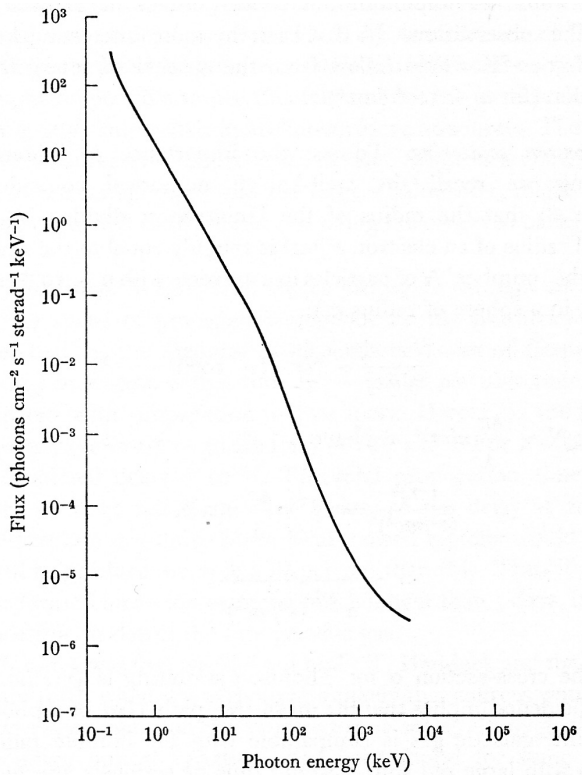


Abb. 18.10: Energiespektrum der isotrop auf die Erde einfallenden Röntgenstrahlung. Die Quellen der Strahlung liegt vermutlich außerhalb unserer Galaxis. Wahrscheinlich sind aktive Galaxienkerne verantwortlich [**?**].

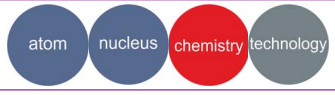
hohe Teilchenenergien eine Rolle spielen. Röntgenstrahlung aus so genannten *xray binaries* enthüllt den Astrophysikern, dass sich in unmittelbarer Umgebung des massiven Schwarzen Lochs Sagittarius A* im Zentrum der Milchstraße, nach Hochrechnung möglichereise bis zu 10 000 Doppelsternsysteme, bestehend aus einem Stern sowie einem Neutronenstern oder einem kleineren Schwarzen Loch befinden (Abb. 18.9) [**?**]. Es sei noch angemerkt, dass die Wellenlänge der Strahlung in der Größenordnung des Durchmessers von Atomen liegt. Wie sich herausstellen wird, erlaubt die kurze Wellenlänge Untersuchungen zur Struktur der kondensierten Materie, siehe das Kapitel *Röntgendiagnostik*.

Inhaltsverzeichnis

Röntgen

- Charakteristische Emission aus einer Röntgenröhre
- Mosley-Gesetz und der Zusammenhang zur Ordnungszahl
- Aufbau einer Röntgenröhre
- Duane-Hunt Gesetz und die minimale Röntgenwellenlänge
- Abbildung von Objekten durch Röntgenstrahlung

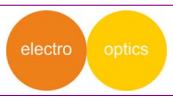
Kapitel 1
Charakteristische Strahlung & Mosley-Gesetz



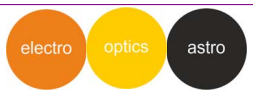
Kapitel 2
Röntgenröhre



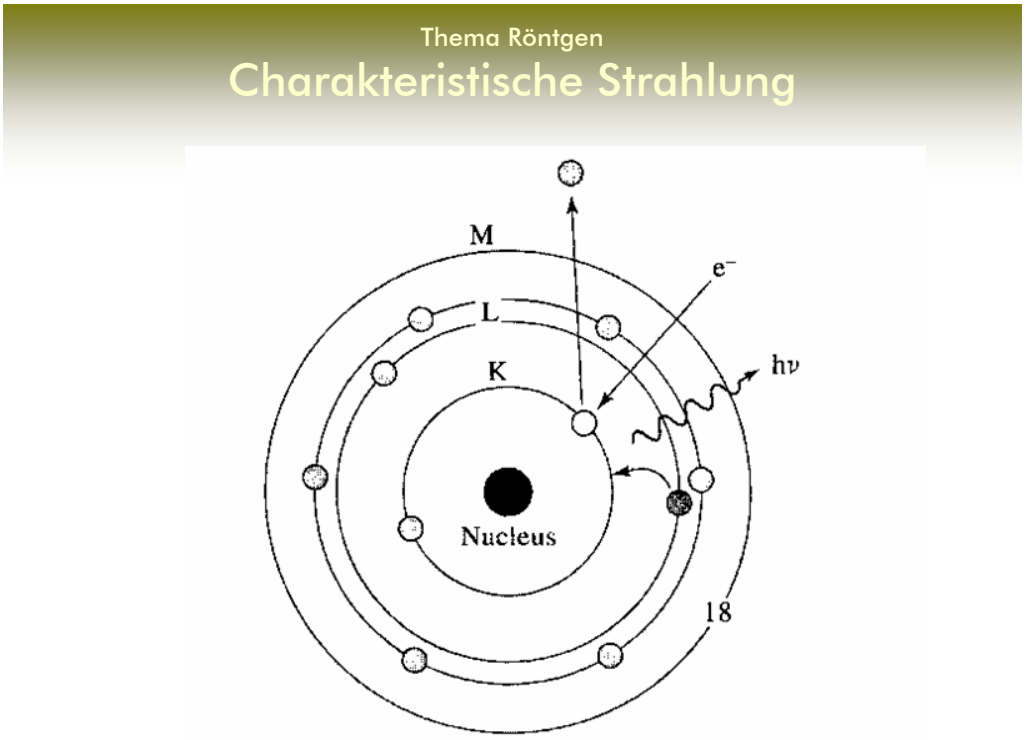
Kapitel 3
Bremsstrahlung & Duane-Hunt Gesetz



Kapitel 4
Röntgenoptik



18.1 Charakteristische Strahlung



Bei der Analyse der Strahlung einer Röntgenröhre stellt man fest, dass die Lichtemission aus zwei Anteilen mit klar unterschiedlicher Charakteristik zusammengesetzt ist:

- Charakteristisches Spektrum (Signatur der Atome)
- Bremsstrahlungsspektrum (Signatur der elektrostatischen Wechselwirkung)

Zunächst setzen wir uns mit dem Charakteristischen Spektrum auseinander und greifen auf unsere Erkenntnisse in Bezug auf das Bohrsche Atommodell und die Lichtemission im optischen Spektralbereich zurück. Wie kann man das motivieren? Wenn die Ladungsverteilung um den Kern kugelsymmetrisch ist, was nicht ganz und gar erfüllt ist, dann gilt Newtons Schalentheorem. Das bedeutet, dass die äußeren Elektronen keinen Einfluss



Abb. 18.11: Emissionsspektrum von Wasserstoff mit den bekannten Balmerlinien [**?**].

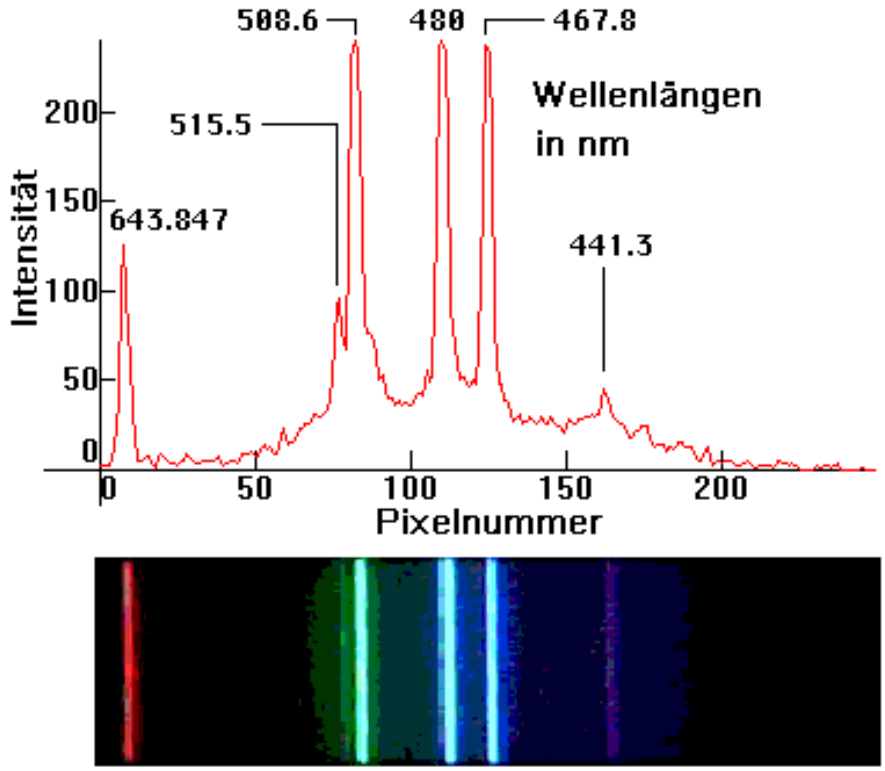


Abb. 18.12: Optisches Spektrum einer Cadmium-Niederdruck-Dampflampe [**?**].

haben auf die Bewegung der inneren Elektronen und die Wechselwirkung erfolgt NUR mit em Z-fach geladenen Kern. Wir können also in erster Näherung die Physik kernnaher Elektronen wie die wasserstoffähnlicher Ionen behandeln Wir werden feststellen, dass die Röntgenemission einhergeht mit einem Ionisationsprozess, der über einen Stoßprozess Elektronen aus inneren Schalen des Atoms herauskatapultiert. Bei der Auffüllung der Lücken -genannt Löcher- in den inneren Atomschalen mit Elektronen wird kurzwelliges Licht charakteristischer Frequenz emittiert. Bei der Beschäftigung mit dem Bohrschen Atommodell hatten wir die optische Lichtemission aus dem Wasserstoffatom betrachtet und eine charakteristische Energieabgabe herausgearbeitet. Die Analyse führte zur Identifizierung der z.B. Lyman- und Balmerserie (Abb. 18.11). Betrachtet man die optischen Spektren von Mehrelektronensystemen beobachtet man teils reich strukturierte

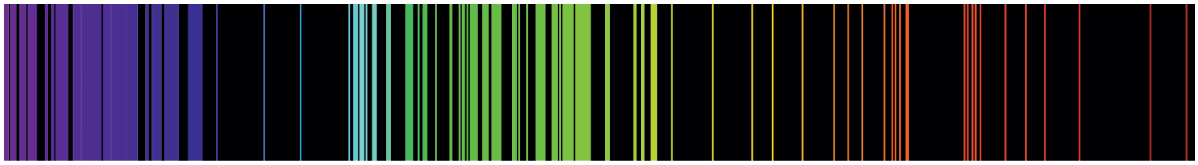


Abb. 18.13: Emissionsspektrum des Elements Eisen [**?**].

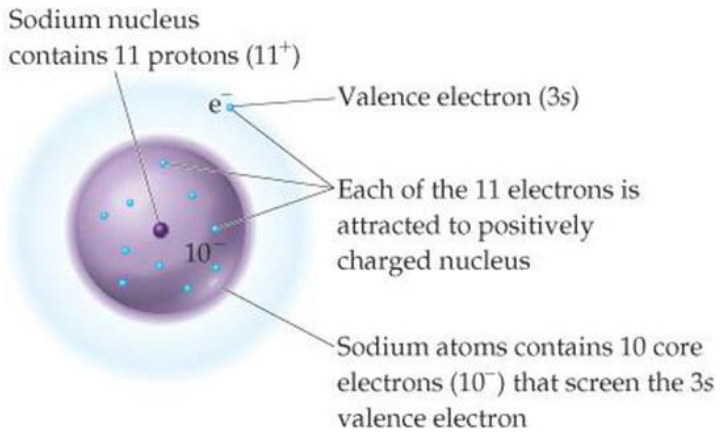


Abb. 18.14: Illustration der effektiven Ladung in Natrium. Für die Valenzelektronen ist die Kernladung durch stärker gebundenen Elektronen weitestgehend abgeschirmt. Das ändert sich, wenn man Übergänge in den inneren Schalen betrachtet.

Spektren, siehe als Beispiele das Spektrum einer Cadmium-Niederdruck-Dampflampe in Abb. 18.12. Die Ursache für die stärkere Strukturierung der Spektren liegt in der hohen Ordnungszahl Z, wie man am Beispiel des Linienspektrums von Eisen Z=26 sieht, siehe Abb. 18.13. Die erheblich höhere Anzahl an Protonen im Vergleich zu Wasserstoff erhöht die elektrostatische Anziehung der Elektronen.

$$F_e = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{q_e \cdot (Z \cdot q_e)}{r^2} \tag{18.1}$$

Für wasserstoffähnliche Atome wie Na^{10+} (Z=11) verschieben sich dadurch die Wasserstoffserien zu höheren Energien, da in der Gleichung der Faktor Z^2 beiträgt Abb. 18.14.

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \tag{18.2}$$

Aufgrund des Pauli-Prinzips sind die inneren Schalen eines Atome mit einer bestimmten Anzahl an Elektronen besetzt. Diese tiefliegenden Energiezustände bezeichnet man in der Reihenfolge mit K, L, M, ... Dabei ist unabhängig vom chemischen Element die K-Schale eines Atoms stets das Energieniveau in dem die Elektronen am stärksten am Kern gebunden sind. Abb. 18.15 zeigt ein Termschema, die die Notation der Emissionslinien aufzeigt. Man vergleiche auch mit der Notation der Wasserstoff-Balmerlinen (H_α, H_β,...) im Kapitel *Bohrsches Atommodell*.

Alle Elektronen bewegen sich nicht nur aufgrund der positiven Kernladung, sondern sie *merken*, dass sich noch andere Elektronen im selben Atom aufhalten, siehe Abb. 18.14. Die Trajektorieen sind dadurch beeinflusst. Eine besondere Rolle kommt den Elektronen zu, die sich nahe am Kern aufhalten. Diese schirmen die Kernladung ab, sodass die äußeren Elektronen nur eine geringere so genannte effektive Kernladung spüren. Im

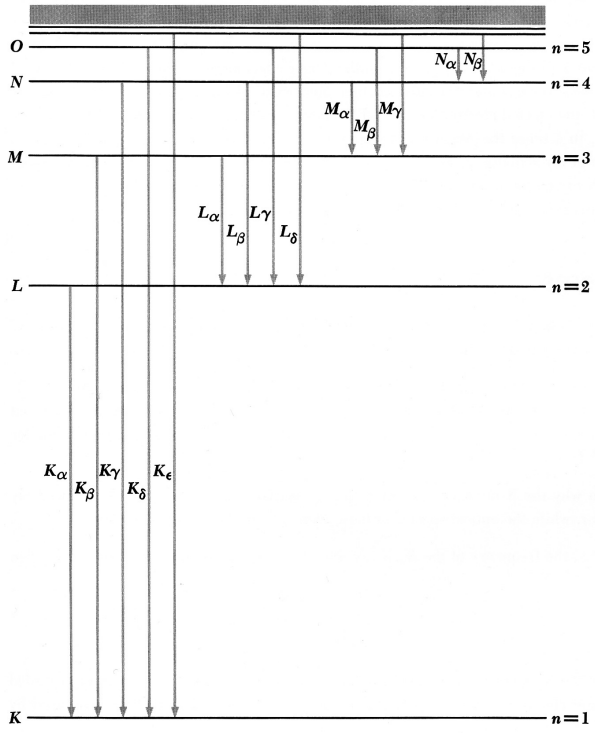


Abb. 18.15: Notation, wie sie bei Röntgenstrahlung verwendet wird [**?**].

Kapitel *Beyond Bohr* hatten wir nur die Beiträge der Elektronen im Valenzbereich des Atoms diskutiert. Jetzt erweitern wir die Analyse auf den Kernbereich und lernen die Slater-Regeln kennen.

Slater-Regeln reloaded

Bei der Behandlung der Mehrelektronensysteme (Kapitel *Beyond Bohr*) hatten wir uns schon einmal mit den Slater-Regeln beschäftigt. Diese spielen auch beim Verständnis der Röntgenemission aus kernnahen Elektronenübergängen eine Rolle. Es lohnt sich also, die Slater-Regeln in diesem Zusammenhang nochmals zu diskutieren. Elektronen aus weniger tief gebundenen Schalen wechseln in den energetisch tieferen Zustand, wobei es zur Lichtemission kommt. In sofern ist der Vorgang vergleichbar zur beispielsweise Emission der Lyman-Linien im Wasserstoff. Allerdings ist die Kernladungszahl erheblich höher. Im Fall der K-Schale schirmt nur das zweite Elektron der K-Schale die Kernladung Z ab ($Z \rightarrow (Z-1)$).[34] Vergleicht man die beiden Gleichungen, kann man die Wellenlänge

[34] Man erinnere sich an Newtons Schalentheorem aus dem Kapitel *Mechanik*: In einem beliebigen Abstand r vom Mittelpunkt einer kugelsymmetrischen Massenverteilung mit Radius R wird die Gravitationskraft genau von dem Anteil der Gesamtmasse erzeugt, der sich innerhalb der Kugel mit dem Radius r befindet.

der Röntgenemission abschätzen:

$$\begin{aligned} \frac{h \cdot c}{\lambda_{\text{VIS}}} &= R_y \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ \frac{h \cdot c}{\lambda_{xray}} &= R_y \cdot (Z-1)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ \frac{\lambda_{xray}}{\lambda_{\text{VIS}}} &= \frac{1}{(Z-1)^2} \end{aligned} \tag{18.3}$$

Für Wolfram, also Z=74 ergibt sich im Rahmen dieser Analyse:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{xray}}{\lambda_{\text{VIS}}} &= \frac{1}{(74-1)^2} = \frac{1}{(73)^2} \\ \frac{\lambda_{xray}}{\lambda_{\text{VIS}}} &= 1.88 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \tag{18.4}$$

Die Wellenlänge verkürzt sich also um mehr als einen Faktor 10^4. Aus sichtbarem Licht von 1 μm wird mit Wellenlängen im Å-Bereich.

Im Zusammenhang mit dem Bahndrehimpuls der Valenzelektronen hatten wir erkannt, dass die Abschirmung des Kernpotenzials für die ℓ Zustände unterschiedlich ausfällt. In diesem Zusammenhang schlug Slater ein einfaches Verfahren zur Berechnung der effektiven Kernladung vor, die ein Elektron in einem Atom erfährt [**?**]. Der große Vorteil des Ansatzes ist, dass nicht Orbitalenergien, sondern Ein-Elektronen-Energien bestimmt werden, was einfacher und intuitiver ist. Die Energiezustände der Elektronen in Mehrelektronensystemen lässt sich anhand der effektiven Kernladung berechnen:

$$E = -\frac{1}{8} \frac{m_e \, e^4}{\epsilon_0^2 \, h^2} \frac{Z_{\text{eff}}^2}{n_{\text{eff}}^2} \tag{18.5}$$

Die Gleichung sieht genauso aus, wie wir sie in Kapitel *Bohrsches Atommodell* für das Wasserstoffatom kennengelernt haben, nur dass die Einträge n und Z durch n_{eff} und Z_{eff} ersetzt wurden. Die effektive Kernladung fasst die Beiträge aller Elektronen zusammen, die die Kernladung abschirmen und den Einfluss der repulsiven Wechselwirkungen durch alle übrigen Elektronen. Der Grad der Abschirmung hängt dabei vom Orbital ab. Abb. 18.16 illustriert das Verfahren. Die genauen Werte ergeben sich aus den Slater-Regeln [**?**]:

- Die Hauptquantenzahl n wird durch eine effektive Hauptquantenzahl n_{eff} ersetzt (Tab. 18.1).

n	1	2	3	4	5	6
n_{eff}	1.0	2.0	3.0	3.7	4.0	4.2

Tab. 18.1: Effektive Hauptquantenzahl im Slater-Modell des Atoms

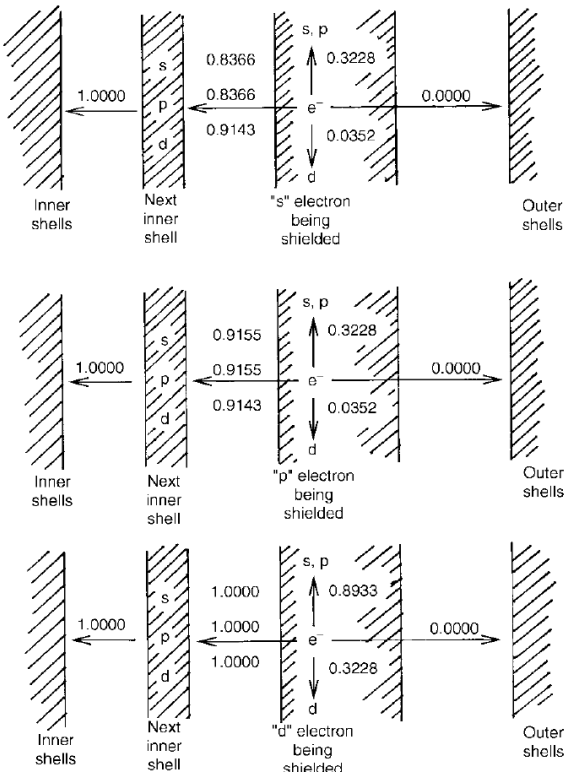


Abb. 18.16: Slater-Verfahren zur Bestimmung der Kernabschirmung einen Elektrons in einem bestimmten $n\ell$ Zustand durch innere Elektronen. (oben: Abschirmung eines s Elektrons; mitte: Abschirmung eines p Elektrons; unten: Abschirmung eines d Elektrons) [**?**].

- Die effektive Kernladungszahl Z_{eff} berechnet sich empirisch aus der Kernladungszahl Z des Elements und der Abschirmkonstanten $\sigma_{n\ell}$:

$$Z_{\text{eff}} = Z - \sigma_{n\ell} \tag{18.6}$$

und führt auf ein effektives Kern-Elektron-Potenzial:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{Z - \sigma_{n\ell}}{r} \tag{18.7}$$

Für die Bestimmung der Abschirmkonstante $\sigma_{n\ell}$ gruppiert man die Orbitale nach Haupt- und Nebenquantenzahl (Abb. 18.17). Links in der folgenden Liste findet man die stark gebundenen inneren Niveau; in den Gruppen rechts sind die Elektronen immer schwächer gebundenen:[35]

$(1s)$, $(2s, 2p)$, $(3s, 3p)$, $(3d)$, $(4s, 4p)$, $(4d)$, $(4f)$, $(5s, 5p)$,...

- Das betrachtete Elektron befindet sich in einer bestimmten Schale. Alle Elektronen in höheren Gruppen (rechts in der Liste) tragen nicht[36] zur Abschirmung bei (Schalentheorem).

[35] $\ell = 0 \to s$; $\ell = 1 \to p$; $\ell = 2 \to d$; $\ell = 3 \to f$

[36] Fußnote 34

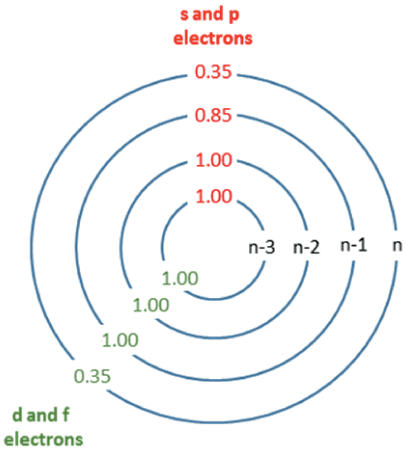


Abb. 18.17: Grafische Darstellung Slaters Regeln mit den zugehörigen Abschirmungkonstanten.

- Für die Abschirmung von s (ℓ=1) oder p (ℓ=1) Elektron gilt:
  - Für die Abschirmung innerhalb derselben Schale ist der Faktor 0.35. Ausnahme: Für ein 1s-Elektron ergibt sich ein Faktor von 0.30.
  - Jedes Elektron in Orbitalen der tiefer gelegenen Gruppe $(n-1)$ trägt mit dem Anteil 0.85 bei.
  - Jedes Elektron in Orbitalen der tiefer gelegenen Gruppe $(n-2)$ trägt mit dem Anteil 1.0 bei.

  .
- Für Elektronen in d (ℓ=2) und f (ℓ=3) Orbitalen gilt:
  - Elektronen in derselben Gruppe schirmen mit einem Faktor 0.35 ab.
  - Elektronen in tiefer liegenden Gruppen schirmen mit einem Faktor 1.0 ab.

Linenemission

Um Löcher in den inneren Schalen zu erzeugen, benötigt man schnelle Elektronen, deren kinetische Energie höher sein muss als die Bindungsenergien der in den K-, L- und M-Schalen. In Abb. 18.18 erkennt man am Beispiel von Molybdän, dass die Energieabstände (z.B. K- vs L-Schale) bei den inneren Schalen deutlich größer sind, als im Bereich der Valenzelektronen. Typische Energien liegen im keV-Bereich. Die Relaxation eines Elektrons in die tiefer gebundene Schale führt zur Emission von Röntgenlicht, siehe Abb. 18.15. Man spricht von Röntgenfluoreszenz. Die Wellenlänge der ausgesendeten Strahlung ist, wie sich zeigen wird, charakteristisch für das chemische Element. Abb. 18.19 zeigt Röntgenspektren von Kupfer, Molybdän und Wolfram mit den charakteristischen Emissionslinien der Elemente. Deutlich erkennt man, dass die Lage charakteristischen Linien stark vom jeweiligen Substrat abhängen. Analog zu den Wasserstoffserien spricht man von K_α, K_β,..., L_α, L_β,..., M_α, M_β, ... Emission. Wechselt beispielsweise ein Elektron aus der M-Schale und besetzt ein Loch in der K-Schale spricht man bei der emittierten Strahlung von K_β Röntgenstrahlung.

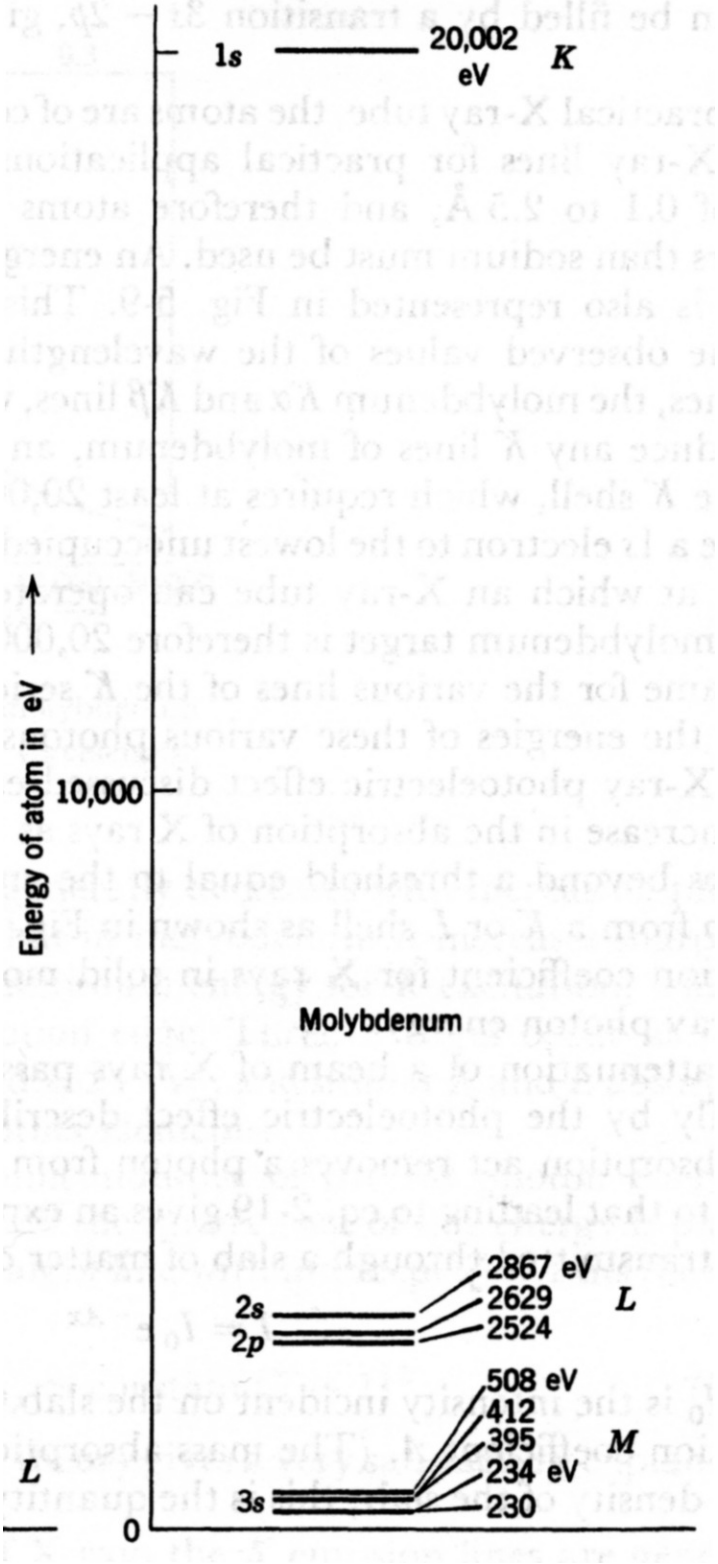


Abb. 18.18: Termschema von Molybdän. Die Darstellung verdeutlicht, wie stark der Energieabstand bei den inneren Niveaus (K, L, M) zunimmt. Übergänge zwischen diesen Niveaus, die zur Lichtemission führen, sind deshalb sehr energiereich.

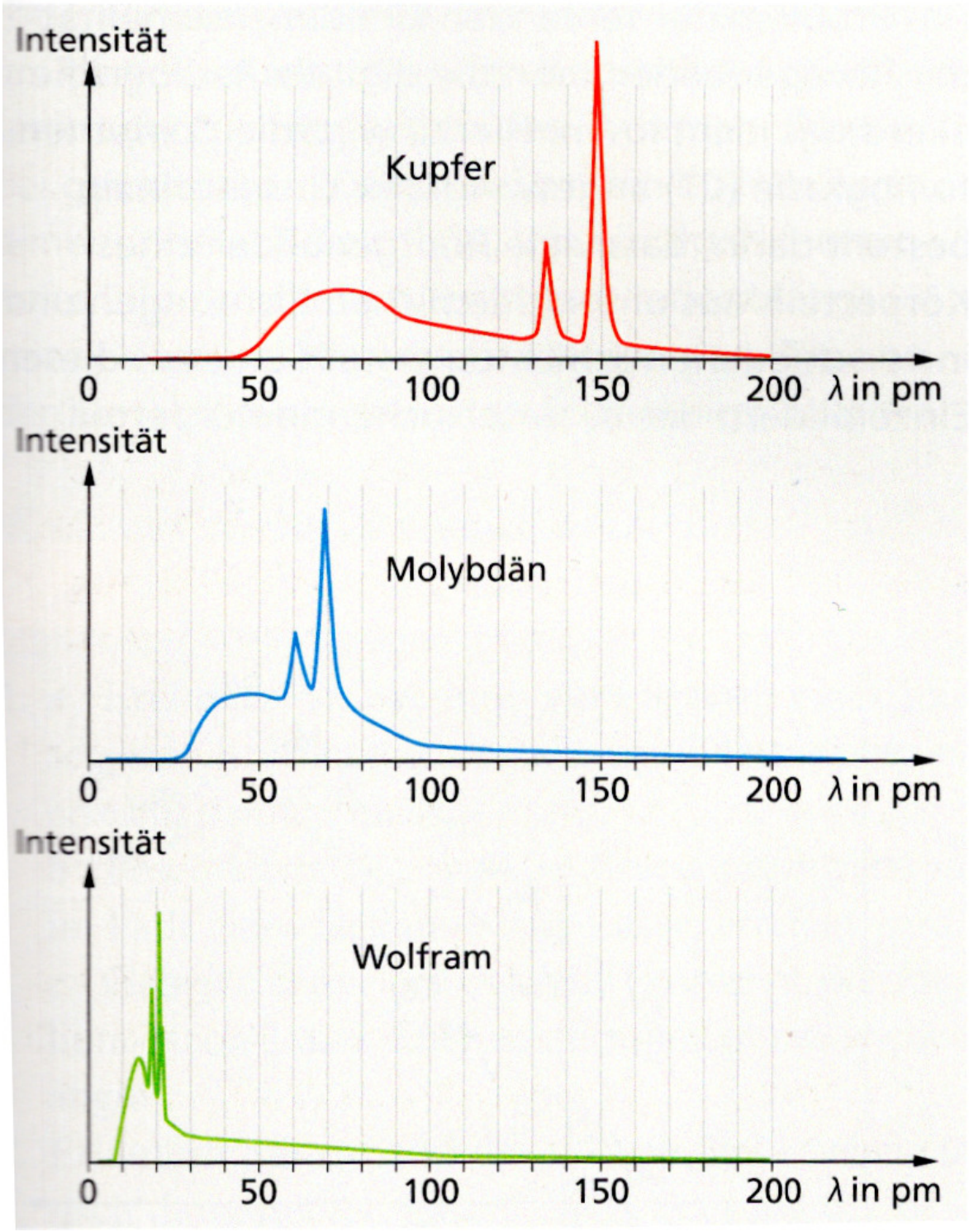


Abb. 18.19: Röntgenspektren ausgewählter Elemente.

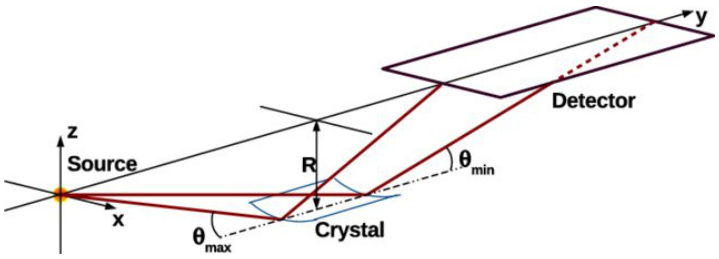


Abb. 18.20: Aufbau eines Spektrometers vom Typ von Hamos[39] zur hochauflösenden Röntgenanalytik [**?**].

Element	Ordungszahl	$K_{\alpha 1}$	$K_{\alpha 1}$	$K_{\beta 1}$	$K_{\beta 2}$
Mo	42	20.00 keV	17.48 keV	17.37 keV	19.61 keV
W	74	59.32 keV	59.98 keV	67.24 keV	69.07 keV
Rh	75	23.22 keV	20.22 keV	20.07 keV	23.17 keV

Tab. 18.2: K- und L-Emission ausgewählter Elemente.

Die Wellenlänge der Röntgenemission kann man aus den Angaben im Termschema (Abb. 18.18) ermitteln. Als einfache Umrechnungsformel empfiehlt es sich, die folgenden Gleichungen zu kennen:

$$\lambda_{xray}\,[\mathrm{pm}] = \frac{1240}{E_e\,[\mathrm{keV}]} \tag{18.8}$$

$$E_e\,[\mathrm{keV}] = \frac{1240}{\lambda_{xray}\,[\mathrm{pm}]} \tag{18.9}$$

Tab. 18.2 liefert eine Liste mit K-Emissionen ausgewählter Elemente.[37] [38] Spektroskopisch genau handelt sich bei der $K_{\alpha 1}$-Linie um den Übergang $K(1s^{-1}_{1/2}) \leftarrow L_3(2p^{-1}_{3/2})$, bei der $K_{\alpha 2}$-Linie um $K(1s^{-1}_{1/2}) \leftarrow L_3(2p^{-1}_{1/2})$, bei der $K_{\beta 1}$-Linie um $K(1s^{-1}_{1/2}) \leftarrow M_3(2p^{-1}_{3/2})$ und bei der $K_{\beta 3}$-Linie um $K(1s^{-1}_{1/2}) \leftarrow M_3(2p^{-1}_{1/2})$. Um diese eng beieinander liegenden Linien spektroskopisch zu unterscheiden benötigt man hochauflösende Instrumente. Dazu verwendet man als monochromatisierendes Element einen gebogenen Kristall. Abb. 18.20 zeigt den Aufbau eines solchen Spektrometers. Abb. 18.21 liefert ein Beispiel aus der Chemie, wobei es darum geht, eine Analyse binärer Verbindungen des drei- und vierwertigen Titans durchzuführen [**?**].

Es interessant, die spektrale Breite der Röntgenlinien zu betrachten. Diese geben über Auskunft über die Lebensdauer des Rumpflochs. E stellt sich heraus, dass die Charakteristische Strahlung nahezu monochromatisches Licht liefert [**?**]. Abb.18.22 zeigt

[37] Die Notation geht auf Siegbahn zurück [**?**] Moseley hatte entdeckt, dass jedes Element zwei Röntgenlinien aussendet und sie mit α und β benannt. Ein Schüler von Siegbahn stellte fest, dass es sich bei den Linien um Dubletts handelt.

[38] Die Ursache dieser Aufspaltung, genannt Feinstruktur, ist die Spin-Bahn Wechselwirkung, die im p-Zustand einen Energieunterschied zwischen den $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$ Zuständen bewirkt.

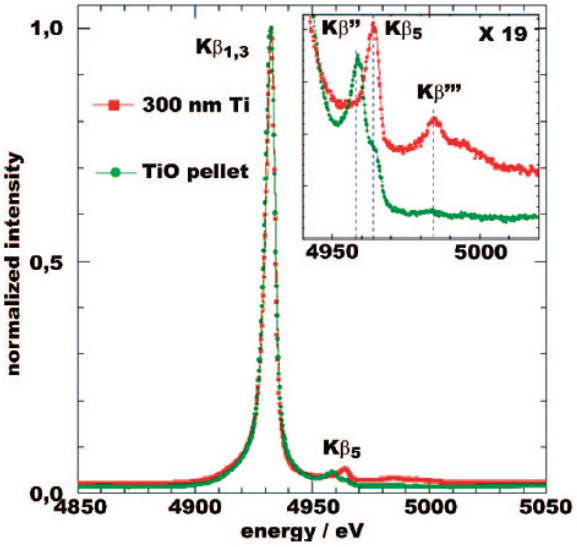


Abb. 18.21: K_β Emissionsspektrum von Ti and TiO [**?**].

Messungen an Strontium und Molybdän [**?**]. Für die relative Linienbreite $\Delta\lambda_{xray}/\lambda_{xray}$ ergibt sich:

$$\frac{\Delta\lambda_{xray}}{\lambda_{xray}} = \frac{0.037\,\text{pm}}{0.8734\,\text{pm}} = 0.042 \tag{18.10}$$

Betrachtet man die Linienbreiten als Funktion der Ordnungszahl erkennt man, siehe Abb. 18.23, dass die Linienbreite mit Z zunimmt. Je schwerer das Element, desto kürzer wird demnach die Lebensdauer der Rumpflöcher. Der Zusammenhang zwischen ΔE und Δt sollte sie an die Heisenbergsche Unschärferelation erinnern ($h \cdot \Delta t/\Delta\lambda \geq 1/(4 \cdot \pi)$)! Zusammenfassend lässt sich in Bezug auf die Charakteristische Röntgenstrahlung feststellen:

- Mit Hilfe hochenergetischer Elektronen werden Elektronen aus inneren Schalen des Atoms (K, L, M,...) herausgeschlagen.
- Als Resultat der Stoßionisation wird ein stark angeregtes Atom erzeugt, da es einen unbesetzten Zustand in einer inneren Schale aufweist.
- Ein Elektron aus einer höheren Schale springt in das energetisch tieferliegende, unbesetzte Niveau.
- Die freiwerdende Energie wird in Form elektromagnetischer Strahlung hoher Frequenz (geringer Wellenlänge) abgegeben.
- Die Energie der Röntgenquanten entspricht der Energiedifferenz der Bindungszustände.
- Typische Photonenenergien liegen im keV Bereich.
- Die Photonenenergie der Strahlung ist charakteristisch für das chemische Element.

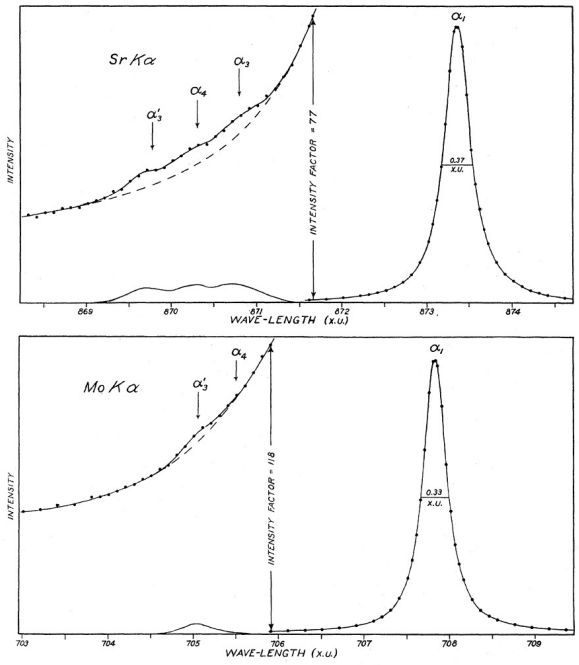


Abb. 18.22: Hochaufgelöste Messungen im Bereich der K_α-Emission von Molybdän (Mo)und Strontium (Sr) [**?**].

- Die Charakteristische Röntgenstrahlung hängt nicht von der kinetischen Energie der stoßenden Elektronen ab.

Ein konkurrierender Reaktionskanal zur Emission von Röntgenstrahlung ist der Auger-Meitner-Effekt [**?**]. Dabei füllt ein Elektron aus einer äußeren Schale ebenfalls ein Loch in inneren Schalen. Allerdings wird die freigesetzte Energie dabei nicht in Form von Strahlung freigesetzt, sondern stattdessen wird die Überschussenergie auf ein lockerer gebundenes Elektron übertragen, dass das Atom mit einer für den Übergang charakteristischen Energie, verlässt, siehe Abb. 18.24. Die Energie des Augerelektrons in dem Beispiel beträgt:

$$E_{\text{Auger}} = E_{\text{K}} - E_{\text{M}} - E_{\text{M}} = 19.2\,keV \tag{18.11}$$

Da das Elektron mit einer für das Element charakteristischen kinetischen Energie emittiert wird, können Auger-Elektronen für die Spektroskopie der Materie und speziell Oberflächen verwendet werden. Auger-Zerfälle findet man insbesondere bei den leichten Elementen oder bei Übergängen zwischen weniger stark gebunden Rumpfniveaus. Einsatzgebiete ist die Untersuchung der Materialzusammensetzung in der Metallurgie und in der Mikroelektronik.

Anwendungen^{4LP}

Beispiele aus der Astrophysik

Die Dichte und Temperaturverhältnisse im Plasma der Reste einer Supernova sind äußerst komplex, da fernab vom thermischen Gleichgewicht.[40] Es ist deshalb eine ziem-

[40] *Lexikon:* Die **Eddington-Grenze** ist die maximale Leuchtkraft, die ein Körper, unter der Annahme eines Gleichgewichts zwischen Strahlungsdruck und Gravitation, erreichen kann. Wenn ein Stern die

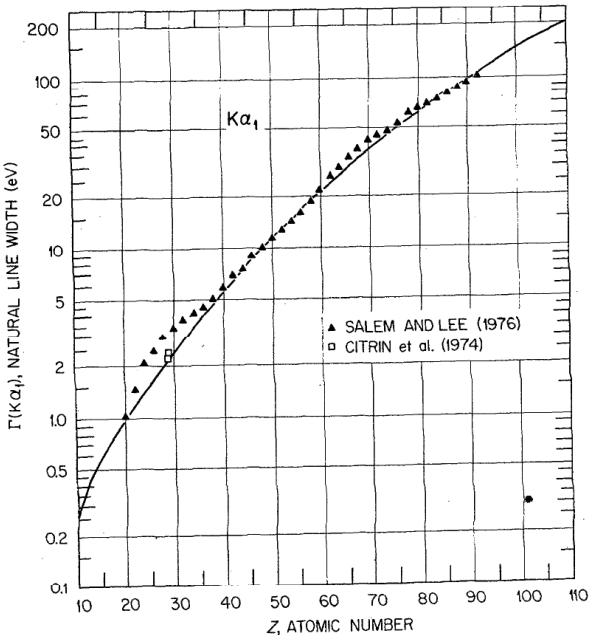


Abb. 18.23: Linienbreite der $K_{\alpha 1}$ Emissionslinien als Funktion der Ordnungszahl Z [**?**].

liche Herausforderung, räumlich aufgelöste Daten der Elementverteilung und der Ionisationsstufen von Kohlenstoff bis Eisen zu bestimmen, um die hydrodynamischen Prozesse abzuleiten. Der Hauptanteil der Emission aus den Supernova-Überbleibseln ist Bremsstrahlung der heißen Elektronen, sowie Linienemission hochionisierter Atome (O, Ne, Mg, Si, S, Ar, Ca, und Fe). Für eine genaue Analyse ist eine hohe räumliche Auflösung im Bereich von einigen Bogenminuten notwendig. Eine spektrale Auflösung von ΔE etwa 100 eV im Photonenenergiebereich von 0.5-10 keV ist ebenfalls erforderlich, um die K_α- und K_β-Linien aller relevanten Elemente zu erfassen und auszuwerten. Man konnte anhand der relativen Intensitäten der Elemente entschlüsseln [**?**], ob es sich bei den Muttersternen um massereiche Sterne handelt, die aufgrund der Gravitation kollabieren oder um massearme Sterne, die in einer thermonuklearen Supernovaexplosion vergehen. Die beiden Typen von Supernovae unterscheiden sich in ihren nukleosynthetischen Ausbeuten und einer Kartierung könnte Informationen liefern über die Entwicklung der Elementhäufigkeit in den Galaxien [**?**].

Die Konzentration von Materie durch die Anwesenheit eines Schwarzen Lochs ist eine äußerst effiziente Energiequelle, die etwa 10% der angelagerten Materie in Energie umwandelt (Kapitel *Einsteingleichung*). Daher ist Akkretion ein Prozess, den man berücksichtigen muss, um die starken Energieemissionen aus den Kerngebieten aktiver Galaxien [**?**] zu verstehen. Die Leuchtkraft übersteigt die Emission der Sonne um einen Faktor 10^{14}, wobei das Emissionsvolumen auf ein Gebiet beschränkt ist, das in seinem Durchmesser der Größe der Jupiterbahn entspricht. Die erheblichen Schwankungen in der Röntgenintensität auf einer Zeitskala von Stunden schränkt die möglichen Quellen stark

Eddington-Grenze überschreitet, kommt es zu einem intensiven strahlungsgetriebenen Ausbruch, bei dem die äußeren Schichten abgestoßen werden. Die Eddington-Grenze wird herangezogen, um die Lichtstärke von akkretierenden Schwarzen Löchern zu erklären.

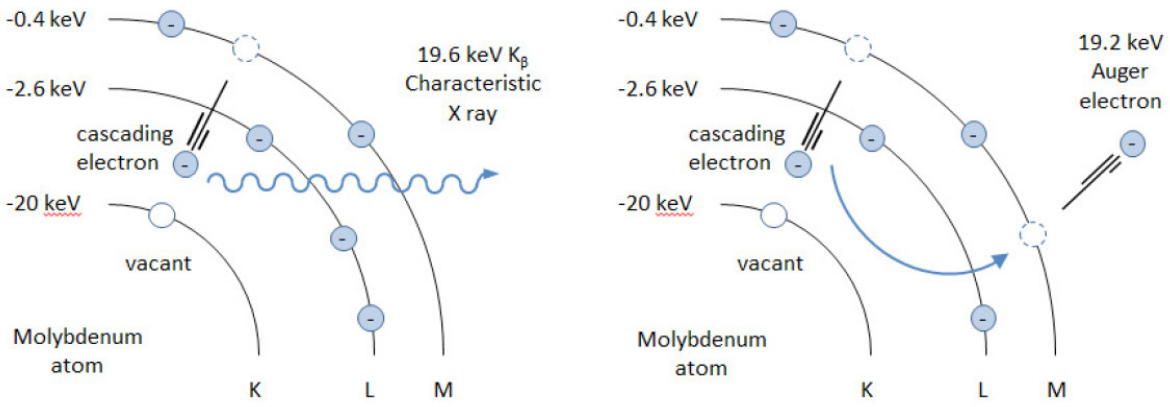


Abb. 18.24: Ein Elektron der M-Schale von Molybdän,füllt ein Loch in der K-Schale. Neben der Emission charakteristischer K_β Röntgenstrahlung (links) kann auch ein eines Auger-Elektrons mit charakteristischer kinetischer Energie emittiert werden [**?**].

ein. In Frage kommen Schwarze Löcher mit Massen im Bereich von $10^6 - 10^9\ M_\odot$. Die Bedingungen führen zu relativistischen Effekten. Bei der Beobachtung der aktiven Galaxis MCG-6-30-15 detektierte man bei einer Photonenenergie von 6.4 keV die K_α Emission von Eisen. Aus der Doppler-Verbreiterung der Linie konnte man ableiten, dass sich die zugehörige Materie in einem Abstand von 3-5 Schwarzschildradien und mit einer Geschwindigkeit von 10^5 km/s um ein superschweres Schwarzes Loch bewegt [**?**]. Informationen über eine Korrelation von Signalfluktuation und Intensität der Röntgenemission können weitere Details liefern, beispielsweise die Masse und die Rotationsgeschwindigkeit des Schwarzen Lochs.

ASCA Observations of the Large Magellanic Cloud Supernova Remnant Sample: Typing Supernovae from Their Remnants [**?**]**:** We present our first results from a study of the supernova remnants (SNRs) in the Large Magellanic Cloud (LMC) using data from ASCA. The three remnants we have analyzed to date, 0509-67.5, 0519-69.0, and N103B, are among the smallest, and presumably also the youngest, in the Cloud. The X-ray spectra of these SNRs show strong H_{alpha} emission lines of silicon, sulfur, argon, and calcium with no evidence for corresponding lines of oxygen, neon, or magnesium. The dominant feature in the spectra is a broad blend of emission lines around 1 keV which we attribute to L- shell emission lines of iron. Model calculations show that the major products of nucleosynthesis in Type Ia supernovae (SNs) are the elements from silicon to iron, as observed here. The calculated nucleosynthetic yields from Type Ib and II SNs are shown to be qualitatively inconsistent with the data. We conclude that the SNs which produced these remnants were of Type Ia. This finding also confirms earlier suggestions that the class of Balmer-dominated remnants arise from Type Ia SN explosions. Based on these early results from the LMC SNR sample, we find that roughly one-half of the SNRs produced in the LMC within the last 1500 yr came

from Type Ia SNs.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Berechnen Sie auf der Grundlage der Lyman-α Emission aus Wasserstoff (122 nm) die Energieverschiebung der K-Schalen Emission aus Wolfram (Z=74).

$$\lambda_{xray}^{\mathrm{W}} = \frac{122 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{73^2} = 23 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} \tag{18.12}$$

Die Strahlung ist also mit 23 pm extrem kurzwellig. Umgerechnet in Elektronenvolt ergibt sich ein Wert von 54 keV.

Aufgabe 1.2: Welche Abschirmkonstante $\sigma_{n\ell}$ erfährt ein $2p$-Elektron im Stickstoffatom?

Stickstoff findet man im Periodensystem in der zweiten Periode. Es hat die Ordnungszahl 7. Die Elektronenkonfiguration des Stickstoffatoms ist demnach:

N: $1s^2\,2s^2\,3p^3$

Mit $2p$ handelt sich also um ein Elektron in der äußersten Schale. Die Kernladung der sieben Protonen wird in n=1 durch ZWEI s-Elektronen und in $n = 2$ durch zwei s und zwei p also insgesamt VIER 2ℓ Elektronen abgeschirmt. Nach den Slater-Regeln ergibt sich:

$$\sigma_{2p} = 2 \cdot 0.85 + 4 \cdot 0.35 = 3.10$$

Damit ergibt sich ein effektives Potenzial für das $2p$-Elektron von:

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{Z - \sigma_{2p}}{r} = \frac{3.9}{r}$$

Aufgabe 1.3:

- Welche effektive Ladung Z_{eff} ergibt sich für ein p-Elektron in Kohlenstoff?
- Vergleichen sie Z/n mit $Z_{\mathrm{eff}}/n_{\mathrm{eff}}$

Kohlenstoff Z=6 steht im Periodensystem direkt links neben Stickstoff. Die Elektronenkonfiguration lautet:

C: $1s^2\,2s^2\,3p^2$

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{eff}} &= 6 - (2 \cdot 0.85) - (3 \cdot 0.35) = 3.25 \\ \frac{Z_{\mathrm{eff}}}{n_{\mathrm{eff}}} &= 1.625 \end{aligned}$$

In Gl. 18.5 taucht der Term $Z_{\text{eff}}^2/n_{\text{eff}}^2$ auf. Der Vergleich mt Z^2/n^2 ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{Z}{n} &= \frac{6}{2} = 3 \\
\frac{Z^2}{n^2} &= 9 \\
\frac{Z_{\text{eff}}}{n_{\text{eff}}} &= \frac{3.25}{2} = 1.625 \\
\frac{Z_{\text{eff}}^2}{n_{\text{eff}}^2} &= 2.64
\end{aligned}$$

Die Energiezustände liegen, wie das Beispiel Kohlenstoff aufzeigt, aufgrund der Abschirmung näher beieinander.

Aufgabe 1.4: Die Temperatur in den Akkretionsscheiben[41] Schwarzer Löcher ist so hoch, dass intensive Strahlung erzeugt wird, wenn Materie in das Schwarze Loch fällt. Zur Abschätzung betrachten wir ein Schwarzes Loch von einer Sonnenmasse. Der Schwarzschildradius beträgt 3 km und die Leuchtkraft ist im Vergleich zur Sonne um einen Faktor $3 \cdot 10^4$ höher. In welchem Spektralbereich strahlt die heiße Materie, bevor sie es den Ereignishorizont des Schwarze Loch passiert?

Zunächst vergleichen wir den Radius des Schwarzen Lochs (BH) mit dem der Sonne.

$$\frac{R_\odot}{R_{BH}} = \frac{1.4 \cdot 10^9\,\text{m}}{3 \cdot 10^3\,\text{m}} = 2.32 \cdot 10^5$$

Mit dieser Information berechnen wir die Temperaturverhältnisse nach dem Stefan-Boltzmann Gesetz, wobei wir eingehen lassen, dass die Oberflächentemperatur der Sonne 5 800 K beträgt.

$$\begin{aligned}
\frac{T_{BH}}{T_\odot} &= \left(\frac{R_\odot}{R_{BH}}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{L_{BH}}{L_\odot}\right)^{1/4} \\
\frac{T_{BH}}{T_\odot} &= (2.32 \cdot 10^5)^{1/2} \cdot (3 \cdot 10^4)^{1/4} \\
T_{BH} &= 6340 \cdot T_\odot \\
T_{BH} &= 6340 \cdot 5800\,\text{K} \\
T_{BH} &= 36.8 \cdot 10^7\,\text{K}
\end{aligned}$$

Das ist ganz schön hoch. Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz liegt das Maximum

[41] In der Astrophysik versteht man unter einer Akkretionsscheibe eine um ein zentrales massereiches Objekt rotierende Scheibe. Materie (atomares oder ionisiertes Gas, interstellarer Staub) wird in Richtung des Zentrums transportiert.

der Strahlungskurve bei

$$\begin{aligned} \lambda_{BH} &= \frac{b_\lambda}{T_{BH}} \\ \lambda_{BH} &= \frac{2.898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}}{6.8 \cdot 10^{7}\,\mathrm{K}} \\ \lambda_{BH} &= 78.8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 78.8\,\mathrm{pm} \end{aligned}$$

Das Schwarze Loch ist also ein starker Emitter von Röntgenstrahlung.

Aufgabe 1.5: Wenn ein Elektron von der L- in die K-Schale springt wird Energie[42]

(a) absorbiert.

(b) freigesetzt.

(c) manchmal absorbiert und manchmal freigesetzt.

(d) wird weder absorbiert noch abgegeben.

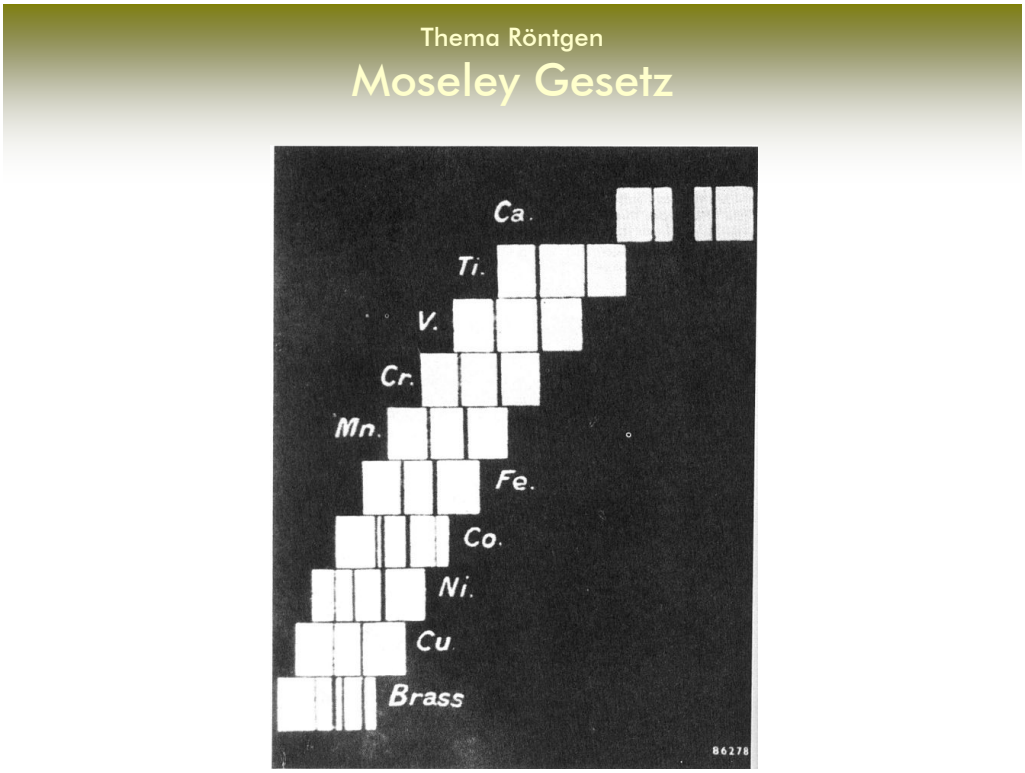
(e) sowohl Energie absorbiert als auch freigesetzt.

[42] Antwort: (b)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter den Slater-Regeln?
2. Skizzieren sie qualitativ das Röntgenspektrum von Molybdän und Wolfram!
3. Warum wird Röntgenstrahlung nur bei Elektronenübergängen zwischen den inneren Schalen emittiert?
4. Wie unterscheidet sich das Charakteristische Spektrum einer Röntgenröhre vom Spektrum des Wasserstoffatoms?
5. Warum gelingt es der Bohrschen Theorie nicht, optische Übergänge in Atomen angemessen zu beschreiben, während sie die Energien von Röntgenübergängen vergleichsweise gut vorhersagt?
6. Warum kann man die Abschirmung durch Elektronen in äußeren Schalen bei der Betrachtung eines Elektrons in einer inneren Schale häufig vernachlässigen?
7. Welche Strahlung hat die höhere Energie K_α oder K_β?

18.2 Moseley Gesetz



The Number of Possible Elements and Mendeleff's Cubic Periodic System [?]:[43] According to Rutherfords theory of single scattering (*On the Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom,* Phil. Mag., May, 1911), and to Barklas *Note on the Energy of Scattered X-Radiation* (ibid.), the numbers of electrons per atom is half the atomic weight; thus, for U, about 120. Now, a reconstruction of Mendeleffs cubic periodic system, as suggested in his famous paper *Die Beziehungen zwischen den Eigenschaften der Elemente und ihren Atomgewichten'* (Ostw. Klass., No. 68, pp. 32, 36, 37, and 74), gives a constant mean difference between consecutive atomic weights =2, and thus, from H to U, 120 as the number of possible elements (van den Broek, *Das Mendelejeffsche Kubische Periodische System der Elemente und die Einordnung der Radioelemente in dieses System*, Physik. Zeitschr. 12, p. 490). Hence, if this cubic periodic system should prove to be correct, then the number of possible elements is equal to the number of possible permanent charges of each sign per atom, or to each possible permanent charge (of both signs) per atom belongs a possible element.

[43] Niederländischer Amateurwissenschaftler, der erstmals Atomladungen als Grundlage der Anordnung der chemischen Elemente vorschlug.

Das Gesetz von Moseley [**?**] aus dem Jahr 1914 hat unser Wissen über Atome grundlegend erweitert. Jedes Element emittiert Röntgenstrahlen mit charakteristischen Wellenlängen aber unterschiedlichen Intensitäten. Historisch nennt man die stärkere K_α, die schwächere K_β. Die schwereren Elemente emittieren fünf zusätzliche Linien, genannt L_α, L_β, L_γ, L_δ und L_ε.[44] Wellenlänge und Frequenz variiert dabei in einem regelmäßigen Muster entsprechend der Ladung des Kerns. Moseley stellte fest, dass die Ordnungszahl im Periodensystem der Elemente die Anzahl der positiven Ladungen im Atomkern angibt. Man kann also experimentell die Ordnungszahl bestimmen! Durch seine Arbeiten konnte er Vorhersagen machen über drei zum damaligen Zeitpunkt unbekannte Elemente (Technetium[45] (Tc) Z=43, Promethium[46] (Pm) Z=61, Rhenium[47] (Re) Z=75).

Die Elemente des Periodensystems (siehe Kapitel *Beyond Bohr*) sind nach der Ordnungszahl Z geordnet. Es gib damit eine genau Anzahl an Elementen. Findet man 83 Elemente mit den Werten Z=1-83 hat man ALLE Elemente von Wasserstoff bis Wismut gefunden. Die Ordnungszahl gibt die Anzahl der Protonen im Atomkern eines chemischen Elements an und ist damit identisch mit der Kernladung. In neutralen Atomen stimmt die Zahl der Elektronen in der Atomhülle mit der Anzahl der Protonen im Kern überein. Alle Atome gleicher Ordnungszahl gehören zum selben chemischen Element im Periodensystem (Kapitel *Kerne*). Atome mit gleicher Ordnungszahl, aber unterschiedlicher Neutronenzahl N, nennt man Isotope. Aus der Ordnungszahl und der Anzahl der Neutronen berechnet sich die Massenzahl A

$$A = Z + N \tag{18.13}$$

Abbildung 18.25 zeigt, wie die Ordnungszahl (Kernladungszahl) im Periodensystem vermerkt wird.

Ausgehend vom Bohrschen Atommodell lässt sich die Emission aus den inneren Schalen schwerer Atome berechnen. Hier ergab sich für die Emission beim Übergang $(n_1 \leftarrow n_2)$[48] aufgrund der Bindungsenergien der Elektronen in den unterschiedlichen Orbitalen n_1,

[44] Die Bezeichnungen K- und L-gehen auf C. G. Barkla zurück.

[45] *Lexikon:* The radioactive metal **technetium** is the first synthetically produced element. Denoted by the chemical symbol Tc, it belongs to the family of transition metals.

[46] *Lexikon:* The element **promethium** is a radioactive metal with the chemical symbol Pm, belonging to the family of lanthanides as it does not exist naturally in the earth's crust. It has twenty-nine isotopes with mass numbers ranging from 130 to 158 of which the most stable one is promethium-145 having a half-life of 17.7 years.

[47] *Lexikon:* The rare earth metal **rhenium** belongs to the family of transition metals denoted by the chemical symbol Re. It has 33 isotopes, their mass numbers ranging from 160 to 192. It shows moderate reactivity with various compounds, except water.

[48] Es hat sich eingebürgert, die Emission mit einem Pfeil nach links zu indizieren. Links steht der energetisch tiefere Zustand

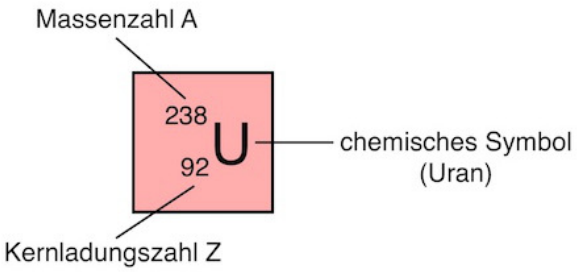


Abb. 18.25: Eintrag im Periodensystem am Beispiel des Uranisotops (U-238)

n_2:[49]

$$\begin{aligned} E_{n_1} &= -\frac{1}{(4\,\pi\cdot\varepsilon_0^2)^2}\frac{m_e}{2\,\hbar^2}\frac{(Ze^2)e^2}{n_1^2} = -R_y\cdot\frac{Z^2}{n_1^2} \\ E_{n_2} &= -\frac{1}{(4\,\pi\cdot\varepsilon_0^2)^2}\frac{m_e}{2\,\hbar^2}\frac{(Ze^2)e^2}{n_2^2} = -R_y\cdot\frac{Z^2}{n_2^2} \end{aligned} \tag{18.14}$$

Berechnet man den Energieunterschied für den Fall n_1=1 und n_2=2. also für die beiden tiefsten Energieniveaus, ergibt sich eine Lichtemission bei einer Photonenenergie E_{xray} von

$$\begin{aligned} E_{12} &= E_{n_2} - E_{n_1} \\ E_{12} &= = R_y\cdot Z^2\left(1-\frac{1}{4}\right) \\ = h\cdot\nu_{12} &= |E_{12}| = \frac{3}{4}R_y\cdot Z^2 \end{aligned} \tag{18.15}$$

Die Frequenz der emittierten Strahlung sollte daher proportional zu Z^2, und damit elementspezifisch sein! Im Gegensatz zu Wasserstoff ist es bei den schwereren Elementen notwendig, die Abschirmung der Elektronen ($\sigma_{n\ell}$) durch die anderen Elektronen der eigenen und den darunterliegenden Schalen in die Rechnung einzubeziehen.

$$Z \to Z - \sigma_{n\ell} \tag{18.16}$$

Damit wird Gl. 18.14 zu:

$$\begin{aligned} E_{n_1} &= -R_y\cdot\frac{(Z-\sigma_{n\ell}^1)^2}{n_1^2} \\ E_{n_2} &= -R_y\cdot\frac{(Z-\sigma_{n\ell}^2)^2}{n_2^2} \end{aligned} \tag{18.17}$$

[49] Rydberg-Energie (siehe Kapitel *Der Weg zum Atom*):

$$R_y = \frac{m_e\cdot e^4}{2\,(4\,\pi\cdot\varepsilon_0^2)^2\cdot\hbar^2} = 2.18\cdot10^{-18}\,\mathrm{J} = 13.61\,\mathrm{eV}$$

Serie	a	$\sigma_{n\ell}$
K	$\sqrt{\frac{3\,R_\infty \cdot c}{4}}$	1.0
L	$\sqrt{\frac{5\,R_\infty \cdot c}{36}}$	7.4

Tab. 18.3: Werte für die Proportionalitäts- und Abschirmkonstante im Moseley-Gesetz.

Die Energiedifferenz E_{12} berechnet sich zu

$$E_{12} = -R_y \cdot (Z - \sigma_{n\ell})^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \tag{18.18}$$

wobei wir annehmen, dass $\sigma_{n\ell}^1 \approx \sigma_{n\ell}^2 \approx \sigma_{n\ell}$. Für die Emission beim Wechsel des Elektrons in die K-Schale (n_1=1, n_2=n) ergibt sich eine Frequenz $\nu_{K2} = \Delta E_{K2}/h$ des Röntgenlichts von

$$\nu_{Kn} = R_y \cdot \frac{(Z - \sigma_{n\ell})^2}{h} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{18.19}$$

Für die Frequenzen der $K-$ und $L-$ Emissionslinien ergibt sich ohne Berücksichtigung der Feinstruktur:

$$\nu_{Kn} = R_y \cdot \frac{(Z-1)^2}{h} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{18.20}$$

$$\nu_{Ln} = R_y \cdot \frac{(Z - \sigma_{nl})^2}{h} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{18.21}$$

wobei $\sigma_{n\ell}$ die Abschirmkonstante (siehe Slater-Regeln) und R_f die Rydbergfrequenz (Kapitel *Der Weg zum Atom*) ist. Man erkennt, dass die Röntgenspektren im Vergleich zu den optischen Spektren vergleichsweise einfach strukturiert sind. Ursache ist, dass komplexe Beträge durch teils nicht aufgefüllte äußere Energieniveaus nahezu keinen Einfluss haben auf die Emission aus den inneren Schalen (Newtonsches Schalentheorem). Die inneren Schalen sind in den Atomen gleich aufgebaut, was das Pauli-Prinzip widerspiegelt. Die Feinstruktur in der Röntgenemission resultiert aus dem resultieren Drehimpuls der restlichen Elektronen der Schale. Moseley erkannte, dass sich eine Charakteristik ergibt, wenn man sich bei der Emission aus unterschiedlichen Atomen auf ein und denselben Übergang in die K-Schale konzentriert. Legt man n fest und ersetzt $\hbar$ durch $h/2\pi$, ergibt sich eine einfache Geradengleichung, die die Frequenz des Röntgenlichts mit der Ordnungszahl verknüpft. Für die K-Serie liefert die Analyse:

$$a_K^2 = \frac{m_e \cdot e^4}{8\,\varepsilon_0^2\,h^3} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{18.22}$$

Aus dieser Überlegung ergibt sich das Moseley-Gesetz. Wichtig zu wissen, dass es auf der Grundlage des Bohrschen Atommodells hergeleitet wurde. a und σ sind die Proportionalitäts- und Abschirmkonstante. Für die K- und L-Serien ergeben sich die Werte, die in Tab. 18.3 angegeben sind.

$$\nu = a^2 \cdot (Z - \sigma_{n\ell})^2 \tag{18.23}$$

Z	Element	λ [pm]	E_{ph} [eV]	$Q_{Moseley}$	A_u [amu]	Q+1
20	Ca	335.7	3694	19.01	40.09	20
21	Sc				44.1	
22	Ti	276.6	4483	20.97	48.1	22
23	V	252.1	4919	21.97	51.06	23
24	Cr	229.5	5403	23.02	52.0	24
25	Mn	211.7	5854	23.96	54.93	25
26	Fe	194.5	6375	25.00	55.85	26
27	Co	179.6	6904	26.02	58.97	27
28	Ni	166.4	7451	27.03	58.68	28
29	Cu	154.8	8010	28.02	63.57	29
30	Zn	144.6	8575	28.99	65.37	30

Tab. 18.4: Röntgendaten für Elemente im Vergleich zum Moseley-Gesetz [**?**].

Man kann die σ-Werte für die K- und L-Serien durch eine Anpassung an die experimentellen Ergebnisse bestimmen. Damit kommt man zu Näherungsformeln für die einzelnen Übergänge, hier angegeben in eV:

$$E_{K_\alpha} = 0.75 \cdot 13.6\,\text{eV} \cdot (Z - 1.2)^2 \tag{18.24}$$

$$E_{L_\alpha} = 0.14 \cdot 13.6\,\text{eV} \cdot (Z - 7.4)^2 \tag{18.25}$$

Trägt man die Ergebnisse der Messungen in einer entsprechenden Grafik auf (Abb. 18.26), indem man die Ordnungszahl in Abhängigkeit der Wurzel aus der beobachten Frequenz aufträgt, erkennt man die Abhängigkeiten [**?**]. Man stellt fest, dass

- sich die Abstände als Funktion der Ordnungszahl zwischen K- und L-Serien vergrößern.
- die Charakteristische Strahlung Hinweise gibt auf die Energieabstände der inneren Orbitale.
- die Charakteristische Strahlung für alle Elemente des Periodensystems ein ähnliches Verhalten zeigt.

Moseley erkannte, dass man eine dimensionslose Größe

$$Q_{Moseley} = \sqrt{\frac{4\,h \cdot \nu_{ph}}{3\,E_0}} \tag{18.26}$$

definieren kann, wobei man E_0=13.6 eV wählt. Die sich ergebenden Werte von $Q_{Moseley}$ sind in Tab. 18.4 aufgeführt. Man erkennt, dass $Q_{Moseley}$ mit der Ordnungszahl des Elements übereinstimmt. Sortiert man die Elemente ihrer Masse, wie von Mendelejew vorgeschlagen, würde man Nickel vor Kobalt einordnen.

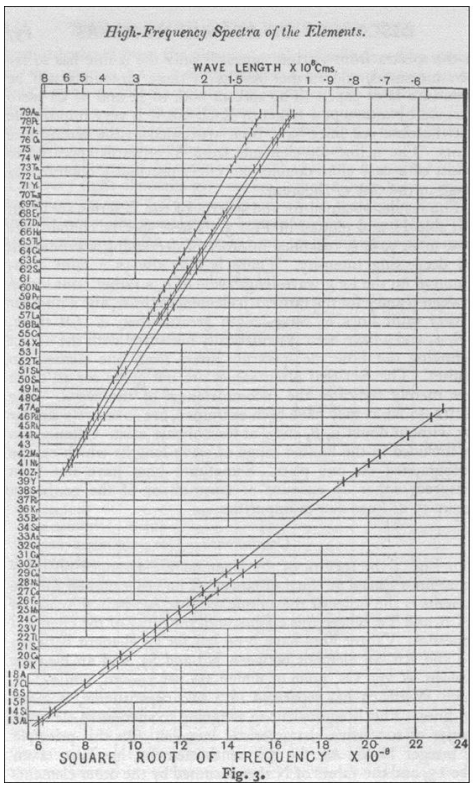


Abb. 18.26: Eine graphische Auftragung der Daten durch Moseley zeigt, dass es eine direkte Abhängigkeit zwischen den Wellenlängen der charakteristischen Röntgenstrahlung und der Ordnungszahl Z gibt [**?**].

This suggests that there is a gradual increase of something as we move higher up in the periodic table. This number is none other than the number of protons, what we call today as the atomic number. So, elements were arranged thereafter not based on the atomic weight but based on the atomic number.

Henry Moseley, 1913

Abb. 18.27 zeigt Spektren, die die Verschiebung der K-Röntgenlinien der Elementen Ca bis Zn aufzeigen [**?**]. Die Daten enthüllen, dass das K-Spektrum aus zwei Linien besteht, die Moseley mit α und β bezeichnete. Insbesondere war Ni war wegen seiner anomalen Position im Periodensystem von besonderem Interesse.

Die Elemente sind nach Mendelejew nach der Masse des Atoms angeordnet. Als Ergebnis sollte das Element mit der niedrigeren Atommasse zuerst kommen, gefolgt von dem Element mit größerer Masse. Bei der Gruppierung wurde festgestellt, dass das Element mit der größeren Atommasse zuerst kam, gefolgt von dem Element mit der niedrigeren Masse. Bei der Einordnung in die richtige Gruppe aufgrund der chemischen Eigenschaften steht das Element Kobalt mit der höheren Atommasse von 58.9 vor dem Element Nickel mit der Atommasse von 58.7. Mendelejews Periodengesetz konnte diese ungewöhnliche

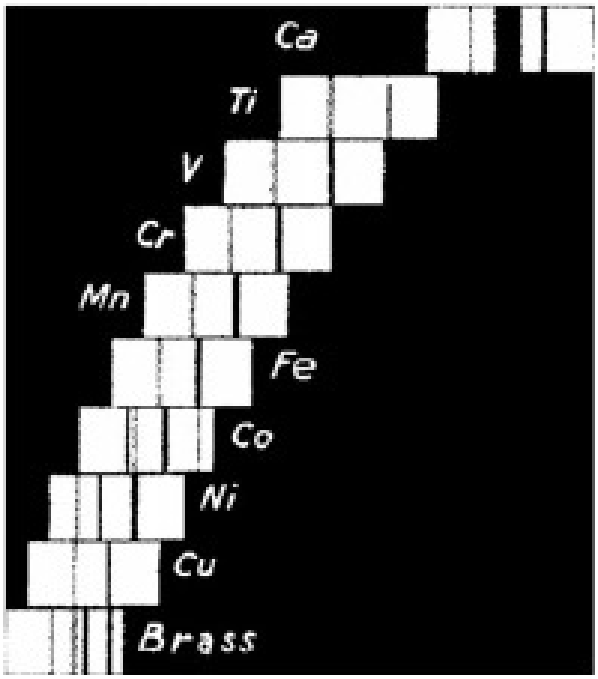


Abb. 18.27: Moseleys Photographien der K-Linien aufeinanderfolgender Elemente im Periodensystem. Die Fotos sind so angeordnet, dass sie die Zunahme der Röntgenwellenlänge verdeutlichen [**?**].

Element		Ordungszahl	Experimenteller Nachweis
Technetium	Tc	43	1937
Rhenium	Re	75	1925
Promethium[50]	Pm	75	1945

Tab. 18.5: Elemente, die von Moseley 1913 vorhergesagt wurden und das Jahr des experimentellen Nachweises.

Situation von Atommassen in falscher Reihenfolge nicht erklären.

Die Messungen von Moseley ergaben, dass sich die Elemente im Periodensystem nicht nach ihrer Masse, sondern nach ihrer Ordnungszahl Z anordnen. Beispielsweise erkannte er die falsche Zuordnung für das Element mit Z=43 und sagte statt dessen die Existenz eines bislang nicht bekannten Elements, nämlich Technetium.[51] Weiter Lücken ergaben sich bei Z=61 und 75. Tab. 18.5 stellt Moseleys Entdeckungen in den historischen Zusammenhang. Die Ordnungszahl ist also keine willkürlich gewählte Zahl, sondern charakterisiert die chemischen Elemente. Mit steigender Ordnungszahl steigt die Energiedifferenz an. Das bedeutet, dass sich beispielsweise die K_α-Linie mit steigendem Z zu höheren Frequenzen verschiebt. Schreibt man das Moseley-Gesetz als Funktion der Wellenlänge um, ergibt sich:

$$\frac{1}{\lambda_K} = \frac{3}{4}\frac{1}{h \cdot c} \cdot (Z-1)^2 \,[\mathrm{eV}] \tag{18.27}$$

Die Ordnungszahl ist also proportional zur Wurzel aus der Röntgen-Emissionswellenlänge.

[51] Technetium war das erste künstlich hergestellte Element (altgriechisch *künstlich*)

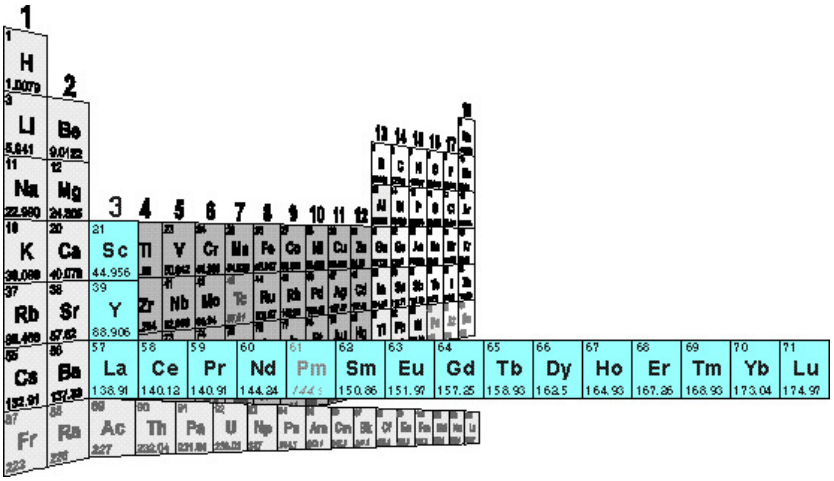
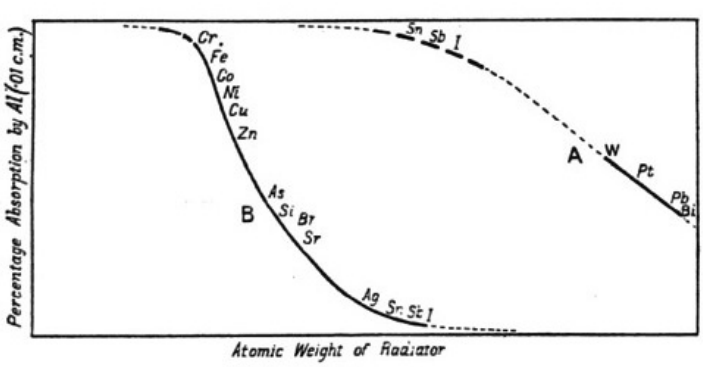


Abb. 18.28: Lanthanoide im Periodensystem der Elemente.

Die Gleichung bestätigt, dass es einen direkten Zusammenhang gibt zwischen der Ordnungszahl eines Elements und der experimentell gut zu beobachtenden Wellenlänge, bei der die K- und L-Röntgenlinien beobachtet werden, siehe Abb. 18.26. Schaut man sich die Daten genauer an, erkennt man, dass Bedingung eher lauten müsste: $\nu_{xray} \approx (Z-1)$ oder $E_{xray} \approx (Z-1)^2$. Wie lässt sich diese Diskrepanz erklären? Die Proportionalität zu Z^2 ergibt sich aus der Annahme, dass die inneren Elektronen NUR die Kernladung *fühlen*. Tatsächlich haben wir gesehen, dass die Abschirmung einen nicht unerheblichen Beitrag liefert. Im Fall der beiden innersten Elektronenzustände ergibt sich ein Abschirmungsfaktor von EINS (Gl. 18.20), der die Verschiebung der Moseleygeraden bewirkt.

Erhebliche Bedeutung haben die Arbeiten von Moseley für die Chemie der Lanthanoiden.[52] Chemiker waren nicht in der Lage, einzelne Elemente aus Proben (z.B. Salze) zu extrahieren. Das damals neu entdeckte Element Didymium (Di) stellte sich als Mischung anderer Elemente heraus. Tatsächlich bestand Didymium aus den Elementen Neodym und Praseodym (new twin oder green twin). Moseley zeigte, dass es exakt 15 Elemente in der Klasse der Lanthaniden gibt. Dies sind die Lanthan bis Lutetium (Z=57-71) im Periodensystem der Elemente (Abb. 18.28).

[52] *Lexikon:* Lanthanoide ist eine Gruppenbezeichnung ähnlicher Elemente. Die Lanthanoide sind weiche Metalle und sehr reaktionsfreudig. An der Luft oxidieren sie schnell und werden matt. Im Wasser zersetzen sie sich in kurzer Zeit unter Freisetzung von Wasserstoff. Aufgrund der ähnlichen Struktur der Valenzschale verhalten sich die Lanthanoide chemisch wie die Elemente Scandium und Yttrium und und man fasst sie in der Gruppe der Seltenen Erden zusammen. Der Name ist allerdings irreführend, da ihr Vorkommen auf der Erde keineswegs selten ist.




George Glover Barkla

Abb. 18.29: Diagramm, das die beiden Reihen B und A charakteristischer Strahlung zeigt (später umbenannt in K und L).[a] Aufgetragen ist die prozentuale Absorption in 0.1 mm Aluminiumfolie. [**?**].

[a]Der einzige Grund für die Wahl der heute noch verwendeten Buchstaben war, dass sie für Barkla in der Mitte des Alphabets lagen und somit Platz für noch unentdeckte Strahlungsreihen boten.

Anwendungen[4LP]

Elementanalyse durch Röntgenfluoreszenz

Professor Barkla! Before it was known that the nature of X-rays is the same as that of light, with a difference only in wavelength, you had found a form of polarization of those rays, and by your investigation of their absorption you had developed a form of spectroscopy, before it was known that there is a spectrum in the real sense of the word. You discovered a kind of secondary X-radiation that is independent of the chemical constitution, but characteristic of the element, and this characteristic X-radiation, now known as a line spectrum, has proved a phenomenon of fundamental importance.

Allvar Gullstrand[53], Nobel price banquet speech, 1917

Aufbauend auf der Erkenntnis, das die Elemente eine für sie charakteristische Linienstrahlung emittieren, hat sich, initiiert durch George Barkla[54] und Georg Karl von Hevesy[55], eine eigene Forschungsrichtung etabliert, die Röntgenfluoreszenz-Analytik.

The writer has recently investigated more closely the radiations from Sn, Sb, I (which have been recorded as elements emitting a radiation of variable penetrating power). It has been found that these consist of a very easy absorbed radiation and a very penetrating homogeneous radiation superposed. The absorptions of the penetrating portions of the beams from each element are shown in fig. 18.29 I on curve B. The percentage absorptions of the soft radiations from these elements have not yet been determined,

[53] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1911 was awarded to Allvar Gullstrand *for his work on the dioptrics of the eye.*

[54]siehe Fußnote 27

[55] The Nobel Prize in Chemistry 1943 was awarded to George de Hevesy *for his work on the use of isotopes as tracers in the study of chemical processes.*

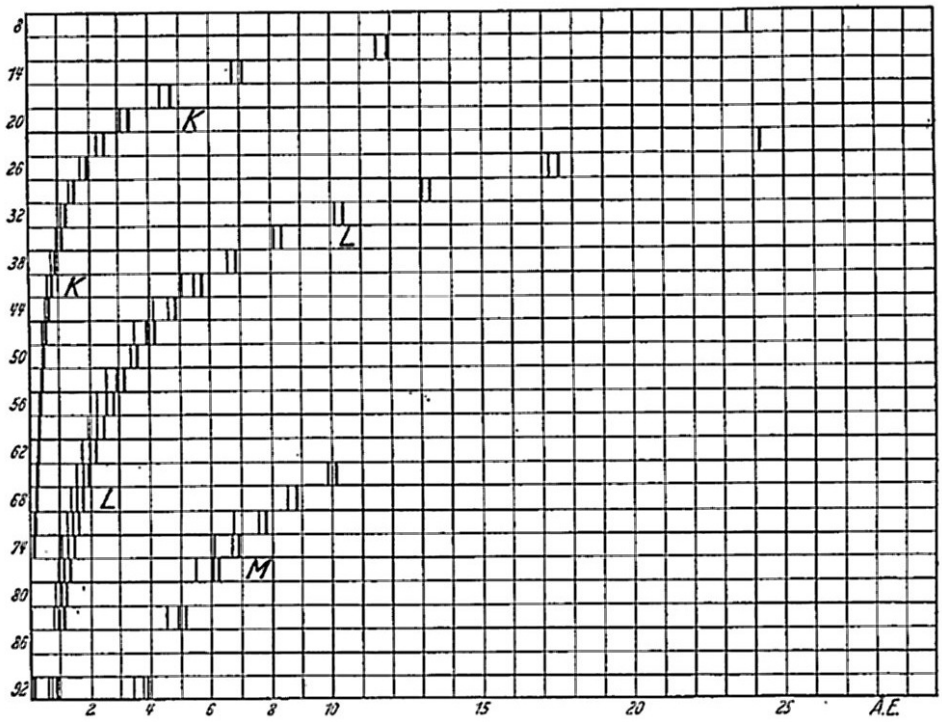


Abb. 18.30: Die stärksten Linien der K-, L-, und M-Serie ausgewählter Elemente Z=8 (Sauerstoff) bis 92 (Uran). Die Daten für jedes dritte Elemente sind aufgeführt. Auf der Abszisse ist die Wellenlänge (0.1-25 Å) und auf der Ordinate die Ordnungszahl Z aufgetragen [**?**].

but they are roughly indicated on curve A in fig. 18.29. Though a full analysis of the radiations from W, Pt, Au, Pb, Bi, etc., has not yet been made, there is strong evidence that the observed radiations from these elements are also principally homogeneous radiations characteristic of the elements emitting them [**?**].

It is seen that the radiations fall into two distinct series, here denoted by the letters K and L . . . It has been shown that each element has its own characteristic fluorescent line spectrum in X-rays. This is very conveniently represented as in a spectrum of ordinary light, except that without a knowledge of the wavelength we are obliged to define the radiations by their absorption in some standard substance. Thus we may represent the known portion of the spectra of elements Sb, I, and Ba as in fig. 5. The lines move towards the more penetrating end of the spectrum with an increase in the atomic weight of the element.It is scarcely too much to say that all the phenomena connected with the transmission of X-rays through matter may be readily explained in terms of a few simple laws expressed with reference to these spectra.

Charles Glover Barkla, 1911

Abb. 18.30 zeigt die stärksten Röntgenlinien ausgewählter Elemente zwischen Sauerstoff ($Z = 8$) und Uran (Z=92). Abb. 18.31 konzentriert sich auf die Elemente Mangan

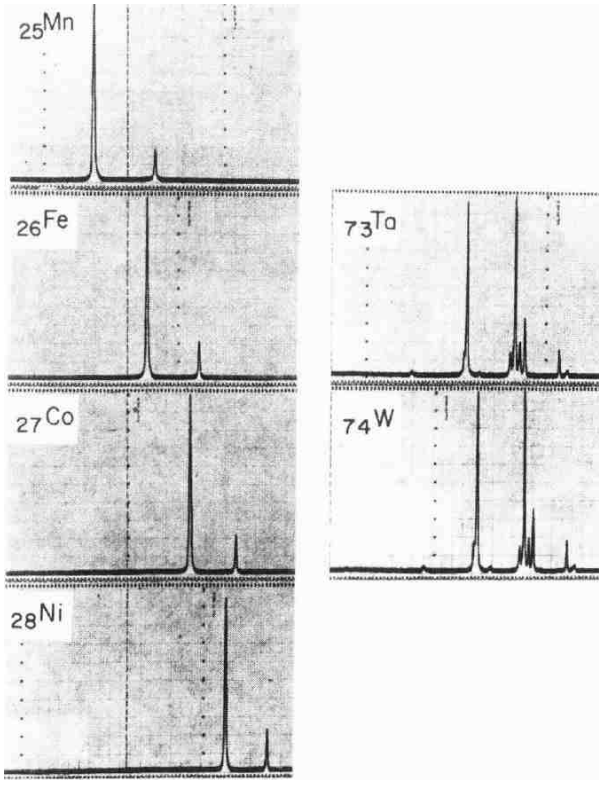


Abb. 18.31: Die K-Serie der Elemente Mangan bis Nickel (links) und der L-Serie von Tantal und Wolfram (rechts). Die Verschiebung der Röntgenlinien mit der Ordnungszahl Z ist klar erkennbar [**?**].

bis Nickel. Bei der Bestrahlung von Proben mit Röntgenlicht stellte man fest, dass Röntgenemission einen weiteren, frequenzverschobenen Anteil enthält. Barkla zeigte, dass die Strahlung charakteristisch für das Anodenmaterial ist. Beispielsweise hat die Emission aus Eisen eine deutlich höhere Photonenenergie als die aus Aluminium. Die so genannte Röntgenfluoreszenz gibt Auskunft über die jeweilige Substanz. Abb. 18.32 zeigt als Beispiel die Analyse der Elementzusammensetzung einer Probe mit Hilfe der Röntgenfluoreszenz-Diagnostik.

In Verbindung mit der Elektronenmikroskopie (Kapitel *Materiewellen*) findet die energiedispersive Röntgenanalyse (EDX) Anwendung. Sie dient ebenfalls zur Identifizierung der Elementzusammensetzung von Materialien. Typische Anwendungsbereiche sind die Materialforschung und die Forensik. Die durch die EDX-Analyse erzeugten Spektren geben Auskunft über die Elemente, die in der Probe enthalten sind. Elektronenmikroskopie in Verbindung mit EDX ermöglicht eine ortsaufgelöste Elementanalyse. Abb. 18.33 zeigt die Häufigkeit eines Elements in einem Material anhand einer Falschfarbendarstellung.

Ein Beispiel aus der Kunstgeschichte

Kunstwerke sind vergänglich. Pigmente und Bindemittel in Ölgemälden zersetzen sich mit der Zeit durch Lichteinwirkung, Feuchtigkeit oder Temperaturschwankungen. Hinzu kommen Reinigungsmitteln, die zur Konservierung eingesetzt werden oder die Verwendung nicht mischbarer Pigmente durch den Künstler selbst, die langfristig die Original-

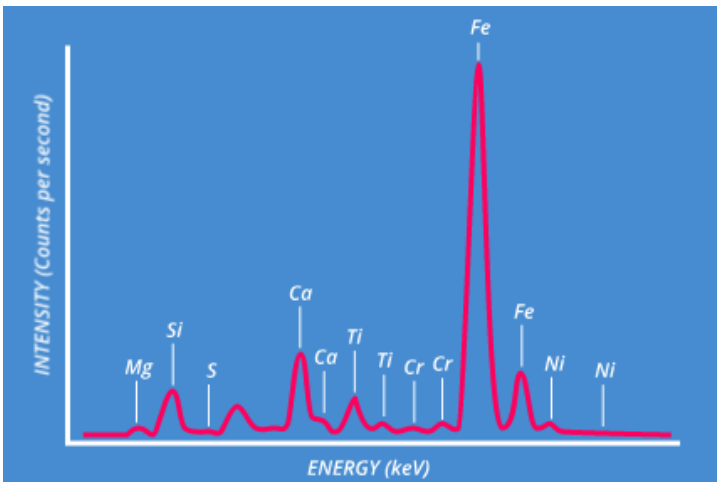


Abb. 18.32: EDX-Analyse einer Materialprobe, aus der die chemischen Zusammensetzung abgeleitet werden kann.

farbe ändern können. Die wissenschaftliche Herausforderung ist deshalb, diese Prozess zu verstehen und einzuordnen. Abb. 18.34 zeigt eine solche Analyse am Beispiel des gelben Rose im Bild *Stillleben mit Uhr* des Malers Abraham Mignon. Der Künstler malte seine gelben Rosen unter Verwendung des Minerals Orpiment (As_2S_3). Das Problem ist, dass sich das Mineral im Laufe der Zeit verfärbt. Mittels Röntgenfluoreszenz wurde die Bestandteile der verwendeten Farbmixtur analysiert, siehe Abb. 18.35. Mit Hilfe der Röntgenbeugung, als zusätzlicher Analytik (siehe Kapitel *Röntgendiagnostik*) gelang es auch molekulare Spezies zu identifizieren. Die Untersuchung war in der Lage, die Maltechnik von Mignon aufzuschlüsseln und wesentliche optische Veränderungen bei Verwendung der Pigmentpalette zu identifizieren. Die Röntgenanalytik ermöglicht damit neue Möglichkeiten, die Methoden zur Restauration solcher Bilder zu verbessern.

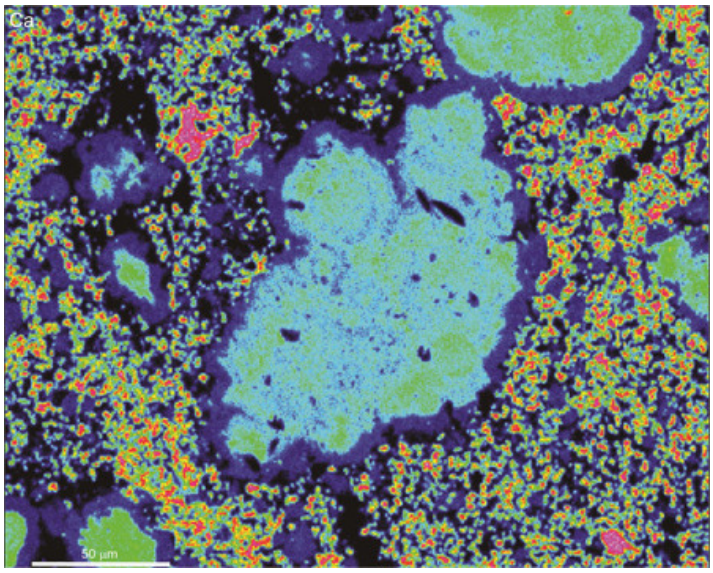


Abb. 18.33: Änderung der Konzentration eines Elements über den Bereich einer Probe, bestimmt mit EDX. In diesem Beispiel zeigen rote Farben höhere und blaue Farben niedrigere Konzentrationen eines bestimmten Elements an.



Abb. 18.34: Pigmentabbau in der gelben Rose des Gemäldes *Stillleben mit Blumen und Uhr* (Öl auf Leinwand, circa 1660). (A) Fotografie (B) Detailaufnahme der gelben Rose (C) Arsen Elementverteilung [**?**].

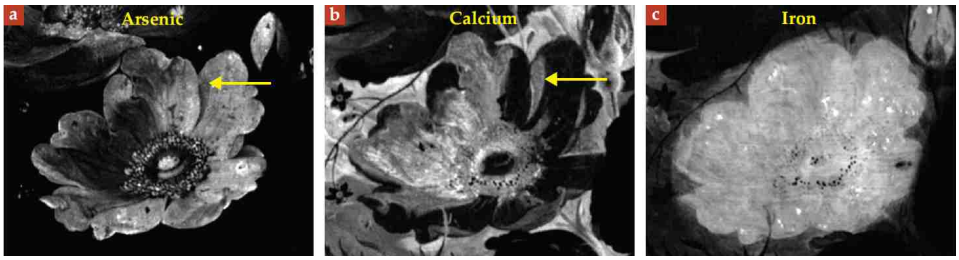


Abb. 18.35: Röntgenfluoreszenz aufgezeichnet für bestimmte Elemente im Bild *Stillleben mit Uhr*. (a) Verteilung von (a) Arsen (b) (Kalzium) und (c) Eisen in der Farbe der Rose [**?**].

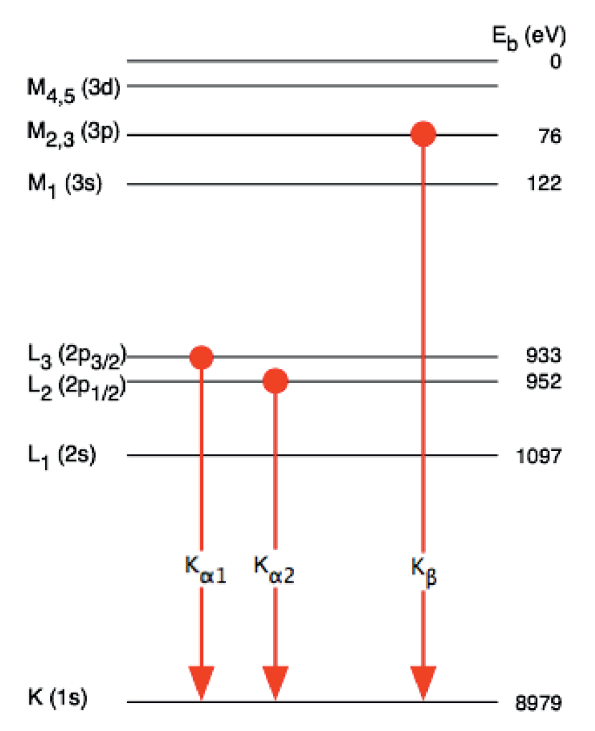


Abb. 18.36: zu Aufgabe 1.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Abb. 18.36 zeigt das Termschema von Kupfer. Berechnen sie die Wellenlänge des $K_{\alpha 2}$ Röntgenübergangs.

$$\begin{aligned} E_{K_{\alpha 2}} &= E(K) - E(L_2) \\ E_{K_{\alpha 2}} &= 8879\,\text{eV} - 952\,\text{eV} \\ E_{K_{\alpha 2}} &= 7927\,\text{eV} \\ \lambda &= \frac{1240\,\text{pm}\cdot\text{keV}}{7.927\,\text{keV}}[\text{pm}] = 156\,\text{pm} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2: Man berechne das Verhältnis der K_α Röntgenlinien von Kupfer und Molybdän!

Nach dem Moseley Gesetz gehen in Gl. 18.27 nur die Ordnungszahl Z und die entsprechende Serie ein. Das Periodensystem liefert für Kupfer Z_{Cu}=29 und für Molybdän Z_{Mo}=42. In diesem Fall ist nach der K-Serie gefragt. Nach Tab. 18.3 wählt man deshalb b=10.

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{Mo}}{\nu_{Cu}} &= \frac{(Z_{Mo}-1.0)^2}{(Z_{Cu}-1.0)^2} \\ \frac{\nu_{Mo}}{\nu_{Cu}} &= \frac{(40,8)^2}{(27.8)^2} \\ \frac{\nu_{Mo}}{\nu_{Cu}} &= 2.14 \end{aligned}$$

Wie vielleicht erwartet, ergibt die höhere Ordnungszahl auch das höherenergetische Röntgenlicht.

Aufgabe 2.3: Charakteristische Röntgenstrahlen der Frequenz $4.2 \cdot 10^{18}\,\mathrm{Hz}$ entstehen bei Übergängen von der L- zur K-Schale in einem Material. Man verwende das Gesetz von Moseley, um die Ordnungszahl des Elements aus der K_α-Linie zu bestimmen.

Betrachtet wir den Röntgenübergang eines Elektrons von der L-Schale in ein leeres Orbital der K-Schale. Für die Wellenlänge ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} &= \frac{\nu}{c} \\
\frac{1}{\lambda} &= \frac{4.2 \cdot 10^{18}\,\mathrm{Hz}}{2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}} \\
\frac{1}{\lambda} &= 1.4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1} \\
\lambda &= 7.14 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Das Moseleys Gesetz besagt:

$$\sqrt{\nu} = a \cdot (Z - \sigma)$$

Für den K_α-Übergang ist n_1=1 und n_2=2. Das Kernpotenzial $Z \cdot e$ ist nur durch das einzelne Elektron der K-Schale abgeschirmt. Die effektive Kernladung ist deshalb $(Z - 1) \cdot e$. Für diesen Übergang ist deshalb $b \approx 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} &= = R_\infty (Z-1)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\
\frac{1}{\lambda} &= = R_\infty (Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \\
Z &= 1 + \sqrt{\frac{1}{\lambda \cdot R_\infty} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_2 - n_1}} \\
Z &= 42
\end{aligned}$$

Die Ordnungszahl ist 42. Es handelt sich also um Molybdän.

Aufgabe 2.4: Im Moseley Gesetz sind:[56]

(a) Die Parameter a und σ sind unabhängig vom betrachteten Element!

(b) a ist abhängig und σ ist unabhängig vom betrachteten Element!

(c) a ist unabhängig und σ ist abhängig vom betrachteten Element!

(d) Beide Parameter hängen vom betrachteten Element ab!

[56] Antwort: (a)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Bedeutung hat das Moseley-Gesetz für das Periodensystem der Elemente?
2. Was verbirgt sich hinter dem Kürzel EDX?
3. Erklären sie die Bedeutung der Konstanten a und σ im Moseley-Gesetz!
4. Welche Beziehung gibt es zwischen Wellenlänge der charakteristischen Strahlung und der Ordnungszahl der Elemente?
5. Gilt das Moseley-Gesetz ausschließlich für die K-Serie?

18.3 Röntgenröhre



Bei einer Röntgenröhre handelt es in der Regel um eine geschlossene Glasröhre unter Vakuumbedingungen. An diesen Röhren kann nichts getauscht werden, wodurch die Lebensdauer aufgrund der erheblichen thermischen Belastung begrenzt ist. Bei einer von außen zugänglichen Version der Röhre kann die aus Stahl bestehende Röhre zum Filament- und Targetwechsel (meist ein aus Wolfram bestehendes Plättchen oder Block) geöffnet werden. Die Röntgenstrahlen gehen von derjenigen Stelle innerhalb einer Röhre aus, an der die schnellen Elektronen auf die Oberfläche der Anode prallen. Abb. 18.37 liefert Beispiele für historische Röntgenquellen.

Abb. 18.38 zeigt den schematischen Aufbau einer Röntgenröhre. Elektronen werden durch ein geheiztes Filament ins Vakuum gebracht. Die Stromdichte J_e berechnet sich auf der Grundlage der Richardson-Dushman Gleichung

$$J_e = \frac{4\pi \cdot m_e \cdot e \cdot k_B^2 \cdot T_K^2}{h^3} \exp\left(-\frac{W_A}{k_B \cdot T_K}\right) \tag{18.28}$$

wobei k_B die Boltzmann Konstante, T_K die Temperatur und W_A Austrittsarbeit des Festkörpers ist (Kapitel *Photoelektrischer Effekt*). Die Temperatur des Filaments und die Austrittsarbeit des Anodenmaterials bestimmen also die Emissionsrate. Die von der



Abb. 18.37: Röntgenquellen, wie sie für Forschung und Medizin eingesetzt wurden.

Glühkathode emittierten Elektronen werden durch ein elektrisches Feld in Richtung der Anode beschleunigt.

Die Effizienz einer Röntgenröhre, also wie viel der kinetischen Energie der Elektronen tatsächlich in Röntgenemission umwandelt ist abhängig von der Beschleunigungsspannung und der Ordnungszahl. Die Proportionalität ist $U_e \cdot Z$. Bei 100 keV beträgt sie gerade mal 0.8%. Da die Bewegungsenergie der Elektronen beim Auftreffen zu einem erheblichen Teil in Wärme umwandelt, sind die betroffenen Bauteile einer hohen thermischen Belastung ausgesetzt. Aus diesem Grund werden Röntgenröhren so gebaut, dass die Anode aus Materialien mit möglichst hoher Schmelztemperatur (z.B. Tantal) besteht. In der Regel ist eine Wasserkühlung notwendig. Die Fokussierung des Elektronenstrahls reduziert den Brennfleck aus dem die Röntgenemission erfolgt, wodurch sich die Abbildungseigenschaften der Röntgenquelle beim Schattenwurf verbessern. Allerdings erhöht die reduzierte Größe des Brennflecks zusätzlich die thermische Belastung der Kathode. Daher müssen technische Voraussetzungen geschaffen werden, um die Funktion der Röntgenröhre zu gewährleisten. Die Lösung sind so genannte Drehanoden. Eine Rotation der Metallscheibe erlaubt eine geringere Spotgröße, weil durch die Rotation die Aufheizung der Anode minimiert wird. Dies erhöht die Lebensdauer der Anodenoberfläche. Zusätzlich sorgt eine Wasserkühlung der Anode für den Abtransport der durch den intensiven Elektronenstrahl deponierten thermischen Energie. Abb. 18.39 zeigt den Aufbau einer Drehanoden-Röntgenquelle. Die resultierende Emission zeigt eine starke Winkelabhängigkeit, die auch von der gewählten Beschleunigungsspannung abhängt, siehe Abb. 18.40. Ein Teil der Strahlung durchdringt das Anodenmaterial und wird dabei

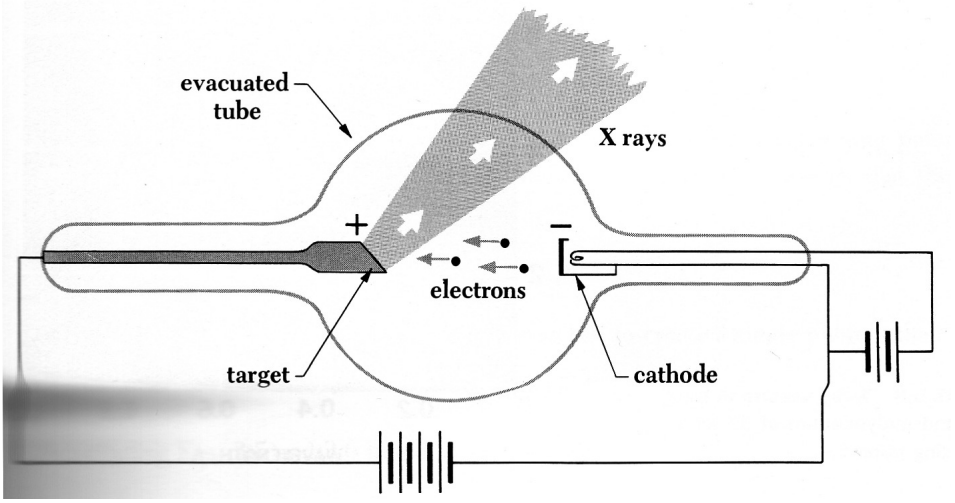


Abb. 18.38: Schematischer Aufbau einer Röntgenröhre [**?**].

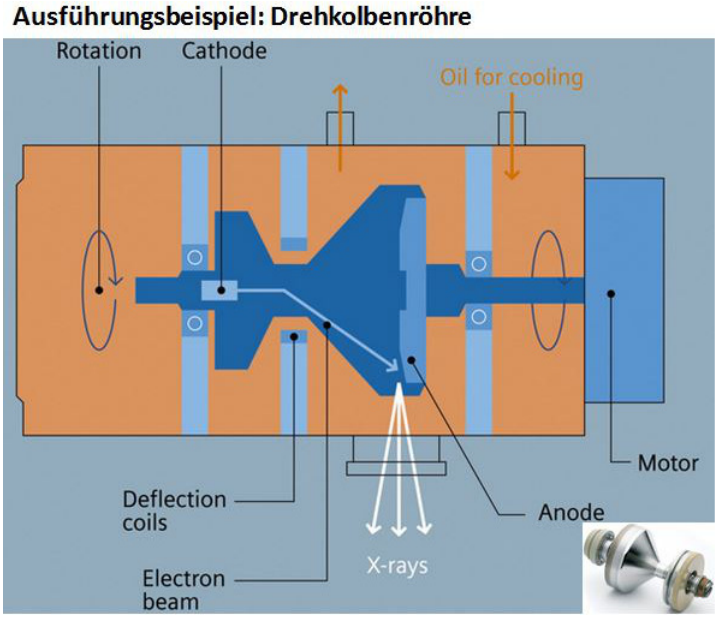


Abb. 18.39: Schematischer Aufbau einer Röntgen-Drehanode. Durch die Rotation der Anode wird die lokale thermische Belastung durch den Brennfleck abgemindert, wodurch die Röhren längere Zeit und bei höherem Elektronenstrom betrieben werden können.

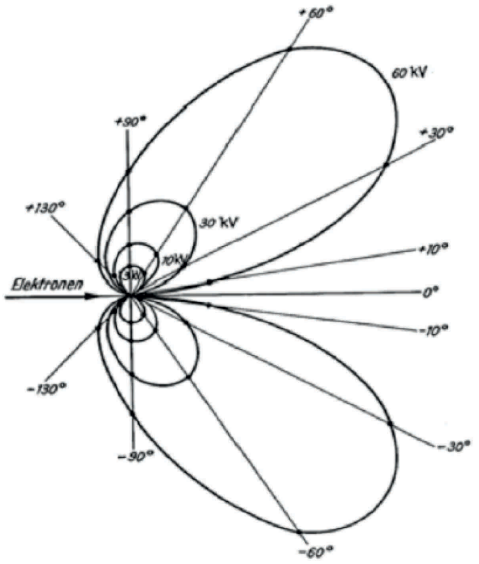


Abb. 18.40: Winkelverteilung der Röntgenemission als Funktion der Beschleunigungsspannung

in ihrer Intensität abgeschwächt. Man nennt dieses durch die Geometrie hervorgerufenen Verhalten den Heel-Effekt.[57] Die Strahlung wird keulenförmig in Vorwärtsrichtung abgestrahlt, was auf relativistische Effekte hindeutet (Kapitel *Zerfall des Myons.*)

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Röntgentechnologie

Seit der Entdeckung der Röntgenstrahlen vor über einem Jahrhundert haben sich Röntgenquellen in ihrer Bauform kaum verändert und es gab nur wenige grundlegende technologische Fortschritte. Die Verwendung herkömmlicher thermionicher Quellen ist durch ihre langsame zeitliche Reaktion und große physische Größe begrenzt. Eine neuere Entwicklungen sind Kathoden auf der Basis von Kohlenstoff-Nanoröhren und dem Fowler-Nordheim Tunneln [**?**]. Solche Röntgenstrahlungsemitter benötigen keine hohen Betriebstemperaturen, wodurch eine kompakte Bauform möglich wird. Kohlenstoff–Nanoröhren zeichnen sich durch ein hohes Aspektverhältnis, eine hohe Wärmeleitfähigkeit und eine geringe Reaktivität aus. Sie können preiswert als Nanoröhrenbündel hergestellt werden. Der zugrunde liegende Prozess der Feldemission erfordert jedoch Hochvakuumbedingungen, um einen stabilen Betrieb zu gewährleisten, was die Anwendungsmöglichkeiten einschränkt.

[57] *Lexikon:* In Röntgenröhren ist der Anoden-Heel-Effekt eine Änderung der Intensität der von der Anode emittierten Röntgenstrahlung in Abhängigkeit von der Emissionsrichtung und zwar entlang der Verbindungslinie zwischen Anode und Kathode. Röntgenstrahlung, die parallel zur Anodenoberfläche emittiert wird, ist weniger intensiv als solche, die in Richtung der Kathode emittiert wird. Der Effekt beruht auf der Absorption von Röntgenphotonen durch das Material der Anode. Der Grad der Absorption hängt von der Strecke ab, die die Photonen in der Anode zurücklegen müssen. Der Emissionswinkel relativ zur Anodenoberfläche spielt deshalb eine wichtige Rolle.

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Um höhere Photonenenergien mit einer Röntgenröhre zu erreichen, ändert man[58]

(a) den Anodenstrom (mA).

(b) die Belichtungszeit (s).

(c) die Spannung an der Röntgenröhre (kV).

(d) die Heizspannung am Filament.

(e) den Abstand zum Objekt.

Aufgabe 3.2: Weniger als 1% der Energie des Elektronenstrahls wird in einer Röntgenröhre in Strahlung umgewandelt. Der Rest ist thermische Energie. Um ein Schmelzen der Röhre zu vermeiden[59]

(a) wird die Anode ständig gedreht.

(b) kühlt man die Kathode.

(c) benutzt man Metalle mit hohem Schmelzpunkt.

(d) verringert man die Beschleunigungsspannung.

(e) kühlt man die Anode.

Aufgabe 3.3: Eine Röntgenröhre liefert bei 50kV einen Elektonenstrom von10 mA. Welche Leistung ergibt sich?

$$P_e = (1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{A}) \cdot (5 \cdot 10^{4}\,\mathrm{V}) = 500\,\mathrm{W} \tag{18.29}$$

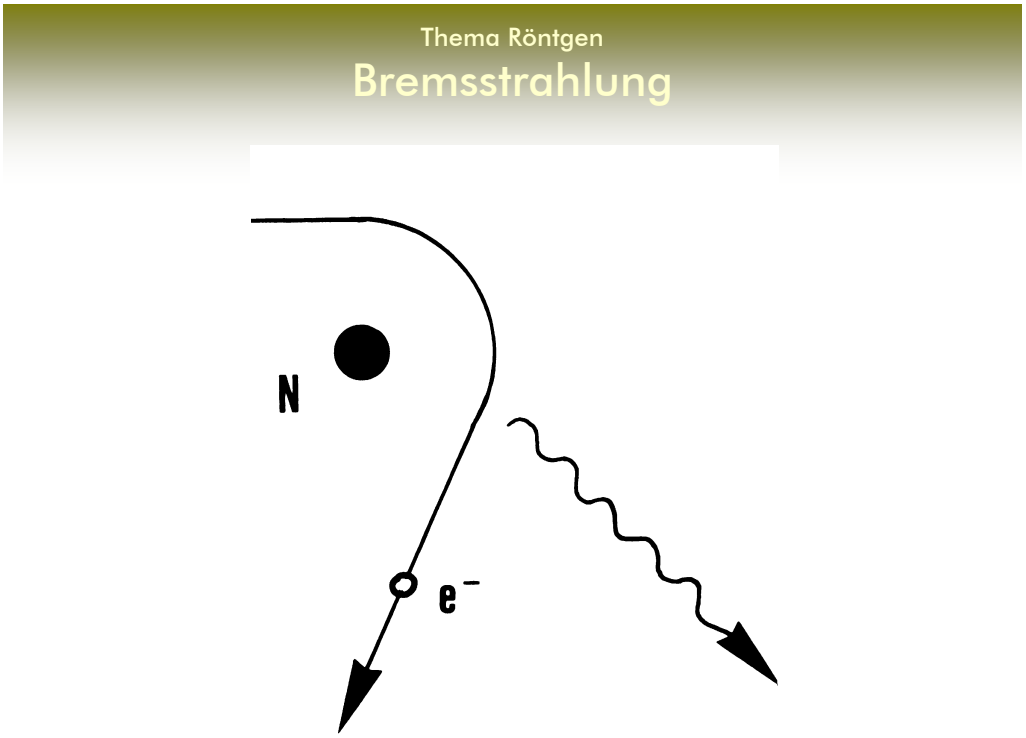
Man erkennt, dass es vorteilhaft ist, die dadurch erzeugte thermische Energie durch Wasserkühlung abzuführen.

[58] Antwort: (c)
[59] Antwort: (a), (b), (e)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Fertigen Sie eine Schemazeichnung des Aufbaus einer Röntgenröhre an!
2. Warum ist es notwendig, dass das Filament heiß ist?
3. Welche Eigenschaften sollte eine Röntgenanode aufweisen und warum ist Wolfram in dieser Hinsicht die beste Wahl?
4. Der Elektronenstrahl einer Röntgenröhre erzeugt einen eng begrenzten Brennfleck. Wenn Sie eine bestimmte Intensität der Röntgenstrahlung in einer Entfernung von 60 cm messen, welchen Prozentsatz erwarten Sie bei 90 cm?
5. Wieso erwartet man, dass eine Wolfram-Anode eine höhere Röntgenintensität liefert im Vergleich zu einer aus z.B. Chrom bei ansonsten gleichen Bedingungen?

18.4 Bremsstrahlung



Bremsstrahlung[60] ist kurzwellige elektromagnetische Strahlung, die bei der Abbremsung von Elektronen in Materie infolge der Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen mit den Protonen des Atomkerns entsteht. Bremsstrahlung kann als inverse Photoemission (Kapitel *Photoelektrischer Effekt*) aufgefasst werden. Aus Gründen der Energie- und Impulserhaltung muss sich das abgebremste Elektron in der Nähe eines Atoms oder Ions befinden, damit die Impulsdifferenz ausgeglichen ist. Fliegt ein energetisches Elektron in der Nähe eines Atoms vorbei, wird die Bahntrajektorie durch die Coulombkraft beeinflusst. Durch diese Beschleunigung kommt es zur Aussendung von elektromagnetischer Strahlung (Kapitel *Materiewellen* und *Bohrsches Atommodell*), siehe oben. Nach der klassischen Elektrodynamik ist die pro Zeiteinheit abgegebene Energie eines Elektronen, wenn es von einem Atomkern mit Ordnungszahl Z abgebremst wird, proportional zu Z^2/m_e^2. Die Energieabgabe ist also groß für schwere Kerne (Z) und leichte Teilchen (m_e). Durch die Abstrahlung elektromagnetischer Strahlung reduziert sich die kinetische Energie der Elektronen. Diesen Beitrag zum Röntgenspektrum nennt man deshalb Bremsstrahlung.

[60] Der Begriff wurde von Sommerfeld eingeführt.

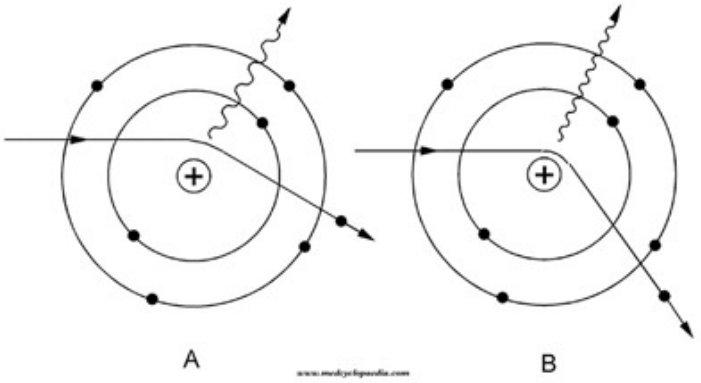


Abb. 18.41: Bei der Ablenkung des Elektrons durch die Coulombpotenzial des Kerns kommt es zur Emission elektromagnetischer Strahlung. Die Photonenenergie hängt vom Abstand zwischen Elektron und Kern ab. Je näher das Elektron am Kern vorbeifliegt, desto kurzwelliger ist das ausgesendete Röntgenlicht.

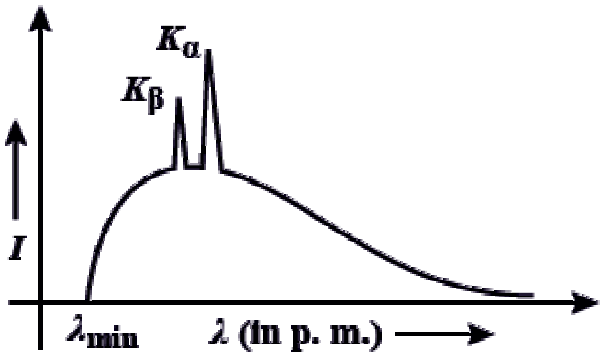


Abb. 18.42: Typisches Röntgenspektrums. Bei längeren Wellenlängen fällt die Intensität der Strahlung mit etwa $1/\lambda^2$ ab.

Die vom Elektron emittierte Wellenlänge hängt vom Abstand zum Kern ab. Kurzwellige, energiereiche Photonen werden abgestrahlt, wenn der Streuprozess in Kernnähe stattfindet. Langwelligere, energieärmere Photonen werden emittiert, wenn die Entfernung vom Kern größer ist (Abb. 18.41). Als Faustregel kann man sich merken: Eine höhere Beschleunigung in Kernnähe liefert höhere Photonenenergien. Die Elektronen fliegen in allen möglichen Abständen am Kern vorbei, wobei keine Entfernung heraussticht. Die Abstrahlung im Frequenzraum ist daher in erster Näherung nahezu konstant bis zu einer -wie wir gleich kennenlernen werden- Grenzfrequenz $\nu_{\max}$. Wie sieht das zugehörige Spektrum als Funktion der Wellenlänge aus? Der Ausdruck $I(\nu)\,d\nu$ beschreibt den Anteil der Strahlung im Frequenzintervall $\nu + d\nu$. Analog ergibt für ein Wellenlängenintervall $I(\lambda)\,d\lambda$. Rechnet man das Spektrum nicht im Frequenzraum, sondern als Funktion der

Wellenlänge, ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
I(\lambda)\,d\lambda &= I(\nu)\frac{d\nu}{d\lambda}\,d\lambda \\
I(\lambda)\,d\lambda &= I(\nu)\frac{d}{d\lambda}\frac{c}{\lambda}\,d\lambda \\
I(\lambda)\,d\lambda &= -\frac{c}{\lambda^2}I(\nu)\,d\lambda \qquad (18.30)\\
I(\lambda)\,d\lambda &\approx -\frac{1}{\lambda^2} \qquad (18.31)
\end{aligned}
$$

Wie man sieht, ergibt sich bei der Auftragung gegenüber der Wellenlänge ein $1/\lambda^2$-Abfall in der Intensität. Damit ahnen wir schon, wie das Spektrum der Bremsstrahlung bei geringen Wellenlängen ausschaut. Kontinuierlich und bei geringen Photonenenergien stark abfallend. Abb. 18.42 demonstriert, dass sich die Intensität der Röntgenstrahlung bei längeren Wellenlängen genauso verhält, wie man es nach dem einfachen Modell erwartet.
Fassen wir die Ergebnisse für die Bremsstrahlung zusammen:

- Hochenergetische Elektronen werden bei Eintritt in die Anode stark abgebremst.
- Ursache der Röntgenstrahlung ist die Wechselwirkung mit den stark positiv geladenen Kernen.
- Beschleunigte Ladungen strahlen speziell im Wellenlängenbereich der Röntgenstrahlung.
- Quantisierte Zuständen sind bei dem Prozess der Bremsstrahlung nicht beteiligt.
- Die Energieabstrahlung ergibt ein kontinuierliches Spektrum.
- Man nennt diesen Beitrag im Röntgenspektrum den Bremsstrahlungsanteil.

Insgesamt stellt man also fest, dass sich das Spektrum einer Röntgenröhre zusammensetzt aus dem Charakteristischen Spektrum und dem Bremsstrahlungsspektrum, siehe Abb. 18.43. Abb. 18.44 zeigt Spektren von Wolfram und Molybdän. Klar erkennt man, das bei einer Beschleunigungsspannung von 35 keV nur bei Mo Charakteristische Linienstrahlung auftritt.

Anwendungen[4LP]

Ein Beispiel aus Astronomie

Weiße Zwerge sind extrem kompakte Sterne, wobei die Masse M (etwa Sonnenmasse) konzentriert ist auf ein erdähnliches Volumen (Radius R). Die relativistische Rotverschiebung, hervorgerufen durch die enorme Masse und den geringen Radius (Kapitel ART), bewirkt, dass sich Emissionslinien verschieben. Ursache ist der Term $G_N \cdot M/(R \cdot c^2)$ in der entsprechenden Gleichung zur Gravitationsrotverschiebung. Die Frage stellt sich: Kann ein sehr massereicher Stern im Laufe seines Lebenszyklus so dicht werden,

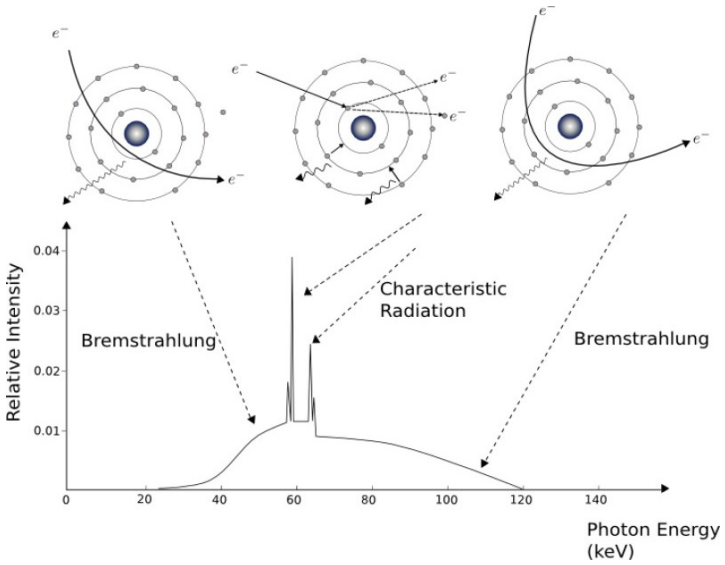


Abb. 18.43: Beiträge zum Röntgenspektrum durch Bremsstrahlung und Charakteristische Strahlung.

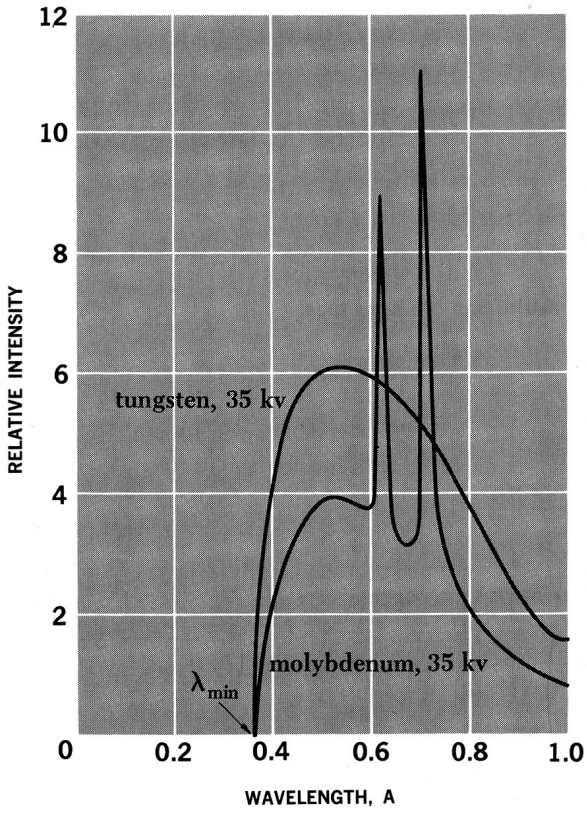


Abb. 18.44: Vergleich der Röntgenemission aus Molybdän und Wolfram, wobei aufgrund der geringen kinetischen Energie der Elektronen von 35 keV nur Molybdän charakteristische Strahlung aussendet [**?**].

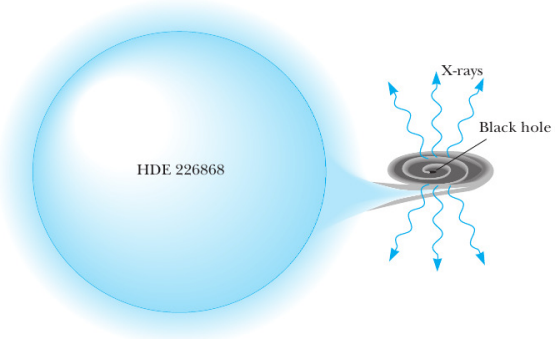


Abb. 18.45: Materie des Doppelsternbegleiter, eines blauweißen Überrieses (HDE 226868) strömt in eine Akkretionsscheibe um das Schwarzes Loch Cygnus X-1. Die einfallenden Gase werden in ihrer Spiralbewegung zum Schwarzen Loch auf so hohe Temperaturen erhitzt, dass intensive Röntgenstrahlung emittiert wird.

dass dieser Term größer als EINS wird? Dann könnte Licht nicht mehr entweichen, da die Energie für die Emission nicht mehr ausreicht. Das sind die Bedingungen eines Schwarzen Lochs. Obwohl das Schwarze Loch selbst nicht leuchtet, könnte es aber indirekt beobachtet werden. Beispielsweise könnte sich durch die Gravitationsanziehung des Schwarzen Lochs auf einen anderen Stern ein Doppelsternsystem bilden. Der normale Stern umkreist den Schwerpunkt des Doppelsternsystems und das Schwarze Loch würde sich durch die Bahnbewegung der Sonne offenbaren (Kapitel Relativistischer Dopplereffekt). Eine andere Methode, das Schwarze Loch zu beobachten, wäre die Beobachtung von Röntgenstrahlung. Materie des Begleiter, angezogen durch das das Schwarze Loch, strömt in das Schwarze Loch, wird stark erhitzt und sendet Röntgenstrahlung aus. Das Schwarze Loch strahlt also selbst selbst nicht, sondern die Masse, die in das Schwarze Loch fällt, siehe Abb. 18.45. Die intensiv leuchtende intensive Röntgenquelle im Sternbild Schwan [**?**],[61] Cygnus X-1 wird als Kandidat für diesen Prozess gehandelt. Die Leuchtkraft von Cygnus X-1 ist enorm: 10^{30} W im Röntgenbereich von 2 bis 10 keV.

[61] Cygnus X-1 ist das Erste in der Milchstraße nachgewiesene Schwarze Loch.

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Der Wellenlängenbereich von Röntgenstrahlung ist im Bereich von[62]

(a) 10 bis 1 μm

(b) 1000-100 nm

(c) 1000-1 pm

(d) 10-1 mm

(e) 10-1 m

Aufgabe 4.2: Die Strahlung aus Röntgenröhren wird erzeugt durch die Beschleunigung von[63]

(a) Protonen

(b) Photonen

(c) Elektronen

(d) Positronen

(e) Phononen

Aufgabe 4.3: Welche der folgenden Aussagen charakterisiert Röntgenstrahlen?[64]

(a) Die Strahlung kann Gase ionisieren.

(b) Ein ZnS-Kristall wird zur Fluoreszenz angeregt.

(c) Die Strahlung wird durch elektrische Felder abgelenkt.

(d) Die Strahlung wird durch magnetische Felder abgelenkt.

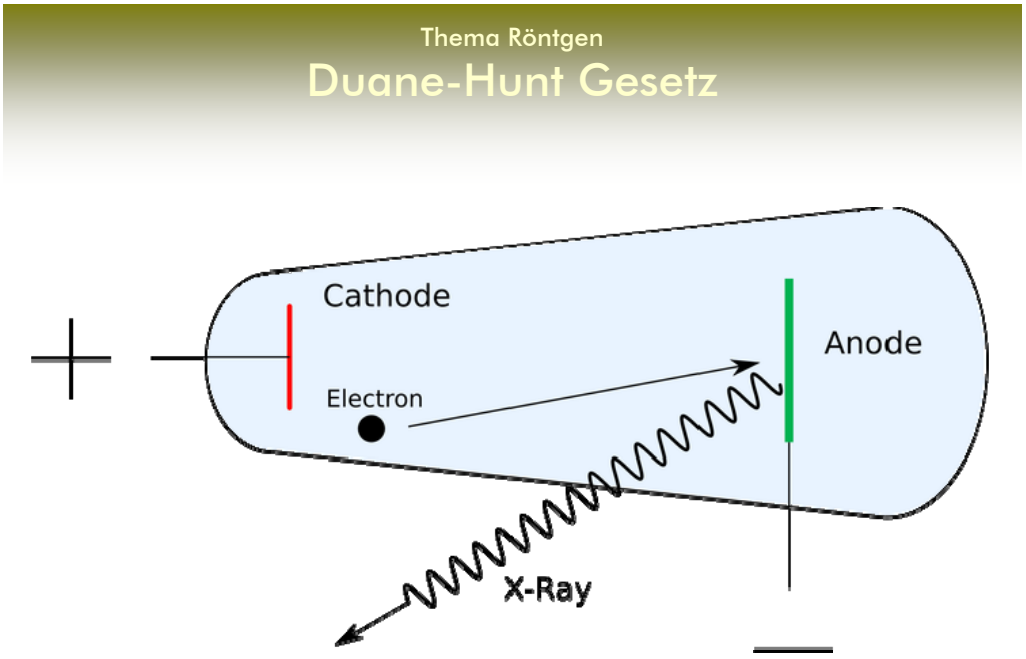
(e) Die Strahlung hat Wellenlängen, deutlich kürzer als ultraviolettes Licht.

[62] Antwort: (c)
[63] Antwort: (c)
[64] Antwort: (a), (b), (e)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Skizzieren Sie das Spektrum einer Röntgenröhre.
2. Wie entsteht die kontinuierliche Strahlung im Röntgenspektrum?
3. Erklären Sie, warum man bei der Röntgenemission sowohl ein kontinuierliches als auch ein Linienspektrum beobachtet!
4. Kann man Röntgenstrahlung nutzen, um Details des Atomkerns aufzulösen?

18.5 Duane-Hunt Gesetz



Warum überschreitet die Frequenz der Bremsstrahlung nicht einen bestimmten Wert? Die Ursache klärt das Duane-Hunt Gesetz, das manchmal auch als die inverse photoelektrische Gleichung bezeichnet wird. Abbildung 18.46 zeigt Röntgenspektren von Platin–, Palladium- und Nickel-Anoden, aufgenommen bei gleicher kinetischer Energie der Elektronen [**?**]. Man erkennt, mal abgesehen von den Signaturen der charakteristischen Strahlung, dass alle Spektren einen ähnlichen Verlauf zeigen. Insbesondere fällt auf, dass alle Spektren Emission bis zu einer maximale Frequenz zeigen. Die Ursache kann also nicht das chemische Element der Anode sein.

Grenzfrequenz

Es bietet sich an, für die weitere Analyse den Energieerhaltungssatz heran zu ziehen. Ein aufgeladener Kondensators beschleunigt geladene Teilchen. In einem elektrischen Feld E_e werden Elektronen innerhalb einer Wegstrecke d auf eine kinetische Energie E_{kin} beschleunigt.

$$E_{kin} = e \cdot E_e \cdot d = e \cdot U_e \tag{18.32}$$

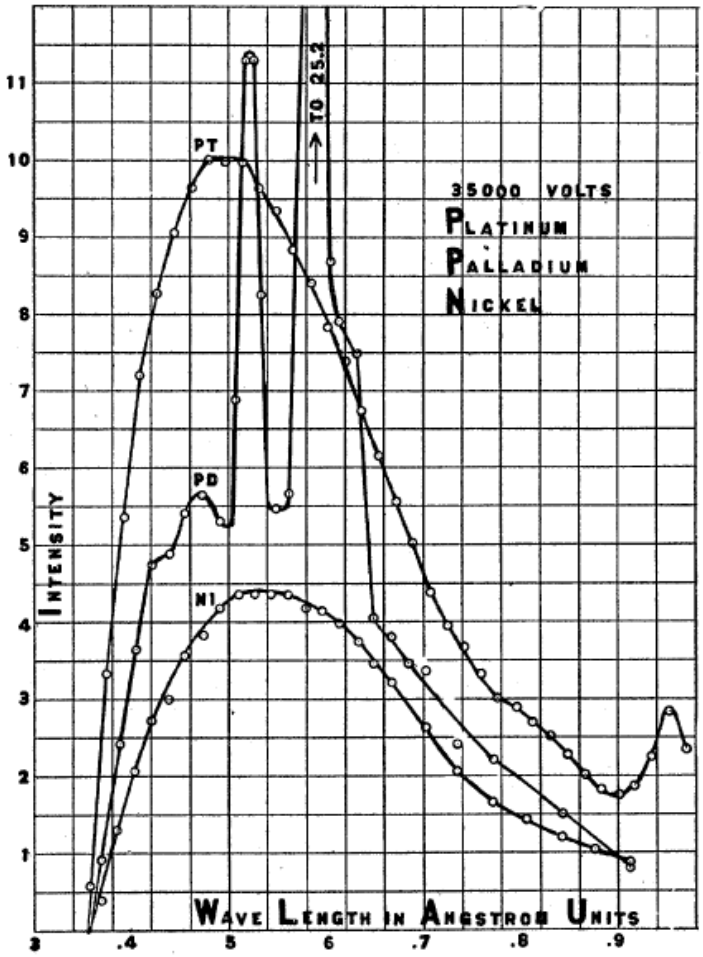


Abb. 18.46: Röntgenspektren unterschiedlicher Materialien, aufgenommen bei konstanter Beschleunigungsspannung. Man erkennt, dass die kurzwellige Strahlung unabhängig vom Element eine bestimmte Wellenlänge nicht unterschreitet [**?**].

Dabei entspricht der Ausdruck $E_e \cdot d$ der Spannung U_e, die an der Röntgenröhre anliegt. Aus Gründen der Energieerhaltung setzen wir an, das E_{kin} mit der Photonenenergie E_{xray} übereinstimmt:

$$E_{kin} = E_{ph} \tag{18.33}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2 = e \cdot U_e \tag{18.34}$$

$$E_{xray} = h \cdot \nu_{xray} \tag{18.35}$$

$$e \cdot U_e = h \frac{c}{\lambda_{xray}} \tag{18.36}$$

Wenn die gesamte kinetische Energie des Elektrons in Strahlung umgewandelt wird, ergibt sich einen maximale Frequenz $\nu_{xray}^{\max}$, beziehungsweise eine minimale Röntgenwellenlänge

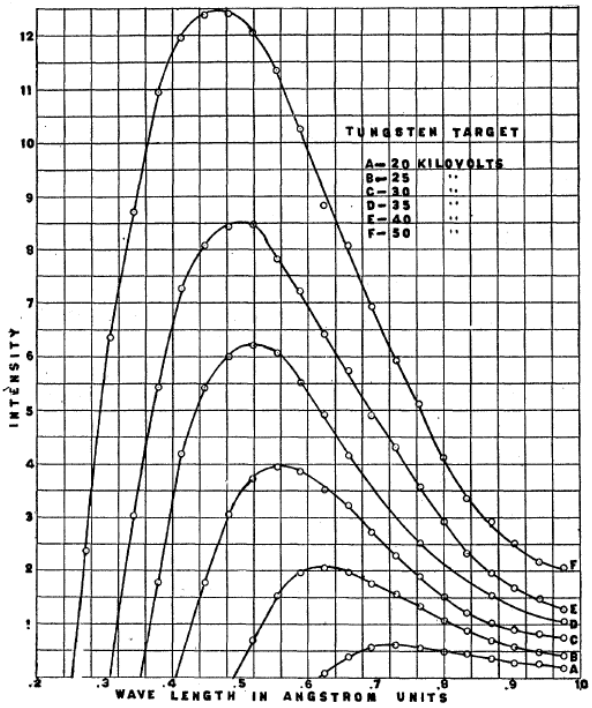


Abb. 18.47: Abhängigkeit der minimalen Wellenlänge von der kinetischen Energie der Elektronen [**?**].

$\lambda_{xray}^{\min}$:

$$\nu_{xray}^{\max} = \frac{e \cdot U_e}{h} \tag{18.37}$$

$$\lambda_{xray}^{\min} = \frac{c}{\nu_{xray}^{\max}} = \frac{h \cdot c}{e \cdot U_e} \tag{18.38}$$

Man erkennt einen direkten Zusammenhang zwischen der Beschleunigungsspannung U_e und der minimalen Wellenlänge:

$$\lambda_{xray}^{\min} \approx U_e^{-1} \tag{18.39}$$

Das ist das Duane-Hunt Gesetz. Sehen Sie, dass man anhand dieses Gesetzes die Planck-sche Konstante h bestimmen kann? Tatsächlich war das die Motivation der beiden Forscher [**?**].[65] Abb. 18.47 demonstriert die Gültigkeit des Gesetzes an einem Beispiel [**?**].

Das Röntgenspektrum lässt sich durch die Wahl der Beschleunigungsspannung beeinflussen. Abb. 18.48 zeigt das Spektrum von Wolfram, aufgenommen bei unterschiedlicher Spannung an der Röntgenröhre. Man erkennt zunächst, dass die Spektren den Vorgaben des Duane-Hunt Gesetzes folgen. Weiter bemerkt man, dass die charakteristischen Linien nicht auf die Änderung der Beschleunigungsspannung reagieren. Abb. 18.49 verdeutlicht, dass die kinetische Energie ausreichend hoch sein muss, um Elektronen aus den inneren

[65] *Our results furnish strong evidence in favor of the fundamental principle of the quantum hypothesis [***?** *].*

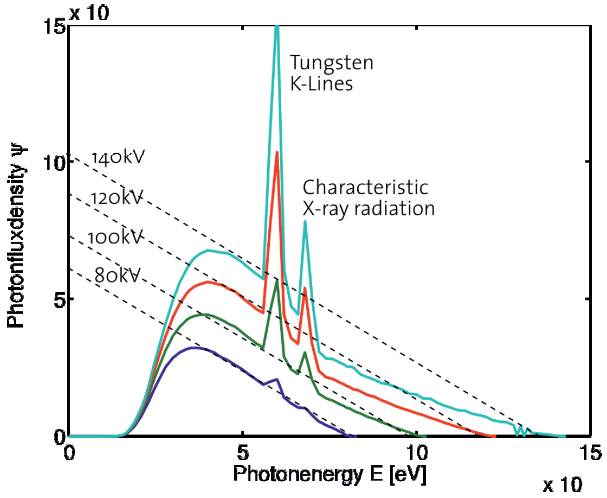


Abb. 18.48: Röntgenspektrum einer Wolfram-Anode, aufgenommen bei unterschiedlichen Beschleunigungsspannungen. Charakteristische Strahlung beobachtet man erst, wenn die kinetische Energie im Elektronenstoß ausreicht, Elektronen aus inneren Schalen heraus zu schlagen.

Schalen herauszuschlagen. Ist die Energie zu gering, treten im Spektrum keine charakteristischen Linien auf. Abb. 18.50 fasst die Abhängigkeiten nochmal zusammen [**?**]. Wie kann man sich die Abhängigkeit der Intensität des Röntgenspektrums von der Beschleunigungsspannung vereinfacht erklären? Man stelle sich das Metall, in das die energetischen Elektronen eindringen, als Abfolge von dünnen quadratischer Schichten vor, in denen ein Teil der Energie eingetragen wird und aus denen es zur Röntgenemission kommt. Mit der Tiefe nimmt der Energiefluss ab. Man denke an eine auf dem Kopf stehende Pyramide. Eine Erhöhung der kinetischen Energie der Elektronen erhöht die Anzahl der Schichten, die vom Elektronenstrahl durchdrungen werden und zwar proportional zum Quadrat der Elektronenenergie. Daher ist die Strahlungsleistung einer Röntgenrpöhre proportional zu U_e^2. Wie hängt die Intensität von der Ordnungszahl ab? Die Leistung ist proportional zu Z^2. Das bedeutet, dass man, für eine hohe Bremsstrahlungsleistung, Anoden aus einem schweren Metall verwenden sollte.

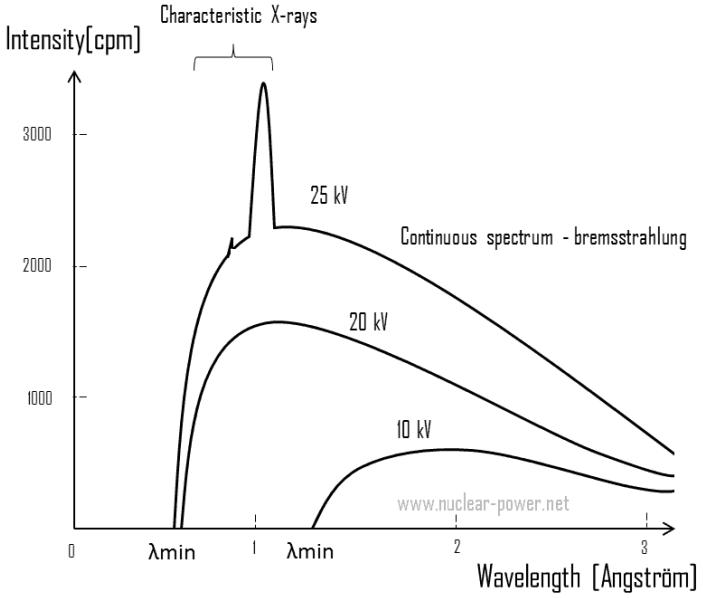


Abb. 18.49: Wie Abb. 18.48, hier aufgetragen als Funktion der Wellenlänge.

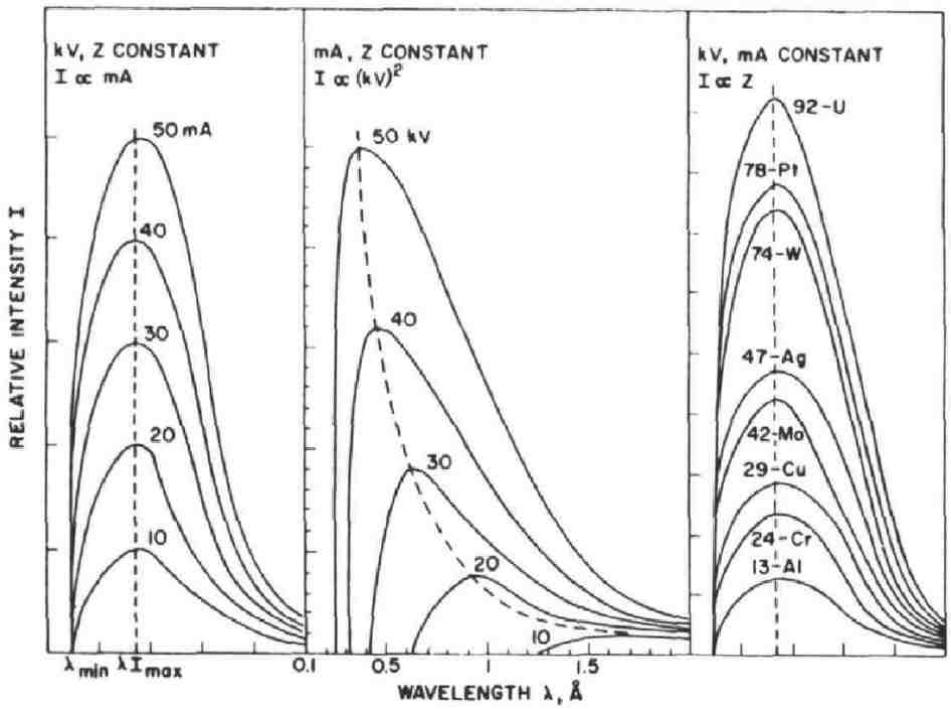


Abb. 18.50: Links: Abhängigkeit der Intensität der Röntgenstrahlung vom Anodenstrom ($I_{xray} \propto I_e$). Mitte: Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung U_e ($I_{xray} \propto U_e^2$)). Rechts: Abhängigkeit von Ordnungszahl Z. ($I_{xray} \propto Z$) [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 5.1: Welche Spannung muss an der Röntgenröhre anliegen, um Strahlung von 0.01 Å zu erzeugen?

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{h \cdot c}{e \cdot \lambda_{xray}^{\min}} \\ U_e &= \frac{(6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{(1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m})} \\ U_e &= 1.24 \cdot 10^{6}\,\mathrm{V} = 1.24\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2: Welche minimale Wellenlänge $\lambda_{\min}$ und maximale Frequenz $\nu_{\max}$ ergibt sich nach dem Duane-Hunt Gesetz für eine Röntgenröhre, die bei einer Spannung von U_e=39.3 kV betrieben wird?

$$\begin{aligned} \nu_{\max} &= \frac{h}{e} \cdot U_e \\ \nu_{\max} &= \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \cdot (39.3 \cdot 10^{3}\,\mathrm{V}) \\ \nu_{\max} &= 9.5 \cdot 10^{18}\,\mathrm{Hz} \\ \lambda_{\min} &= \frac{c}{\nu_{\max}} \\ \lambda_{\min} &= \frac{2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{9.5 \cdot 10^{18}\,\mathrm{Hz}} \\ \lambda_{\min} &= 31.6 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 31.6\,\mathrm{pm} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3: Elektronen mit einer Energie von 80 keV treffen auf die Wolfram-Anode einer Röntgenröhre. Elektronen aus der K-Schale von Wolfram haben eine Energie von 72.5 keV. Die von der Röhre emittierte Strahlung zeigt folgende Charakteristik:

(a) ein kontinuierliches Röntgenspektrum (Bremsstrahlung) mit einer minimalen Wellenlänge von 0.155 Å.

(b) ein kontinuierliches Röntgenspektrum mit allen Wellenlängen.

(c) das charakteristische Röntgenspektrum von Wolfram.

(d) ein kontinuierliches Röntgenspektrum mit einer minimalen Wellenlänge von 0.155 Å und das charakteristische Röntgenspektrum von Wolfram.

Die Energie der Elektronen (80 keV) reicht aus, um Elektronen aus der K-Schale auszulösen. Daher wird ein charakteristisches Spektrum emittiert. Die minimale Wellenlänge des kontinuierlichen Spektrums errechnet sich mit

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \frac{h \cdot c}{E_{kin}} \\ \lambda_{\min} &= \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \cdot 2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{80\,\mathrm{keV}} \\ \lambda_{\min} &= 0.155\,\text{Å} \end{aligned}$$

Antwort (d) ist also richtig.

Aufgabe 5.4: Die an eine Röntgenröhre angelegte Potentialdifferenz wird erhöht. Als Ergebnis ergibt sich für die emittierte Strahlung:

(a) Die Intensität nimmt zu.

(b) Die minimale Wellenlänge nimmt zu.

(c) Die Intensität bleibt unverändert.

(d) Die minimale Wellenlänge nimmt ab.

Die minimale Wellenlänge nimmt ab, wenn man die Spannung erhöht. Die Strahlungsintensität ist die Rate des Energieflusses pro Flächeneinheit. Die Energie der Photonen steigt an, wenn die Spannung erhöht wird. Also nimmt auch die Intensität der Strahlung bei einer Spannungserhöhung zu. Die Antworten (a) und (d) sind also richtig.

Aufgabe 5.5: Welche der folgenden Aussagen ist im Zusammenhang mit Strahlung aus einer Röntgenröhre nicht richtig?[66]

(a) Die Wellenlänge der charakteristischen Röntgenstrahlen nimmt ab, wenn die Ordnungszahl zunimmt.

(b) Die Grenzwellenlänge der kontinuierlichen Röntgenstrahlen hängt von der Ordnungszahl ab.

(c) Die Intensität der charakteristischen Röntgenstrahlen hängt von der elektrischen Leistung ab, die der Röntgenröhre zugeführt wird.

(d) Die Grenzwellenlänge der kontinuierlichen Röntgenstrahlen hängt von der kinetischen Energie der Elektronen ab.

Aufgabe 5.6: Welche der folgenden Aussagen im Zusammenhang mit Röntgenstrahlung stimmt NICHT?[67]

(a) Die Wellenlänge der charakteristischen Röntgenstrahlung nimmt ab, wenn sich die Ordnungszahl des Elements erhöht.

(b) Die Grenzwellenlänge der kontinuierlichen Röntgenstrahlung hängt von der Ordnungszahl des untersuchten Materials ab.

(c) Die Intensität der charakteristischen Röntgenstrahlung hängt von der elektrischen Leistung ab, die der Röntgenröhre zugeführt wird.

(d) Die Grenzwellenlänge der kontinuierlichen Röntgenstrahlung hängt von der kinetischen Energie der Elektronen ab.

[66] Antwort: (a, c, d)
[67] Antwort: (b)

Aufgabe 5.7: Röntgenstrahlung wird in einer Röntgenröhre erzeugt, die bei einer bestimmen Beschleunigungsspannung erzeugt betrieben wird. Die Wellenlänge der Bremsstrahlung hat Werte von[68]

(a) 0 bis ∞

(b) λ_{min} bis ∞, wobei $\lambda_{\text{min}} > 0$

(c) 0 bis λ_{max}, wobei $\lambda_{\text{max}} > \infty$

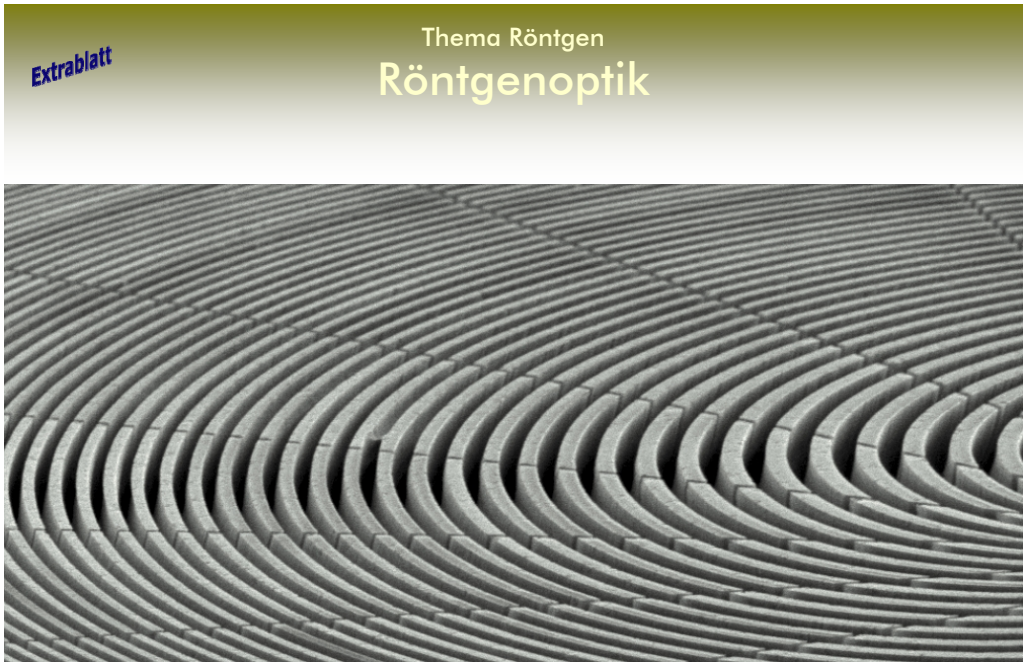
(d) λ_{min} bis λ_{max}, wobei $\lambda_{\text{min}} < \lambda_{\text{max}} < \infty$

[68] Antwort: (b)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Aussage macht das Duane-Hunt Gesetz über das Spektrum einer Röntgenröhre?
2. Ist die minimale Wellenlänge in einem Röntgenspektrums vom Anodenmaterial abhängig?
3. Eine altertümliche Fernsehröhre beschleunigt Elektronen auf 30 kV und diese treffen auf den phosphoreszierenden Leuchtschirm. Was ist die maximale Energie des erzeugten Röntgenlichts?
4. Was ändert sich, wenn man, statt Elektronen, Protonen mit gleicher kinetischer Energie verwendet?
5. Wie kann man das kurzwellige Ende des Röntgenspektrum nutzen, um die Plancksche Konstante zu bestimmen.
6. Gibt es im Spektrum einer Röntgenröhre sowohl eine minimale als auch eine maximale Lichtwellenlänge?
7. Hätte man mit Röntgenstrahlung die innere Struktur des Atomkerns entdecken können?

Röntgenoptik[4LP]



Glaslinsen, wie im optischen Bereich, können für Röntgenstrahlung nicht verwendet werden. Da der Brechungsindex für Röntgenstrahlen nahe bei 1.0 liegt, ändert das Licht beim Eintritt in ein Medium kaum seine Richtung. Röntgenstrahlen können aber in flachen Winkeln von glatten Metalloberflächen reflektiert werden. Abb. 18.51 zeigt die

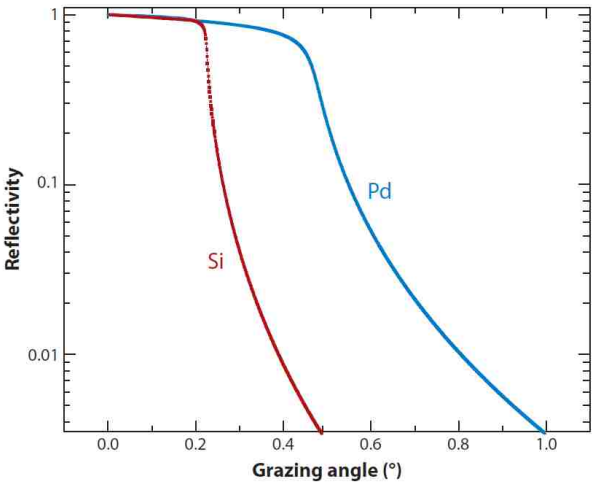


Abb. 18.51: Berechnete Röntgenreflektivität einer Siliziumschicht bei 8 keV vor und nach Beschichtung mit Palladium. Man erkennt, dass die Reflektivität nur bei flachem Lichteinfall (*grazing incidence* hoch ist und außerdem eine Materialabhängigkeit zeigt [**?**].)

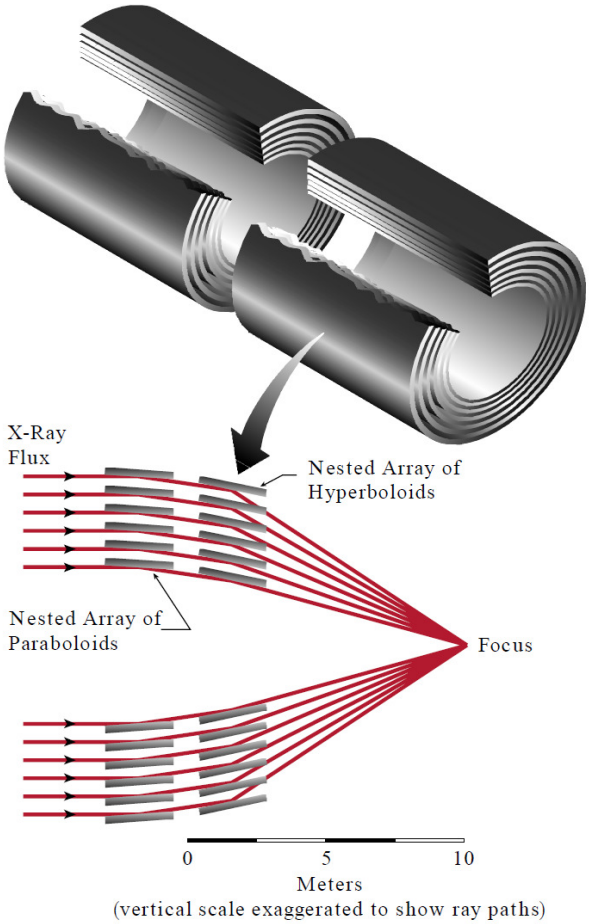


Abb. 18.52: Ineinander verschachtelte Paare von Spiegeln (Wolter-Spiegel) erlauben bei streifendem Einfall eine Fokussierung von Röntgenstrahlen [**?**].

Winkelabhängigkeit der Reflektion für verschiedene Materialen. Man nennt dies einen streifenden Einfall. Solche Reflexionen sind effizient bei Metalle mit hoher Dichte (Au, Pt, Ir). Die Reflexion ist, wie bei optischer Strahlung, nicht dispersiv. Somit können Röntgenspiegel, die bei streifendem Einfall funktionieren, Röntgenstrahlen über einen breiten Energiebereich fokussieren. Spiegel dieser Art, so genannte Wolter-Spiegel[**?**] (Abb. 18.52) werden in Weltraumteleskopen wie Chandra zur Abbildung astronomischer Röntgenquellen eingesetzt.

Eine andere Möglichkeit der Strahlformung sind Zonenplatten.[69] Abb. 18.53 zeigt, wie die Methode genutzt wird, um eine hochauflösendes Röntgen-Mikroskop zu realisieren. Diese Methode der Röntgen-Mikroskopie eignet sich für Untersuchungen

- zur biologischen Bildgebung im Wasserfenster [**?**].
- feuchter Umweltproben [**?**].

[69] Eine **Zonenplatte** besteht aus einem System von abwechselnd durchsichtigen und undurchsichtigen konzentrischen Ringen und erzeugt eine optische Abbildung allein durch Beugung des Lichts. Zonenplatten spielen eine wichtige Rolle in der Röntgenoptik und ersetzen hier die in im Sichtbaren verwendeten bekannten refraktiven Linsen.

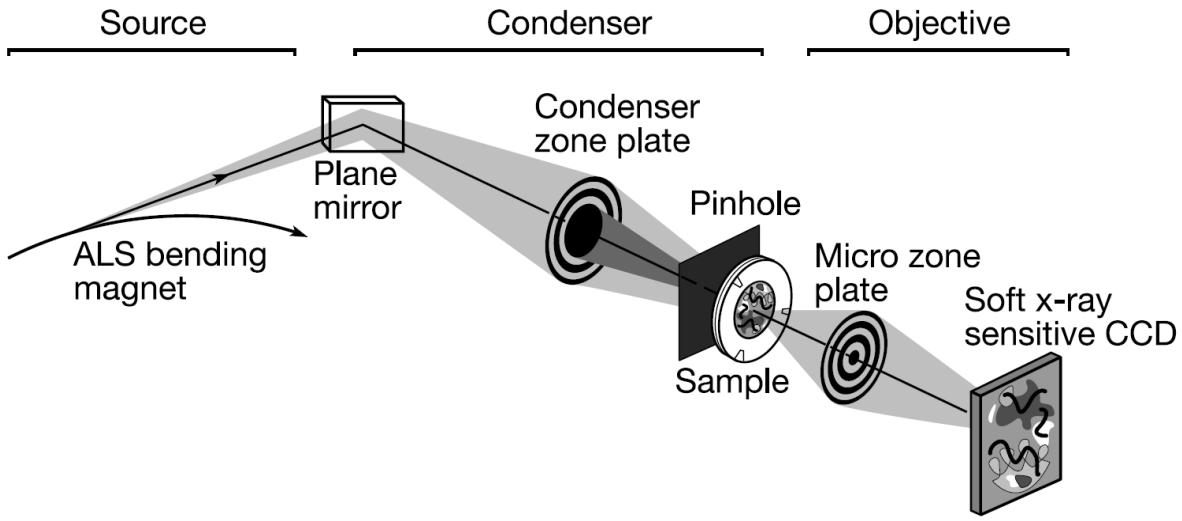


Abb. 18.53: Ein Röntgenmikroskop verwendet eine Zonenplatte zur Abbildung eines Objekts auf eine Röntgenkamera [**?**].

- an magnetischen Nanostrukturen [**?**].
- zur dreidimensionalen Bildgebung von kryogen fixierten Zellen [**?**].

Wir werden dieses Thema nicht vertiefen und verweisen auf die Literatur [**? ?**]. Die folgenden *abstracts* geben einen Einblick in die neuen Möglichkeiten in der Röntgenmikroskopie und der Untersuchung astrophysikalischer Phänomene im Röntgenbereich [**?**].

Soft X-ray microscopy at a spatial resolution better than 15 nm [**?**]**:** The study of nanostructures is creating a need for microscopes that can see beyond the limits of conventional visible light and ultraviolet microscopes. X-ray imaging is a promising option. A new microscope described this week achieves unprecedented resolution, and has the ability to see through containing material. It features a specially made two-component zone plate - a lens with concentric zones rather like the rings in the Fresnel lenses familiar in overhead projectors and elsewhere - that makes use of diffraction to project an image into a CCD camera sensitive to soft X-rays. Spatial resolution of better than 15 nm is possible.

The Race to X-ray Microbeam and Nanobeam Science [**?**]**:** X-ray microbeams are an emerging characterization tool with broad implications for science, ranging from materials structure and dynamics, to geophysics and environmental science, to biophysics and protein crystallography. We describe how submicrometer hard x-ray beams with the ability to penetrate tens to hundreds of micrometers into most materials and with the ability to determine local composition, chemistry, and (crystal) structure can characterize buried sample volumes and small samples in their natural or extreme environments. Beams less than 10 nanometers have already been demonstrated, and the practical limit for hard x-ray beam size, the limit to trace-element sensitivity, and the

ultimate limitations associated with near-atomic structure determinations are the subject of ongoing research.

A density cusp of quiescent X-ray binaries in the central parsec of the Galaxy [?]: The existence of a *density cusp* -a localized increase in number- of stellar-mass black holes near a supermassive black hole is a fundamental prediction of galactic stellar dynamics. The best place to detect such a cusp is in the Galactic Centre, where the nearest supermassive black hole, Sagittarius A*, resides. As many as 20,000 black holes are predicted to settle into the central parsec of the Galaxy as a result of dynamical friction; however, so far no density cusp of black holes has been detected. Low-mass X-ray binary systems that contain a stellar-mass black hole are natural tracers of isolated black holes. Here we report observations of a dozen quiescent X-ray binaries in a density cusp within one parsec of Sagittarius A*. The lower-energy emission spectra that we observed in these binaries is distinct from the higher-energy spectra associated with the population of accreting white dwarfs that dominates the central eight parsecs of the Galaxy. The properties of these X-ray binaries, in particular their spatial distribution and luminosity function, suggest the existence of hundreds of binary systems in the central parsec of the Galaxy and many more isolated black holes. We cannot rule out a contribution to the observed emission from a population (of up to about one-half the number of X-ray binaries) of rotationally powered, millisecond pulsars. The spatial distribution of the binary systems is a relic of their formation history, either in the stellar disk around Sagittarius A* or through in-fall from globular clusters, and constrains the number density of sources in the modelling of gravitational waves from massive stellar remnants, such as neutron stars and black holes.

Was war relevant für die Klausur?

- Wellenlängenbereich der Röntgenstrahlung
- Inneren Schale des Atoms, Notation der Übergänge
- Abschätzung der Photonenenergie (Gl. 18.3)

$$\frac{\lambda_{xray}}{\lambda_{\mathrm{VIS}}} = \frac{1}{(Z-1)^2}$$

- Charakteristische Strahlung
- K- und L-Schalenemission (Gl. 18.20 und 18.21)

$$\begin{aligned} \nu_K &= R_f \cdot (Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\ \nu_L &= R_f \cdot (Z-\sigma_{nl})^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

- Moseley-Gesetz (Gl. 18.23) und der Bezug zur Ordnungszahl Z

$$\nu = a^2 \cdot (Z-\sigma_{n\ell})^2$$

- Aufbau einer Röntgenröhre
- Bremsstrahlungsspektrum
- Gesetz von Duane und Hunt (Gl. 18.37 und Gl.18.38)

$$\begin{aligned} \nu_{xray}^{\max} &= \frac{e \cdot U_e}{h} \\ \lambda_{xray}^{\min} &= \frac{h \cdot c}{e \cdot U_e} \end{aligned}$$

19 Röntgendiagnostik



Die Erfahrung wird nun lehren, ob die ausgefallenen Haare wieder nachwachsen. Sollte dies nicht der Fall sein, so hätte man in der Bestrahlung ein sehr einfaches Epilationsverfahren.

It was barely 14 days after the announcement of the discovery of Röntgen rays that Friedrich Otto Walkhoff took the first dental radiograph. He took an ordinary photographic glass plate, wrapped it in a rubber dam, held it in his mouth between his teeth and tongue and then lay on the floor for a 25 min exposure. Walkhoff said that those 25 min of exposure were a torture to him. However, the exact nature of this torture has not been described.

[1]Röntgenstrahlquellen sind das Arbeitspferd der Mediziner im Bereich bildgebender Ver-

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.



Abb. 19.1: Röntgens erstes X-Strahlenbild und wahrscheinlich das Bekannteste. Am 22. Dezember 1895 saß Bertha Röntgen mehr als eine halbe Stunde still. In diesr Zeit bestahlte ihr Mann Conrad Röntgen ihre Hand. Ich hatte von meiner Arbeit niemand etwas gesagt: Meiner Frau teilte ich nur mit, dass ich etwas mache, von dem die Leute, wenn sie es erfahren, sagen würden: *Der Röntgen ist wohl verrückt geworden.*

fahren zur Diagnose von Knochen, Gelenken und Lungen. Abb. 19.1 zeigt das allererste Röntgenbild - die Hand von Röntgens Frau.

Dr EA Codman, in 1902, conscientiously reviewed all papers on X-ray injuries. Of the 88 xray injuries published, 55 had occurred in 1896, 12 in 1897, 6 in 1898, 9 in 1899, 3 in 1900 and 1 in 1901. The decline could be due to the fact that X-ray injuries were no longer in the news and therefore went unreported unless they exhibited unusual features [**?**].

1896 Haschek und Lindenthal präsentieren das erste Angiogramm. Vorab wurde der untersuchten Hand eine Teichmannsche Masse[2] verabreicht. Nach einstündiger Bestrahlung erkannte man einzelne Gefäße der Hand mit ihren Verzweigungen. Der Bericht der Forscher wurde unter dem Titel *Ein Beitrag zur praktischen Verwertung der Photographie nach Röntgen* in der Wiener klinische Wochenschrift veröffentlicht

1927 Die Technik der Angiographie (Röntgenuntersuchung der Blutgefäße) wird durch Egas Moniz (Universität Lissabon) weiter entwickelt.[3] Mit Röntgenstrahlen visua-

[2]Die Teichmannsche Masse ist eine röntgendichte Mischung aus Kreide, Petroleum und Zinnober.

[3] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1949 was divided equally between Walter Rudolf Hess *for his discovery of the functional organization of the interbrain as a coordinator of the activities of the internal organs* and António Caetano de Abreu Freire Egas Moniz *for his discovery of the therapeutic value of leucotomy in certain psychoses.*

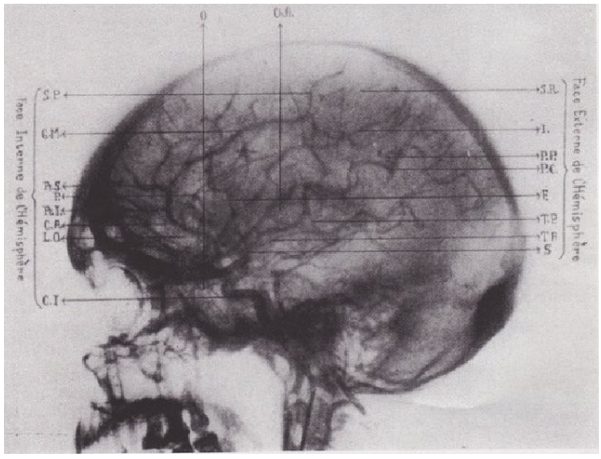


Abb. 19.2: Frühe Angiographische Aufnahme von 1928 [**?**]

lisiert er das Gefäßsystem des Gehirns und injiziert einem Katheter Kontrastmittel, siehe Abb. 19.2 [**?**].

1929 Werner Forssmann[4] ist der Erste, der einen Katheter in ein menschliches Herz einführt. Er steckte einen Katheter in eine Vene in seinem eigenen Arm und schob ihn von dort in das rechte Atrium seines Herzens. Dann begab er sich für eine Aufnahme zur Röntgenabteilung des Instituts (Abb. 19.3 [**?**]).

1959 Der Kardiologe Mason Sones führt die erste Untersuchung einer Koronararterie mit einem Katheter, einer Röntgenbildgebung und einem Kontrastmittel durch.

Röntgenlicht ist auch das wichtigste Werkzeug zur Untersuchung der kondensierten Materie. Dies liegt auch daran, dass man mit hochenergetischem Licht ein Vielzahl an Wechselwirkungen hervorrufen kann, siehe Abb. 19.4. Die Wellenlänge der Strahlung ist vergleichbar zu den Atomabständen in Kristallen. Dies erlaubt es, die Struktur von Festkörpern über Beugungsexperimente zu untersuchen. Aus der Position der Lichtflecke auf dem Beugungsphotografien und durch Verwendung von Röntgenstrahlen unterschiedlicher Wellenlänge kann man Ausrichtung und Abstand der Atomebenen bestimmen. Indem man in unterschiedlichen Winkeln den Kristall bestrahlt ist es möglich, komplexe Strukturen zu entschlüsseln, beispielsweise die kristalline Form von Myoglobin.[5] Röntgenbeugung hat wesentlich dazu beigetragen, die Struktur die *Helixstruktur der DNA* zu entschlüsseln. Beeindruckend die Liste der Nobelpreise, die in den letzten hundert Jahren aufgrund Untersuchungen mit Röntgenbeugung vergeben wurden [**?**],

[4] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1956 was awarded jointly to André Frédéric Cournand, Werner Forssmann and Dickinson W. Richards *for their discoveries concerning heart catheterization and pathological changes in the circulatory system.*

[5] The Nobel Prize in Chemistry 1962 was awarded jointly to Max Ferdinand Perutz and John Cowdery Kendrew *for their studies of the structures of globular proteins*

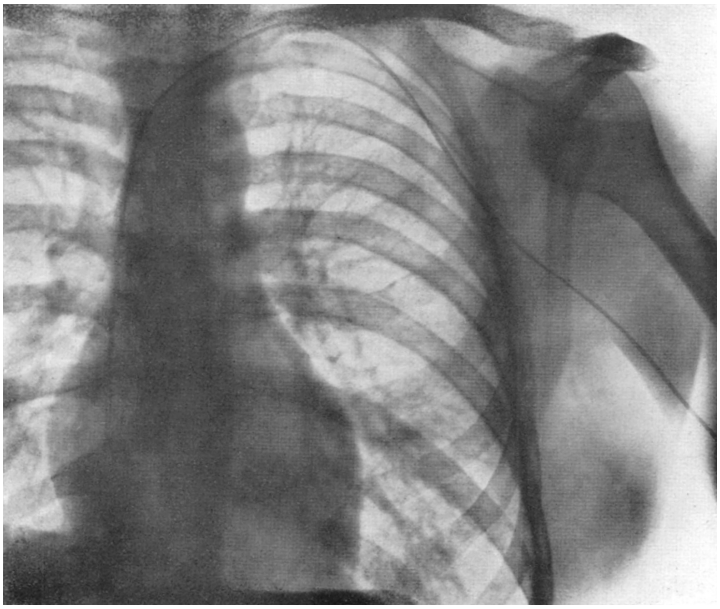


Abb. 19.3: Erste dokumentierte Herzkatheterisierung von 1929 im Selbstversuch durchgeführt von Werner Forssmann [**?**].

allein sieben im neuen Jahrtausend.[6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] Die neuen brillanten Röntgenlaser, wie EurXFEL in Hamburg ermöglichen es mittlerweile, den Aufbau eines Biomoleküls mit einem einzigen Lichtblitz zu bestimmen. Abb. 19.5 gibt einen Eindruck über die Abmessungen der moderner Röntgenlaser.

[6] The Nobel Prize in Chemistry 2003 was awarded *for discoveries concerning channels in cell membranes* jointly with one half to Peter Agre *for the discovery of water channels* and with one half to Roderick MacKinnon *for structural and mechanistic studies of ion channels*

[7] The Nobel Prize in Chemistry 2006 was awarded to Roger D. Kornberg *for his studies of the molecular basis of eukaryotic transcription*

[8] The Nobel Prize in Chemistry 2009 was awarded jointly to Venkatraman Ramakrishnan, Thomas A. Steitz and Ada E. Yonath *for studies of the structure and function of the ribosome*

[9] The Nobel Prize in Physics 2010 was awarded jointly to Andre Geim and Konstantin Novoselov *for groundbreaking experiments regarding the two-dimensional material graphene*

[10] The Nobel Prize in Chemistry 2011 was awarded to Dan Shechtman *for the discovery of quasicrystals*

[11] The Nobel Prize in Chemistry 2012 was awarded jointly to Robert J. Lefkowitz and Brian K. Kobilka for studies of G-protein-coupled receptors

[12] The Nobel Prize in Chemistry 2013 was awarded jointly to Martin Karplus, Michael Levitt and Arieh Warshel *for the development of multiscale models for complex chemical systems*

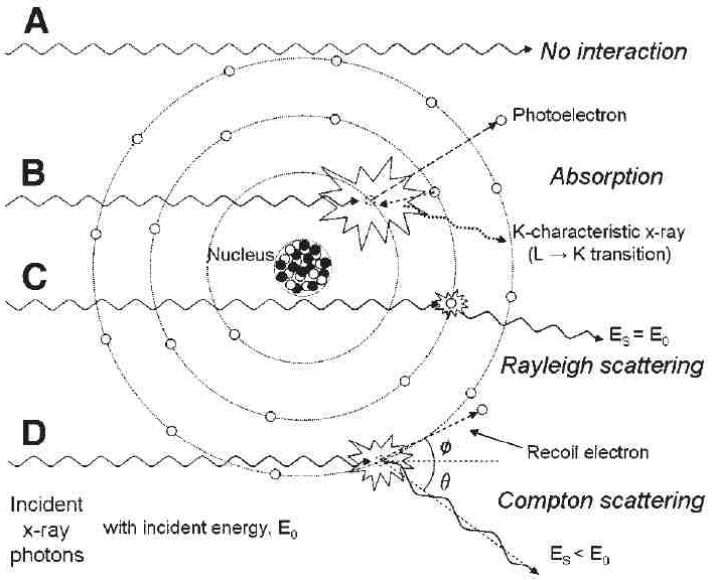


Abb. 19.4: Wechselwirkungen zwischen Röntgenstrahlung und Materie (A) Die Strahlung wechselwirkt nur direkt mit dem Material. (B) Photoelektrischer Effekt (C) Bei der Rayleigh-Streuung wird keine Energie ausgetauscht (elastische Streuung), sondern es kommt zu eine geringen Winkeländerung in der Richtung der Strahlung. Man nennt den Effekt Vorwärtsstreuung. (D) Compton-Streuung (Kapitel *Materiewellen*) [**?**].

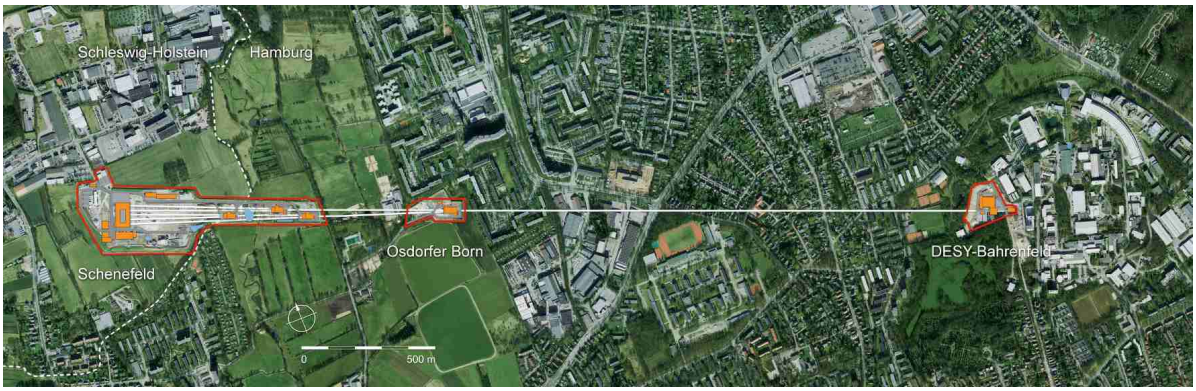


Abb. 19.5: Luftaufnahme, die die Ausmaße des *Europäischen Röntgenlasers EurXFEL* demonstriert. Die Länge des Tunnels beträgt 3.4 km [**?**].


Inhalt
Röntgendiagnostik
- Entstehung des Röntgenbildes
- Methoden zur Verbesserung des Röntgenbildes
- Absorption von Röntgenstrahlung durch Materie
- Erhöhung des Röntgenkontrastes
- Klärung der Struktur der Materie durch Bragg-Streuung
Kapitel 1
Röntgenbild
medicine
optics
Kapitel 2
Lambert-Beer Gesetz
hydro
oscillations
Kapitel 3
Röntgenkontrast
technology
medicine
biology
Kapitel 4
Röntgenbeugung
medicine
chemistry
optics
oscillations

19.1 Röntgenbild



Eine Röntgenaufnahme ist in der Medizin ein Bild, das auf einem photographischen Film oder digital zur Diagnose von Krankheiten und Verletzungen erstellt wird. Die Röntgenstrahlen passieren verschiedene Körperteile und erzeugen Bilder von Gewebe, Organen und Knochen. Um ein Röntgenbild zu erstellen, wird ein Patient so positioniert, dass sich der abzubildende Körperteil zwischen einer Strahlungsquelle und einem Röntgendetektor befindet. Die Strahlung durchdringt den Körper und wird je nach Gewebeart unterschiedlich absorbiert, abhängig von der radiologischen Dichte der Gewebe. Die radiologische Dichte wird sowohl durch die Dichte als auch durch die Ordnungszahl der abzubildenden Gewebe bestimmt. Abbildung 19.6 zeigt eine frühe Röntgenaufnahme (1896). Michael Pupin entwickelte dafür ein Verfahren, das die Exposition von Stunden auf Sekunden reduzierte. Abgebildet ist die Hand eines Patienten, der durch einen Schuss in der Hand verletzt wurde. Die radiologischen Folgen der Röntgenstrahlung wurden lange Zeit unterschätzt. Beispielsweise kamen Röntgenapparaturen -genannt Pedoskope- bis in die 50er Jahre in Schuhgeschäften zum Einsatz (Abb. 19.7) [**?** **?**].

One of the most conspicuous nonmedical uses of the x-ray was the shoe-fitting fluoroscope. It allowed visualization of the bones and soft tissues of the foot inside a shoe, purportedly increasing the accuracy of shoe fitting and thereby enhancing sales. From

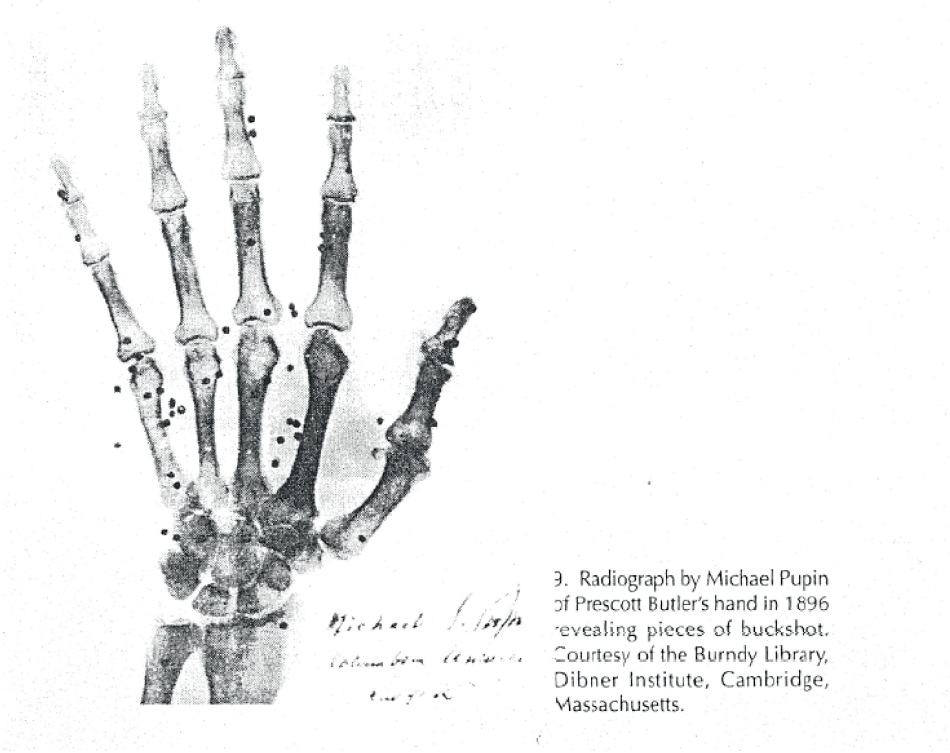


Abb. 19.6: Im Jahr 1896 erstellte Michael Pupin diese Röntgenaufnahme der Hand eines versehentlich angeschossenen Anwalts. Erstmals wurden Röntgenstrahlen als Hilfsmittel bei Operationen eingesetzt [**?**].

the mid 1920s to the 1950s, shoe-fitting fluoroscopes were a prominent feature of shoe stores in North America and Europe.

Da sich Röntgenstrahlung nur unter erheblichem Aufwand fokussieren lässt (Kapitel *Röntgen*), sind die in der Medizin aufgenommenen Röntgenbilder ein Schattenwurf (Abb. 19.8). Durch die Abbildung einer dreidimensionalen Struktur auf eine zweidimensionale Fläche ist das Verfahren nicht immer eindeutig (Abb. 19.9). Abb. 19.10 zeigt, wie eine solche Aufnahme in der Praxis entsteht. Ein erhebliches Problem der Bildaufnahme ist der schmale Bereich (grau) (Abb. 19.11), in dem die photographische Belichtung sinnvolle Abbildungen erzeugt. Durch den Einsatz der digitalen Lumineszenzradiographie erreicht man über einen weiten Bereich der Strahlendosis eine proportionale Belichtung . In Abb. 19.12 sieht man eine aktuelle Anwendung im Bereich der Restaurierung von Kunstwerken.

Ein erhebliches Problem bei der Aufnahme von Röntgenbildern ist Streustrahlung, siehe Abb. 19.13. Dieser Beitrag durch die Streuung des Röntgenlichts erhöht sich bei größerer Schichtdicke oder bei einer großflächigen Röntgenbelichtung. Die Streuung von Röntgenstrahlung führt zu einem Verlust an Kontrast und reduziert dadurch den Informationsgehalt, siehe Abb. 19.14. Ursache, insbesondere bei kürzeren Wellenlängen,

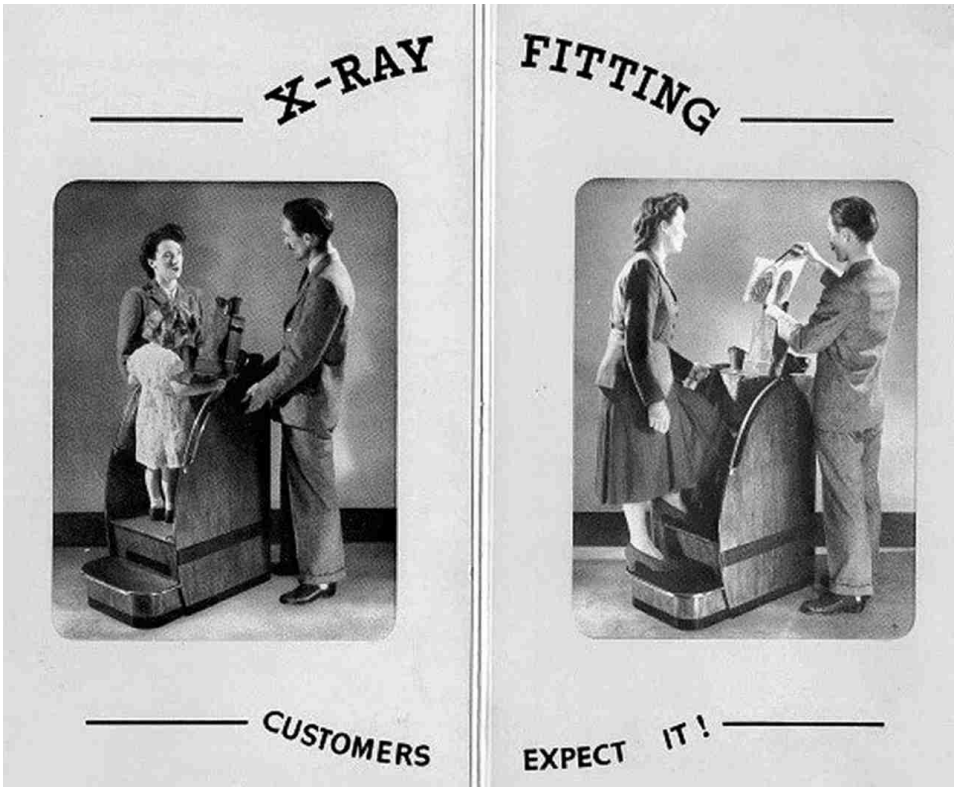


Abb. 19.7: Pedoskop: In den 1940er Jahren wurden Röntgenstrahlen verwendet, um die passende Schuhgröße zu finden [**?**].



Abb. 19.8: Wie bei einem Sonnenschatten wird ein Schattenbild bei einer Röntgenaufnahme erzeugt.



Abb. 19.9: Da beim Röntgenbild eine zweidimensionale Projektion eines dreidimensionalen Objekts erzeugt wird, ist die Interpretation nicht unbedingt eindeutig [**?**].

ist der Compton Effekt (Kapitel *Materiewellen*). Die technische Herausforderung ist deshalb, eine Unterdrückung des Röntgenstreulichts zu erreichen, um die Qualität des Röntgenbildes zu verbessern. Problematisch ist, dass sich Röntgenstrahlung im Gegensatz zu optischer Strahlung kaum fokussieren lässt (Brechungsindex etwa 1.0) und außerdem eine geringe Absorption insbesondere für die leichteren Elemente hat. Aus diesem Grund verwendet man Kollimatoren aus schweren Elementen wie Wolfram oder Blei (Abb. 19.15). Ein Kollimator ist ein Gerät, das einen Röntgenstrahl so filtert, dass nur die Strahlen durchgelassen werden, die sich parallel zu einer bestimmten Richtung bewegen. Dadurch wird die Streustrahlung effektiv unterdrückt.

Ein beliebter Behälter für kleine hochwertige Schmugglerware ist der Damenschuh. Ob Schmuggelgut unter der Brandsohle verborgen ist, ließ sich früher nur unter teilweiser Zerstörung des Schuhes feststellen. Heute bedient sich der Zolldienst des Röntgenapparates. An Metallteilen sind im Röntgenbild nicht nur Nägel und Schuhschnalle zu sehen, sondern auch zwei Ringe mit Edelsteinen.

Die Umschau 41, 607 (1921)

Anwendungen^{4LP}

Beispiele aus der Medizin

Bei herkömmlichen Röntgenbildern wird das Schattenbild eines Patienten auf einen Film projiziert. Dabei überschneiden sich in der Regel die einzelnen Substrukturen und sind deshalb oft schwer zu unterscheiden. Bei der Tomographie (CT) (siehe Kapitel *Bildgebende Verfahren*) werden Schnittbilder[13] des Körper aufgenommen. Die mathematischen Grundlagen wurden schon 1917 von Johann Radon gelegt [**?**] und in den sechziger Jahren experimentell umgesetzt.[14] [15] Damit gelingt es beispielsweise, Gewebeverletzungen

[13] *tomos (griechisch): Schnitt*

[14] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1979 was awarded jointly to Allan M. Cormack and Godfrey N. Hounsfield *for the development of computer assisted tomography*

[15] Godfrey N. Hounsfield, der den ersten Computertomographen entwickelte, war bei der britischen Schallplattenfirma EMI beschäftigt.

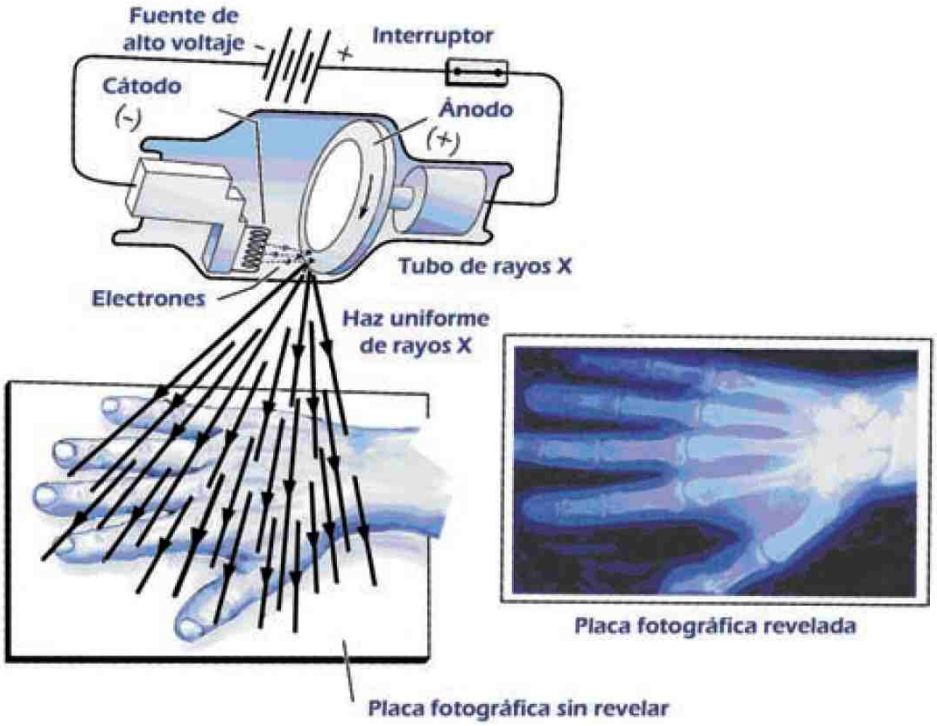


Abb. 19.10: Verfahren zur Erzeugung eines Röntgenbildes durch Belichtung eines Films [**?**].

(Läsionen) klar zu erkennen. Ein eng kollimierter Röntgenstrahl durchdringt den Körper und wird von einem Nachweissystem detektiert, der die Intensität der transmittierten Strahlung nachweist. Viele solcher Messungen werden durchgeführt, wobei jeweilige die Position und Orientierung von Röntgenquelle und Körper zueinander verändert wird. Die so erzeugten Bilder werden von einem Computerprogramm ausgewertet und man gelangt so zu einer dreidimensionalen Rekonstruktion des Objekts. Die Verwendung eines einzelnen Detektors führt zu einer längeren Messung, um das CT-Bild zu erstellen. Die Aufnahmetechnik lässt sich beschleunigen, indem man ein Strahlbündel und viele Detektoren einsetzt, siehe Abb. 19.16 (links). So wird der gesamte Querschnitt gleichzeitig aufgenommen. Indem man Röntgenquelle und Detektoren um den Patienten dreht, gelingt es, das CT-Bild innerhalb weniger Sekunden aufzunehmen. Abb. 19.17 zeigt Beispiele für die Anwendung der Computer-Tomographie aus unterschiedlichsten Forschungsgebieten. Noch schneller und daher besonders zur Kontrolle der Herztätigkeit geeignet, sind Apparaturen, bei denen ein Elektronenstrahl, durch Magnetfelder geführt, auf eine Wolframanode trifft. Hier wird die Röntgenstrahlung erzeugt und damit eine ortsvariable Röntgenquelle erzeugt, siehe Abb. 19.16 (rechts).

Wenn man ultrakurze, intensive Laserstrahlung (TW) auf Materialien hoher Ordnungszahl fokussiert, erzeugt man Röntgenblitze mit Pulsdauern im ps-Bereich (10^{-12} s). Mit Hilfe dieser Technik gelingt es Momentaufnahmen kleiner Tiere mit Röntgenstrahlen zu erzeugen. Abb. 19.19 zeigt ein Beispiel

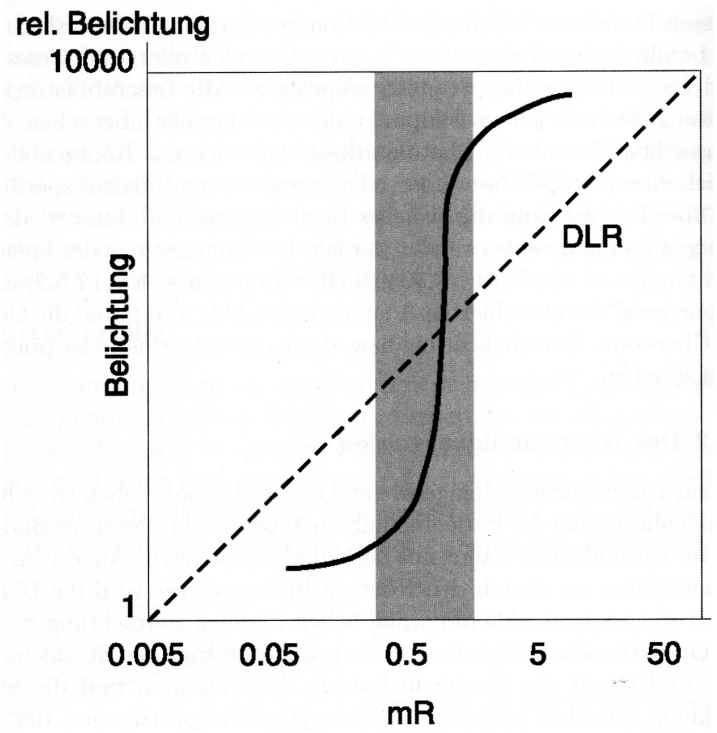


Abb. 19.11: Relative Belichtungsstärke in Abhängigkeit von der Röntgendosis. Im Gegensatz zur Filmbelichtung (durchgezogene Linie) liefert die Digitale Lumineszenz-Radiographie (DLR, gestrichelt) über einen weiten Bereich ein Signal, das proportional zur Dosis ist [**?**].

Beispiele aus der Materialforschung

Die Entwicklung von Mikrofokus-Röntgentechnologie startete Ende der 1970er Jahre. Foki mit Durchmesser deutlich geringer als 1μm wurden entwickelt und ermöglichen dadurch hochauflösende Aufnahmen, siehe Abb. 19.18. Mit Hilfe dieser Technik, die ebenfalls die Computertomographie einsetzt (μCT), können Mikrorisse in Materialien aufgespürt werden, die sich beispielsweise unter Verspannungen bilden. Der Nachweis ist allerdings eine Herausforderung. Welche Möglichkeiten gibt es, die Entdeckung solcher Risse zu verbessern [**?**]?

- Kleinste Risse lassen sich erkennen, selbst wenn sie nur 10% der Pixelgröße auf dem Detektor ausmachen. Es ist also sinnvoll, Maßnahmen zu ergreifen um die räumliche Auflösung zu verbessern.

- Ein geschlossener Riss ist mit Hilfe der Röntgentomographie nicht nachweisbar. Unter Belastung öffnet sich die Risse und die Sichtbarkeit erhöht sich.

- Die Ausnutzung des Phasenkontrast hilft Risse besser zu erkennen.

- Kontrastmittel erhöhen die Erkennbarkeit eines Risses.

Sorge um Kunstwerk: Rostocker retten Ikone der Moderne

Haarrisse am Torso der Lehmbruck-Skulptur „Die Kniende“ beunruhigen die Mitarbeiter im Kulturhistorischen Museum. Ein Röntgenbild klärt auf: Der Kopf bleibt dran.

Von Doris Kesselring

Stadtmitte – Die Diagnose ist positiv: Der Torso im Kulturhistorischen Museum wird nicht den Kopf verlieren. Das Röntgenbild zeigt die Stahlbewehrung im Inneren, die den bedeutenden Steinguss des deutschen Künstlers Wilhelm Lehmbruck (1881 - 1919) sichert.

Museumsleiter Steffen Stuth ist beruhigt. Er und seine Mitarbeiter waren in großer Sorge. Feinste Haarrisse am Hals des Torsos ließen vermuten, dass der Ikone der klassischen Moderne möglicherweise bei kleinsten Erschütterungen der Kopf abbricht. „Es sind die Überreste einer herausragenden Plastik“, klärt Museumsleiter Steffen Stuth auf.

Deshalb wurde ein ungewöhnlicher Auftrag erteilt: Bitte eine Steinfigur röntgen. Das Museum bat die Rostocker Firma Oehm und Rehbein mit ihrer digitalen portablen Röntgentechnik um Hilfe. Die Techniker rückten mit ihrem mobilen Röntgenkoffer an und positionierten das System am Kunstwerk. „Einen steinernen Torso röntgen, das hatten wir bisher noch nicht“, sagt Christoph Poppe. „Es war spannend und das Ergebnis für alle sehr positiv“, freut sich der erfahrene Röntgentechniker.

1911 hatte Wilhelm Lehmbruck eine seiner bekanntesten Skulpturen, die „Kniende“, geschaffen, die nach der Ausstellung im Pariser Salon d´Automne ihren Siegeszug zunächst in Amerika antrat. Unter Lehmbrucks Anleitung entstanden



Abb. 19.12: Aus der Ostseezeitung vom 22.6.2015.

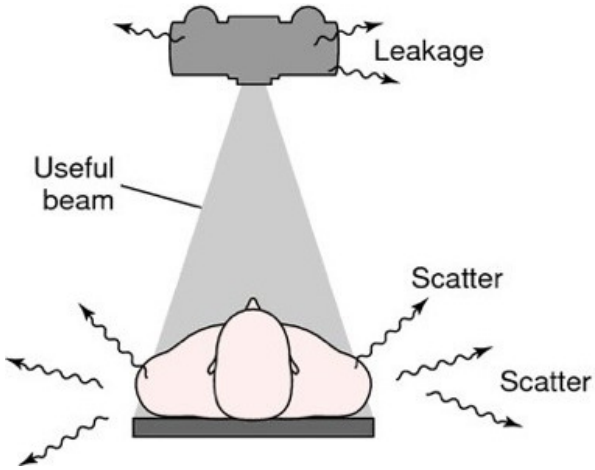


Abb. 19.13: Neben der Strahlung, die das Röntgenbild liefert entstehen weitere Beiträge durch nicht vollständig abgeschirmte Strahlung der Quelle und Compton-Streuung [**?**].

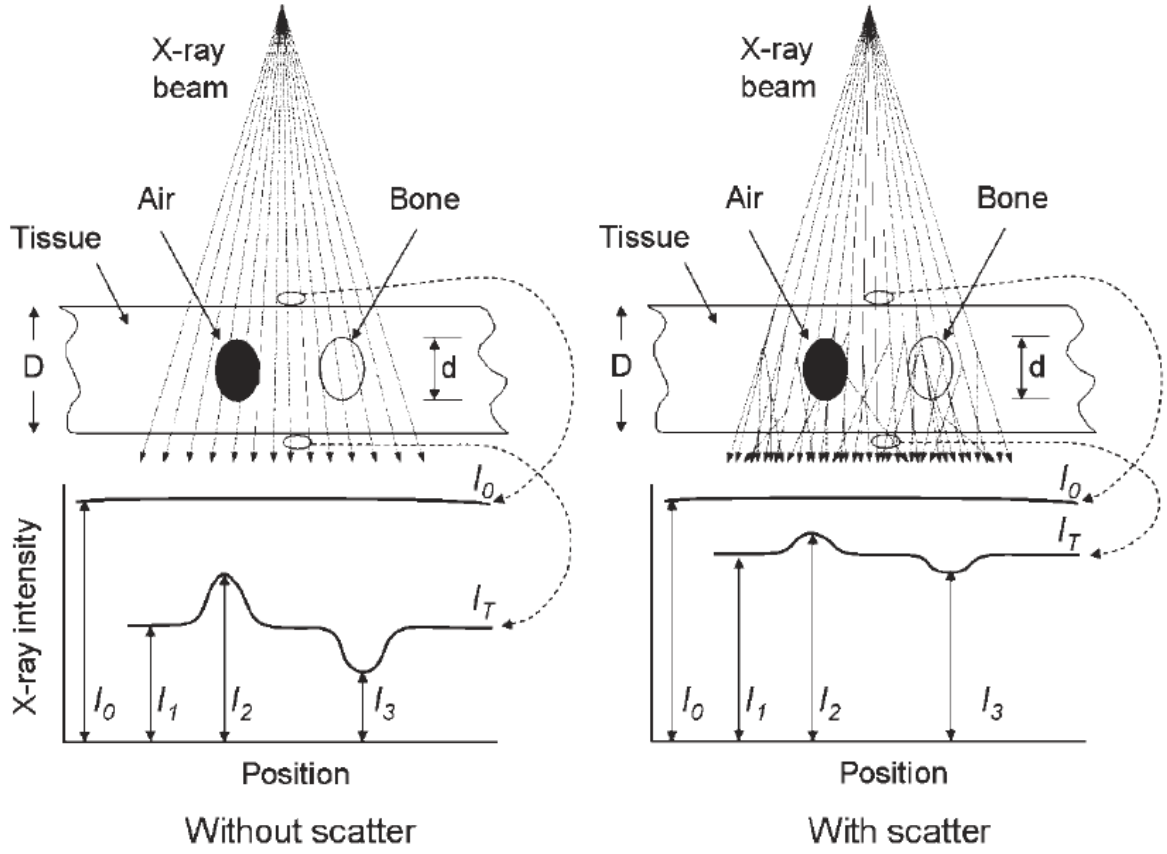


Abb. 19.14: Bei einer ideale Projektions-Röntgenaufnahme erfolgt die Abbildung durch eine Punktquelle. Der Kontrast ist die Differenz der Signale eines Objekts zum Hintergrund. Kommt es zur Streuung, verringert sich der Kontrast [**?**].

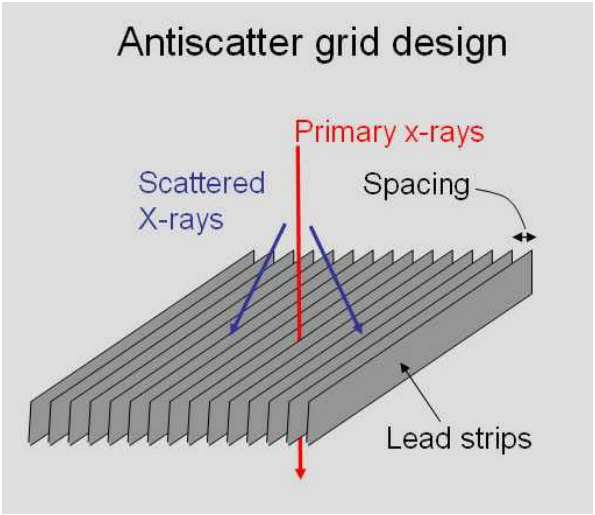


Abb. 19.15: Einsatz eines Kollimators, um den Strahlengang eines Röntgenstrahls einzuschränken.

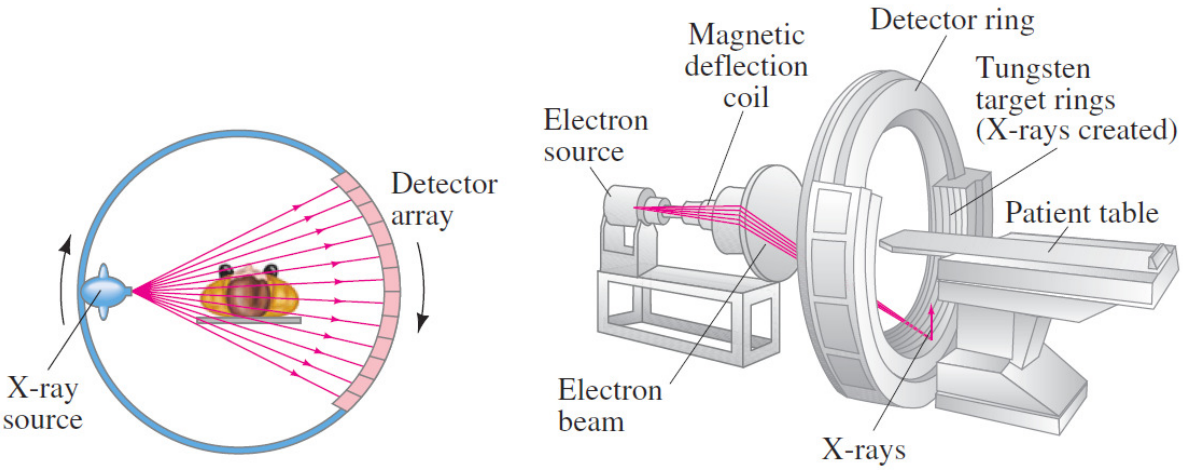


Abb. 19.16: *links:* CT-Scanner auf der Basis eines gefächerten Röntgenstrahls. Der gesamte Körper wird gleichzeitig unter vielen unterschiedlichen Winkeln beleuchtet und die Intensität der Einzelstrahlen gemessen. *rechts:* Ein Elektronenstrahl wird durch Magnetfelder in einem hohen Tempo über ein Wolfram-Array geleitet, dass den Patienten umgibt. Damit entfällt die mechanische Bewegung der Komponenten, wodurch eine deutlich höhere Abtastgeschwindigkeit erreicht wird [**?**].

Bei poröse Materialien wie Schäumen gelingt eine dreidimensionale Charakterisierung der Partikel. Weiter können mit einem μCT Fasern untersucht werden. Vorteile der Methode sind, dass

- Materialien bei hoher räumlicher Auflösung dreidimensional abgebildet werden können.
- die Technik in den überwiegenden zerstörungsfrei arbeitet.
- quantitative Messungen durchgeführt werden können.

Der μCT-Technik sind natürlich Grenzen gesetzt. Dazu gehört das Durchdringungsvermögen von Röntgenstrahlen in Bezug auf die Dichte der Probe. Dichte Metalle beispielsweise erfordern intensive Röntgenstrahlen oder Proben geringer Ausdehnung.
Als zerstörungsfreie Technik ist Röntgentomographie ein ideales Mittel, um die zeitabhängige strukturelle Änderungen zu verfolgen. Dies hilft bei der Optimierung von Herstellungsprozessen (Sintern, Erstarren, Ermüdungsrisswachstum), für Partikelbewegungen, Kartierung von Verformungen. Des hilft auch bei der Computermodellierung von Mikrostrukturen. Interessant sind beispielsweise der Transport durch poröse Materialien, die Verformung polykristalliner Aggregate oder Erkenntnisse zu den mechanischen Eigenschaften von Verbundwerkstoffen [**?**].

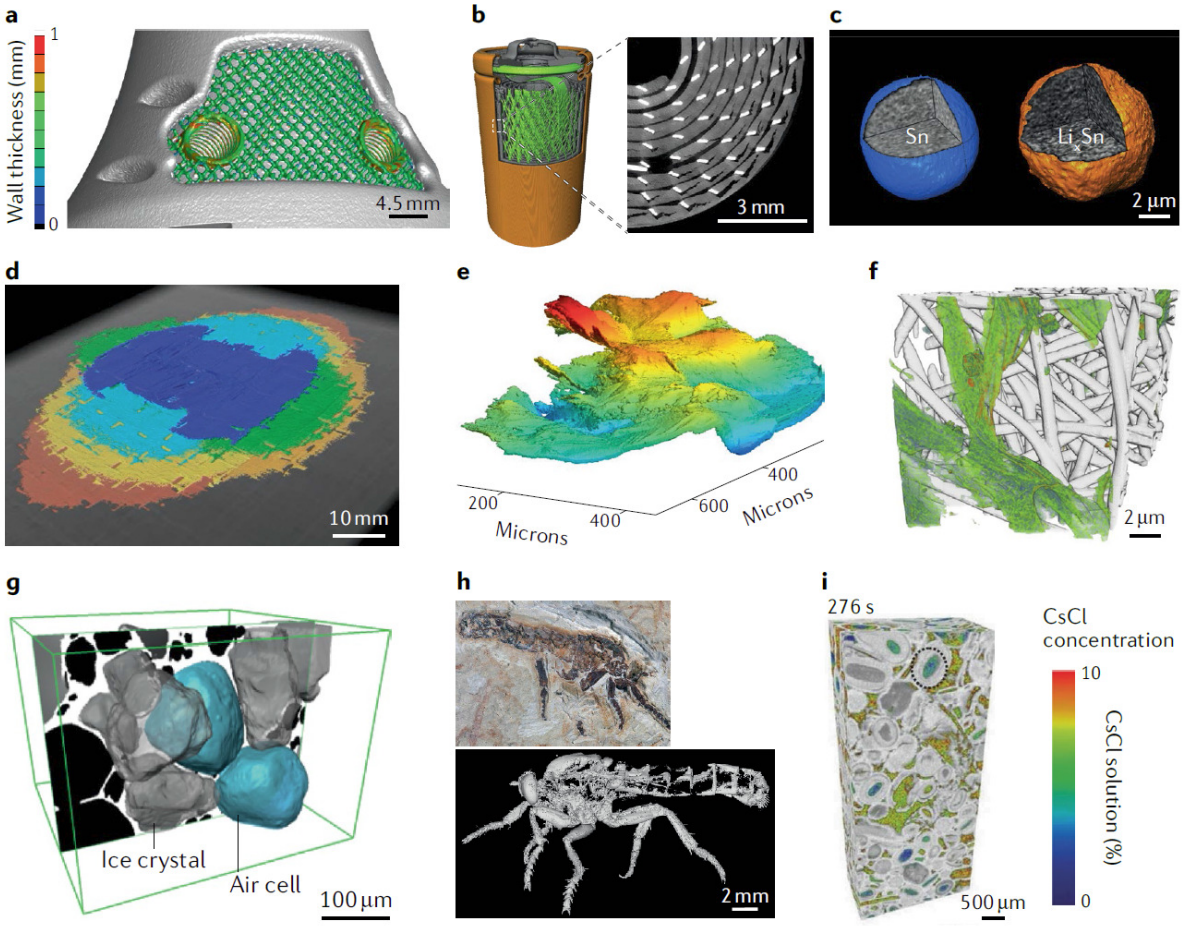


Abb. 19.17: Beispiele für den Einsatz der Röntgen-Computertomografie. (a) Gitterstruktur in einem biomedizinischen Implantat. (b) Duracell-Batterie (c) Nanopartikels in einer Lithium-Ionen-Batterieelektrode vor und nach der ersten Lithiierung. (d) Aufprallschäden bei einer Kohlefaser-Verbundplatte. (e) Ermüdungsriss in in einer Titanlegierung. (f) Fibroblastenzellen (g) Speiseeis mit Lufteinschlüssen und Eiskristallen. (h) 115 Millionen Jahre alte Raubfliege.. (i)Infiltration von Savonnières-Kalkstein mit Cäsiumchlorid [**?**].

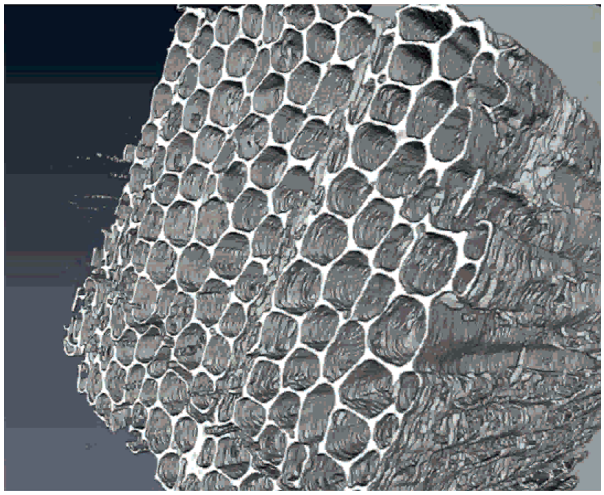


Abb. 19.18: Hochaufgelöste Computertomographieaufnahme der Zellstruktur eines Baumes [**?**].

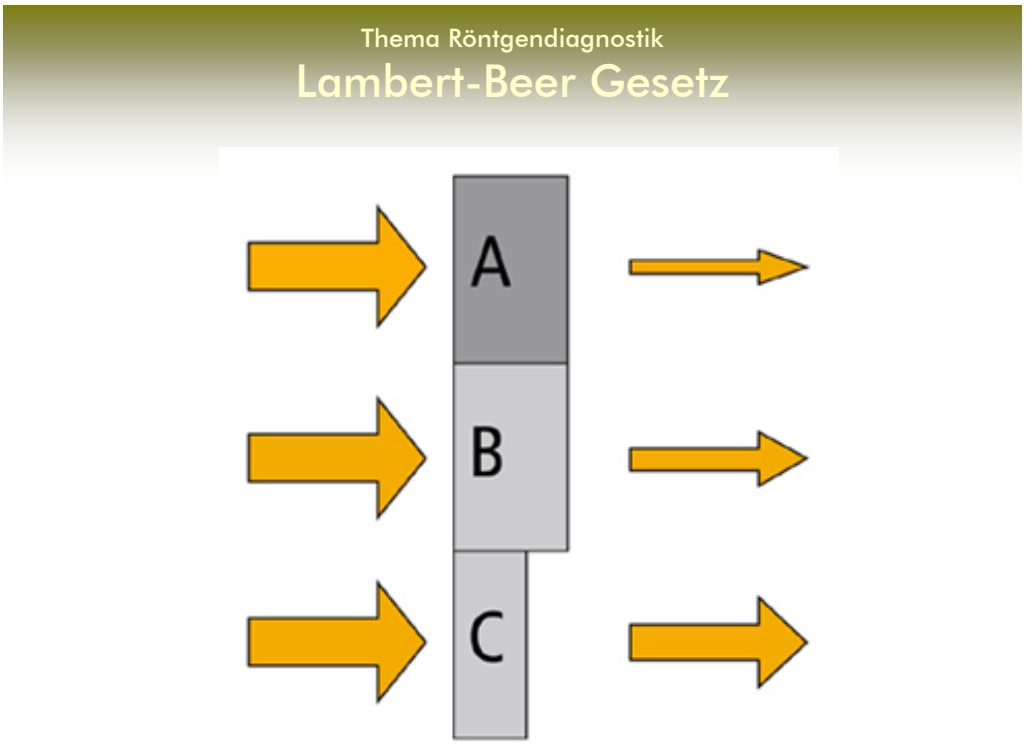


Abb. 19.19: Röntgenaufnahme einer Wistar-Furth-Ratte, aufgenommen unter Verwendung einer lasererzeugten Röntgenquelle. Durch ein dünnes Kupferblech blendet man einen Großteil der Strahlung mit Photonenenergien unter 25 keV aus [**?**].

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Ist eine Röntgenaufnahme eindeutig?
2. Welche Bedeutung hat Compton-Streuung für die Qualität eines Röntgenbildes?
3. Wie würden Sie die Vergrößerung eines Röntgenbildes definieren?
4. Welche Aufgabe erfüllt ein Röntgenstrahl-Kollimator?
5. Wie arbeitet ein CT-Scanner.

19.2 Lambert-Beer Gesetz



Das Lambert-Beer Gesetz wurde 1729 von Pierre Bouguer entdeckt, als er während eines Urlaubs in Alentejo, Portugal, Rotwein untersuchte. Das Lambertsche Gesetz besagt, dass die Abnahme der Lichtintensität auf dem Weg durch eine Umgebung direkt proportional Weglänge des Lichts in einem Medium ist. Später im Jahr 1852 erweiterte August Beer die Analyse, in dem er die relevanten Parameter konkretisierte. Das Beersche Gesetz besagt, dass die Transmission einer Lösung konstant ist, wenn das Produkt aus Konzentration und Weglänge konstant ist. Die heute verwendete Version des Lambert-Beer Gesetzes verbindet die Extinktion (negativer dekadische Logarithmus der Transmission) mit der Konzentration des absorbierenden Mediums und den Abmessungen der Probe.

Das Lambert-Beer Gesetz beschreibt -in Abhängigkeit von der Konzentration der absorbierenden Substanz und der Schichtdicke- die Abschwächung der Intensität einer Strahlung beim Durchgang durch ein Medium mit einer absorbierenden Substanz (Abb. 19.20). Das Gesetz ist die Grundlage der modernen Photometrie als analytische Methode. Das Gesetz gilt

- für eine homogene Verteilung einer absorbierenden Substanz.
- wenn man Mehrfachstreuung vernachlässigen kann.

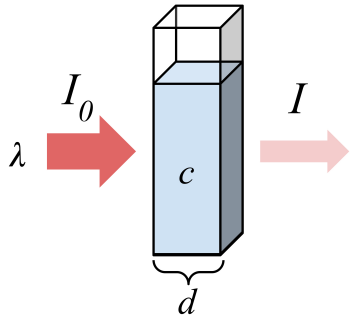


Abb. 19.20: Abschwächung von Strahlung beim Durchgang durch eine absorbierende Substanz einer bestimmten Konzentration.

- bei niedrig konzentrierten Lösungen.

Die Aerosol Optische Dicke (AOD) oder auch atmosphärische Trübung ist ein Maß für die durch Partikel verursachte Abschwächung der Sonnenstrahlung entlang der atmosphärischen Säule gemäß dem Lambert-Beer Gesetz. Die AOD ist ein maßgeblicher Parameter für den Strahlungstransfer durch die Atmosphäre und den Einfluss von Aerosolen auf Wetter und Klima, siehe auch [**?**].

In der Computertomographie (Kapitel *Bildgebende Verfahren*) wird die Abschwächung der Röntgenstrahlung ebenfalls durch das Lambert-Beer Gesetz beschrieben. Der Absorptionskoeffizient ist dabei eine Funktion des Ortes, d.h. er variiert möglicherweise innerhalb des Patienten. Zum Beispiel hat der Absorptionskoeffizient in Knochen einen größeren Wert als in der Lunge. Wir werden im Rahmen dieses Kapitels die Anwendung dieses Gesetzes im Zusammenhang mit der Molekülphysik [**?**] und der Klimaforschung (*aerosol optical depth* [**?**]) nicht vertiefen. Das Lambert-Beer Gesetz wird in der chemischen Analyse verwendet, außerdem in der Optik, der Absorption von Neutronen, der Transmission von Photonen durch feste Materie oder verdünnten Gasen. Für eine Einleitung verweise ich auf folgendes Video:

`Link to` ***`Spectrophotometry and the Beer-Lambert Law`***

Bei der Propagation von Röntgenstrahlung durch Materie nimmt die anfängliche Intensität in charakteristischer Weise ab. Das Verhalten wird beschrieben durch ein Exponentialgesetz (Lambert-Beer Gesetz). Die Abschwächung der Strahlung einer Intensität I_0 in Gewebe einer bestimmten Schichtdicke x hängt allein vom Absorptionskoeffizienten μ_{xray} ab.

$$I(x) = I_0 \cdot \exp(-\mu_{xray} \cdot x) \tag{19.1}$$

Da der Exponent dimensionslos sein muss, ergibt sich für μ_{xray} die Einheit [1/m]. Abb. 19.21 zeigt, wie sich das Absorptionsverhalten verändert, wenn sich μ_{xray} ändert.

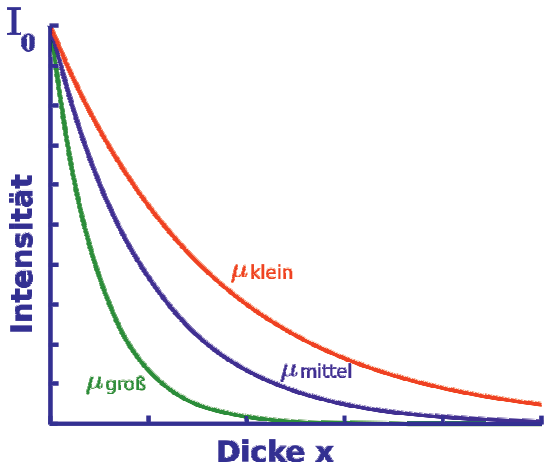


Abb. 19.21: Abhängigkeit der transmittierten Intensität vom Absorptionskoeffizienten μ_{xray}.

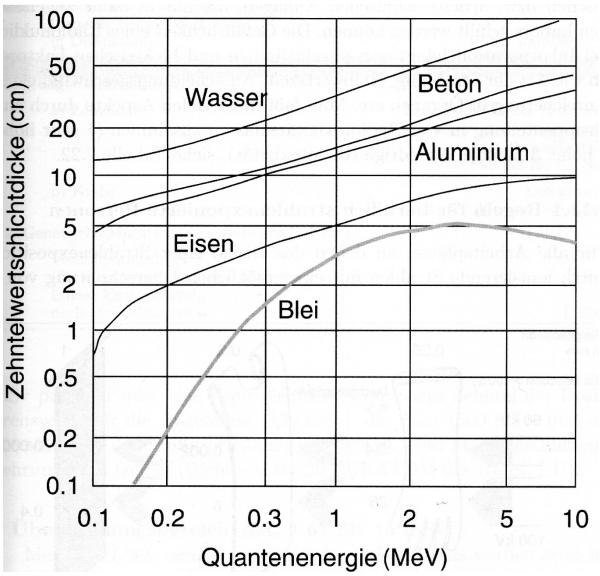


Abb. 19.22: Zehntelwert-Schichtdicke unterschiedlicher Proben als Funktion der Energie der Röntgenstrahlung[**?**].

Eine wichtige Größe ist dabei die Schichtdicke δ_{xray}. Sie bezeichnet die Weglänge, auf der die Anfangsintensität I_0 auf den Wert I_0/e abgefallen ist. Als Zusammenhang zwischen δ_{xray} und μ_{xray} ergibt sich

$$\delta_{xray} = \frac{1}{\mu_{xray}} \tag{19.2}$$

Die Einheit der Schichtdicke ist deshalb Meter [m]. Als Beispiel ergibt sich für eine Schichtdicke von 1.0 cm ein Absorptionskoeffizient von

$$\mu_{xray} = \frac{1}{\delta_{xray}} = \frac{1}{0.01\,\mathrm{m}} = 100\,\mathrm{m}^{-1} \tag{19.3}$$

Eine weiterer gebräuchlicher Parameter ist die Halbwertsdicke $\delta_{1/2}$. Diese beschreibt, in welcher Gewebetiefe die Intensität von I_0 auf $I_0/2$ abgenommen hat. Als Zusammenhang

zum Absorptionskoeffizienten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{I(x)}{I_0} &= \frac{1}{2} = \exp\bigl(-\mu_{xray} \cdot \delta_{1/2}\bigr) \\ 2 &= \exp\bigl(\mu_{xray} \cdot \delta_{1/2}\bigr) \\ \ln(2) &= \mu_{xray} \cdot \delta_{1/2} \\ \delta_{1/2} &= \frac{\ln(2)}{\mu_{xray}} \end{aligned} \tag{19.4}$$

In ähnlicher Weise berechnet sich auch die häufiger verwendete Zehntelwert-Schichtdicke. Abb. 19.22 zeigt, in welcher Weise dieser Wert von der verwendeten Photonenenergie der Röntgenstrahlung abhängt. Allgemein stellt man fest, dass der Wert mit der Photonenenergie zunimmt. Materie wird also für höher energetische Strahlung immer transparenter.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 2.1: Wie hoch ist die Intensität des Röntgenstrahls hinter einem 3 cm dicken Knochen, wenn der Absorptionskoeffizient $0.18\,\mathrm{cm}^{-1}$ beträgt?

$$\begin{aligned} \frac{I(x)}{I_0} &= \exp(-\mu_{xray} \cdot x) \\ \frac{I(x)}{I_0} &= \exp(-0.54) \\ \frac{I(x)}{I_0} &= 0.58 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2: Eine 100 μm dicke Bleiplatte reduziert die Intensität der Röntgenstrahlung um 50%. Wie viele Platten benötigt man, um den Strahl um mehr als 99% abzuschwächen?

1. Bei einer $1 \cdot 100\,\mu$m dicken Bleiplatte reduziert sich die Intensität auf 50%.
2. Bei einer $2 \cdot 100\,\mu$m dicken Bleiplatte reduziert sich die Intensität auf 25%.
3. Bei einer $3 \cdot 100\,\mu$m dicken Bleiplatte reduziert sich die Intensität auf 12.5%.
4. Bei einer $4 \cdot 100\,\mu$m dicken Bleiplatte reduziert sich die Intensität auf 6.25%.
5. Bei einer $5 \cdot 100\,\mu$m dicken Bleiplatte reduziert sich die Intensität auf 3.12%.
6. Bei einer $6 \cdot 100\,\mu$m dicken Bleiplatte reduziert sich die Intensität auf 1.56%.
7. Bei einer $7 \cdot 100\,\mu$m dicken Bleiplatte reduziert sich die Intensität auf 0.78%.

Bei Verwendung von sieben 100 μm Bleiplatten wird die Intensität der Röntgenstrahlung auf unter 1% gedrückt (siehe auch Abb. 19.23).

Aufgabe 2.3: Die Intensität der Röntgenstrahlung beim Durchtritt durch einen Körper nimmt mit der Tiefe[16]

(a) linear ab.

(b) linear zu.

(c) quadratisch ab.

[16] Antwort: (d)

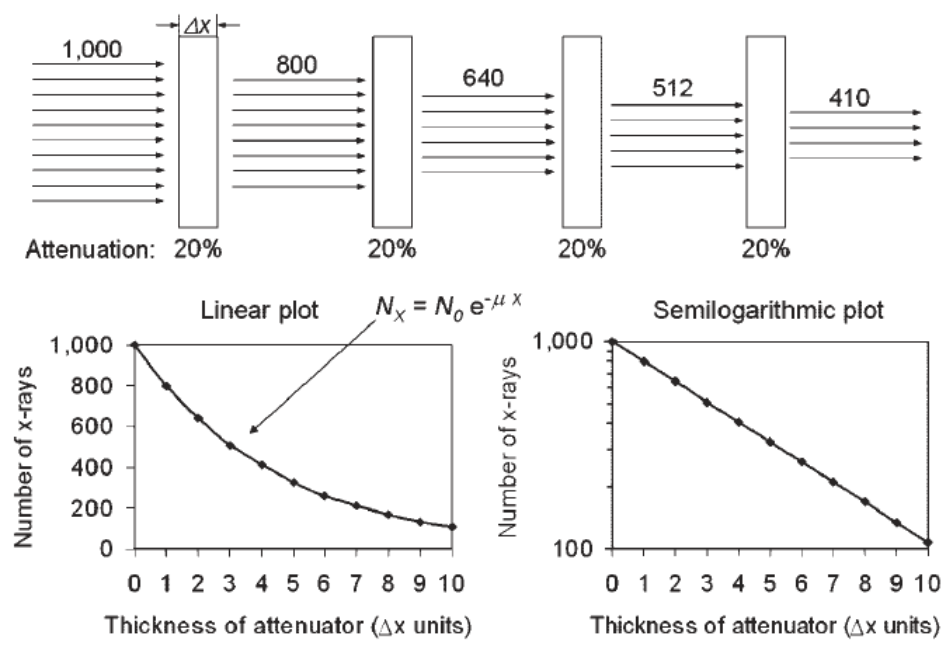


Abb. 19.23: Monoenergetische Röntgenstrahlen durchqueren mehrere Schichten mit einem Dämpfungskoeffizienten von 20% pro Einheit. Die resultierende Dämpfung folgt einem exponentiellen Verlauf. Bei halblogarithmische Auftragung (unten rechts) wird aus der exponentiell abfallenden Kurve eine gerade Linie [**?**].

(d) exponentiell ab.

(e) logarithmisch zu.

Aufgabe 2.4: Die Energie der Strahlung wird bei einer Röntgenaufnahme[17]

(a) hauptsächlich an der Oberfläche deponiert.

(b) hauptsächlich in einer gewissen Tiefe deponiert.

(c) hauptsächlich auf dem Röntgenfilm deponiert.

(d) gleichmäßig über die gesamte Tiefe deponiert

(e) Keine der Antworten ist richtig.

Aufgabe 2.5: Bei Röntgenuntersuchungen am beleibten Patienten wird in der Regel eine höherer Anodenstrom verwendet. Damit verbessert man[18]

(a) den Kontrast.

[17] Antwort: (a)
[18] Antwort: (b)

(b) das Signal-Rausch Verhältnis.

(c) die Auflösung.

(d) die Strahlenbelastung.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie lautet das Gesetz von Lambert und Beer?
2. Welche Rolle spielt die Konzentration einer absorbierenden Lösung bei der Transmission von Licht.
3. Welche Bedeutung hat das Lambert-Beer Gesetz für die Klimaforschung?
4. Wie dick muss eine Bleiplatte sein, damit Röntgenstrahlung vollständig absorbiert wird?

19.3 Röntgenkontrast



X-ray imaging is a standard tool for the non-destructive inspection of the internal structure of samples. It finds application in a vast diversity of fields: medicine, biology, many engineering disciplines, palaeontology and earth sciences are just few examples. The fundamental principle underpinning the image formation have remained the same for over a century: the X-rays traversing the sample are subjected to different amount of absorption in different parts of the sample. By means of phase-sensitive techniques it is possible to generate contrast also in relation to the phase shifts imparted by the sample and to extend the capabilities of X-ray imaging to those details that lack enough absorption contrast to be visualised in conventional radiography [**?**].

Die Kontrast-Radiographie ist eine Methode zur Untersuchung von Organen mit Röntgenstrahlen unter Verabreichung eines Stoffes, der als Kontrastmittel bezeichnet wird. Mit dieser Methode kann man Bereiche im Körper untersuchen, die bei herkömmlichen Röntgenuntersuchungen nicht klar erkennbar sind. Knochen absorbieren Röntgenstrahlen stark und zeigen sich im Röntgenbild deutlich. Das Gewebe von Blutgefäßen, Magen oder Dickdarm absorbieren die Strahlung dagegen kaum. Die Ursache ist die geringe Ordnungszahl, der im Körper hauptsächlich vorkommenden leichten Elemente (H, C, O, N). Ein Kontrastmittel hebt diese Bereiche im Röntgenbild hervor. Der Röntgenkontrast

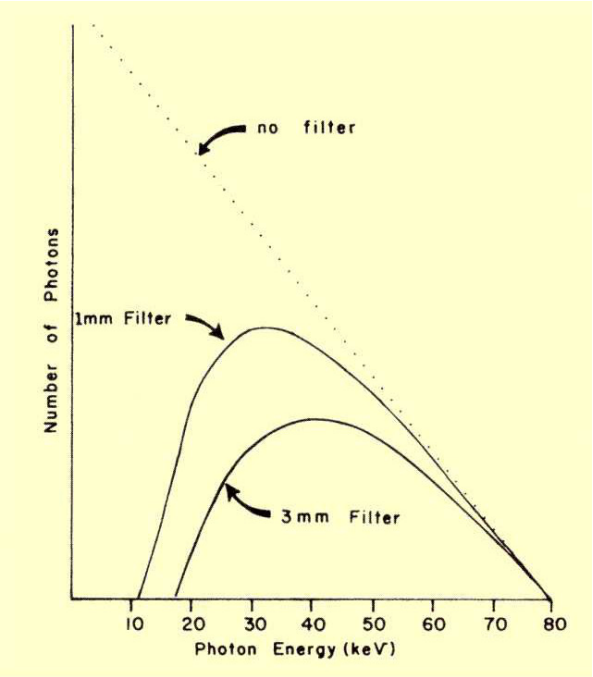


Abb. 19.24: Spektrale Filterung durch Metallfolien wird eingesetzt, um niederenergetische Photonen aus dem Röntgenspektrum zu entfernen [**?**].

wird hervorgerufen durch Dichteunterschiede zwischen benachbarten Regionen auf einem Röntgenbild. Ein hoher Kontrast wird bei Aufnahmen beobachtet, bei denen Dichteunterschiede deutlich erkennbar sind, während ein geringer Röntgenkontrast zu sehen ist, wenn benachbarte Bereiche einen geringen Dichteunterschied aufweisen Die bei Röntgenuntersuchungen verwendeten Kontrastmittel lassen sich in positiv (Jod, Bariumsulfat) und negativ wirkende Kontrastmittel (Luft, Kohlendioxid) einteilen.

Röntgenfilter

Der Blick auf ein Röntgenspektrum (Kapitel *Röntgen*) macht deutlich, dass die Strahlung nicht monochromatisch ist, sondern einen breiten Wellenlängenbereich abdeckt. Hinzu kommt, dass die niederenergetische Röntgenstrahlung vom Körper vollständig absorbiert wird. Für die medizinische Diagnostik heißt das, dass dieser Bereich des Spektrums zur Strahlenbelastung beiträgt, ohne Informationen auf dem Röntgenbild zu hinterlassen. Ziel ist es, geeignete Methoden zu entwickeln, die den Strahlenschutz erhöhen, ohne die Qualität des Röntgenbildes zu mindern. In Abhängigkeit von der Wellenlänge ergeben sich unterschiedliche Eindringtiefen. In Muskeln beispielsweise wird Strahlung unterhalb 10 keV vollständig absorbiert, siehe Abb. 19.25. Damit ist dieser Spektralbereich des Röntgenspektrums für die Röntgenanalyse nicht geeignet und führt nur zu einer nicht notwendigen Strahlenbelastung von Patienten. Metallfilter sind in der Lage diesen Bereich des Spektrums effektiv abzuschirmen wie Abb. 19.24 demonstriert. Im Energiebereich zwischen 10 bis 25 keV nimmt die Transmission stark zu, um sich ab 40 keV auf einen nahezu konstanten Wert einzupendeln.

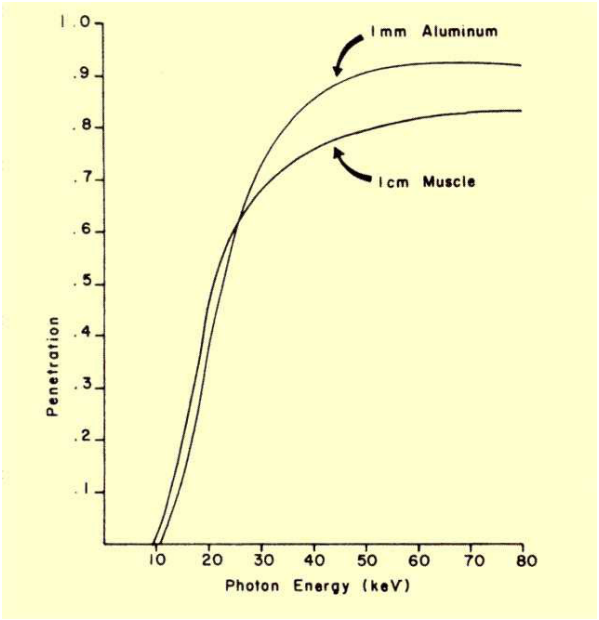


Abb. 19.25: Eindringen von Röntgenstrahlung in Weichgewebe und Aluminium in Abhängigkeit von der Photonenenergie [**?**].

Anwendungen 1^{4LP}

Ein Beispiel aus der Medizin

Eine erhebliches Problem bei medizinischen Untersuchungen ist die Unterscheidung von gesundem und krankem Gewebe, da der Kontrast im Röntgenbild oft nur sehr gering ist. Da das erkrankte Gewebe oft nur eine geringe Ausdehnung hat, versucht man geometrisch eine gewisse Vergrößerung zu erreichen (Abb. 19.26).

Als besondere Herausforderung stellt sich der Nachweis eines Mammakarzioms heraus. Dieses gilt Indiz für eine Brustkrebserkrankung. Die Diagnostik verwendet dazu weiche Röntgenstrahlung. Bei der Mammographie ergibt sich der höchste Kontrast bei einer Photonenenergie von etwa 19 keV. Eine Molybdänanode erzeugt Strahlung mit intensiver charakteristischer K-Strahlung bei 17.6. und 19.7 keV. Um die spektrale Breite des Spektrums einzuengen, verwendet man Metallfilter. Abb. 19.27 demonstriert, wie man durch den Einsatz unterschiedlicher Anodenmaterialien und Metallfiltern das Röntgenspektrum beeinflussen kann. Rhodium beispielsweise ist geeignet, weil es Röntgenlicht oberhalb 23.2 keV stark absorbiert. Molybdän selbst kann ebenfalls eingesetzt werden, da auch hier die Absorptionskante nahe 20 keV liegt. Abbildung. 19.28 zeigt, wie man bei einer bei 30 kV arbeitenden Molybdän-Anode durch Metallfilter den hochenergetischen Anteil der Strahlung effektiv unterdrücken kann. Abb. 19.29 zeigt Beispiele mammographischer Aufnahmen. Die Anforderungen an die Mammographie bezüglich eines optimierten Röntgenkontrastes und einer geringen Strahlenbelastung lassen sich wie folgt zusammenfassen (Abb. 19.30):

- Röntgenphotonen mit niedrigerer Energie haben eine unzureichende Eindringtiefe und erhöhen die Strahlendosis. Röntgenphotonen mit höherer Energie verringern den Kontrast.

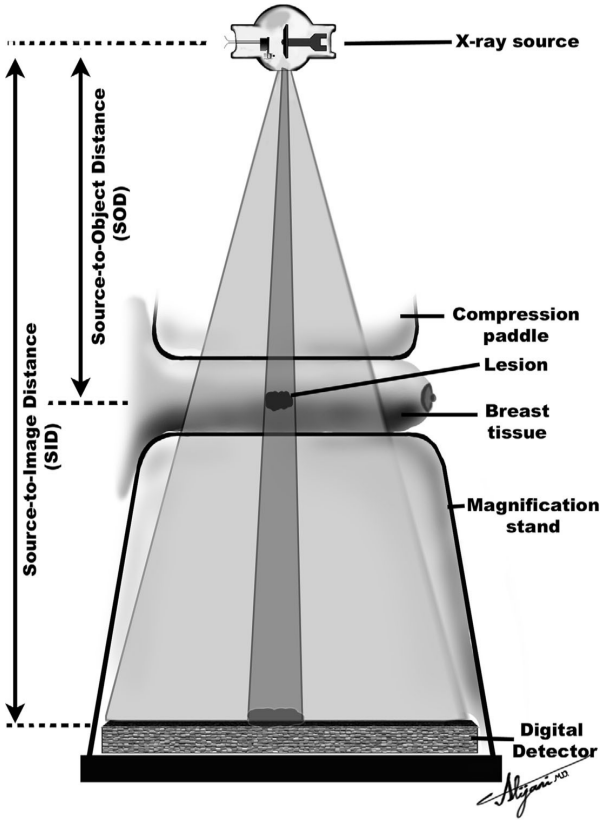


Abb. 19.26: Vergrößerung eines Röntgenbildes am Beispiel einer Mammographie-Aufnahme [**?**].

- Die optimale Photonenenergie ist in mammographischen Untersuchungen nicht konstant, sondern nimmt mit der Dicke des Brustgewebes zu. Metallfilter werden verwendet, um optimale Photonenenergien zu erzielen, die die Strahlendosis sowohl für hoch- als auch niederenergetische Röntgenphotonen minimieren.

- Als Metallfilter in der Mammographie werden Molybdän, Rhodium oder Silberfolien verwendet. Die Foliendicken sind etwa 30 μm. Die Metallfilter absorbieren effektiv die Bremsstrahlung oberhalb der K-Kante des Filtermaterials. Dadurch wird der Kontrast verbessert. Weiter absorbieren die Filter niederenergetische Strahlung und reduzieren dadurch die Strahlenbelastung des Patienten.

Elemental Contrast X-ray Tomography Using Ross Filter Pairs with a Polychromatic Laboratory Source [?]: The majority of current laboratory based X-ray sources are polychromatic and are not tuneable. This lack of monochromaticity limits the range of applications for these sources and in particular it reduces the elemental specificity of laboratory based X-ray imaging experiments. Here we present a solution to this problem based on the use of Ross filter pairs, see Fig. 19.31. Although such Ross filter arrangements have been applied in proof-of-principle spectroscopy experiments, to date there have been no reports of this approach used for full-field X-ray imaging. Here we report on the experimental demonstration of Ross filter pairs being used for quasi-monochromatic, full-field imaging. This arrangement has several important benefits for laboratory based X-ray imaging including, as we demonstrate, elemental contrast en-

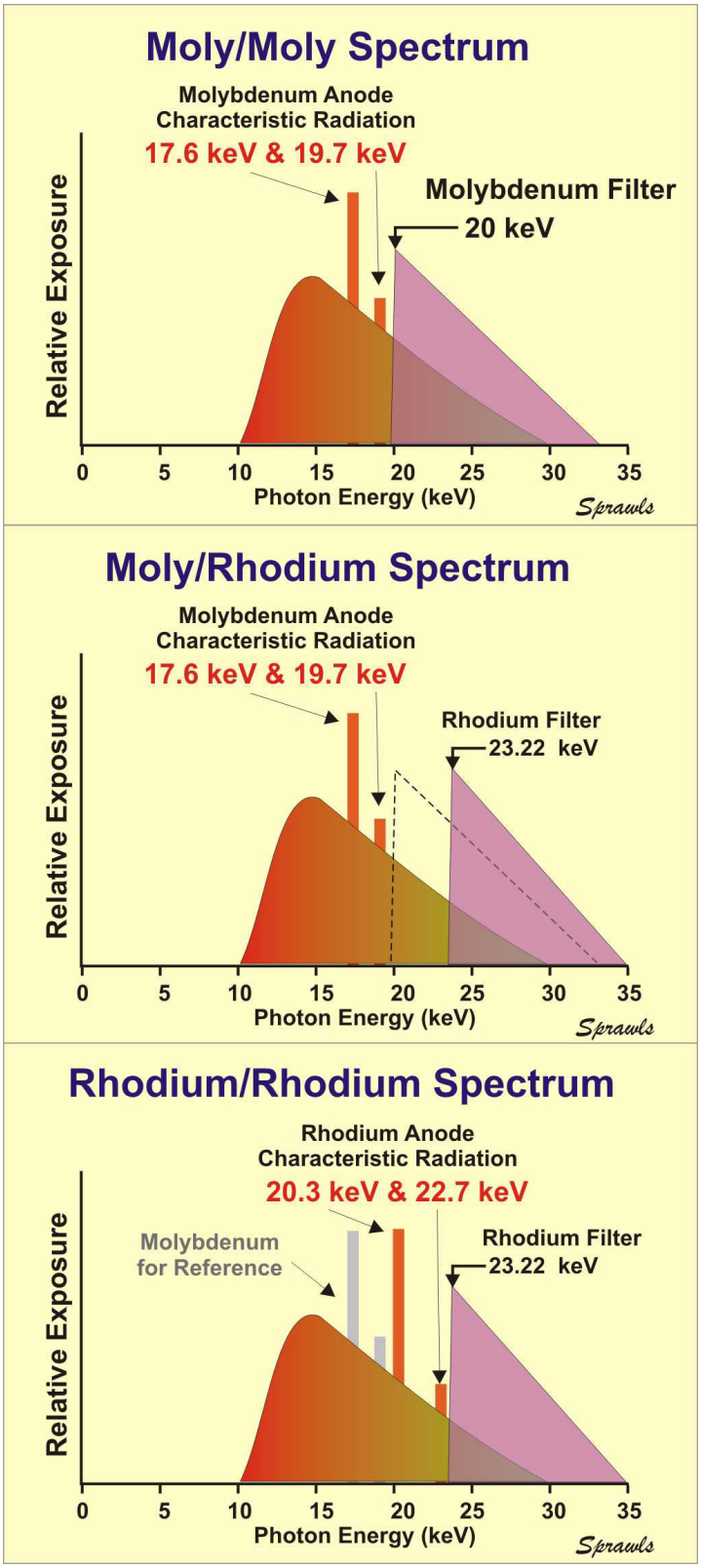


Abb. 19.27: Röntgenspektrum von Molybdän und Rhodium und der Einsatz von Mo- und Rh-Filtern zur spektralen Einschränkung des Spektrums [**?**].

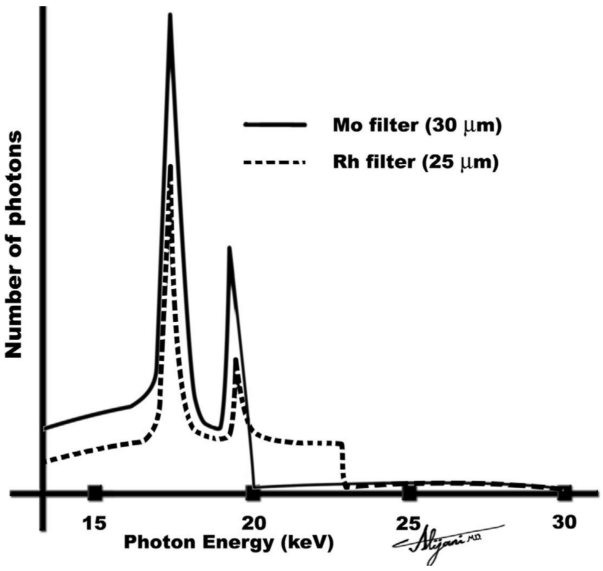


Abb. 19.28: Selektive Eingrenzung des Röntgenspektrums durch Metallfilter [**?**].

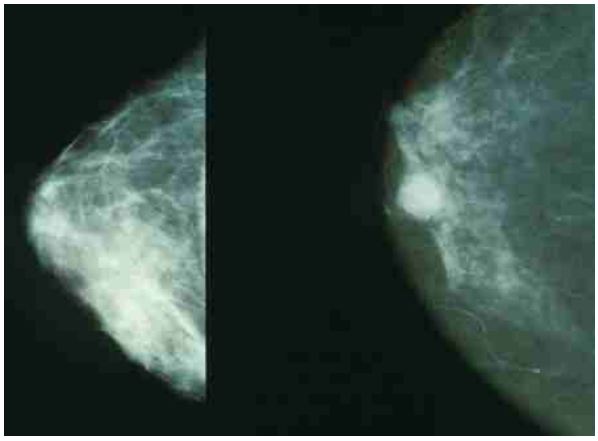


Abb. 19.29: Mammographie einer gesunden Brust (links) und eines Mammakarzinom (rechts) [**?**].

hancement. The method is demonstrated both for two-dimensional radiography and for three-dimensional X-ray tomography.

Massenabschwächungskoeffizient[4LP]

Ein weiterer Punkt, der bei Untersuchungen berücksichtigt werden muss, ist die Dichte des Gewebes. Daher wird oft in Tabellen nicht der Absorptionskoeffizient, sondern der so genannte Massenabschwächungskoeffizient (μ_{xray}/ρ_{tissue}) angegeben.[19] Das Abschwä-

[19]Die Schreibweise der Einheit des Massenabschwächungskoeffizienten ist gewöhnungsbedürftig

$$\left[\frac{1}{m}\right] \cdot \left[\left(\frac{m^3}{kg}\right)^{-1}\right] = \left[\frac{m^2}{kg}\right] = \left[\frac{cm^2}{g}\right] \tag{19.5}$$

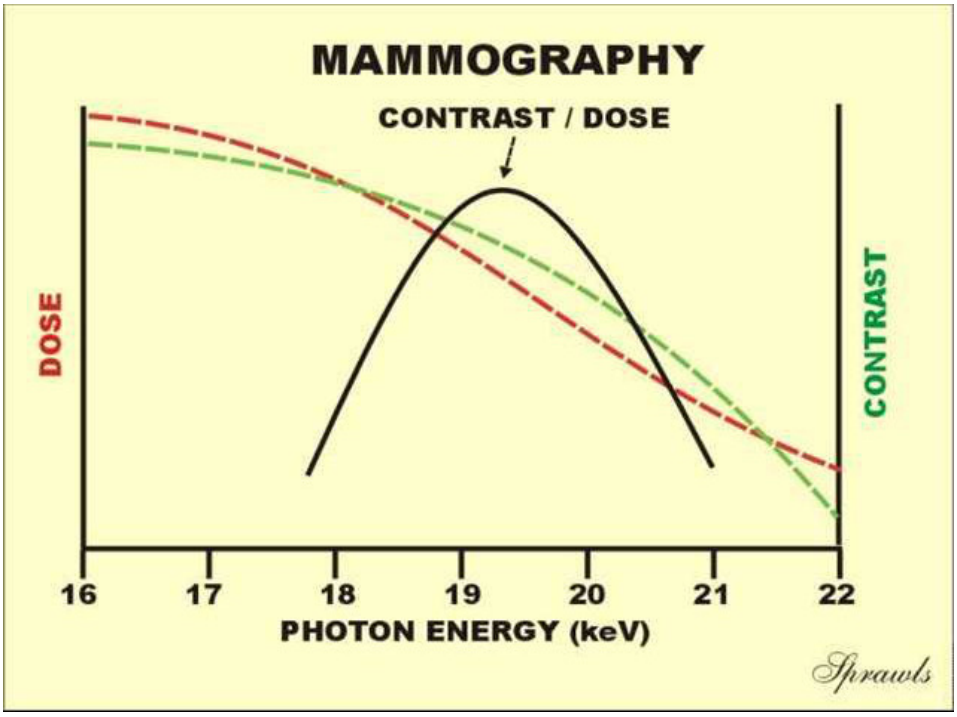


Abb. 19.30: Bestimmung der optimalen Bestrahlung, um in der Mammographie einen guten Kontrast bei geringer Strahlendosis zu erreichen. Beide Faktoren hängen von der Photonenenergie ab. Niedrige Energien geben einen hohen Kontrast. Allerdings ist die Durchdringung des Körperabschnitts gering. Daraus ergibt sich eine hohe Dosis für den Patienten. Bei höheren Photonenenergien erhöht sich die Transmission, allerdings auf Kosten des Kontrast [**?**].

chungsgesetz lautet -auf den ersten Blick wirkt das merkwürdig- dann:

$$I(x) = I_0 \exp\left(-\left(\frac{\mu_{xray}}{\rho_{tissue}}\right) \cdot \rho_{tissue} \cdot x\right) \tag{19.6}$$

Unterschied in der Dichte, wie beispielsweise zwischen Wasser und Eis äußern sich im Röntgenbild.[20] In der Medizin ist der Massenabschwächungskoeffizient wichtig beispielsweise bei der Diagnose von Osteoporose, da sich hier nicht die chemische Zusammensetzung des Knochens, sondern die Dichte des Knochengewebes, krankhaft verändert hat. Abb. 19.32 zeigt Massenabschwächungskoeffizienten für Proben aus dem Forschungsgebiet Umweltphysik [**?**]. Wie geht man vor, wenn es sich mit Schichtsysteme bestehend aus unterschiedlichen Materialien handel? Bei solchen Mehrschichtgeweben addiert man einfach die einzelnen Massenabschwächungskoeffizienten.

[20] In Ref. [**?**] wird eine weiter entwickelte Methode eingesetzt um den Vorgang der Nukleation zu untersuchen.

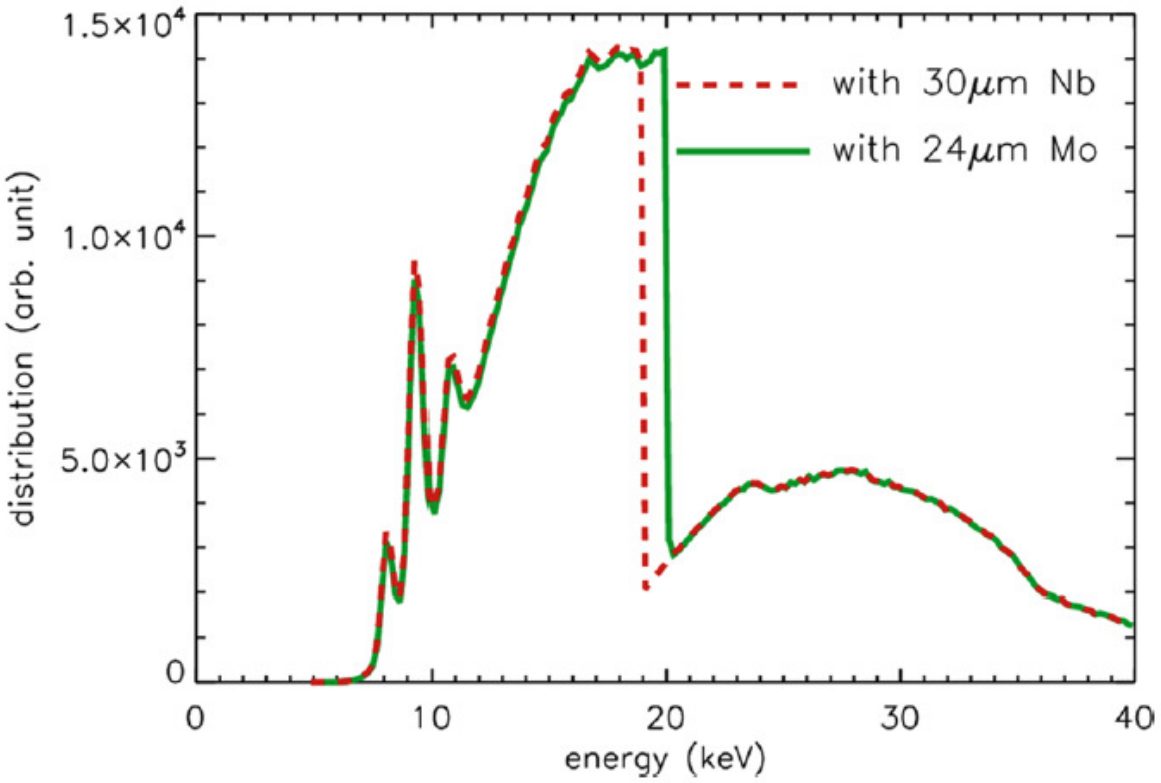


Abb. 19.31: Simulation der Röntgentransmission durch ein so genanntes Ross-Filterpaar, bestehend aus Niobium- und Molybdän-Folien, dargestellt als Funktion der Röntgenenergie. Die grüne Linie zeigt die Transmission des Mo-Filters, die rote Linie die des Nb-Filters ist. Durch diese Metallfilterkombination ergibt sich eine Eingrenzung des Röntgenspektrum auf etwa 1 eV [**?**].

Wechselwirkungsprozesse

Bei der Abschwächung von Röntgenstrahlung durch Materie muss man unterscheiden, welche Mechanismen die Strahlintensität verringern (siehe Abb. 19.4). Je nach Photonenenergie tragen unterschiedliche Prozesse zur Absorption bei, siehe Abb. 19.33. Dazu zählen insbesondere Photoeffekt (Kapitel *Photoelektrischer Effekt*), Comptoneffekt (Kapitel *Materiewellen*) und Paarbildung (Kapitel *Einsteingleichung*). Da die einzelnen Prozesse als Funktion der Photonenenergie nicht klar getrennt sind, sondern teils überlappen, gibt der so genannte totale Abschwächungskoeffizient/ Massenabschwächungskoeffizient jeweils die Summe der Einzelbeiträge an. Für den Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung (e^+e^-) findet man, dass der Wirkungsquerschnitt unterhalb der Energie ($2\,m_e \cdot c^2$) NULL ist. Oberhalb steigt der Querschnitt steil an und pendelt sich bei einer Photonenenergie oberhalb von $100\,m_e \cdot c^2$ auf einen nahezu konstanten Wert ein.

Bei niedrigen Photonenenergien ($E_{xray} < 1.0\,\mathrm{MeV}$) dominiert der Einfluss des Photoelektrischen Effekts. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Wechselwirkung ein Pho-

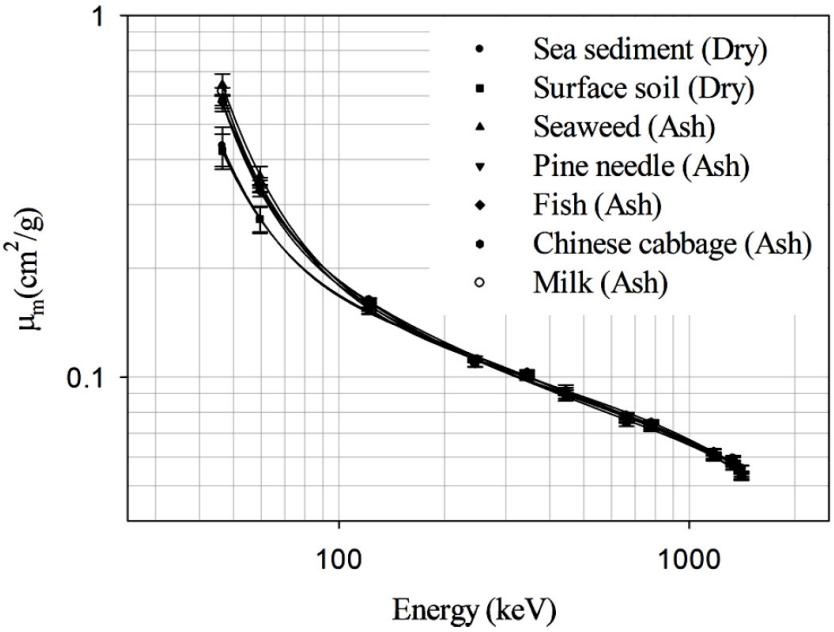


Abb. 19.32: Mittlere Abschwächungskoeffizienten von Umweltproben als Funktion der Röntgenenergie. Bei höheren Photonenenergien verringert sich der Abschwächungskoeffizient erheblich [**?**].

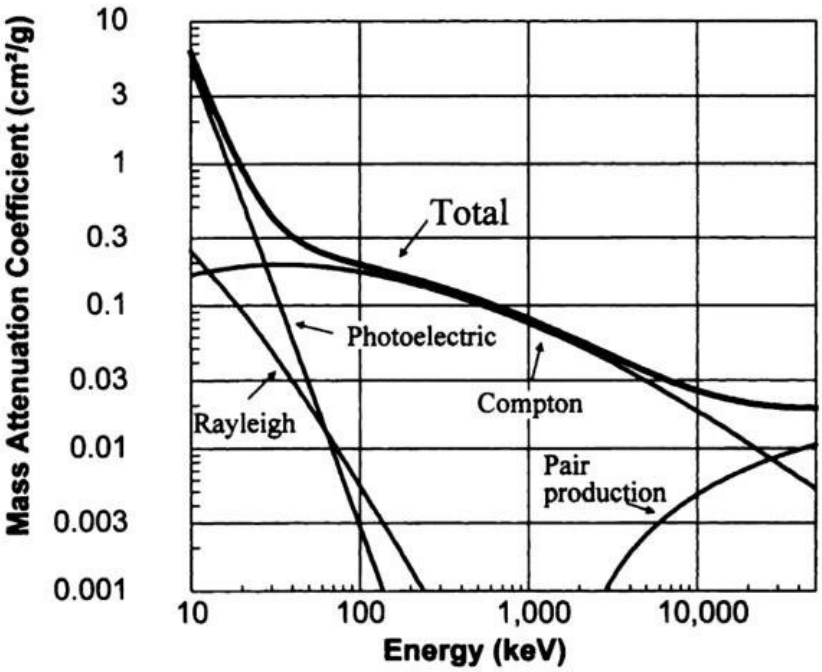


Abb. 19.33: Massenabschwächungskoeffizient als Funktion der Photonenenergie. Die Beiträge der einzelnen Prozesse wie Photoelektrischer Effekt und Compton-Streuung zur Gesamtabschwächung sind eingezeichnet. Man beachte die doppelt-logarithmische Skala [**?**].

toelektron ausgelöst wird, steigt mit der eingestrahlten Photonenenergie an. Das liegt daran, dass das energetische Photon einen erheblichen Impuls hat. Die Energie wird vom Photoelektron aufgenommen, während der Impuls auf das Atom übertragen wird. Da der Impulsübertrag umso effektiver ist, je stärker das Elektron an den Kern gebunden ist, erfolgt die Emission aus den am tiefsten gebundenen Schalen. Dies führt zu einem sprunghaften Anstieg im Absorptionskoeffizienten, sobald die Photonenenergie ausreicht, ein Loch in einer der unteren Schalen zu erzeugen. Aufgrund dieser Überlegungen ist es verständlich, dass sich eine deutliche Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Ordnungszahl und der Photonenenergie ergibt:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{xray}} &= C_{tissue} \cdot \lambda_{\mathrm{xray}}^3 \cdot Z^3 \\ \mu_{\mathrm{xray}} &= C_{tissue} \cdot \frac{c^3 \cdot Z^3}{\nu_{\mathrm{xray}}^3} \\ \mu_{\mathrm{xray}} &= C_{tissue} \cdot \frac{h^3 \cdot Z^3}{E_{\mathrm{xray}}^3} \end{aligned} \tag{19.7}$$

wobei C_{tissue} eine Konstante ist, die spezifisch für das jeweilige Material/Gewebe ist.

Abb. 19.34 zeigt, wie der Massenabschwächungskoeffizienten von Photonenenergie und Gewebetyp abhängt. Man stellt auch fest, dass die schweren Elemente eine erheblich höhere Absorption aufweisen. Anhand von Tabelle in Abb. 19.35 erkennt man, dass die Absorption mit der Wellenlänge abnimmt und mit der Ordnungszahl ansteigt, genau wie Gl. 19.7) beschreibt.

Zusammenfassend lässt sich für die Absorption infolge des Photoeffekts folgendes feststellen:

- Die Absorption nimmt mit Wellenlänge zu.

$$\mu_{\mathrm{xray}} \propto \lambda_{\mathrm{xray}}^3 \tag{19.8}$$

- Die Absorption nimmt mit Ordnungszahl Z zu.

$$\mu_{\mathrm{xray}} \propto Z^3 \tag{19.9}$$

- Je dichter das untersuchte Material ist, desto höher fällt die Absorption aus.

- Eine größere Schichtdicke verringert die Intensität der transmittierten Röntgenstrahlung.

Tabelle 19.1 gibt einen Überblick über die Prozesse und die Abhängigkeit des Massenabschwächungskoeffizienten von Photonenenergie und Ordnungszahl.

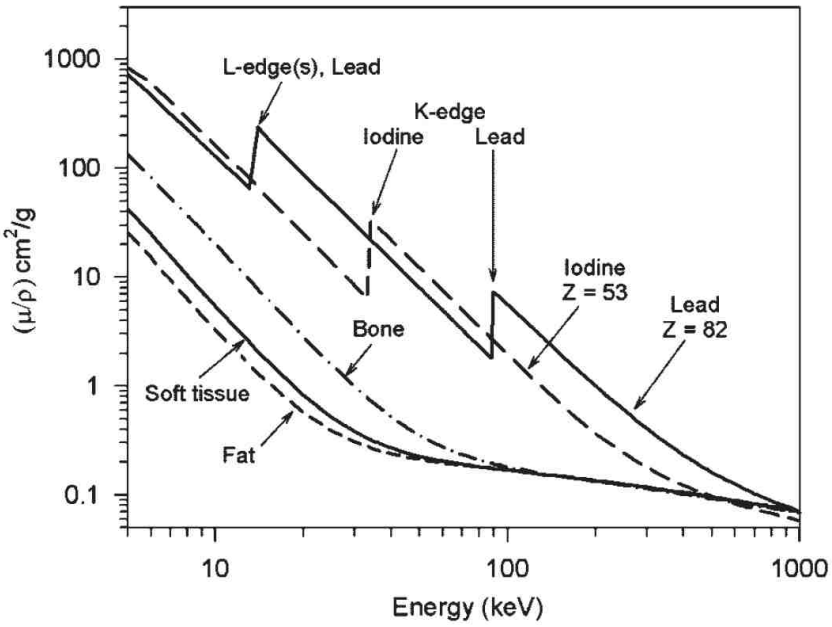


Abb. 19.34: Massenschwächungskoeffizient für verschiedene Materialien. Die Dämpfung nimmt zwischen 10 bis 100 keV mit etwa $1/E^3$ ab. Als Funktion der Ordnungszahl Z nimmt der Massenschwächungskoeffizient mit etwa Z^3 zu. Bei höherem Z des Materials zeigen sich Absorptionskanten [**?**].

Massenschwächungskoeffizient einiger Elemente $\frac{\mu}{\varrho}$

Wellenlänge in kX	C	O	Al	Fe	Cu	Zn	Ag	Pb
0,06	0,120	—	0,121	—	0,160	—	0,283	0,90
0,09	0,137	—	0,144	—	0,259	—	0,715	2,49
0,12	0,151	—	0,168	—	0,434	—	1,36	5,15
0,16	0,163	—	0,213	—	0,83	—	—	—
0,20	0,174	—	0,272	1,12	1,50	1,70	5,45	5,0
0,30	0,206	0,24	0,55	3,38	4,56	5,1	17,5	13,6
0,40	0,250	0,35	1,09	7,6	10,2	11,5	37	32
0,50	0,325	0,52	1,92	14,2	19,1	21	9,7	55
0,63	0,48	0,90	3,73	27,5	38	42	20	101
0,71	0,61	1,22	5,22	38,5	51	58	28	140
1,00	1,37	3,15	14,1	101	129	147	73	77
1,54	4,5	11,2	49	328	49	59	225	230
1,93	8,8	22	94	71	98	115	410	420

Abb. 19.35: Abhängigkeit des Massenabschwächungskoeffizienten von der Wellenlänge für unterschiedliche Elemente, also als Funktion der Ordnungszahl Z.

Prozess	$\mu_{xray}(E_{ph})$	$\mu_{xray}(Z)$	dominanter Energiebereich
Streuung	$1/E_{ph}$	Z^2	1-20 keV
Photoeffekt	$1/E_{ph}^3$	Z^3	1-100 keV
Compton-Streuung	langsamer Abfall mit E	keine Abhängigkeit	0.5-5 MeV
Paarbildung	langsamer Abfall mit E	Z^2	>5 MeV

Tab. 19.1: Abschwächungsprozesse in Gewebe [**?**].

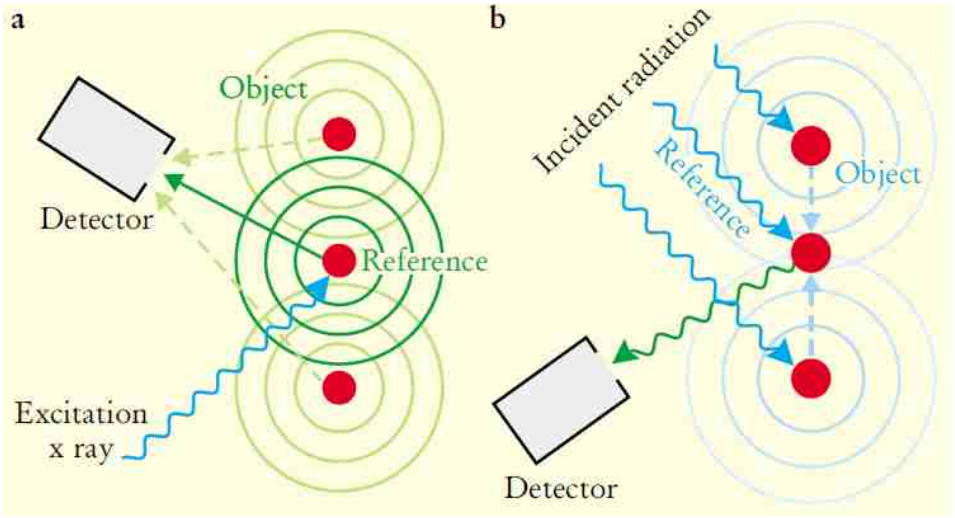


Abb. 19.36: Röntgen-Holographie mit interner Referenz. (a) Die einfallende Strahlung (blau) stimuliert die Emission von Photonen anderer Energie (grün) aus einem Atom (rot). Diese Photonen erreichen den Detektor entweder direkt (holografische Referenzwelle) oder nach Streuung an anderen Atomen. Die Aufzeichnung der Interferenz als Funktion des Winkels um die Probe erzeugt ein Hologramm. (b) Die vom Atom abgegebene Strahlung hängt vom lokalen Umfeld ab. Einfallende Strahlung (blau) kann den Detektor entweder direkt oder nach Streuung an anderen Atomen erreichen. Der Nachweis der Strahlung bei Änderung des Winkels der einfallenden Strahlung liefert ein Hologramm [**?**].

Röntgen-Holographie^{4LP}

Gibt es weitere Möglichkeiten den Kontrast zu verbessern oder weitere Details zu herauszuarbeiten? Ja, sie kennen die Technik aus der Optik. Dennis Gabor [21] entwickelte im Jahr 1948 die Holographie, um Informationen mit atomarer Auflösung aus elektronenmikroskopischen Aufnahmen zu extrahieren. Die meisten Beugungsmethoden sind nur empfindlich auf die Amplitude des Feldes. Informationen, die in der Phase des Feldes kodiert sind, gehen damit verloren. Gabor schlug vor, die Welle, die durch ein Objekt dringt, mit einer Referenzwelle zu überlagern. Als Resultat enthält man sowohl Phasen- als auch Amplitudeninformationen und dies erlaubt einen Einblick in die dreidimensionale Struktur der Probe. In der optischen Holographie ist die Auflösung durch die verwendeten optischen Wellenlängen auf einige hundert Nanometer begrenzt. Linsenfehler in den Elektronenmikroskopen und die starke Wechselwirkung der Elektronen untereinander in Festkörpern verhindern eine atomare Auflösung bei der Elektronen-Holographie. Im Gegensatz dazu stellen die kurzen Wellenlängen der harten Röntgenstrahlung das Potenzial zur Verfügung, um eine atomare Auflösung zu erhalten. Abb. 19.36 zeigt, wie die Methode im Röntgenbereich eingesetzt wird. Die geringe Streuung der Strahlung erleichtert die Deutung der resultierenden Aufnahmen. Während die Röntgenbeugung im Wesentlichen die langreichweitige Periodizität abbildet, ist Röntgen-Holographie eine Methode, die die lokale Umgebung abtastet.

Absorptionskanten

Im Gegensatz zu optischen Spektren kann man Röntgenstrahlung nur bei der Emission von Licht beobachten und nicht in der Absorption. Die Ursache liegt in den nicht zur Verfügung stehenden freien höheren Energiezuständen, da beispielsweise die L-Schale von einem Elektron aus der K-Schale nicht besetzt werden kann. Diese sind aufgrund des Pauli-Prinzips voll aufgefüllt (Kapitel *Beyond Bohr*).

In Abb. 19.37 erkennt man, dass die Absorption mit der Energie der Strahlung abnimmt. Materialien werden also für höher energetisches Röntgenlicht immer transparenter. Bei bestimmten Photonenenergien allerdings steigt der Absorptionsquerschnitt plötzlich stark an. Die physikalische Ursache sind Anregungen von Innerschalenniveaus (Kapitel *Röntgen*). Reicht die Elektronenenergie beispielsweise ein Loch in der L-Schale zu erzeugen, wird durch diesen zusätzlichen Reaktionskanal der Querschnitt für die Absorption erhöht. Sobald die Energie hoch genug ist, damit das Elektron das Vakuumniveau erreichen kann, bleibt die Absorption auf einem hohen Wert, der nur langsam bei weiter zunehmender Energie sinkt. Die plötzliche Zunahme in der Absorption wird als Absorptionskante bezeichnet und ist charakteristisch für die beteiligte innere Schale (K,L, M) und das jeweilige Element. Im Gegensatz zu den optischen Spektren der Atome gibt es zu einer bestimmten Emissionslinie keine zugehörige Absorptionslinie, da in diesem Fall alle Zustände mit Elektronen besetzt sind! Nur Übergänge aus einer inneren Schale

[21] The Nobel Prize in Physics 1971 was awarded to Dennis Gabor *for his invention and development of the holographic method.*

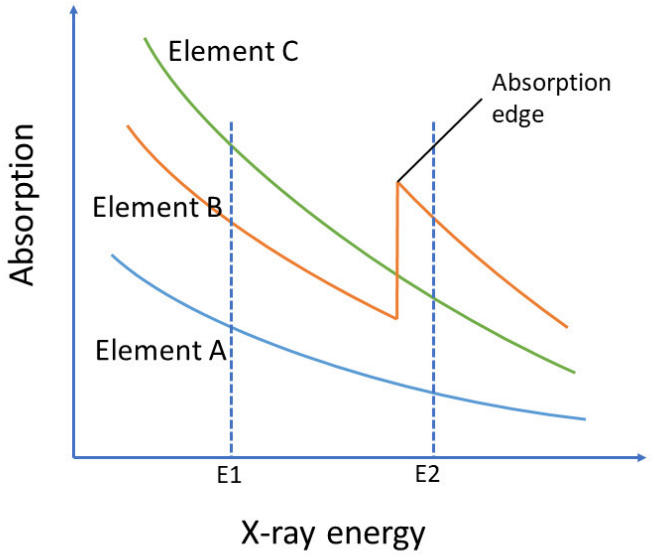


Abb. 19.37: Die spezifischen Absorptionskanten der Elemente (hier Element B) äußern sich im Röntgenspektrum durch einen starken Anstieg in der Absorption.

ins Vakuum (Ionisation) können beobachtet werden. Dies führt zur Ausbildung einer Absorptionskante, die typisch ist für ein bestimmtes Element, wie Abb. 19.37 illustriert.

Anwendungen 2^{4LP}

Ein Beispiel aus der Materialforschung

XANES[22] analysiert Spektren aus Röntgenabsorptions-Experimenten (Abb. 19.39). XANES ist eine elementspezifische Methode, die auch Informationen über die lokalen Bindungsverhältnisse liefern kann. Röntgenstrahlen regen kernnahe Elektronen eines Atoms in einen unbesetzten Zustand unterhalb der Ionisationsschwelle (exzitonischer Zustand) oder ins Kontinuum an. Wenn die Energie der Röntgenstrahlung den Bereich der Rumpfniveau-Bindungsenergien durchläuft, führt dies zu einem Anstieg der Absorption. Dadurch entsteht im Spektrum eine Absorptionskante, die charakteristisch für das absorbierende Elemente und das angeregte Rumpfniveau ist. Zusätzliche Informationen erhält man durch eine genauere Untersuchung der Kante. Die Absorptionskante zeigt eine komplexe Struktur und ist kein einfacher steiler Anstieg in der Absorption. Es gibt schwache Übergänge unterhalb der Absorptionskante (Vorkantenstrukturen), sowie signifikante Merkmale im Bereich der Kante. Weiter findet man eine oszillierende Struktur, die durch die Inter-

[22]XANES: *x-ray absorption near edge structure*

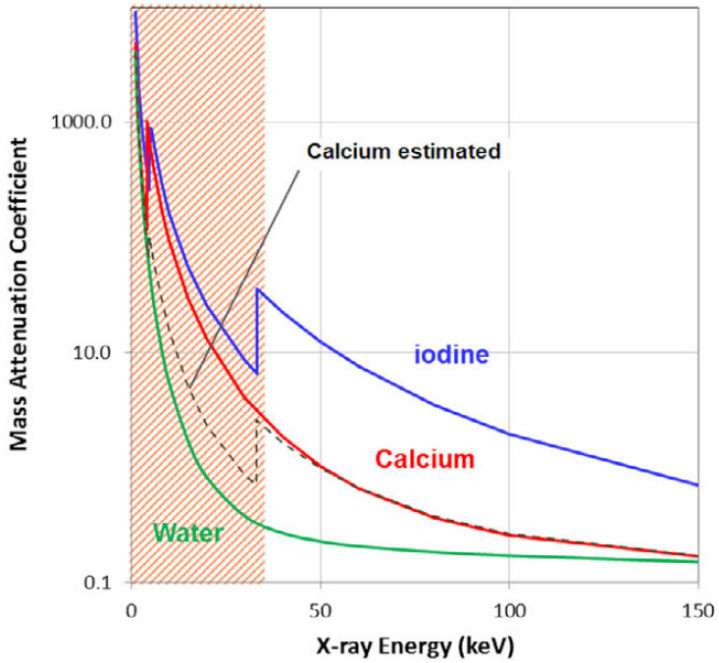


Abb. 19.38: Massensabchwächungskoeffizienten von Wasser (grün), Kalcium (rot), Jod (blau) und der einigermaßen gut abgeschätzte Koeffizient für Calcium unter Verwendung eines additiven Querschnitts von Jod und Wasser (grau gepunktete Linie). Im schattierten Bereich ist $E \leq 33.2\,\mathrm{keV}$ [**?**]

ferenz zwischen ausgehenden und den rückgestreuten Elektronenwellen (Kapitel *Materiewellen*) verursacht wird (EXAFS[23] Diese erstreckt sich bis etwa 1000 eV über die Absorptionskante hinaus.

Wir haben festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des photoelektrischen Effekts proportional zu Z^3 und umgekehrt proportional zu E^3_{xray}, also Z^3/E^3_{xray} ist. Der Prozess ist deshalb bei Elementen mit höherer Ordnungszahl und niedrigeren Röntgenenergien wahrscheinlicher. Vergleich man Jod (Z=53) und Weichgewebe (Z ≈7.5) ergibt sich $(53/7.5)^3$=350. Die Wahrscheinlichkeit für ein 50 keV im Vergleich zu einem 100 keV-Röntgenphoton ist $1/(50/100)^3$=8. Diese Abhängigkeiten sorgen dafür, dass bei niedrigen Photonenenergien der Kontrast in den Röntgenbildern von Patienten erhöht ist. Kontrastmittel und Schutzvorrichtungen bestehen dagegen vorzugsweise aus Elementen mit hohem Z (Jod, Gadolinium, Blei). Abb. 19.38 zeigt, dass Röntgenstrahlung durch Wasser kaum abgeschwächt wird. Durch die Z^3-Abhängigkeit ist die Absorption bei Kalzium höher. Ab einer Photonenenergie von 33 keV steigt der Absorptionskoeffizient für Jod stark ab. Man beachte die logarithmische y-Skala. Die Frage stellt sich, ob man die Absorptionskanten der schwereren Elemente nutzen kann, um den Kontrast im Röntgenbild zu erhöhen.

[23]EXAFS: *extended x-ray absorption fine structure*

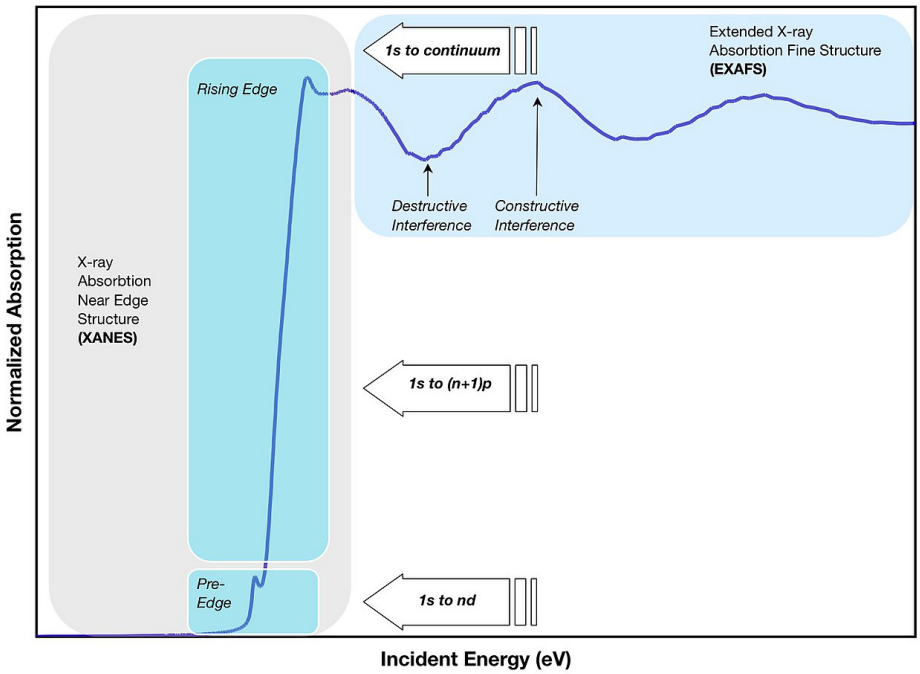


Abb. 19.39: Feinstrukturen im Bereich der Röntgen-Absorptionskante, die mit Hilfe der XANES und EXAFS-Spektroskopie zur Element- und Strukturbestimmung ausgewertet werden können [**?**].

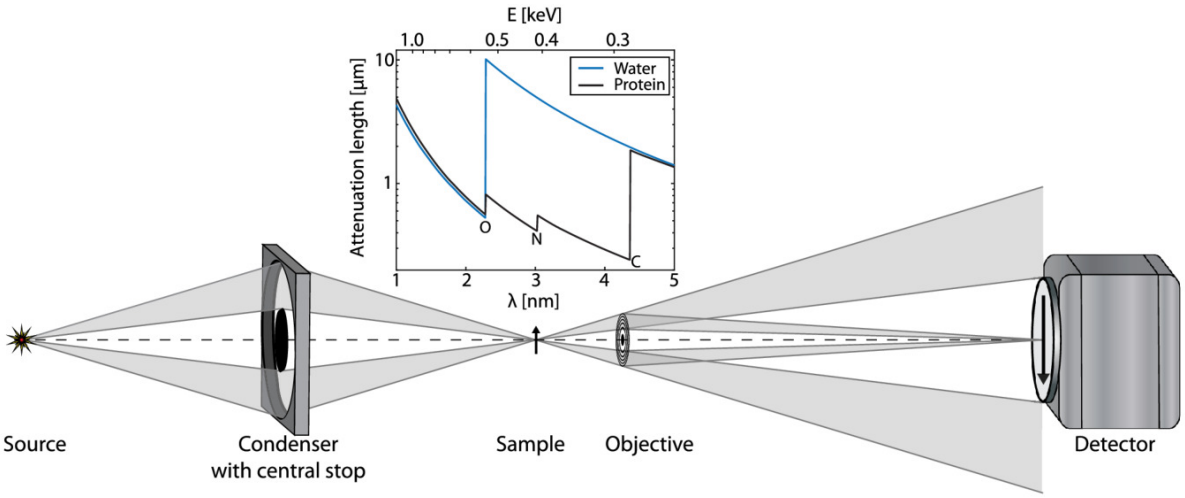


Abb. 19.40: Schematischer Aufbau eines Transmissions-Röntgenmikroskops mit seinen wichtigsten Komponenten. Der Einschub zeigt den Kontrastmechanismus im Wasserfenster [**?**]. Dieses liefert bei Untersuchungen biologischer Proben einen hohen Kontrast

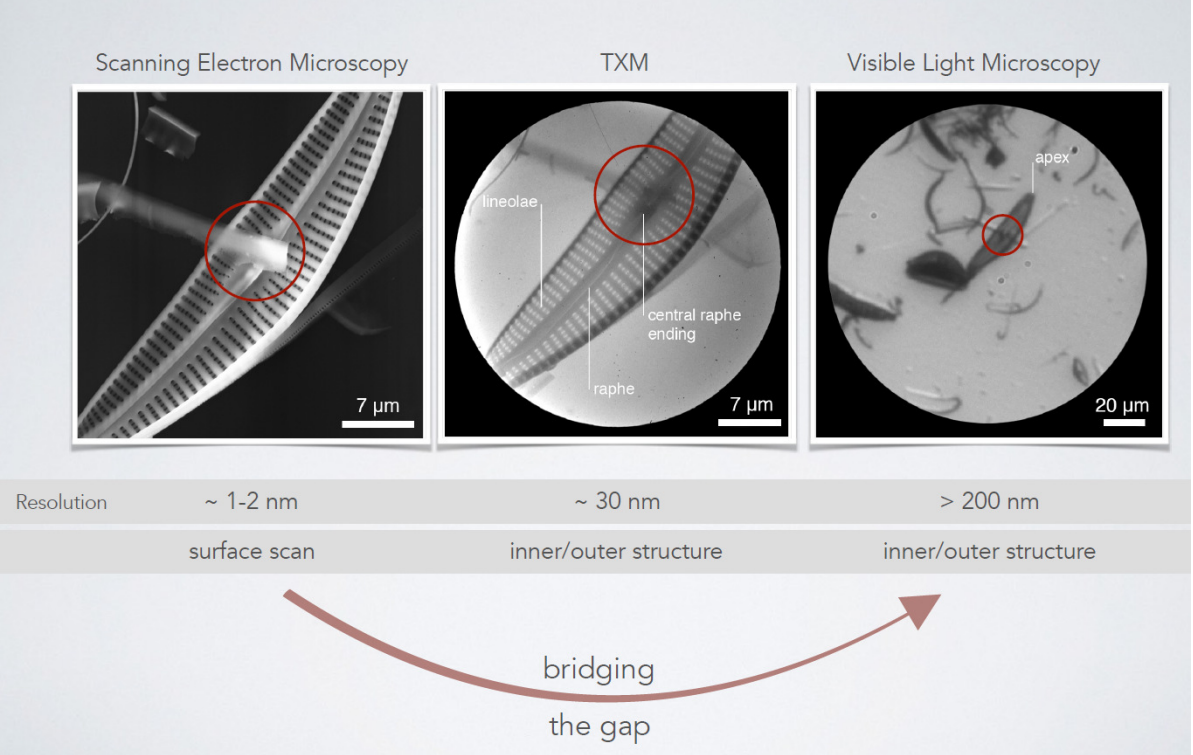


Abb. 19.41: Kieselalge, abgebildet durch Elektronenmikroskop (links), Röntgen- (Mitte) und optisches Mikroskop (rechts). Die elektronenmikroskopische Aufnahme liefert die höchste Auflösung. Ein Vorteil der Röntgen-Mikroskopie ist die größere Eindringtiefe der Strahlung, die eine dreidimensionale Abbildung ermöglicht (AG Kanngießer, TU Berlin).

Ein Beispiel aus der Biologie

Biologisch relevante Proben zeichnen sich durch einen hohen Wassergehalt aus. Hier ist der Sauerstoff wichtig, da Wasserstoff kaum Röntgenabsorption aufweist. Interessant sind für die Analyse der biologischen Funktionen dagegen kohlenstoffhaltige Verbindungen. Die Absorptionsspektren der beiden Elemente zeigen im Bereich von einigen hundert eV ein für die Forschung interessantes Verhalten (Abb. 19.40). Die Eindringtiefe von weichen Röntgenphotonen im so genannten Wasserfenster von 285 eV bis 530 eV zeigt eine starke Absorption durch Kohlenstoff und eine hohe Transmission durch Sauerstoff. In diesem Energiebereich ergibt sich damit eine hoher Kontrast zwischen Lösungsmittel und Biomolekülen [**?**]. Abb. 19.41 zeigt ein Beispiel für ein Mikroskopiebild unter Ausnutzung des Wasserfensters (Abb. 19.40) im Vergleich zu Bildern mit einem Elektronen- und optischem Mikroskop.

Laboratory water-window x-ray microscopy [**?**]**:** Soft x-ray microscopy in the water window (285-535eV) is an emerging and unique tool for 2D and 3D imaging of un-

stained intact cellular samples in their near-native state with few-10-nm detail. However, present microscopes rely on the high x-ray brightness of synchrotron-radiation sources. Having access to water-window microscopy in the home laboratory would increase the impact and extend the applicability of the method. In the present paper, we review three decades of efforts to build laboratory water-window microscopes and conclude that the method is now reaching the maturity to allow biological studies. The instruments as well as their key components are quantitatively and qualitatively compared. We find that the brightness and the reliability of the laboratory source are the most critical parameters, but that the optics as well as the sample preparation also must be optimized to enable high-resolution imaging with adequate exposure times.

Ein Beispiel aus der Ärchäologie

Hunderte von Papyrusrollen, die 79 n. Chr. durch den Ausbruch des Vesuvs begraben wurden und zur einzigen aus der Antike überlieferten Bibliothek gehören, wurden vor 260 Jahren in der antiken Stadt Herculaneum entdeckt. Diese Rollen sind extrem zerbrechlich und würden bei einem Versuch, sie zum Lesen zu entrollen, unweigerlich beschädigt oder zerstört. Bisher konnte man die Schriftzüge auf den Papyrusrollen nicht sehen. Mit Hilfe der Röntgen-Phasenkontrast-Tomographie ist es gelungen, einzelne Buchstaben der Schrift zu entziffern (Abb. 19.42), ohne die Rollen abzuwickeln. Damit ergeben sich neue Möglichkeiten unser Wissen über antike griechische Literatur und Philosophie zu erweitern [**?**].

Chemical composition mapping with nanometre resolution by soft X-ray microscopy [**?**]**:** X-ray microscopy is powerful in that it can probe large volumes of material at high spatial resolution with exquisite chemical, electronic and bond orientation contrast. The development of diffraction-based methods such as ptychography has, in principle, removed the resolution limit imposed by the charac-teristics of the X-ray optics. Here, using soft X-ray ptychography, we demonstrate the highest-resolution X-ray microscopy ever achieved by imaging 5 nm structures. We quantify the performance of our microscope and apply the method to the study of delithiation in a nanoplate of $LiFePO_4$, a material of broad interest in electrochemical energy storage. We calculate chemical component distributions using the full complex refractive index and demonstrate enhanced contrast, which elucidates a strong correlation between structural defects and chemical phase propagation. The ability to visualize the coupling of the kinetics of a phase transformation with the mechanical consequences is critical to designing materials with ultimate durability.

Tab. 19.2 gibt eine Übersicht über die Abschwächungskoeffizienten der Elemente, die auch im Körper vorhanden sind. Interessant ist es, das Verhältnis der Abschwächungskoeffizienten der Elemente bei unterschiedlichen Photonenenergien zu betrachten, siehe Abb. 19.43. Hier ergeben sich teils erhebliche Unterschiede, die man für den Röntgenkontrast nutzen kann. Tab. 19.3 liefert Beispiele, wie sich der Abschwächungskoeffizient für



Abb. 19.42: Das Papyrus-Alphabet von PHerc.Paris. (a) Die durch Röntgenstrahlung entzifferten Buchstaben des Alphabets von α bis ν sind in den Zeilen 1 und 2 angegeben; Zeile 3 zeigt die Infrarotbilder der gleichen Buchstaben aus dem entrollten Papyrus PHerc. 1471 als Referenz. (b) Die durch das Röntgenexperiment ermittelten Buchstaben des Alphabets von Ξ bis Ω [**?**].

ausgewähltes Gewebe mit der Wellenlänge ändert. Eine der Ideen ist, dass nur in dem Bild bei höherer Photonenenergie eine Absorptionskante bestimmter Elemente- wie das in den Knochen vorhandene Kalzium auftaucht. Subtraktion der Röntgenaufnahmen erhöht den Kontrast in Bezug auf dieses Element und verbessert damit beispielsweise die Diagnose von Osteoporose, siehe Abb. 19.43. Abb 19.44 zeigt ein Beispiel aus der Hirnforschung [**?**]. Die Methode wird im übrigen auch auf Flughäfen eingesetzt um Gepäck auf potenziell gefährliche Gegenstände hin zu untersuchen [**?**], siehe Abb. 19.45.

Eine Verbesserung in der Bildgebung im Rahmen der Angiographie kann erreicht werden, wenn man ein Substraktionsverfahren verwendet. Dazu nimmt man zwei Röntgenbilder auf, wobei man eines mit einer Photonenenergie unterhalb und eines mit einer Photonenenergie oberhalb einer Absorptionskante aufnimmt und die Bilder von einander abzieht.

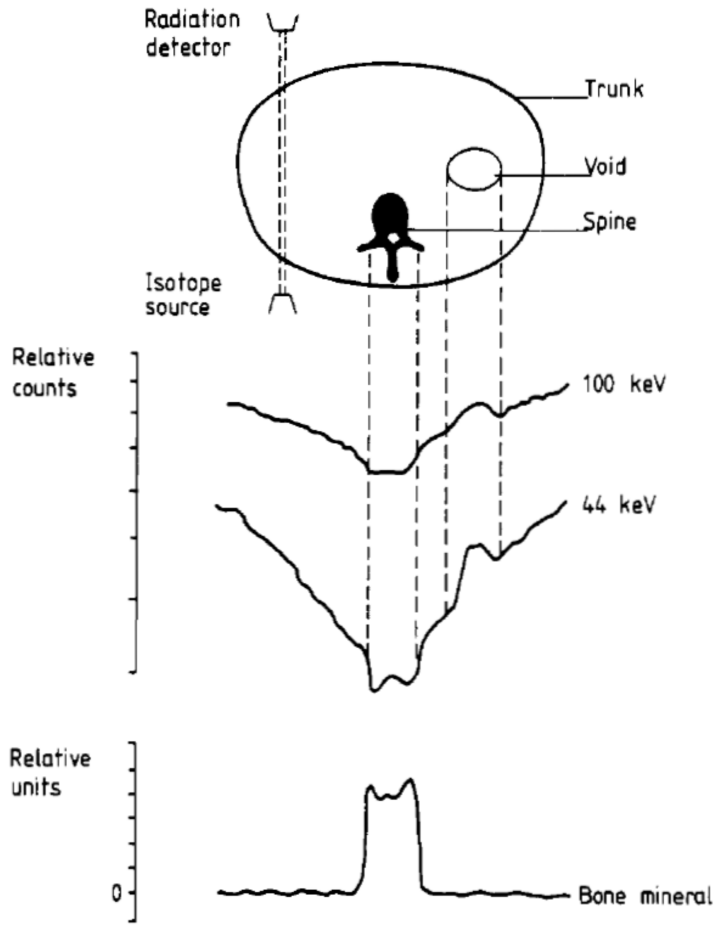


Abb. 19.43: Grundlage der Dual-Photonen-Absorptiometrie. Laterale Abtastung zeigt bei beiden Röntgenenergien eine erhöhte Transmission bei einem Hohlraum; Die computergestützte Kombination der Spektren ergibt Informationen über das Knochengewebe und zwar unabhängig von der Dicke des anderen Gewebes [**?**].

Absorptionskanten können genutzt werde, um im Röntgenbild schwer erkennbaren Strukturen hervorzuheben, siehe Abb. 19.38. Das Problem ist, dass in weichem Gewebe vornehmlich die leichten Elemente vertreten sind, die aufgrund ihrer geringen Ordnungszahl die Strahlung kaum absorbieren (Gl. 19.7). Eine für Röntgenstrahlen undurchlässige Substanz wird daher in die Blutgefäße injiziert, wodurch die Blutgefäße auf dem Röntgenbild sichtbar werden. Für die medizinische Anwendung ist wichtig, dass der Stoff für den Körper verträglich ist. Man verwendet statt einer NaCl-Lösung ein anderes Salz, dass ein schweres Element derselben Hauptgruppe enthält, beispielsweise Barium oder Jod (KBr, NaJ). Für die Aufnahme wählt man eine Photonenenergie oberhalb der jeweiligen Absorptionskante. Man erkennt an der Entwicklung des Absorptionskoeffizienten, dass sich Jod im Röntgenbild noch weitaus stärker abhebt als das Kalzium in den Kno-

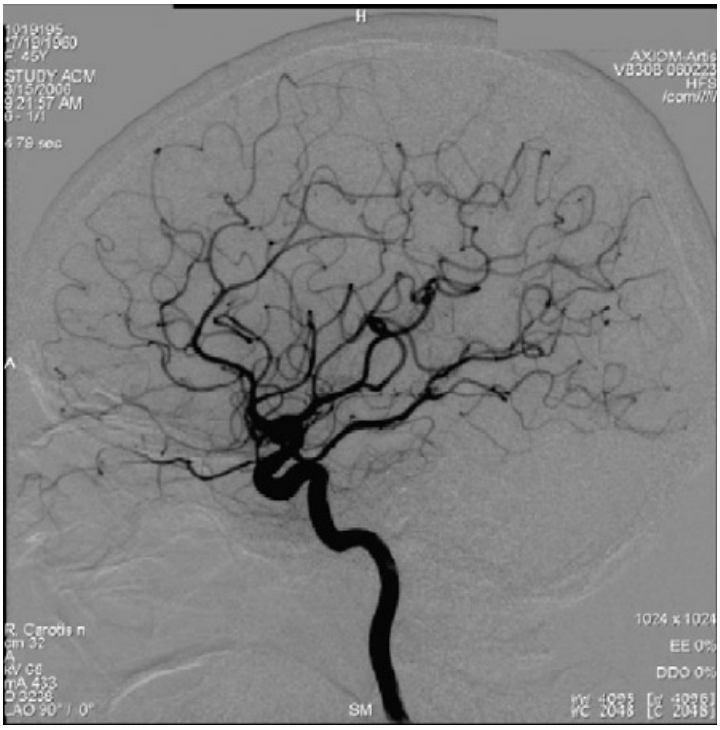


Abb. 19.44: Visualisierung des Gefäßsystems im Kopf durch digitale Subtraktionsangiographie [**?**].

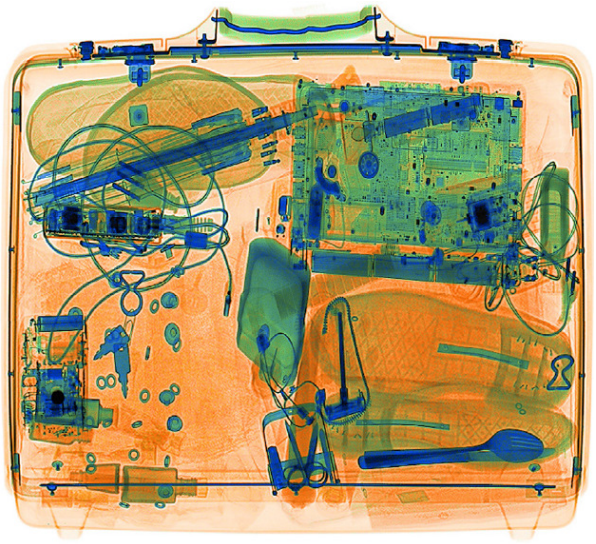


Abb. 19.45: Beispiel für eine Kofferkontrolle am Flughafen, durchgeführt mit Hilfe der Dual-Röntgen-Absorptiometrie.

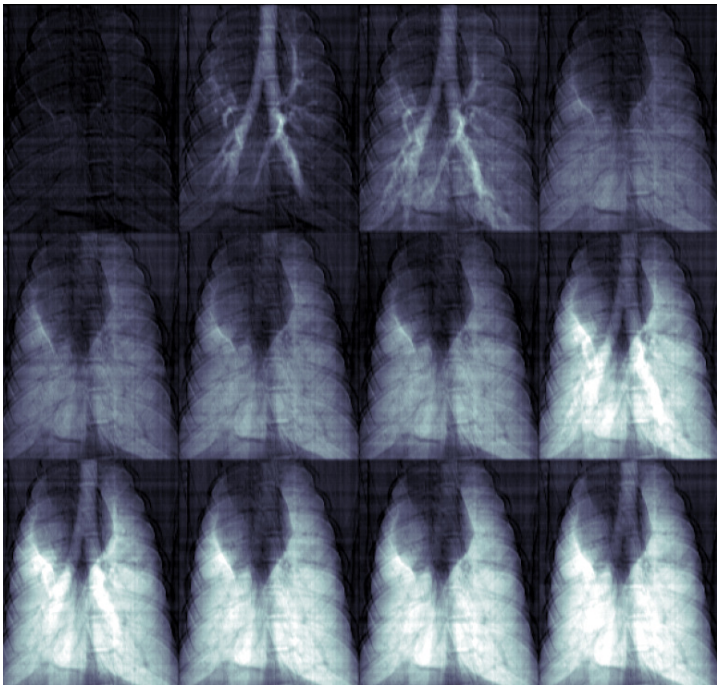


Abb. 19.46: Röntgenbilder der Lunge beim Atmen eines Kaninchens (Zeitabstand zwischen den Aufnahmen 1.3 s). Während der Untersuchung atmet das Kaninchen ein Xenon-Sauerstoff-Gemisch ein [**?**].



Abb. 19.47: Haschek und Lindenthal verwendeten ein Kontrastmittel, um im Jahr 1896 das erste Röntgen-Angiogramm an einer amputierten Hand durchzuführen [**?**].

Element	Z	Atommasse	Abschwächungskoeffizient in cm^2/g 40 keV	70 keV	Verhältnis μ_{40keV}/μ_{70keV}
Wasserstoff	1	1	0.3458	0.3175	1.0891
Kohlenstoff	6	12	0.2047	0.1678	1.2199
Stickstoff	7	14	0.2246	0.1722	1.3043
Sauerstoff	8	16	0.2533	0.1788	1.4167
Natrium	11	23	0.3851	0.2022	1.9045
Magnesium	12	24.3	0.4704	0.2244	2.0963
Phosphor	15	31	0.7784	0.2839	2.7418
Schwefel	16	32.1	0.9507	0.3258	2.9180
Chlor	17	35.5	1.100	0.3491	3.1510
Kalzium	19	39.1	1.484	0.4298	3.4536
Kalzium	20	40.1	1.792	0.5059	3.5422

Tab. 19.2: Abschwächungkoeffizienten der Elemente im Körper [**?**].

Gewebe	40 keV	80 keV	80 keV	Dichte ρ
Fett	0.2396	0.1974	0.1800	0.950 g/cm^3
Knochen	0.6655	0.3148	0.2229	1.920 g/cm^3
weiches Gewebe	0.2688	0.2048	0.1823	1.060 g/cm^3

Tab. 19.3: Röntgen-Massenschwächungskoeffizienten in cm^2/g für unterschiedliches Gewebe [**?**].

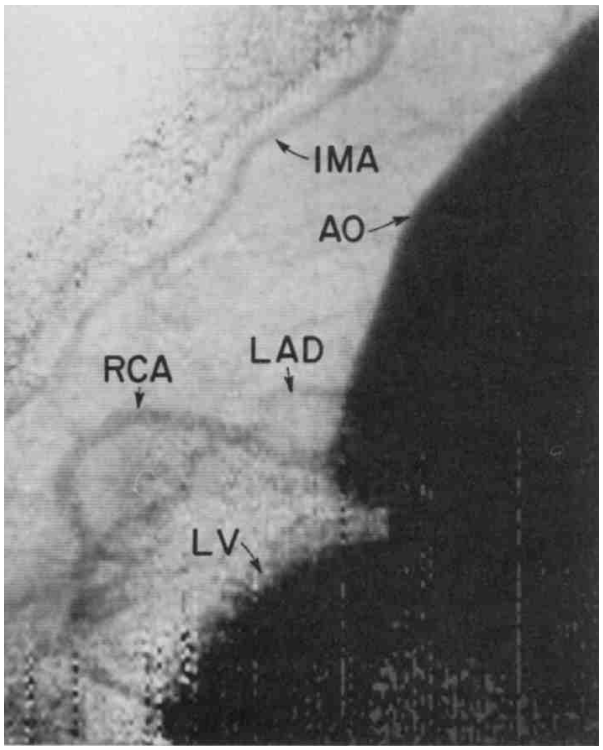


Abb. 19.48: Das erste in vivo aufgenommene Röntgenbild einer menschlichen Koronararterie, aufgenommen mit Synchrotronstrahlung. Die identifizierten Strukturen sind eine innere Brustarterie (IMA), die Aorta (AO), die linke vordere absteigende Koronararterie (LAD), die rechte Koronararterie (RCA) und die linke Herzkammer (LV) [**?**].

chen oder anderes weiches Gewebe. So können verengte Koronararterien und defekte Herzklappen besser erkannt werden. Je nach medizinischer Fragestellung kommen unterschiedlich Elemente zum Einsatz. So verwendet man beispielsweise das Edelgas Xenon (Ordnungszahl 54) für Untersuchungen der Lunge. Abb. 19.46 zeigt Ergebnisse am Beispiel eines Kaninchens. Schmale Atemwege spielen eine wichtige Rolle bei der Atmung und der Wechselwirkung mit dem Blut. Bei Inhalation von Xenon als Kontrastmittel wurden gleichzeitig Röntgenbilder bei Photonenenergien oberhalb und unterhalb der K-Kante von Xe aufgenommen.[24] Durch Subtraktion Bilder ist es möglich lokal die Xe-Konzentration zu bestimmen und damit Transportwege zu identifizieren.

Abb. 19.47 zeigt eine Ansicht des ersten Angiogramms mit den Blutgefäßen der Hand einer Leiche in Wien kurz nach der Entdeckung der Röntgenstrahlen. Durch die Zugabe einer Lösung mit Kalk, Petrolium, Quecksilber gelang es die Blutgefäße klar sichtbar zu machen. Solche Untersuchungen können *in vivo* auch mit Synchrotronstrahlung durchgeführt werden, das die Lichtquelle gegenüber konventionellen Röntgenquellen eine deutlich höhere Brillianz aufweist. Abb. 19.48 zeigt das transvenöse Angiogramm eines 52 Jahre alten Mannes das mit Hilfe von Synchrotronlicht aufgenommen wurde.

[24] KES: K-Kanten-Subtraktionsradiographie

Aufgaben

Aufgabe: 3.1 Jod ist ein gut geeignetes Kontrastmittel, weil es...[25]

(a) eine hohe Wahrscheinlichkeit für eine photoelektrische Wechselwirkung bei diagnostischen Röntgenenergien gibt.

(b) eine hohe Wahrscheinlichkeit für eine Compton-Wechselwirkung bei diagnostischen Röntgenenergien gibt.

(c) das Element eine hohe Elektronendichte hat.

(d) das Element eine hohe Massendichte hat.

Aufgabe: 3.2 Der Einsatz von Kollimatoren für Röntgenstrahlung führt zu...[26]

(a) erhöhter Strahlenbelastung eines Patienten.

(b) stärkere Compton-Streuung in der Probe.

(c) verbessertem Kontrast im Röntgenbild.

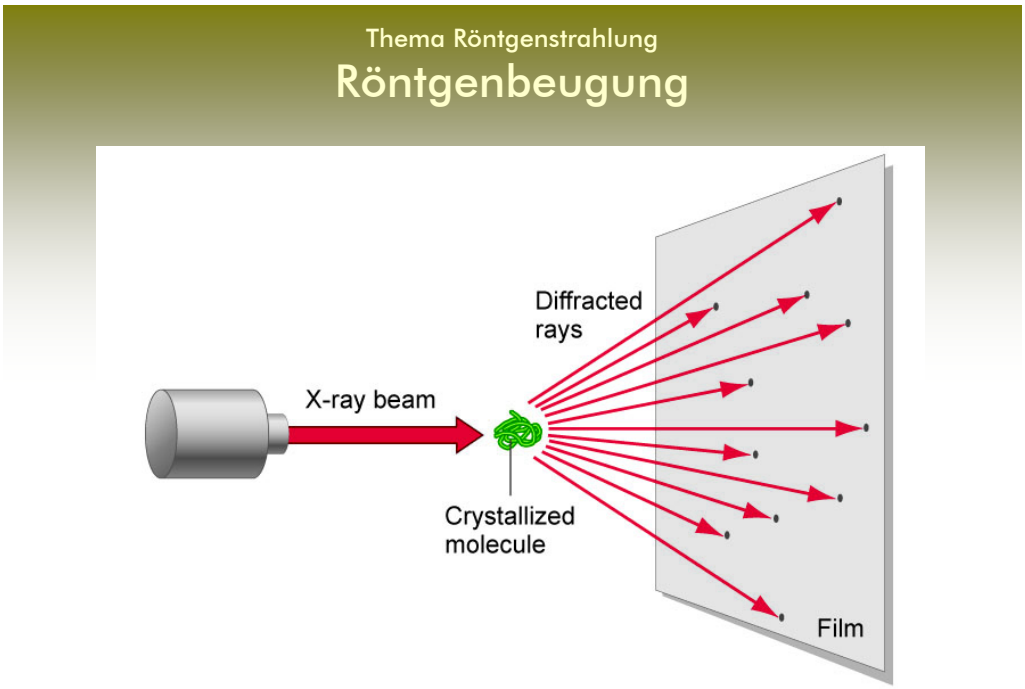
(d) reduzierten Quantensprüngen bei der Angiographie.

[25] Antwort: (a)
[26] Antwort: (c)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Funktion haben Metallfilter für Röntgenquellen?
2. Warum unterdrückt man im Röntgenbild niederenergetische Strahlung?
3. Von welchen Faktoren hängt der Wert des Absorptionskoeffizienten ab?
4. Welche physikalischen Prozesse tragen zur Absorption von Röntgenstrahlung bei?
5. Was versteht man unter dem Begriff Absorptionskante?
6. Welche Bedeutung hat das Wasserfenster für die Untersuchung biologischer Proben?
7. Wie ist der Zusammenhang zwischen Absorptionskoeffizient und Massenabschwächungskoeffizient?
8. Was ist ein Angiogramm?

19.4 Röntgenbeugung



Da stets, wenn es zu schneien beginnt, die ersten Schneeflocken die Figur von sechstrahligen Sternen zeigen, muss es eine bestimmte Ursache dafür geben. Denn wäre es Zufall, warum fallen sie nicht fünfstrahlig oder siebenstrahlig, warum immer sechsstrahlig.

Johannes Kelper, *Vom sechseckigen Schnee*, Frankfurt, 1611

Wie ist die Materie aufgebaut? Diese Frage hat schon Johannes Kepler beschäftigt, wie der Auszug aus seinem Werk *Strena seu de Nive Sexangula* demonstriert, siehe Abb. 19.49. Handelt es sich bei Röntgenstrahlung um Teilchen oder Wellen? Diese Frage konnte zur Zeit der Experimente von Röntgen nicht beantwortet werden. Die Wellennatur der Röntgenstrahlung wurde durch Charles Barkla[27] anhand einer Polarisationsmessung nachgewiesen [**?**]. Abb. 19.50 zeigt den Aufbau des Experiments, der das Röntgenlicht polarisiert. Ein Strahl unpolarisieren Röntgenlichts (z-Richtung) trifft auf einen Kohlenstoffblock und regt die Elektronen zu Schwingungen in der xy-Ebene an. Warum? Das Licht, das in x-Richtung reflektiert wird, ist polarisiert und das elektrische Feld schwingt in y-Richtung. Um die erwartete Polarisation zu überprüfen, trifft

[27] The Nobel Prize in Physics 1917 was awarded to Charles Glover Barkla *for his discovery of the characteristic Röntgen radiation of the elements.*

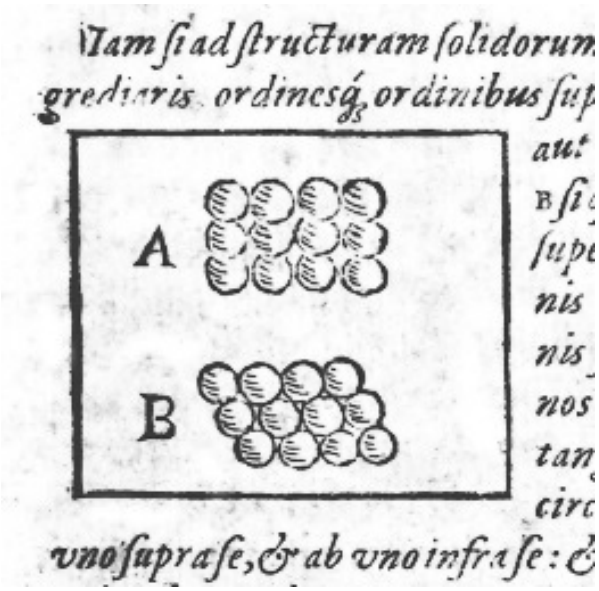


Abb. 19.49: Zeichnung einer quadratischen (Abbildung A, oben) und sechseckigen (Abbildung B, unten) Packung nach Johannes Kepler (1571-1630).

der Röntgenstrahl auf einen zweiten Kohlenstoffblock. Die Elektronen schwingen angeregt durch die Strahlung in der xz-Ebene und nicht in der y-Richtung. Die Intensitätsverteilung der Strahlung (minimal außerhalb der xz-Ebene) liefert den Nachweis. Was geschieht, wenn ein Strahl unpolarisierten Lichts auf eine Probe fällt? Ein Atom in einem elektrischen Feld wird polarisiert, da die Elektronen und Protonen Kräfte in unterschiedlicher Richtung erfahren. Diese Kräfte sind im Vergleich zu den Bindungsverhältnissen im Atom gering. Als Resultat ergibt sich eine verzerrte Ladungsverteilung, die einem Dipol entspricht. In einem elektrischen Wechselfeld ändert sich die Polarisation periodisch mit der Frequenz ν des anregenden Feldes. Der oszillierende Dipol emittiert elektromagnetische Wellen der Frequenz ν. Die Welle breitet sich im Raum aus, wobei entlang der Dipolachse keine Strahlung emittiert wird. Infolge der unpolarisierten Anregung ist die emittierte Strahlung dagegen isotrop und Kugelwellen werden ausgesandt, die miteinander interferieren können. Diese Überlegung ist die Grundlage der Bragg-Streuung und führt zur Methode der Röntgenkristallographie [**?**]. Wenn Wellen von einer einzelnen Lage einer Atomschicht gestreut werden, sind alle Wellen, die nach dem Reflexionsgesetz der Optik gestreut werden,

$$\theta_i = \theta_f \tag{19.10}$$

in Phase. Man spricht deshalb auch oft von Bragg-Reflexion.[28]

I have often been asked: *Why are you always showing and talking about models? Other kinds of scientists do not do this.* The answer is that what the investigator has been seeking all along is simply a structural plan, a map if you will, that shows all the atoms in their relative positions in space. No other branch of science is so completely geographical; a list of spatial coordinates is all that is needed to tell the world what has been discovered [**?**].

[28] *Lexikon:* Das **Babinet-Prinzip** besagt, dass das Beugungsmuster eines nicht transparenten Körpers mit dem eines Lochs gleicher Größe und Form identisch ist.

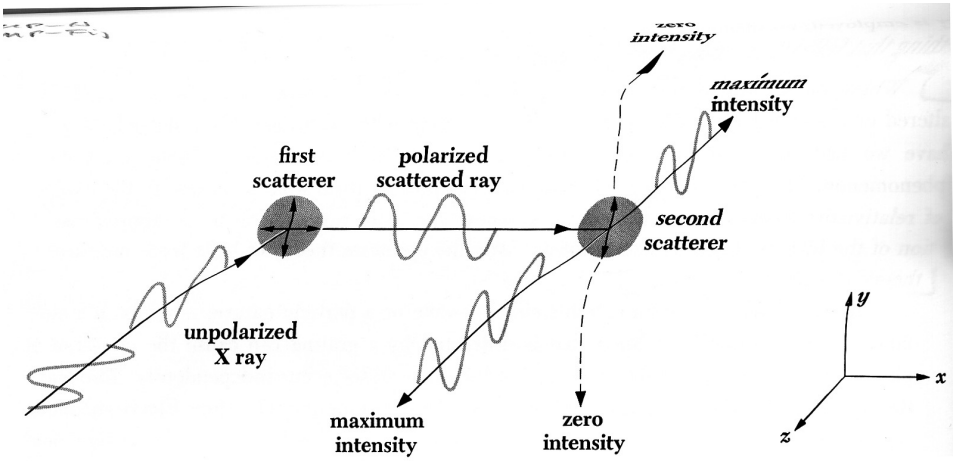


Abb. 19.50: Aufbau des Experiments von Barkla zum Nachweis der Polarisationseigenschaften von Röntgenstrahlung [**?**].

Lawrence Bragg (1968)

Röntgenbeugung ist eine zerstörungsfreie Technik, die detaillierte Informationen über die kristallographische Struktur, die chemische Zusammensetzung und die physikalischen Eigenschaften von Materialien liefert. Für die Naturwissenschaften stellt sich damit die Herausforderung, Proben in kristalliner Form zu liefern. Einen entscheidenden Schritt vorwärts in diese Richtung gelang Stanley,[29] der im Jahr 1935 den Tabakvirus in kristalliner Form isolierte [**?**]. Er ebnete damit den Weg für die intensive Untersuchung pflanzlicher Viren. Röntgenstrahlung ist Licht mit Wellenlängen in der Größenordnung von Nano- und Pikometern. Bei Streuung an einer Substanz mit einer Kristallstruktur im Nanometerbereich kann es zur Interferenz kommen, die zu einem charakteristischen Streubild führt. Damit unterscheidet sich die Röntgenbeugung von anderer Röntgendiagnostik. Bei der Röntgentomographie beispielsweise, wie sie in der Medizin, Materialwissenschaften und Metallurgie eingesetzt wird, werden die Röntgenstrahlen von Materialien unterschiedlich stark absorbiert. Beispiele sind Knochen, Muskeln oder Fett. Das Röntgenbild liefert ein direktes Bild der Struktur innerhalb des Körpers oder Objekts auf einer typischen Längenskala von einem Millimeter. Im Gegensatz dazu erzeugt die Röntgenbeugung ein Interferenzmuster, das der zugrunde liegenden Struktur nicht ähnelt. Die Analyse der Streubilder liefert aber Informationen über die innere Struktur auf Längenskalen von 0.1 bis 100 nm. Mit Hilfe der Fourier-Analyse kann die mikroskopische Struktur der kondensierten Materie entschlüsselt werden.

Solid C60: a new form of carbon [**?**]**:** A new form of pure, solid carbon has been synthesized consisting of a somewhat disordered hexagonal close packing of soccer-ball-shaped C_{60} molecules. Infrared spectra and X-ray diffraction studies of the molecular

[29] The Nobel Prize in Chemistry 1946 was divided, one half awarded to James Batcheller Sumner *for his discovery that enzymes can be crystallize*, the other half jointly to John Howard Northrop and Wendell Meredith Stanley *for their preparation of enzymes and virus proteins in a pure form.*

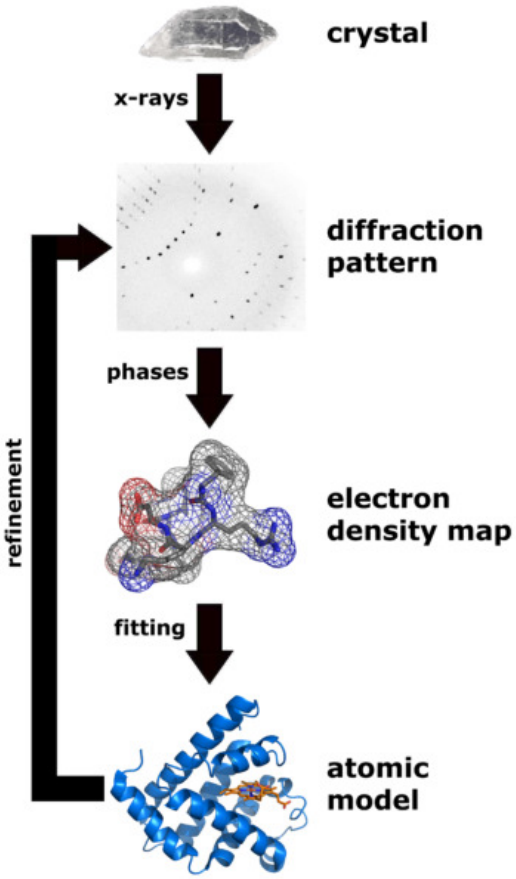


Abb. 19.51: Iteratives Verfahren zur Strukturbestimmung mit Hilfe der Röntgenbeugung[?].

packing confirm that the molecules have the anticipated *fullerene* structure. Mass spectroscopy shows that the C_{70} molecule is present at levels of a few per cent. The solid-state and molecular properties of C_{60} and its possible role in interstellar space can now be studied in detail.

Im Laufe der Jahre wurden vielfältige Methoden entwickelt, die die Röntgenbeugung nutzen, um die Struktur der Materie zu analysieren:

- Laue-Verfahren [? ?]
- Drehkristall-Verfahren [?]
- Weissenberg-Verfahren [?]
- Schiebold-Sauter-Verfahren [?]
- Debye-Scherrer-Verfahren [?]
- Guinier-Verfahren [?]

- Kleinwinkelstreuung (SAXS) [**?**][30]
- Weitwinkelstreuung (WAXS) [**?**][31]
- Röntgendiffraktometrie mit streifendem Einfall (GID) [**?**][32]
- Annormale Röntgenbeugung (AXS) [**?**][33]

Kinetics of Network Formation and Heterogeneous Dynamics of an Egg White Gel Revealed by Coherent X-Ray Scattering [?]: The kinetics of heat-induced gelation and the microscopic dynamics of a hen egg white gel are probed using x-ray photon correlation spectroscopy along with ultrasmall-angle x-ray scattering. The kinetics of structural growth reveals a reaction-limited aggregation process with a gel fractal dimension of ≈ 2 and an average network mesh size of ca. 400 nm. The dynamics probed at these length scales reveals an exponential growth of the characteristic relaxation times followed by an intriguing steady state in combination with a compressed exponential correlation function and a temporal heterogeneity. The degree of heterogeneity increases with decreasing length scale. We discuss our results in the broader context of experiments and models describing attractive colloidal gels.

Anhand der Analyse der Streudaten erfolgt die Strukturbestimmung anhand eines iterativen Verfahrens, die schließlich Informationen über den Aufbau der Probe liefert, siehe Abb. 19.51. Damit können vielfältige Daten extrahiert werden:

- Gitterkonstante
- Symmetrie
- Ausrichtung in Einkristallen
- Orientierung von Kristalliten
- qualitative oder quantitative Bestimmung kristalliner Phasen, beispielsweise für Mineralen
- Dehnungs- und Spannungszustandes eines Materials
- Analyse dünner Schichten

Plumbonacrite Identified by X-ray Powder Diffraction Tomography as a Missing Link during Degradation of Red Lead in a Van Gogh Painting [?]: Red lead, a semiconductor pigment used by artists since antiquity, is known to undergo several discoloration phenomena. These transformations are either described as darkening of the pigment caused by the formation of either plattnerite (β-PbO_2) or

[30] SAXS: *small angle x-ray scattering*
[31] WAXS:*wide angle x-ray scattering*
[32] GID: *grazing incidence diffraction*
[33] AXS: *anomalous x-ray scattering*

galena (PbS) or as whitening by which red lead is converted into anglesite ($PbSO_4$) or (hydro)cerussite ($2\,PbCO_3{\cdot}Pb(OH)_2; PbCO_3$). X-ray powder diffraction tomography, a powerful analytical method that allows visualization of the internal distribution of different crystalline compounds in complex samples, was used to investigate a microscopic paint sample from a Van Gogh painting. A very rare lead mineral, plumbonacrite ($3\,PbCO_3{\cdot}Pb(OH)_2{\cdot}PbO$), was revealed to be present. This is the first reported occurrence of this compound in a painting dating from before the mid 20th century. It constitutes the missing link between on the one hand the photoinduced reduction of red lead and on the other hand (hydro)cerussite, and thus sheds new light on the whitening of red lead.

Interferenz

Nähern wir uns dem Problem von der Seite der Optik. Hier lernt man, dass Beugungsgitter prinzipiell verwendet werden können, um die Wellenlänge von Licht zu bestimmen. Für die Position der Hauptmaxima, die unter dem Winkel α_m auftauchen, gilt

$$d \cdot \sin\,\alpha_m = m \cdot \lambda \tag{19.11}$$

wobei d der Spaltabstand und m eine ganze Zahl ist. Es gibt eine Einschränkung. Um klare Interferenzphänomene zu beobachten, muss der Gitterabstand in der Größenordnung der Wellenlänge liegen. Typische Gitterkonstanten sind 10^3 Linien pro mm oder ein Abstand der Gitterfurchen von $10^{-6}\,\mathrm{m}$. Allerdings ist die Wellenlänge der Röntgenstrahlung im Bereich Pikometer ($10^{-12}\,\mathrm{m}$). Was hat das für Auswirkungen? Abb. 19.52 zeigt einen NaCl Salzkristalls. Man erkennt, dass die Struktur sich zusammensetzt aus einem Grundgerüst aus acht Atomen (4 Natrium und 4 Chlor Atome), die ein Volumen a^3 einnehmen. Die Dichte ρ_{NaCl} des Salzes kann über Masse M_{NaCl} und Volumen V_{NaCl} berechnet werden.

$$\rho_{NaCl} = \frac{M_{NaCl}}{V_{NaCl}} \tag{19.12}$$

$$\rho_{NaCl} = \frac{1}{8}\frac{(4\,m_{Na} + 4\,m_{Cl})}{a^3} \tag{19.13}$$

Die Massen von Natrium und Chlor sind m_{Na}=$3.82 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ und m_{Cl}=$5.89 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. Berücksichtigt man die Dichte von NaCl (ρ_{NaCl}=$2.18 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$) ergibt sich:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{m_{Na} + m_{Cl}}{2\,\rho_{NaCl}}} \\ a &= \sqrt[3]{\frac{9.7 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot (2.18 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}})}} \\ a &= \sqrt[3]{2.23 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m^3}} \\ a &= 2.81 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{19.14}$$

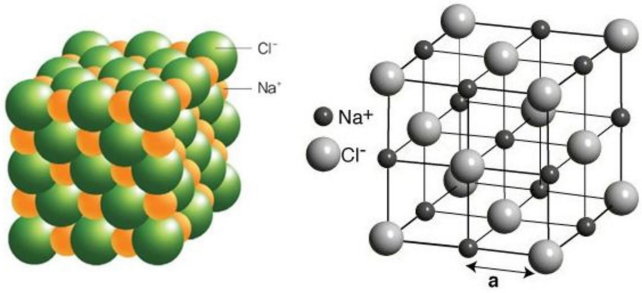


Abb. 19.52: Struktur eines NaCl-Kristalls.

Die Rechnung macht klar, dass die Bindungslänge mit 208 pm in der Größenordnung der Wellenlänge von Röntgenstrahlung liegt. Zum selben Ergebnis kommt man im Übrigen auch auf einem eher chemischen Weg, indem man das Molgewicht von NaCl und die Avogadro-Konstante n_{avo} verwendet.[34]. Probieren Sie es aus! Es könnte deshalb vorteilhaft sein, die Kristallstruktur als Transmissions- oder Reflexionsgitter kurzwelliger Röntgenstrahlung für die Analytik der kondensierten Materie zu nutzen.

Umgekehrt lässt sich die Streuung an einem Festkörperkristall verwenden, um ein Röntgenspektrometer zu realisieren, da die Braggreflexe bei bestimmten Winkeln auftauchen und charakteristisch für bestimmte Wellenlänge sind. Das bedeutet, dass Licht definierter Wellenlänge in einem durch die Bragg-Gleichung gegebenen Winkel den Kristall verlässt. Damit ergibt sich einerseits die Möglichkeit das Spektrum der Röntgenstrahlung zu bestimmen oder mit monochromatischem Röntgenlicht Untersuchungen durchzuführen. Wenn beispielsweise Röntgenlicht durch einen Salzkristall geschickt wird und sich Braggreflexe bei 25^o erscheinen, ergibt sich eine Wellenlänge von

$$\lambda = 2\, d_{\mathrm{NaCl}} \cdot \sin\theta = 238.4\,\mathrm{pm} \tag{19.15}$$

Bragg-Bedingung

Um zu verstehen, wie die Röntgenbeugung funktioniert, betrachten wir eine ebene Welle mit Wellenlänge λ_{xray}, die in einem Winkel Θ auf einen Kristall trifft, deren Gitterebenen parallel zur Oberfläche liegen. Der Abstand der so genannten Netzebenen sei d, siehe Abb. 19.54. An der Atomen wird die Welle kohärent gestreut. Ein beobachtbares Signal der gestreuten Einzelwellen ergibt sich, wenn sich die Wellen in Phase sind und konstruktiv überlagern. Man kann sich überlegen, dass bei spekulärer Reflexion (Einfallwinkel=Ausfallswinkel) alle Streusignale `einer` Atomebene in Phase sind. Aber wie sieht es für unterschiedliche Netzebenen aus, siehe Abb. 19.53? Für konstruktive Interferenz muss die Weglängendifferenz zwischen den reflektierten Strahlen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge betragen. Diese Analyse führt zu der Bragg-Bedingung [**?**]:

$$2\, d \sin\,\Theta = m \cdot \lambda_{xray} \tag{19.16}$$

[34] n_{avo}=6.02 · 10^{23} mol^{-1}; Molgewicht NaCl 58.5

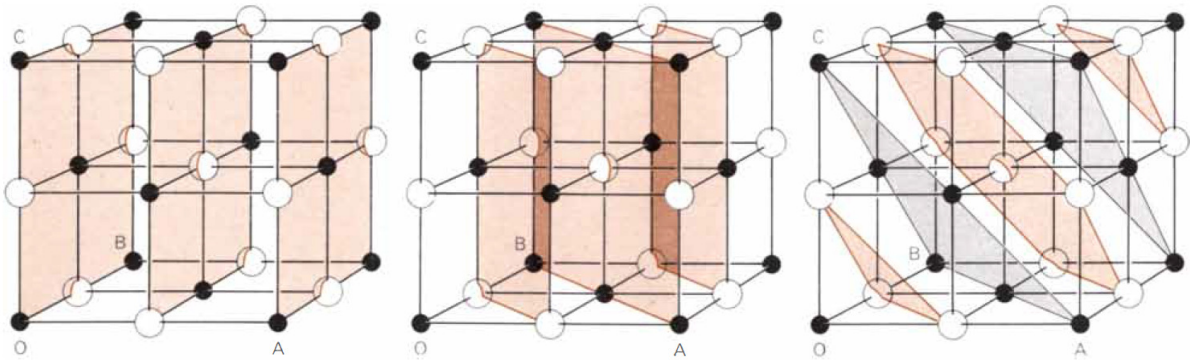


Abb. 19.53: Drei mögliche Anordnungen der reflektierenden atomaren Ebenen in einem NaCl-Kristall, markiert durch Farben [**?**].

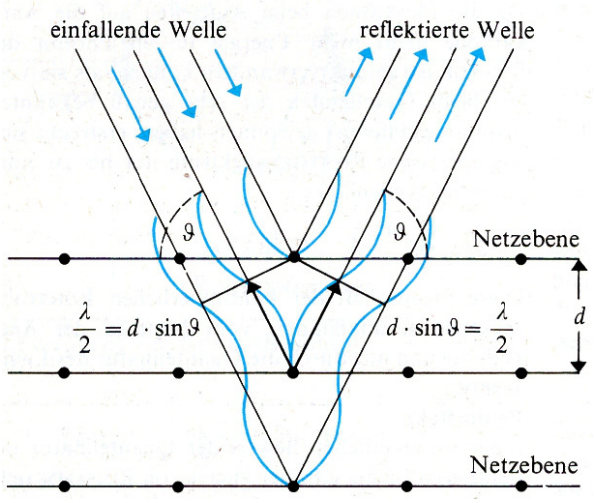


Abb. 19.54: Illustration des Bragg-Prinzips. Nur unter dem Winkel Θ haben die von allen Atomen reflektierte Wellen die gleiche Phase [**?**].

wobei m eine ganze Zahl ist. Gl. 19.16 beschreibt die Reflexion von kurzwelliger Strahlung an Kristallgittern. Man nennt sie diesen Ausdruck die Bragg-Gleichung.[35] Aufgrund der geringen Absorption der Röntgenstrahlung tragen eine erhebliche Anzahl an Gitterebenen zum Streusignal bei. In sofern handelt es hier -wie beim optischen Transmissionsgitter- um eine Vielstrahl-Interferenz. In jeder Richtung, in der Gl. 19.10 und 19.16 erfüllt sind sind als gestreuten Wellen in Phase und man beobachtet man ein Interferenzmaximum. Was bringt die Bragg-Formel? (i) Man kann den Gitterabstand der Atome im Festkörper bestimmen. (ii) Es eröffnet sich die Möglichkeit. die Wellenlänge der verwendeten Strahlung herauszufinden. Abb. 19.55 zeigt eines der ersten Beispiele der Röntgenspektroskopie. Vater und Sohn Bragg entdeckten eher zufällig, dass bei der Streuung von Röntgenstrahlen an Kristallen die verwendeten Röntgenanoden ein charakteristisches Streumuster lieferten [**?**].

In Tab. 19.4 sind die Abstände gängiger Kristalle zusammengefasst. Die Welleneigen-

[35] The Nobel Prize in Physics 1915 was awarded jointly to Sir William Henry Bragg and William Lawrence Bragg *for their services in the analysis of crystal structure by means of X-rays.*

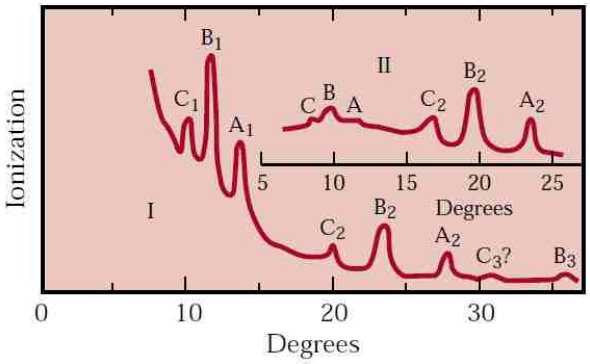


Abb. 19.55: Röntgenreflexion an einem Steinsalzkristall bei Bestrahlung unterschiedlicher Kristallflächen I:(100), II:(111). Die Messkurven zeigen, wie die Intensität des reflektierten Röntgenlichts vom Einfallswinkel abhängt [**?**].

Kristall		d [pm]
Calcit	$CaCO_3$	303.6
Steinsalz	NaCl	282.0
Quarz	SiO_2	425.5
Glimmer	SiO_2	996.3

Tab. 19.4: Abstand der Ebenen in Kristallen [**?**].

schaften der Materie erlauben es, die Bragg-Gleichung auch für Elektronen und Neutronen zur Analyse der kondensierten Materie einzusetzen. Abb. 19.56 zeigt den Vergleich der Bragg-Streuung an Kupfer, gewonnen mit Röntgenlicht und mit Neutronen einer deBrogile-Wellenlänge von 0.1 nm.

Anwendungen 1^{4LP}

Ein Beispiel aus der Materialforschung

Wie äußert sich eine schichtweise Versetzung in der Kristallstruktur? Zum Beispiel könnte der Kristall aus einer Lage einer bestimmten Atomsorte bestehen und die zweite Ebene aus anderen Atomen, siehe Abb. 19.57. Klar ist, dass jede der beiden Netzebenen die Braggbedingung erfüllt. Das Streusignal ist jeweils in Phase. Allerdings besteht zwischen den beiden Signalen ein Phasenunterschied, der zu einer Überlagerung der Streuwellen führt. Die Superposition der Signale beeinflusst deshalb die Intensität der gestreuten Strahlung. Die Intensitätsunterschiede hängen vom relativem Streuvermögen der Atome ab. Außerdem beeinflusst die relative Lage der Atome in den Netzebenen zueinander das Streubild. Die Braggstreuung enthält also reichhaltige Informationen und eine umfassende Analyse ermöglicht es, prinzipiell auch komplexe Geometrien zu entschlüsseln.

Wie analysiert man solche stark strukturierten Streubilder? Dazu verwenden die Forsche die so genannte heavy-atom Methode. Schwere Elemente dominieren aufgrund ihrer stärkerer Streuung das Beugungssignal. Das Interferenzmuster wird zunächst im Hinblick auf die Signale der schwereren Elemente berechnet und die möglichen Positionen im Kristall angepasst. Man nimmt an, dass die im Bild sichtbaren weiteren Streupeaks von

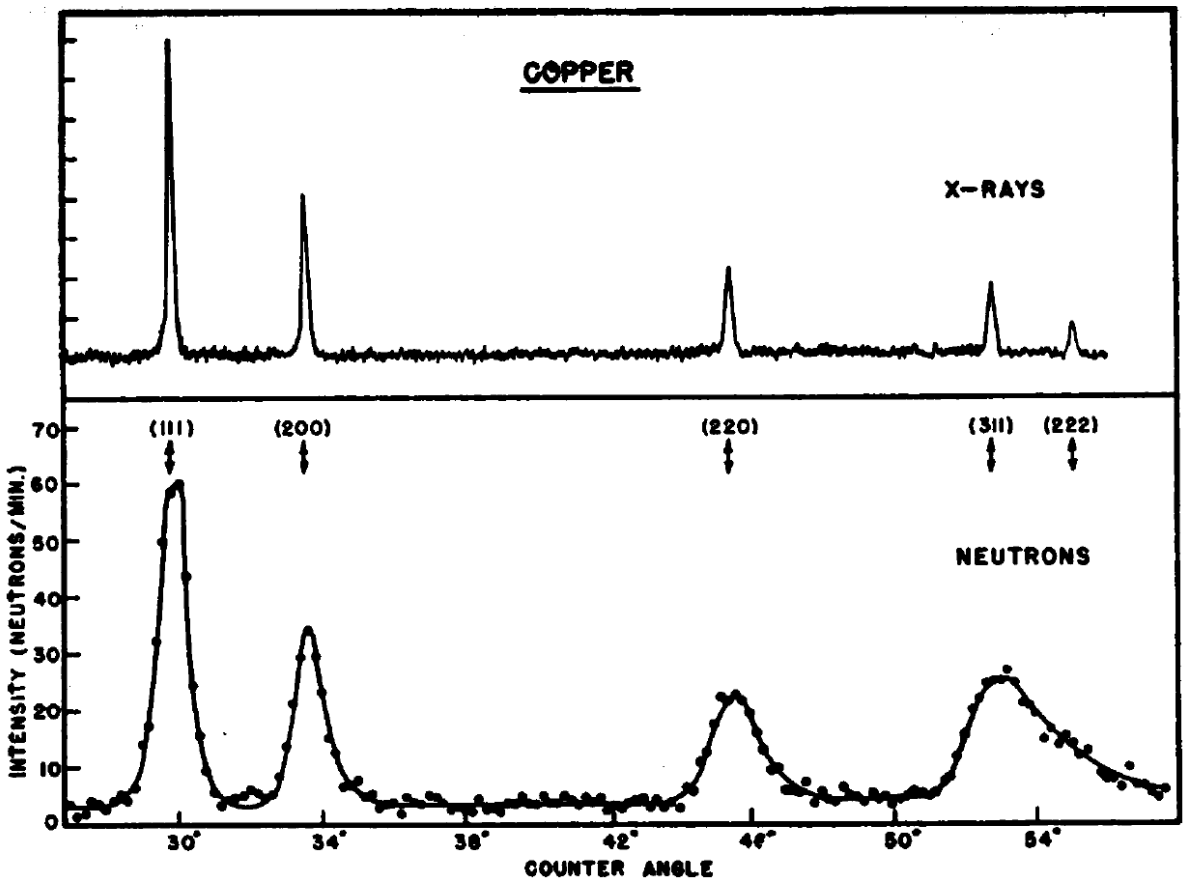


Abb. 19.56: Vergleich der Bragg-Streuung an einer kristallinem Pulverprobe aus Kupfer mit Röntgenlicht und Neutronen [**?**].

leichteren Elementen stammen. In einem iterativen Verfahren werden die Unterschiede zwischen Rechnung und Experiment herausgearbeitet, das Modell der Kristallstruktur unter Berücksichtigung der Signale der leichteren Elemente überarbeitet und so optimiert.

Mit Beginn des 20. Jahrhunderts wurde entdeckt, dass man mit Röntgenstrahlung die Anordnung von Atomen in Festkörpern auflösen kann, ohne die Materialien zu zerstören. Dies war der Beginn der modernen Kristallographie. Die Röntgenkristallographie ermöglicht, chemische Bindungen zu untersuchen und Eigenschaften zu ändern. Die Kristallographie ist geeignet, die Struktur der DNA zu enthüllen, neue Materialien zu designen, oder herauszufinden, wie Proteine in Zellen erzeugt werden. Weitere Anwendungsbereiche sind Lebensmittel- und Bergbauindustrie, Pharmazeutik, Luft- und Raumfahrt, sowie Forensik [**?**]. Im Jahr 2014 jährt sich die *Geburt* der Röntgenkristallographie dank der Arbeiten von William Henry Bragg und William Lawrence Bragg[36], sowie Max von

[36]siehe Fußnote 35

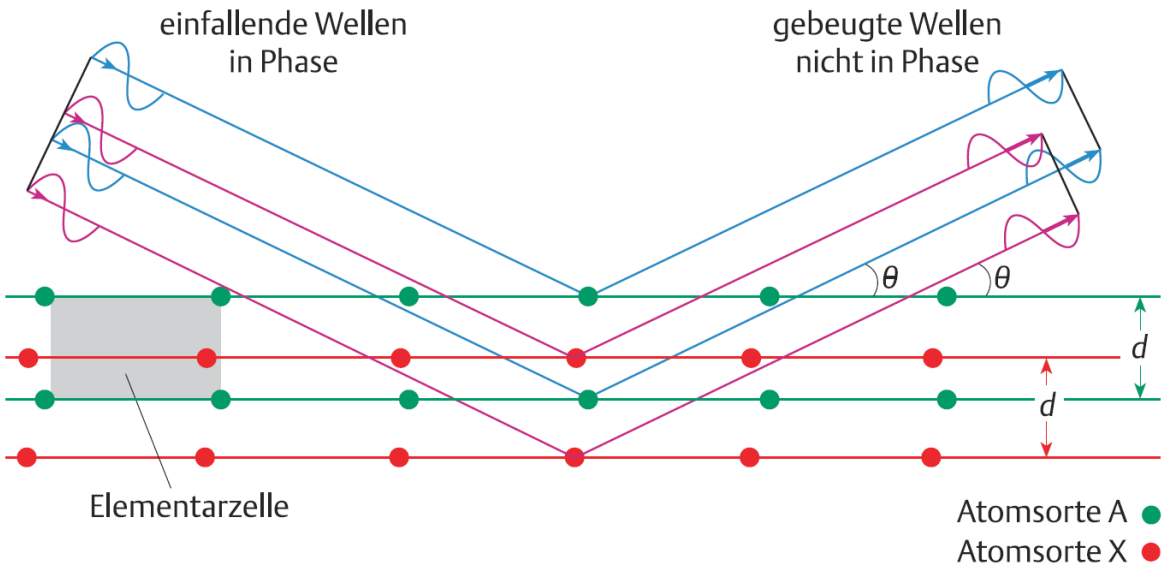


Abb. 19.57: Die A- und X-Atome bilden gegenseitig versetzte Scharen von Ebenen in einem Kristall verlaufen. Die gestreuten Röntgenstrahlen sind nicht in Phase und die Intensität der Braggreflexe verringert sich. Die Abnahme der Intensität hängt vom relativen Streuvermögen der A- und X-Atome ab. Außerdem spielt die relative Lage der Ebenen der A- und X-Atome ein Rolle [**?**].

Laue[37] zum 100. Mal (Abb. 19.58). Die ersten Röntgen-Beugungsaufnahmen wurden von Friedrich und Knipping im Labor von Max von Laue aufgenommen [**?**]. Abb. 19.59 zeigt eine der Aufnahmen aus der Originalarbeit und die Zuordnung der für die Reflexe verantwortlichen Wellenlängen.

Abb. 19.60 zeigt den experimentellen Aufbau, genannt Drehkristallmethode um die Wellenlänge von Röntgenlicht zu bestimmen oder die Kristallstruktur der kondensierten Materie zu untersuchen. Man nennt dieses Verfahren die Drehkristall-Methode. Für die Bestimmung der Wellenlänge wird ein Kristall mit Röntgenstrahlung bestrahlt und die Intensität der am Kristall reflektierten Strahlung mit Hilfe eines Zählrohrs bestimmt. Kristall und Zählrohr werden gedreht und die Intensität wird in Abhängigkeit vom Streuwinkel gemessen. Da in Abhängigkeit vom Winkel jeweils andere Wellenlängen konstruktiv interferieren, kann man mit Hilfe der Bragg-Gleichung (Gl. 19.16) jedem Winkel eine Wellenlänge zuordnen. Dieselbe Methode wird verwendet, um Röntgenstrahlung zu monochromatisieren.

Eine Methode der Bestimmung der Kristallstruktur ist das Laue-Verfahren. Abb. 19.61 zeigt den experimentellen Aufbau. Ein fest ein gespannter Einkristall wird polychromatischer Röntgenstrahlung ausgesetzt. Dies hat zur Folge, dass mehrere Gitterschich-

[37] The Nobel Prize in Physics 1914 was awarded to Max von Laue *for his discovery of the diffraction of X-rays by crystals.*



Abb. 19.58: The year 2014 was proclaimed as the International Year of Crystallography by the United Nations.

ten des Kristalls gleichzeitig die Beugungsbedingung der Bragg-Gleichung (Gl. 19.16) erfüllen. Im Vergleich zur Verwendung monochromatischer Strahlung, liefert dieses Verfahren schnellere Ergebnisse. Die Analyse wird aber durch die Vielzahl an Reflexen, hervorgerufen durch die unterschiedlichen Wellenlängen, erschwert. Abb. 19.62 zeigt eine Strukturuntersuchung am *Bacillus Stearothermophilus* anhand des Laue-Verfahrens.

Das Debye-Scherrer-Verfahren wird für polykristalline Proben eingesetzt. Abb. 19.63 zeigt den experimentellen Aufbau, die durch die Braggstreuung erzeugten Interferenzringe und das zum Nachweis eingelegte Filmmaterial. Als Signal ergeben sich, aufgrund der vielen möglichen Orientierungen der Kristallite, Ringstrukturen auf dem Röntgenfilm.
Welche Informationen erhält das Röntgenbild? Dazu betrachten wir die Bragg-Gleichung genauer (Gl. 19.16). Man erkennt, dass es einen direkten Zusammenhang gibt zwischen dem Abstand der Netzebenen und dem Winkel unter dem die Interferenzmaxima auftreten:

$$d \approx 1/\sin\Theta \tag{19.17}$$

Man unterscheidet die Strukturen, die man bei geringen Streuwinkeln (Kleinwinkel-Streuung) und bei größeren Streuwinkeln (Großwinkel-Streuung) beobachtet.

- Kleinwinkel-Streuung beinhaltet Information über die untersuchte Struktur bei großen Abständen

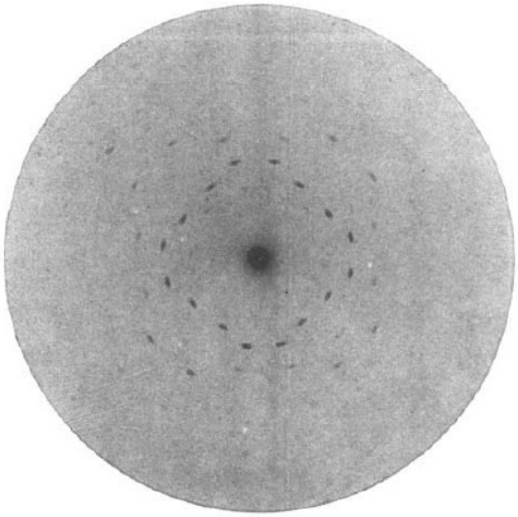


Fig. 5

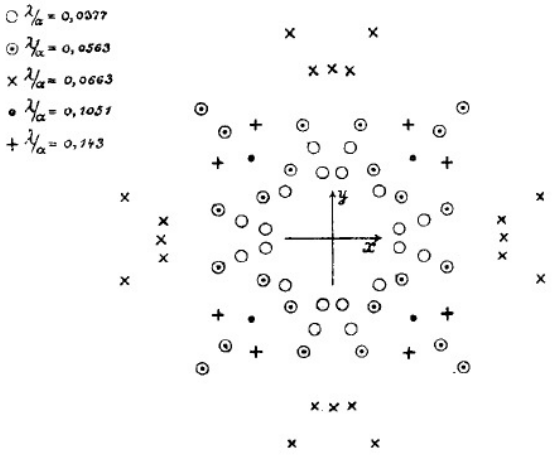


Abb. 19.59: Die Herren Friedrich und Knipping haben auf meine Anregung diese Vermutung experimentell geprüft. So schreibt Max von Laue in der gemeinsamen Veröffentlichung [**?**].

- Großwinkel-Streuung beinhaltet Information über die untersuchte Struktur bei geringen Abständen

Diese Aussagen sollen an einem Beispiel aus [**?**] erläutert werden. Das zunächst unübersichtlich erscheinende Streubilder (Abb. 19.64 (b)) enthalten detaillierte Information über die originale Probe (a). Die Analyse von Röntgenstreubilder erfolgt über das Verfahren der Fourier-Transformation.[38] Unter Anwendung dieser Methode kann aus dem Streubild auf die Struktur der untersuchten Probe geschlossen werden. Als Illustration zeigt Abb. 19.64, wie aus einem Röntgenstreubild das Original durch Fouriertransformation ermittelt wird. Das Streubild zeigt Strukturen bei geringen und großen Streuwinkeln (b). Analysiert man nur den Bereich geringer Winkel (c) und führt die Fouriertransformation durch, werden nur die groben Strukturen des Originals wiederhergestellt (d).

[38] Jede periodische Bewegung kann man als Summe von unendlich vielen Sinuskurven darstellen, deren Frequenz sich wie 1:2:3:4 usw. verhalten, d.h. ein harmonisches Verhältnis bilden.

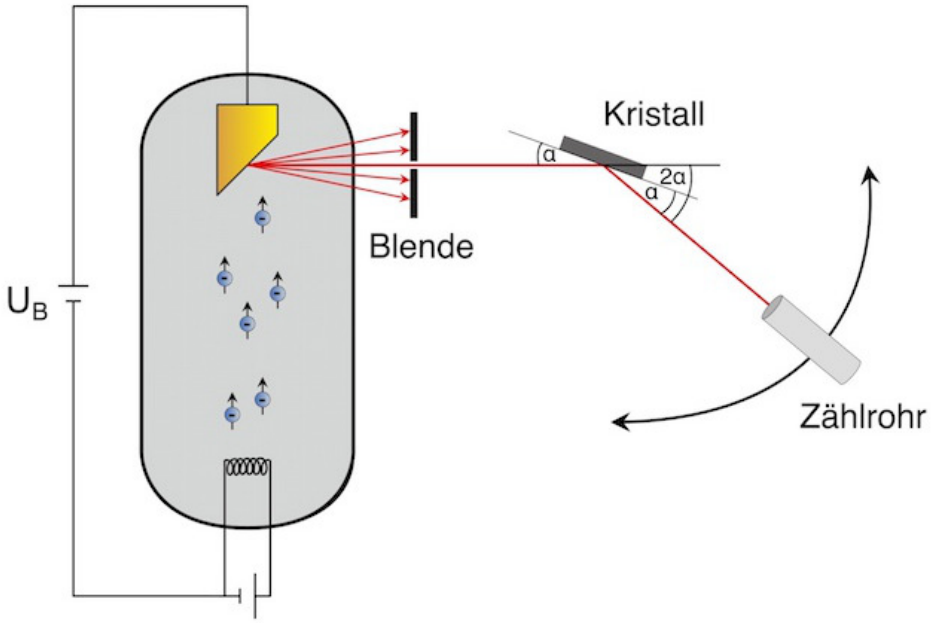


Abb. 19.60: Bei der Drehkristallmethode wird ein Einkristall bei Beleuchtung mit einem monochromatischen Röntgenstrahl gedreht. Erfüllt eine der Gitterebenen die Bragg-Bedingung, ergibt sich ein Braggreflex [**?**].

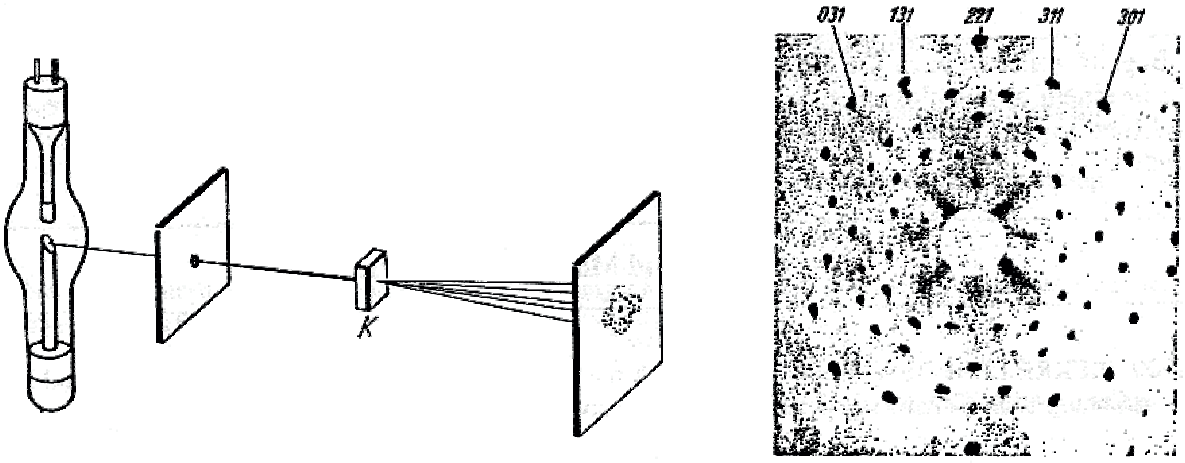


Abb. 19.61: Beim Laue-Verfahren fällt ein polychromatischer Röntgenstrahl auf eine Einkristallprobe und erzeugt, abhängig von der Wellenlänge, einen Bragg-Reflex auf dem Röntgenfilm [**?**].

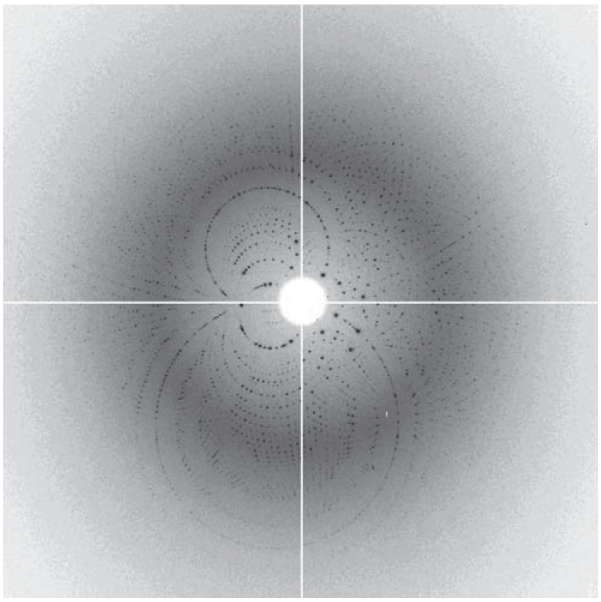


Abb. 19.62: Laue-Diagramm, gewonnen mit Synchrotronstrahlung. Der Proteinkristall ist DNA-Polymerase[a] aus Bacillus stearothermophilus [**?**].

[a] DNA-Polymerasen sind Enzyme, welche die DNA-Synthese an den DNA-Einzelsträngen während der DNA-Replikation katalysieren, dabei Desoxyribonukleotide zu komplementären DNA-Strängen verbinden und Reparaturen von DNA-Schäden durchführen.

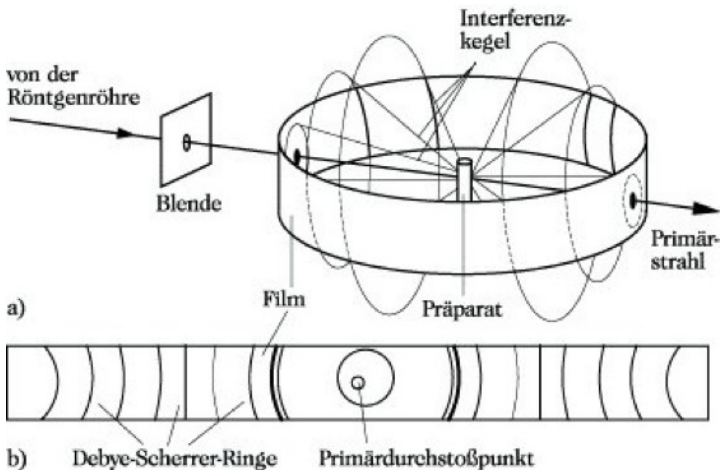


Abb. 19.63: Versuchsaufbau zur Durchführung einer Röntgenanalyse mittels des Debye-Scherrer Verfahrens. Dazu wird eine polykristalline Probe in einen kollimierten und monochromatischen Röntgenstrahl gestellt. Jede der Netzebenen wird dabei in jeder möglichen Orientierung dem Strahl ausgesetzt. Statt der Bragg-Reflexe bei einer polykristallinen Proben summiert sich die gestreute Strahlung auf Kegelmänteln [**?**].

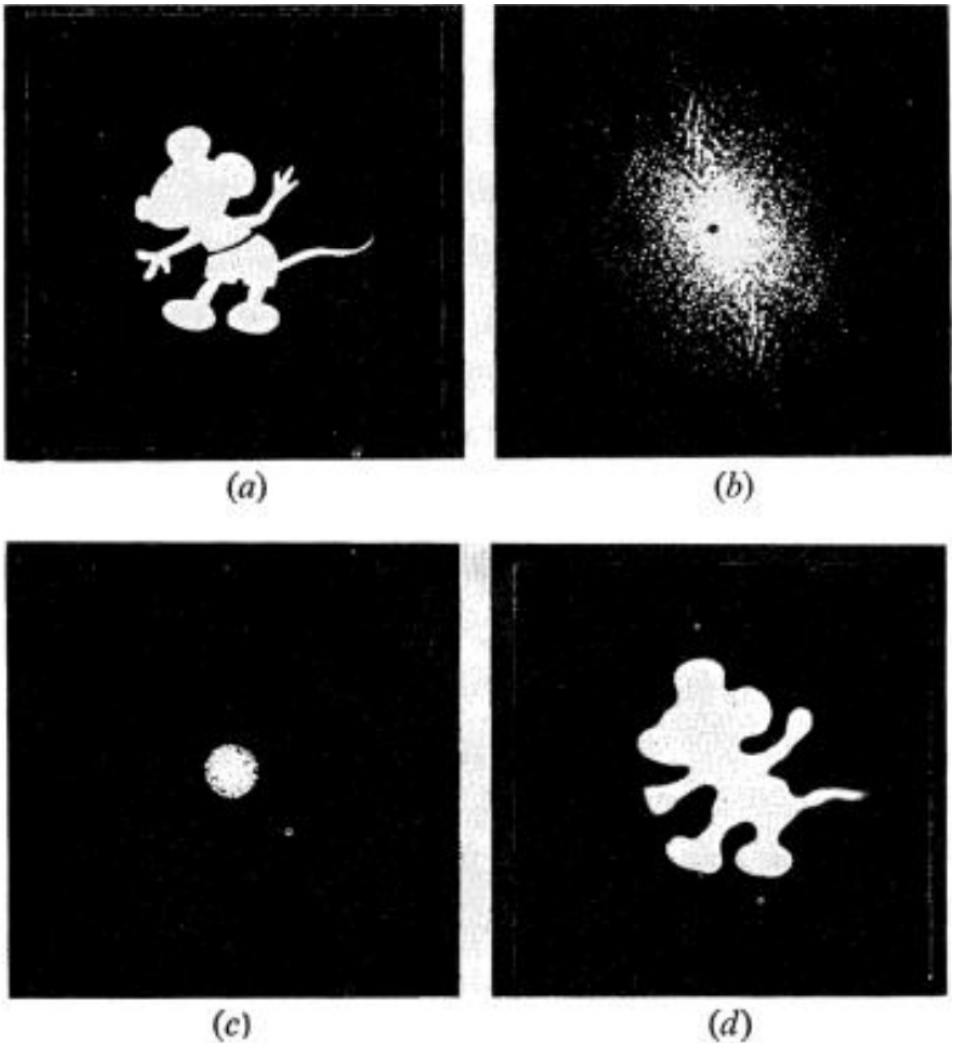


Abb. 19.64: Informationsgehalt bei der Auswertung von Röntgen-Klein- und Großwinkelstreuung [**?**].

Die Informationen über die feineren Details sind tatsächlich, wie durch Bragg-Gleichung beschrieben, in den Signalen bei größeren Streuwinkeln kodiert.

Struktur der DNA[4LP]

For the first time the structure of a whole molecule has been calculated from Xray data, and it is the more remarkable that this should have been possible in the case of a substance having the complexity of the penicillin molecule. The ever-increasing importance of crystallographic X-ray work for the elucidation of chemical structures in collaboration with the organic chemist has been demonstrated in an impressive manner by these investigations.

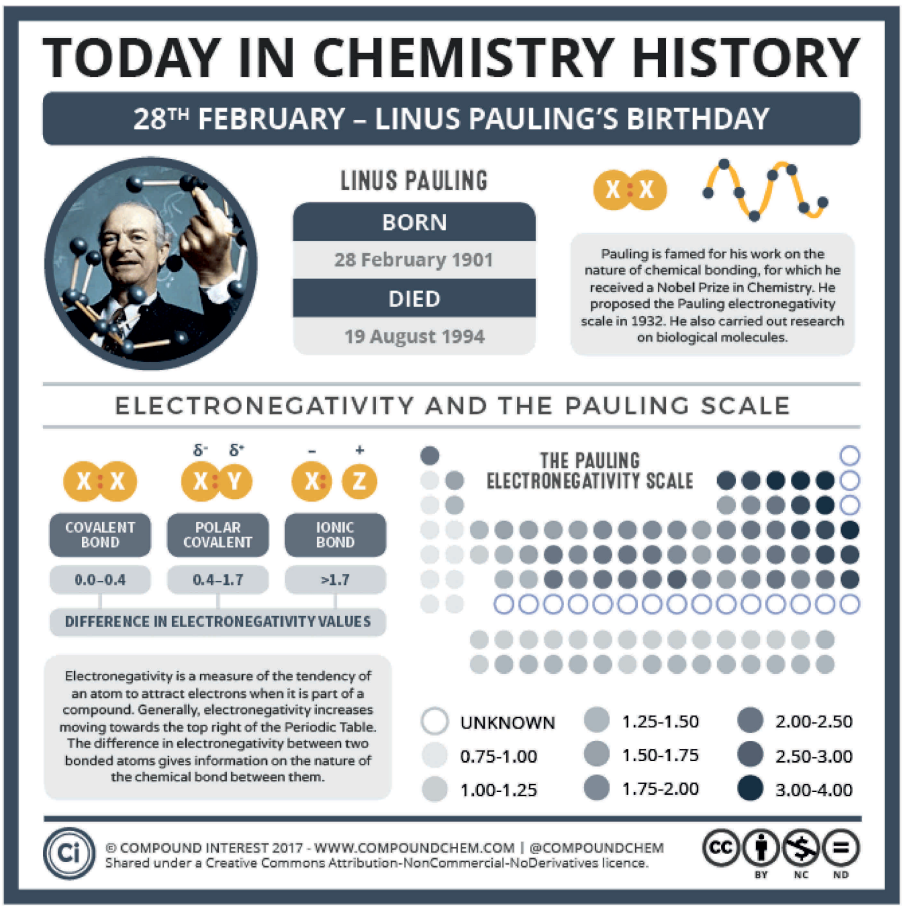


Abb. 19.65: Linus Pauling (1901-1994)

E . B . Chain[39]

Eine der größten Herausforderungen des 20. Jahrhunderts war die Entschlüsselung der Struktur des genetischen Codes, der DNA. Linus Pauling (Abb. 19.65), ein berühmter Chemiker und zweifacher Nobelpreisträger[40] [41] schlug eine Triple-Helix-Struktur mit den Basen auf der Außenseite vor (Abb. 19.66). Diese Vermutung erwies sich im Nachhinein als nicht richtig.

Mit dem Satz Wir möchten hiermit eine Struktur für das Salz der Desoxyribonukleinsäure

[39] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1945 was awarded jointly to Sir Alexander Fleming, Ernst Boris Chain and Sir Howard Walter Florey *for the discovery of penicillin and its curative effect in various infectious diseases* (1945)

[40] The Nobel Prize in Chemistry 1954 was awarded to Linus Carl Pauling *for his research into the nature of the chemical bond and its application to the elucidation of the structure of complex substances.*

[41] The Nobel Peace Prize 1962 was awarded to Linus Carl Pauling *for his fight against the nuclear arms race between East and West.*

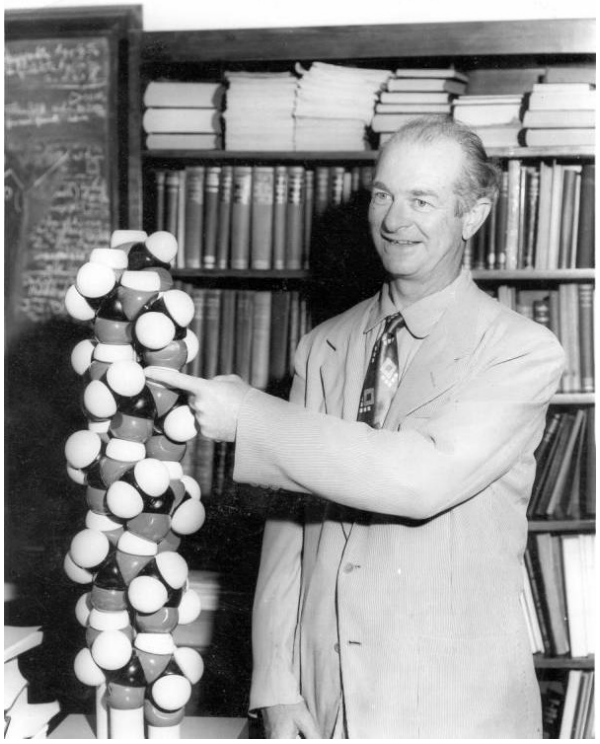


Abb. 19.66: Modell der α-Helix nach Linus Pauling.[a]

[a] Pauling, Corey und Branson schlugen 1951 das Modell einer α-Helix Struktur für Proteine vor. Dies war die erste Entdeckung einer helikalen Struktur für ein Protein. Die α-Helix ist eine rechtshändig gedrehte Spirale mit angehängten Aminosäuren.

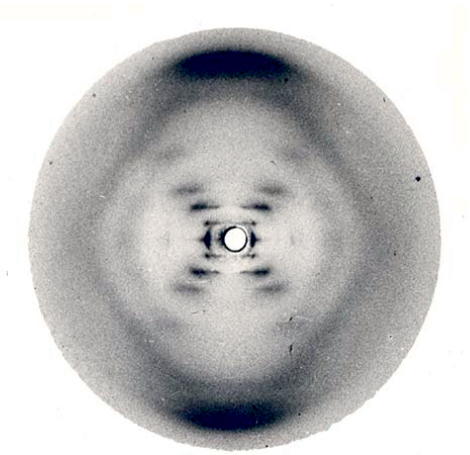


Abb. 19.67: Rosalind Franklins Röntgen-Beugungsaufnahmen von DNA-Molekülen lieferten den wichtigen Hinweis, dass die DNA die Struktur einer Doppelhelix hat. Plate 51 ist neben Röntgens Aufnahme der Hand seiner Frau das wohl berühmteste Röntgenphoto [**?**]. It may not look very exciting, but the photograph above has an important place in history. Known as Photo 51, it's an X-ray diffraction image of DNA and has at least a claim to be the most important image ever taken. [**?**]

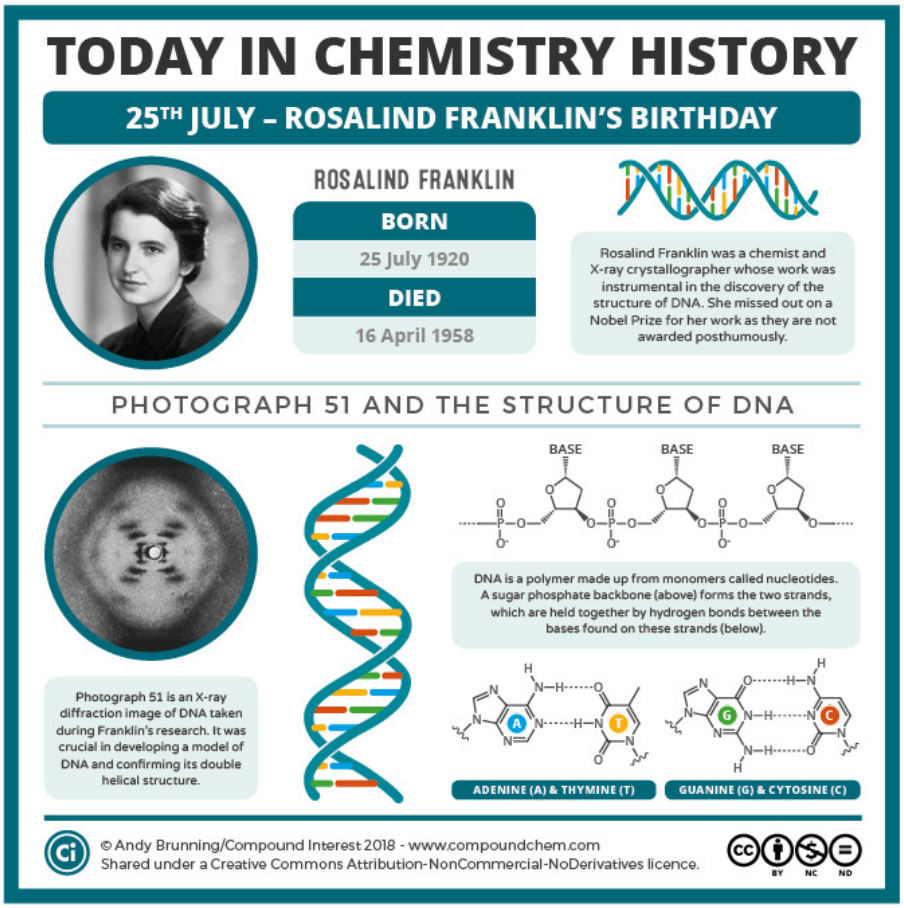


Abb. 19.68: Rosalind Franklin (1920-1958).

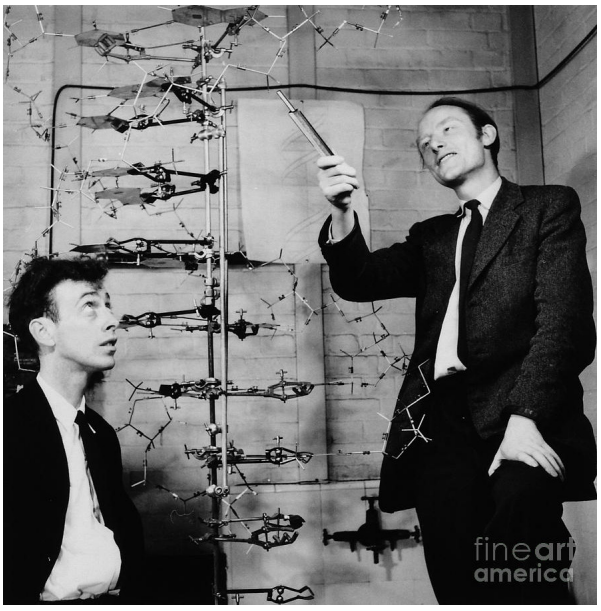


Abb. 19.69: Photo von James Watson and Francis Crick neben ihrem Modell der DNA.



Abb. 19.70: Die im Jahr 2010 eröffnete Helix Bridge an der Marina Bay in Singapur. Die 280 Meter lange Fußgängerbrücke führt in Form einer DNA-Doppelhelix über das Wasser, insbesondere eindrucksvoll bei Nacht[**?**].

(DNA) vorschlagen beginnt der Artikel, in dem Watson und Crick[42] die Doppelhelix, eine Strickleiter, gebildet aus Sprossen komplementärer Basen, als dreidimensionale Struktur der DNA postulierten [**?**]. Grundlage des Erfolgs waren Arbeiten von Rosalind Franklin, siehe auch Abb. 19.68.[43] Rosalind Franklin verwendete Röntgenkristallographie, um die Struktur der DNA zu verstehen. Watson und Crick konnten das Rätsel des DNA-Moleküls anhand von Franklins Daten lösen. Die Abbildung zeigt die berühmte Röntgenstrukturaufnahme (Plate 51), die Watson und Crick auf die Spur der DNA-Struktur brachten, siehe Abb. 19.67. Zusätzlich verfügten die Forscher auch über wichtige Informationen von anderen Forschern, wie beispielsweise die Regeln von Chargaff, der gezeigt hatte, dass von den vier Arten von Monomeren, die in einem DNA-Molekül vorhanden waren, jeweils zwei Nukleotide immer in gleichen Mengen vorhanden waren. Dies bedeutete, dass sie immer irgendwie gepaart vorkommen mussten. Abb. 19.69 zeigt Watson und Crick mit ihrem Modell der DNA. Eine *moderne* Version zeigt Abb. 19.70. Das Photo zeigt die *Helix Bridge*, eine Fußgängerbrücke in Singapur.

Photo 51 is the nickname given to this X-ray diffraction image of crystallized DNA taken by Raymond Gosling, a graduate student working under the supervision of Rosalind Franklin in May 1952 at King College London, while working in Sir John Randall group. The image was tagged *photo 51* because it was the 51st diffraction photograph that Franklin and Gosling had taken. It was critical evidence in identifying the structure of DNA.

[42] The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1962 was awarded jointly to Francis Crick, James Watson and Maurice Wilkins *for their discoveries concerning the molecular structure of nucleic acids and its significance for information transfer in living material*

[43] Zur interessanten Geschichte (Sex and crime: *Clearly Rosyhad to go or be put in her place.* [**?**]) der Verwendung der Daten von Rosalind Franklin durch Watson und Crick, siehe [**?**].

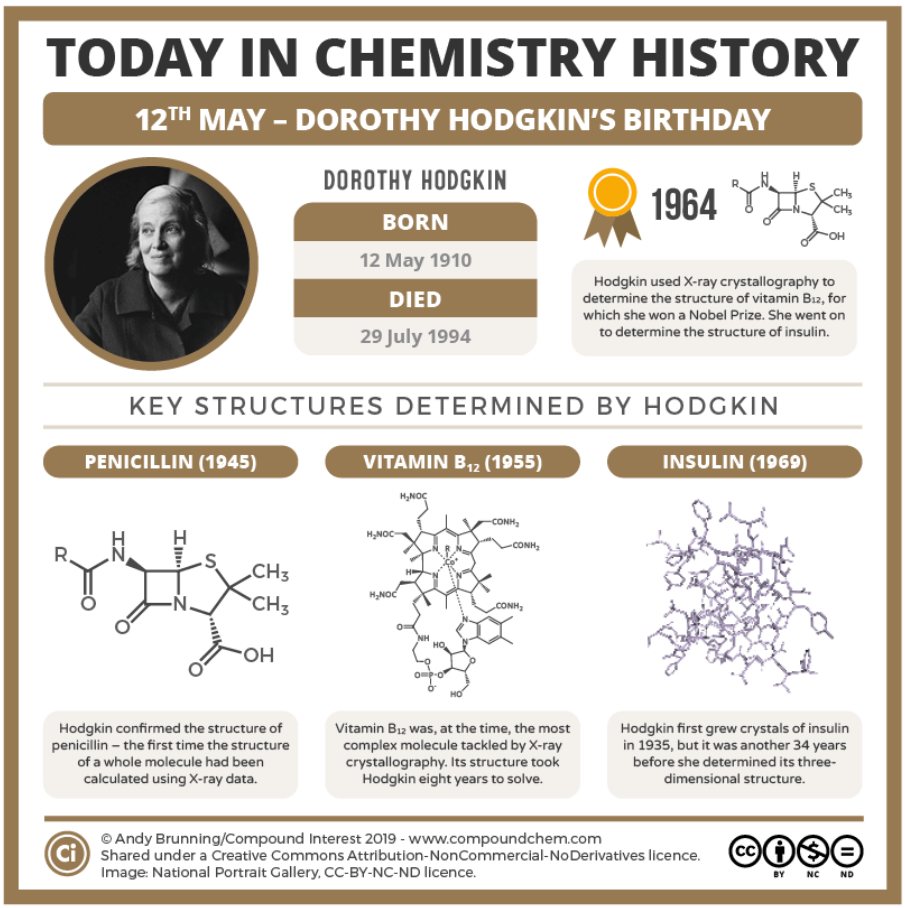


Abb. 19.71: Dorothy-Hodgkin (1910-1994)

Die Bestimmung der Struktur der DNA ist nur eine der Erfolge der Röntgenkristallographie. Allein 14 Nobelpreise aus Physik, Chemie und Medizin gingen an Forscher, die in ihren Arbeiten Röntgenbeugung als Diagnostik einsetzten, zuletzt an Brian Kobilka [**?**].[44]

Trends and Challenges in Experimental Macromolecular Crystallography [?]: Macromolecular X-ray crystallography underpins the vigorous field of structural molecular biology having yielded many protein, nucleic acid and virus structures in fine detail. The understanding of the recognition by these macromolecules, as receptors, of their cognate ligands involves the detailed study of the structural chemistry of their molecular interactions. Also these structural details underpin the rational design of novel inhibitors in modern drug discovery in the pharmaceutical industry. Moreover, from

[44] The Nobel Prize in Chemistry 2012 was awarded jointly to Robert J. Lefkowitz and Brian K. Kobilka *for studies of G-protein-coupled receptors*

such structures the functional details can be inferred, such as the biological chemistry of enzyme reactivity. There is then a vast number and range of types of biological macromolecules that potentially could be studied. The completion of the protein primary sequencing of the yeast genome, and the human genome sequencing project comprising some 10^5 proteins that is underway, raises expectations for equivalent three dimensional structural databases.

- Dorothy Hodgkin[45] untersuchte beispielsweise die Struktur des Vitamins B_{12}. Hier die chemische Formel, die ahnen lässt, wie komplex das Molekül aufgebaut ist: $C_{63}H_{84}N_{14}O_{14}PCo$. Das sind 181 Atome, die sich für den Nichtchemiker in verwirrender Weise anordnen! Die ersten Ergebnisse zur Struktur [**?**] stellten einen bedeuteten Fortschritt für die Röntgenkristallographie dar. Hodgkins entschlüsselte außerdem die Struktur des Hormons Insulin, siehe auch Abb. 19.71.

- Myoglobin hat die biologische Funktion Sauerstoff in den Muskelzellen zu transportieren. Im Vergleich zum Hämoglobin ist die O_2-Affinität höher, wodurch sich die der Transporteffizienz ins Zellinneres erhöht. Im Zusammenhang mit Meeressäugetieren wird diskutiert, ob Myoglobin als Sauerstoffvorrat fungiert. Hinweise liefern Wale, die im Vergleich zu Landsäugetieren einen deutlich höheren Myoglobin-Gehalt in ihrer Muskulatur aufweisen (Mensch 6 g/kg, Pottwal 56 g/kg). Das Myoglobin des Pottwals war das erste Protein, bei dem eine Strukturaufklärung durch Röntgenbeugung gelang [**?**].[46]

- Im Jahr 1984 gelang es Deisenhofer, Huber und Michel[47] nach Analyse des Röntgenbeugungsmusters die dreidimensionale Struktur eines Zellapparates aufzuklären, in dem Sonnenlicht in elektrische Energie umgewandelt wird, dem Schlüsselprozess der Photosynthese. In folgenden elektrochemischen Schritt wird die elektrische Energie chemisch gespeichert, beispielsweise in Glukose. Damit konnte geklärt werden, wie der Prozess in Bakterien oder Pflanzen abläuft. Die Röntgenanalyse lieferte die erste hochauflösende molekular aufgelöste Struktur eines Membranproteins [**?**].

Anwendungen 2^{4LP}

Ein Beispiel aus der Zeit der Pandemie

Die Entwicklung von Impfstoffen gegen den SARS-CoV-2 erfordert eine genaue Kenntnis der Struktur des Erregers. Mit Röntgenlicht wurde die Struktur des Proteins entschlüsselt, das bei der Vermehrung des Erregers eine wichtige Rolle spielt. Viren können

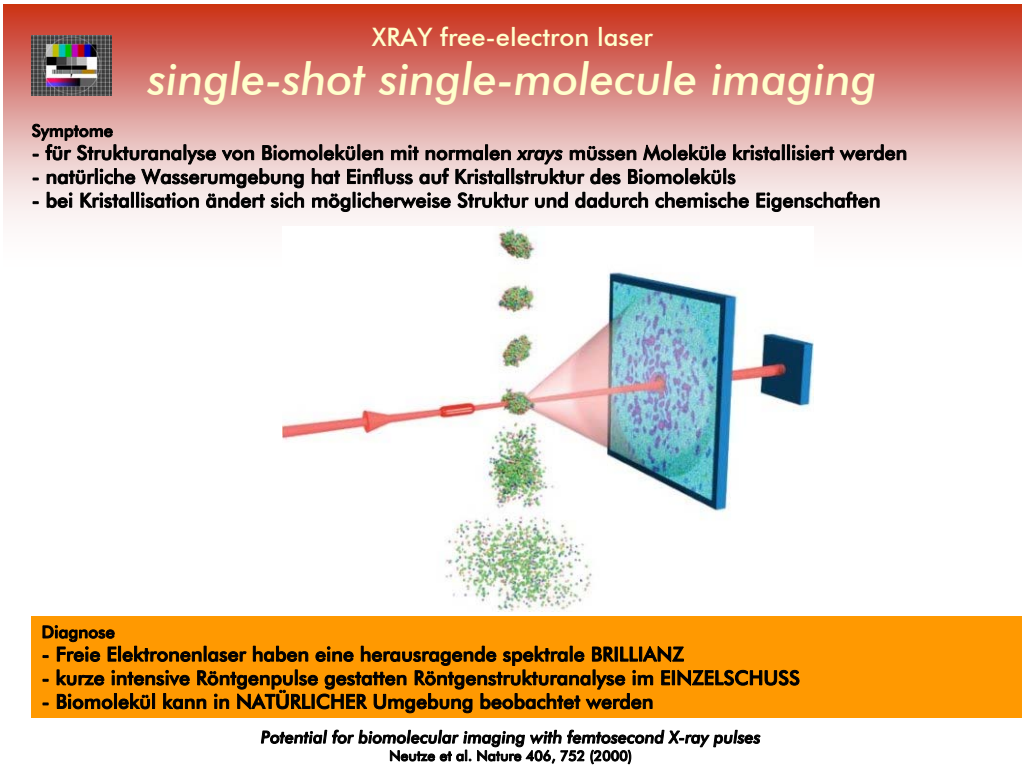
[45] The Nobel Prize in Chemistry 1964 was awarded to Dorothy Crowfoot Hodgkin *for her determinations by X-ray techniques of the structures of important biochemical substances.*

[46] The Nobel Prize in Chemistry 1962 was awarded jointly to Max Ferdinand Perutz and John Cowdery Kendrew *for their studies of the structures of globular proteins*

[47] The Nobel Prize in Chemistry 1988 was awarded jointly to Johann Deisenhofer, Robert Huber and Hartmut Michel *for the determination of the three-dimensional structure of a photosynthetic reaction centre*

sich ohne Hilfe nicht vermehren. Sie schleusen ihr Erbgut in Wirtszellen ein und bringen diese dazu, Viren herzustellen. Proteine spielen hier eine wichtige Rolle. Gelingt es, ein entscheidendes Protein zu blockieren, lässt sich die Vermehrung unter Umständen unterbrechen und die Infektion so besiegen. Die Untersuchungen mit Wirkstoff-Fragmenten dienten dazu, aktive Oberflächen zu identifizieren und ihre molekulare Anbindung zu analysieren. Interessant sind in diesem Zusammenhang Wirkstoffmoleküle die kovalent an das Protein andocken. Stoffe wurde gefunden, die die Tätigkeit des Proteins hemmen und so die Vermehrung des Virus bremsen. Weiter entdeckte man man eine bislang nicht bekannte Andockstelle für Wirkstoffe, die als Angriffspunkt für Medikamente dienen könnte [**?**].

X-Ray Powder Diffraction Patterns for Certain β-Lactam, Tetracycline and Macrolide Antibiotic Drugs [**?**]**:** X-ray powder diffraction data for eight β-lactam viz., ampicillin sodium, ampicillin trihydrate, penicillin G procaine, benzathine penicillin, benzyl penicillin sodium, cefalexin, cefotaxime sodium and ceftriaxone sodium; three tetracyclines viz., doxycycline hydrochloride, oxytetracycline dihydrate and tetracycline hydrochloride; and two macrolide viz., azithromycin and erythromycin estolate antibiotic drugs were obtained using a powder diffractometer. The drugs were scanned from Bragg angles $(2 \cdot \theta)$ of 10^o to 70^o. The obtained data were tabulated in terms of the lattice spacing (Å) and relative line intensities (I/II). This new information may be useful for identifying these drugs from confiscated materials, which has been frequently encountered in forensic laboratories.



Röntgenstreuung an einzelnen Molekülen und Nanostrukturen[4LP]

Vor 1878 wussten die Menschen nicht, wie Pferde aber auch andere Tiere sich bewegen, wenn sie schnell laufen. Tatsächlich ist es schwierig zu sagen, was die Beine tatsächlich tun. Ohne die Möglichkeit, die Zeitabläufe zu verlangsamen, musste man raten. Künstler, die Pferde darstellten, neigten dazu, den dramatischsten und offensichtlichsten Teil des Galopps zu dokumentieren. Galoppierende Pferde wurden in der Regel mit vier weit ausgestreckten Beinen gemalt, siehe das Gemälde in Abb. 19.72. Eadweard Muybridge gelang es mit einer speziellen Technik, galoppierende Pferde so zu photographieren, dass er die schnelle Bewegung der Beine aufzulösen konnte und zu klären, wie viele Beine jeweils über dem Boden waren. Muybridge machte dazu Hochgeschwindigkeitsaufnahmen laufender Pferde, siehe Abb. 19.73.

Die Höchstgeschwindigkeit einer kinematographischen Aufnahme beläuft sich für gewöhnlich auf etwa 16 bis 20 Bilder in der Sekunde. Eine neue Erfindung von Dr. M. Lehmann gestattet eine Steigerung der Aufnahmen auf etwa 2-300. Das wichtige ist die Fähigkeit des neuen Apparates, die Aufeinanderfolge der Bilder bei ihrer Wiedergabe nach Belieben zu verlangsamen. Es ist also die Möglichkeit gegeben, daß Bewegungen 15 bis 20 mal langsamer gezeigt werden können, als sie aufgenommen wurden. Vor allem für wissenschaftliche Zwecke ergaben sich hieraus viele Vorteile. (Central-Zeitung für



Abb. 19.72: Charles Bentley; Fox Hunting, Full Cry (1828)

Optik und Mechanik 16, 151 (1917)).

Röntgen-Beugungsbilder entstehen, indem man die Probe über eine gewisse Zeit der Strahlung aussetzt. Für die Strukturanalyse von Biomolekülen mit Röntgenlicht müssen Moleküle kristallisiert werden, da in der Regel lange Belichtungszeiten erforderlich sind, um aussagekräftige Streubilder zu erhalten. Nach einen längeren Belichtung werden die schwachen Beugungs-Reflexe allmählich sichtbar. Die Kristallisation bewirkt aber in der Regel eine Umstrukturierung des Moleküls. Möglicherweise sind auch die chemischen Eigenschaften betroffen. Ist es möglich, die Belichtungszeit drastisch zu verkürzen und eventuell sogar einen Schnappschuss der Geometrie eines einzelnes Biomoleküle aufzuzeichnen? Noch ein Problem: Chemische Reaktionen laufen extrem schnell ab. Was schätzen Sie. Um welche Größenordnung handelt es sich. Was beschränkt die Reaktionsgeschwindigkeit? Was muss man tun, um die molekulare Dynamik auf seiner natürlichen Zeitskala zu beobachten. Man benötigt eine ultraschnelle Kamera, um die Zeitentwicklung in Echtzeit zu verfolgen. An dieser Stelle kommen die neuen Röntgenlaser ins Spiel. Sie liefern die notwendigen Pulsdauern und in jedem Laserschuss eine ausreichende Menge an Röntgenphotonen, um solche Streu-Experimente zu ermöglichen. Abb. 19.74 zeigt den experimentellen Aufbau eines Experiments an einem Röntgen-Freie-Elektronenlaser (XFEL) (siehe Kapitel *Zerfall des Myons*) zur Bestimmung der Struktur einzelner Moleküle mit nur einem Laserschuss.

Femtosecond diffractive imaging with a soft-X-ray free-electron laser [?]: Theory predicts that, with an ultrashort and extremely bright coherent X-ray pulse, a single diffraction pattern may be recorded from a large macromolecule, a virus or a cell before the sample explodes and turns into a plasma. Here we report the first experimental demonstration of this principle using the FLASH soft-X-ray free-electron laser. An intense 25 fs, $4 \cdot 10^{13}\,\mathrm{W/cm^2}$ pulse, containing 10^{12} photons at 32 nm wavelength, produced a coherent diffraction pattern from a nanostructured non-periodic object, before destroying it at 60,000 K. A novel X-ray camera assured single-photon detection sensitivity by filtering out parasitic scattering and plasma radiation. The reconstructed image, obtained directly from the coherent pattern by phase retrieval through oversampling, shows no measurable damage, and is reconstructed at the diffraction-limited resolution.

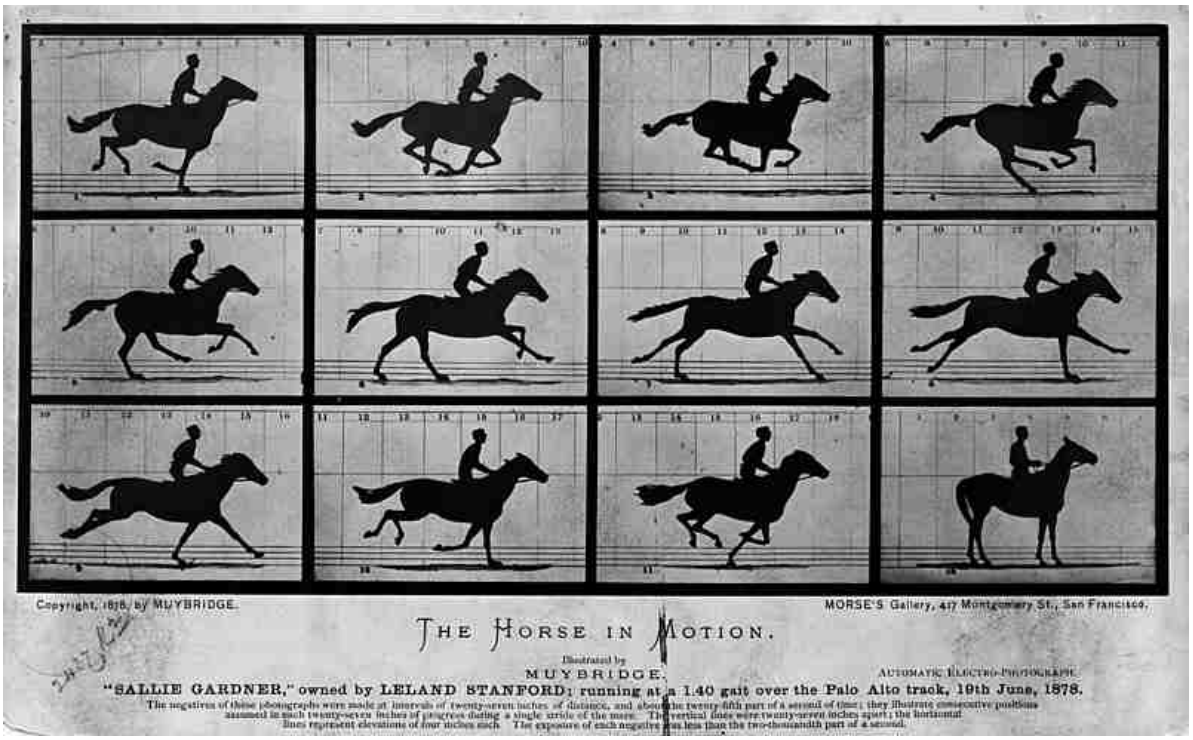


Abb. 19.73: Horse in Motion by Eadweard Muybridge (1878).

A three-dimensional data set may be assembled from such images when copies of a reproducible sample are exposed to the beam one by one.

Die Höchstgeschwindigkeit einer kinematographischen Aufnahme beläuft sich für gewöhnlich auf etwa 16 bis 20 Bilder in der Sekunde. Eine neue Erfindung von Dr. M. Lehmann gestattet eine Steigerung der Aufnahmen auf etwa 2-300. Das wichtige ist die Fähigkeit des neuen Apparates, die Aufeinanderfolge der Bilder bei ihrer Wiedergabe nach Belieben zu verlangsamen. Es ist also die Möglichkeit gegeben, daß Bewegungen 15 bis 20 mal langsamer gezeigt werden können, als sie aufgenommen wurden. Vor allem für wissenschaftliche Zwecke ergaben sich hieraus viele Vorteile.

Central-Zeitung für Optik und Mechanik 16, 151 (1917)

Imaging single cells in a beam of live cyanobacteria with an X-ray laser [?]: There exists a conspicuous gap of knowledge about the organization of life at mesoscopic levels. Ultra-fast coherent diffractive imaging with X-ray free-electron lasers can probe structures at the relevant length scales and may reach sub-nanometer resolution on micron-sized living cells. Here we show that we can introduce a beam of aerosolised cyanobacteria into the focus of the Linac Coherent Light Source and record diffraction patterns from individual living cells at very low noise levels and at high hit ratios... We demonstrate that it is possible to record diffraction data to nanometer resolution on live cells with X-ray lasers. Extension to sub-nanometer resolution is within reach, although

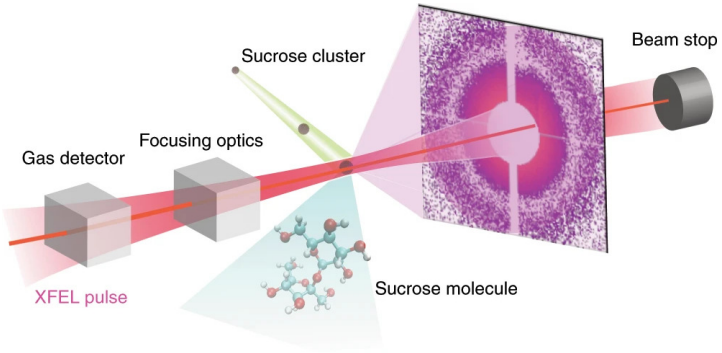


Abb. 19.74: Versuchsaufbau für Einzelschuss-Röntgen-Beugungsexperimente an Saccharose-Clustern. Die Cluster durchqueren den fokussierten FEL-Puls.[a] Das Beugungsbild wird mit einem großflächigen Detektor aufgezeichnet [**?**].

[a] FEL: Freie-Elektronenlaser

improvements in pulse parameters and X-ray area detectors will be necessary to unlock this potential.

The role of transient resonances for ultra-fast imaging of single sucrose nanoclusters [?]: X-ray free-electron laser pulses have inspired new approaches for imaging single nanoscale structures, biological samples, aerosols, and inorganic clusters. The combination of the high number of photons (10^{12}) per pulse with femtosecond pulse lengths allows the recording of diffraction images of nanometer-sized samples with single x-ray flashes. From the two-dimensional x-ray diffraction patterns, three-dimensional information can be obtained and biological function revealed. Combining the single-shot imaging approach with an optical pump laser yields insight into non-thermal processes on the nanoscale with femtosecond resolution. New approaches based on x-ray Fourier transform holography promise efficient reconstruction of the real space information from diffraction images of gas phase specimens.

Ein ähnlich gelagertes Experiment, wie zur Illustration der Informationen aus der Klein- und Großwinkelstreuung (Abb. 19.64) lässt sich auch im Einzel-Röntgenblitzexperiment realisieren, siehe Abb. 19.75. Tatsächlich ist durch die deutlich geringere Datenausbeute die Auswertung erschwert. Abb. 19.76 demonstriert, dass sinnvolle Informationen (b, c) trotzdem extrahiert werden können, die es erlauben das Original (a) zu rekonstruieren. Wie (d) zeigt, ist die Probe nach der Einwirkung des intensiven Laserpulses zerstört (*diffraction before destruction*). Solche und andere Untersuchungen [**? ? ? ? ?**] ebnen den Weg, um zukünftig die Rekonstruktion beliebiger dreidimensionaler Objekte zu ermöglichen und ultraschelle Phänomene aufzuschlüsseln. Kürzlich gelang es, die in vielen Organismen stattfindende durch Licht unterstützte Reparatur der DNA durch das Enzym Photolyase zeitaufgelöst zu beobachten [**?**].[48]

[48] In diesem Zusammenhang schaue man sich das Video des Nobelpreisträgers Ricard Feynman *Jiggling*

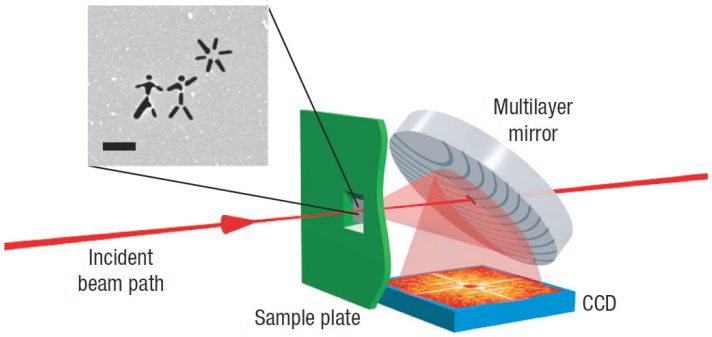


Abb. 19.75: Ein 32 nm FEL-Strahl wird auf einen 20 μm großen Fleck auf der Probe fokussiert. Hier handelt es sich um eine 20 nm dicke Siliziumnitrid-Membran, auf der ein Bild eingefräst ist. Der direkte Strahl tritt durch ein Loch in einem Spiegel. Das gebeugte Licht aus der Probe wird von diesem Spiegel auf einen Detektor reflektiert [**?**].

Die intensive Strahlung des Röntgenlasers führt zu einer starken Ionisation der Komplexe, die dann in einer Coulombexplosion auseinandergerissen werden. Die durch die Einwirkung des Pulses ausgelöste ultraschnelle Dynamik, insbesondere der leichten Wasserstoffatome, stellt hohe Anforderungen an die Zeitspanne in der das Streubild aufgezeichnet werden muss. Die Simulation (Abb.19.77) zeigt, dass sich die anfängliche Struktur eines T4-Lysozym Moleküls innerhalb von 10 fs so stark verändert, dass die Strukturinformation im Streubild nicht mehr abgebildet werden kann [**?**]. Abb. 19.78 zeigt, in welchen Stufen ein solches Experiment abläuft.

Im Philips-Zentrallaboratorium ist ein Verfahren entwickelt worden, mit dessen Hilfe aus dreißig bis fünfzig Röntgenbildern von einem Gegenstand ein Hologramm entsteht. Man erhält die Serie dadurch, daß die Strahlungsquelle zwischen den Aufnahmen um einen Winkel von 0.5^o schrittweise um das Objekt und den Bildschirm geändert wird. Die Röntgenbilder werden anschließend unter kohärentem Licht auf einen Schirm projiziert. Wenn man nun eine zum Schirm angeordnete Photoplatte über eine Lochmaske belichtet, entsteht darauf das Hologramm.

Naturwissenschaftliche Rundschau 11, 493 (1971)

In diesem Zusammenhang sei noch auf ein modernes Experiment verwiesen, deren Ursprung auf Newton zurückgeht - der Newtonsche Staubspiegel.[49] Der einfallende Röntgenblitz tritt durch ein Loch und trifft auf einen Spiegel. Der staubige Spiegel besteht aus Partikeln auf einer nm-dicken SiN-Membran und einem dahinterliegenden Planspiegel. Das

Atoms an [**?**]

[49] *Lexikon:* **Newtonsche Staubringe** sind farbige, bogenförmige Erscheinungen, die bei der Streuung von Licht an verunreinigten Spiegeloberflächen entstehen. Newton hatte dieses Phänomen schon beobachtet, ohne sie jedoch deuten zu können. Später wurde die Physik des Vorgangs durch den Astronomen Adolphe Quetelet erklärt [**?**].

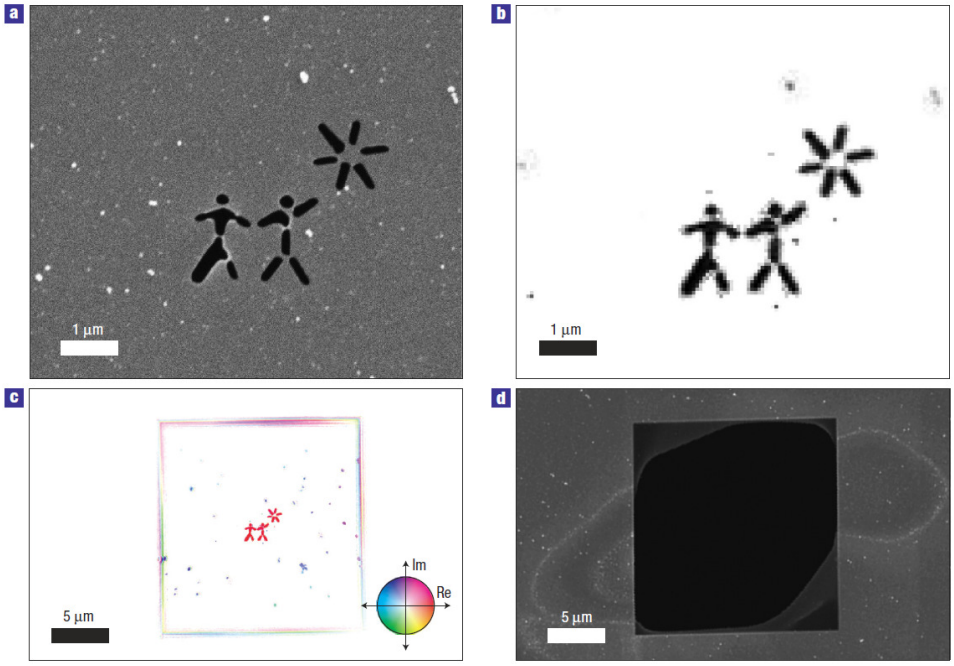


Abb. 19.76: Analyse des Experiments aus Abb. 19.75.Das rekonstruierte Röntgenbild zeigt keine Hinweise auf die durch den Puls verursachten Schäden. (a) Rasterelektronenmikoskopische (REM) Aufnahme der Probe vor der Wechselwirkung mit dem FEL-Strahl. (b, c) Durch Fouriertransformation gewonnenes rekonstruiertes Bild. (d) REM-Bild der zerstörten Probe nach der Belichtungen mit dem FEL-Strahl [**?**].

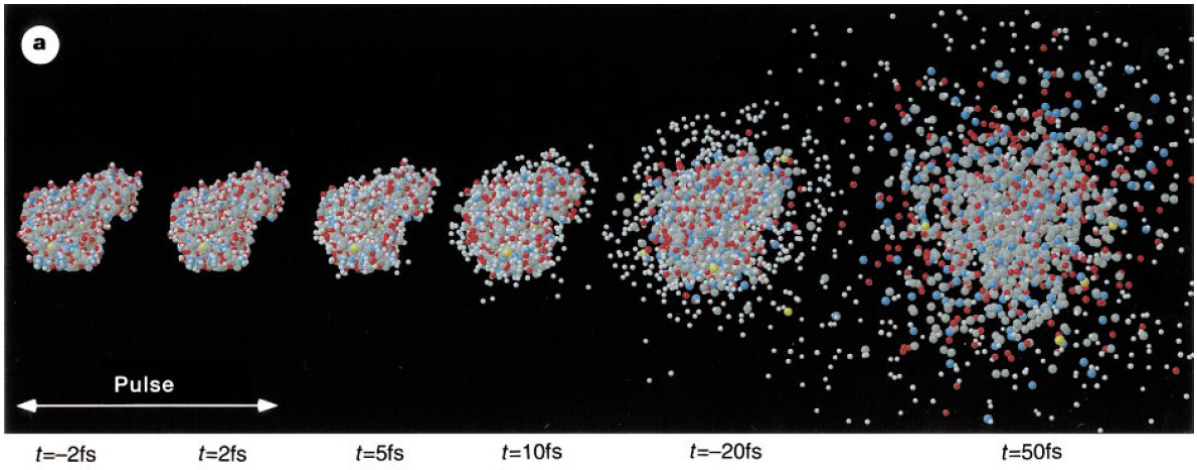


Abb. 19.77: Computerexperiment zur Explosion von T4-Lysozym (weiß: H; grau: C; blau: N; rot: O; gelb: S), induziert durch Einwirkung es 2fs langen Röntgen-FEL-Pulses. Die integrierte Röntgenintensität beträgt jeweils $3.8 \cdot 10^6$ Photonen pro Å^2. Die Simulation zeigt, wie schnell sich die Struktur des Biomoleküls auflöst. Kurze fs-Pulse sind also notwendig, um die anfängliche Struktur über das Streubild zu erfassen. [**?**].

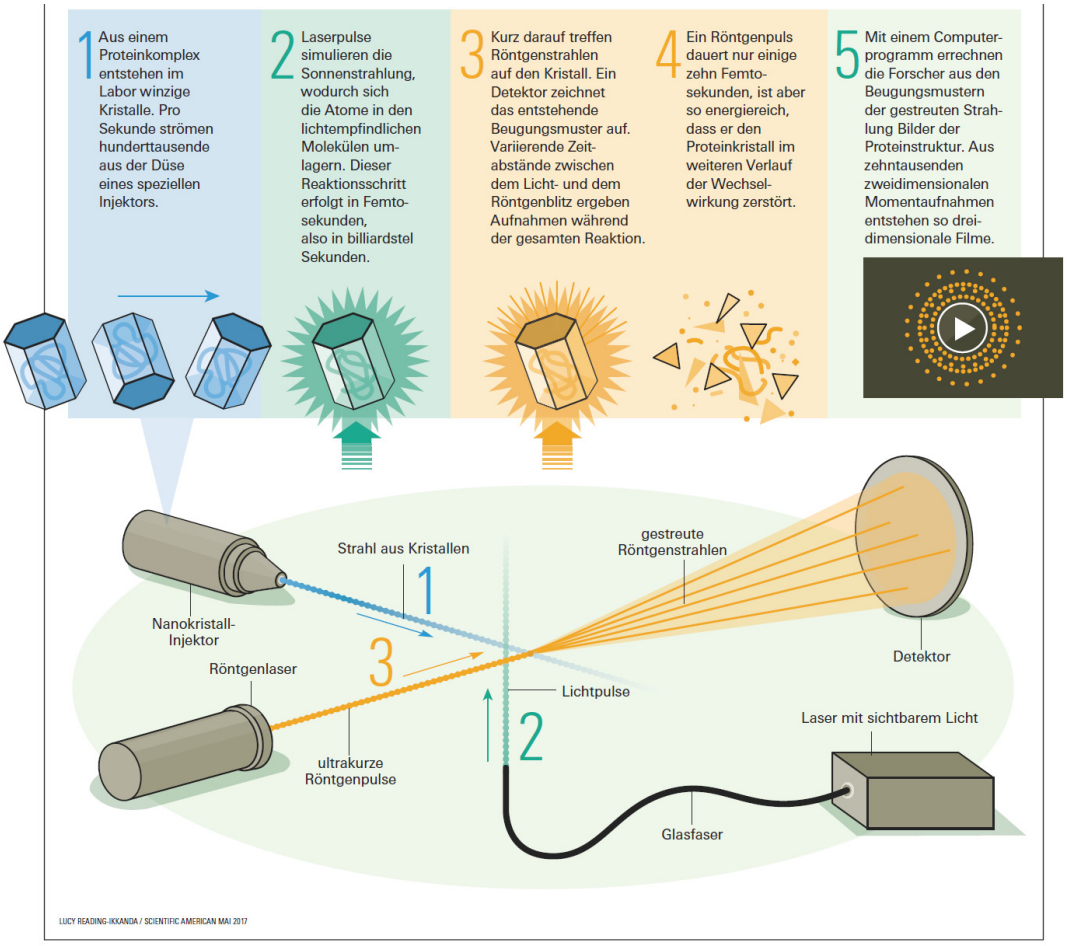


Abb. 19.78: Mikroskopie der Photosynthese. Proteinkomplexe werden durch einen Laserpuls in einen angeregten Zustand versetzt und ein energiereicher Röntgenlaser macht Momentaufnahmen der photoinduzierten Dynamik noch bevor die Energie des Strahls die Proteine zerstört [**?**].

reflektierte Licht der Membran und das kurz danach vom Planspiegel reflektierte Licht interferieren und ergeben ein zeitaufgelöstes Röntgen-Hologramm (Abb. 19.79) [**?**].

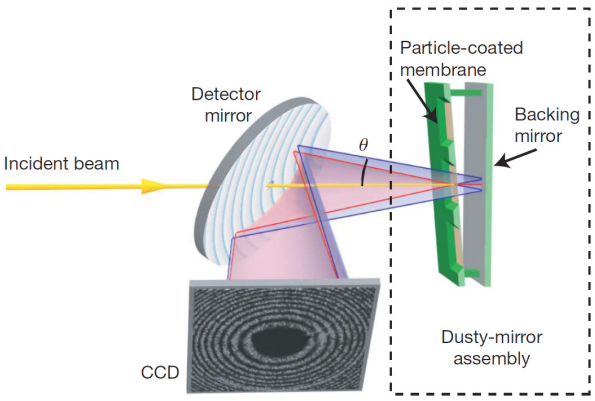


Abb. 19.79: Moderne Version des Staubspiegelexperiments von Newton. Der von links einfallende FEL-Puls passiert ein Loch in Detektorspiegel. Der *Staubspiegel* besteht aus Partikeln auf einer 20 nm dicken Siliziumnitrid-Membran vor dem Spiegel. Die direkte (blau, Referenzwelle) und die verzögerte Beugung (rot, Objektwelle) interferieren und erzeugen ein Hologramm auf dem Detektor [**?**].

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Röntgenstrahlung der Wellenlänge 0.71 pm erzeugt an einem Bariumkristall Braggreflexe. Das erste Beugungsmaximum ergibt sich für einen Winkel von 8.13^o. Wie groß ist der Abstand der Netzebenen?

$$\begin{aligned} 2\,d_{Ba} \cdot \sin\Theta &= n \cdot \lambda \\ d_{Ba} &= \frac{n \cdot \lambda}{2\,\sin\Theta} \\ d_{Ba} &= \frac{1 \cdot 71 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}}{2\,\sin(8.13^o)} \\ d_{Ba} &= \frac{35.5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}}{0.14} \\ d_{Ba} &= 251 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Der Netzebenenabstand in Bariumkristallen beträgt 251 pm.

Aufgabe 4.2: Man kann die Überlegungen zur Röntgendiagnostik nahtlos auf deBrogile Materiewellen übertragen. Ein Elektronenstrahl durch eine Potentialdifferenz von 54 V beschleunigt und trifft auf einen Kristall. Das erste Interferenzmaximum wird bei 13.7^o detektiert. Wie groß ist der Gitterabstand des Kristalls und um welches Material handelt es sich?

Die kinetische Energie beträgt 54 eV und λ_{dB} lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h \cdot c}{p \cdot c}$$

Wir berechnen zunächst den Term $h \cdot c$:

$$\begin{aligned} h \cdot c &= (6.6 \cdot 10^{-34}\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}) \cdot (3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}) \\ h \cdot c &= (4.125 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{m}) \cdot (3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}) \\ h \cdot c &= 1.237 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{m} \\ h \cdot c &\approx 1.24\,\mathrm{keV} \cdot \mathrm{nm} \end{aligned}$$

´

Nun berechnen zunächst den Term $p{\cdot}c$, indem wir den relativistischen Energie-Impulssatz (Kapitel *Einsteingleichung*) verwenden:

$$\begin{aligned} E_{SRT}^2 &= (p \cdot c)^2 + (m_e \cdot c^2)^2 \\ p \cdot c &= \sqrt{E_{SRT}^2 - (m_e \cdot c^2)^2} \\ p \cdot c &= \sqrt{(54\,\mathrm{eV} + 511 \cdot 10^3\,\mathrm{eV})^2 - (511 \cdot 10^3\,\mathrm{eV})^2} \\ p \cdot c &= 7.43\,\mathrm{keV} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Werte berechnen wir den Gesamtausdruck und damit die deBrogile Wellenlänge des Elektrons λ_{dB}:

$$\begin{aligned} \lambda_{dB} &= \frac{h \cdot c}{p \cdot c} \\ \lambda_{dB} &= \frac{1.240\,\mathrm{keV} \cdot \mathrm{nm}}{7.43\,\mathrm{keV}} \\ \lambda_{dB} &= 0.167\,\mathrm{nm} \end{aligned}$$

Setzt man die deBrogile-Wellenlänge in die Bragg-Gleichung ein, ergibt sich mit m=1

$$\begin{aligned} 2\,d \cdot \sin\,\Theta &= m \cdot \lambda_{dB} \\ d &= \frac{m \cdot \lambda_{dB}}{2 \sin\,\Theta} \\ d &= \frac{167 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}}{2 \sin(13.7^o)} \\ d &= 352 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 352\,\mathrm{pm} \end{aligned}$$

Ein Vergleich liefert eine gute Übereinstimmung mit dem Metall Nickel (352.4 pm). Nebenbei bemerkt haben wir gerade das Experiment von Davisson und Germer (Kapitel *Materiewellen*) behandelt.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Strahlungsart eignet sich am besten zur Beobachtung von Beugungsbildern kristalliner Festkörper?
2. Wie lautet die Bragg-Gleichung?
3. Wie ändern sich das Beugungsmuster eines Kristalls, wenn man statt Röntgenstrahlung γ-Strahlen verwendet?
4. Wie unterscheiden sich die Drehwinkel-Methode, das Laue und das Debye-Scherrer Verfahren?
5. Skizzieren Sie das Beugungsbild beim Debye-Scherrer Verfahren!
6. Welche Information erhält man aus der Kleinwinkelstreuung?
7. Welche Bedeutung hat *Plate 51*?
8. Kann man eine Strukturanalyse einzelner Biomoleküle durchführen?

Was war relevant für die Klausur?

- Charakteristik eines Röntgenbildes
- Compton-Streustrahlung und Strahlkollimatoren
- Absorptionskoeffizient μ_{xray} und Massenabschwächungskoeffizient μ_{xray}/ρ_{tissue} (Gl. 19.6),

$$I(x) = I_0 \exp\left(-\left(\frac{\mu_{xray}}{\rho_{tissue}}\right) \cdot \rho_{tissue} \cdot x\right)$$

- Lambert-Beer Gesetz oder Abschwächungsgesetz (Gl. 19.1)

$$I(x) = I_0 \cdot \exp(-\mu_{xray} \cdot x)$$

- Schichtdicke δ_{xray} (Gl. 19.2) und Halbwertsdicke $\delta_{1/2}$ (Gl. 19.4)

$$\delta_{xray} = \frac{1}{\mu_{xray}}$$

$$\delta_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\mu_{xray}}$$

- Röntgen-Kontrastmittel
- Metallfilter als spektrale Filter
- Wechselwirkung von Röntgenstrahlung mit Materie
- Abhängigkeit des Absorption durch den Photoeffekt von der Dichte des Gewebes, der Wellenlänge und der Ordnungszahl
- Absorptionskanten und Wasserfenster
- Dual-Photonen-Absorptiometrie
- Röntgenangiogramm
- Bragg-Gleichung (Gl. 19.16)

$$2\,d \sin\,\Theta = m \cdot \lambda$$

- Drehkristall-Methode, Laue- und Debeye-Scherrer-Verfahren
- Klein- und Großwinkelstreuung
- Struktur der DNA
- Einzelschuss-Röntgenbeugung

20 Laser



Laser

A laser is a solution seeking a problem.

Theodore H. Maiman, Interview in *International Herald Tribune*, 13. Mai 2007

[1]Welche Ursachen führen zur Lichtemission aus angeregten Atomen? Man kennt Photolumineszenz, Chemielumineszenz [**?**], Elektrolumineszenz [**?**], Bioluminineszenz[2] [**?**] und So-

[1]Dieses Kapitel der Modernen Physik ist für die Klausur nicht relevant.

[2]While sailing in these latitudes on one very dark night, the sea presented a wonderful and most beautiful spectacle. There was a fresh breeze, and every part of the surface, which during the day is seen as foam, now glowed with a pale light. The vessel drove before her bows two billows of liquid phosphorus, and in her wake she was followed by a milky train. As far as the eye reached, the crest of every wave was bright, and the sky above the horizon, from the reflected glare of these livid flames, was not so utterly obscure, as over the rest of the heavens.

Charles Darwin, 1839

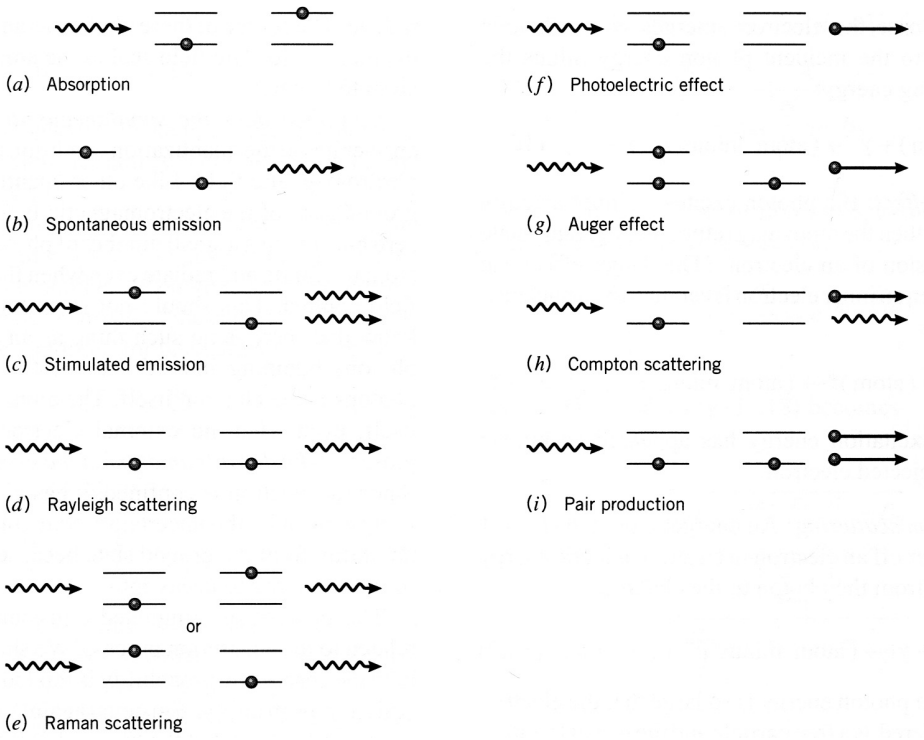


Abb. 20.1: Wechselwirkungsprozesse zwischen Photonen und Atomen [**?**].

nolumineszenz [**? ? ?**]. Diese, man nennt sie spontane Emissionen, basieren auf der Energiequelle, die die Elektronen in den Atomen anregt. Wird die Energie optisch eingekoppelt, nennt man Vorgang Photolumineszenz. Im Dunkeln leuchtende Materialien geben Energie in Form von aufgrund einer chemischen Reaktion ab (Chemielumineszenz). Ein Beispiel sind Leuchtstäbe. Wird die Energie elektrisch zugeführt, spricht man von Elektrolumineszenz. LEDs beispielsweise emittieren Licht durch eine Anregung im Festkörper. Nutzt man Schallwellen, nennt man den Vorgang Sonolumineszenz. Wenn die anfängliche Energieform auf beschleunigte Elektronen zurückzuführen ist, die auf ein Material treffen, wird dieser Vorgang als Kathodolumineszenz bezeichnet. Kommt es bei einem lebenden Organismus wie einem Glühwürmchen, zur spontanen Lichtemission, spricht man von Biolumineszenz.

Bis zum Jahr 1916 waren sich die Forscher einig, dass Licht nur über Absorption und spontane Emission mit Materie wechselwirken kann. Einstein erkannte [**?**], dass für ein thermisches Gleichgewicht von Strahlung und Materie, neben Emission und Absorption, noch ein zusätzlicher Prozess berücksichtigt werden muss. Dieser unbekannte Mechanismus ist die stimulierte Emission (siehe Abb. 20.1), indem ein Photon bei der Wechselwirkung mit einem Atom die Emission eines weiteren Photons verursacht. Das erzeugte Photon ist ein exakter Klon des einfallenden Photons. Voraussetzung für einen solchen Prozess ist allerdings, dass sich das Atom in einem angeregten Zustand befindet. Interessant ist, dass die Emission in kohärenter Weise erfolgt. In einem Laser erfolgt die-

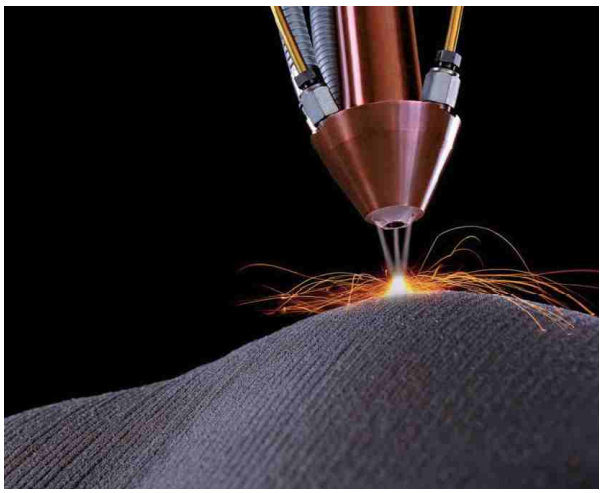


Abb. 20.2: Laserstrahlung, hier eingesetzt als optisches Werkzeug in der Materialbearbeitung.

ser Prozess lawinenartig und erzeugt so eine extrem hohe Anzahl kohärenter Photonen. Die Beschreibung dieser Vorgangs, *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, wird kurz und bündig LASER genannt. Der Vorläufer,[3] der im Mikrowellenbereich arbeitende MASER[4] wurde 1953 entwickelt [**?**].[5] Gordon, Zeiger und Townes zeigten. dass man Mikrowellen einer Wellenlänge von 1.26 cm beim Durchgang durch präparierte NH_3-Moleküle verstärken kann.

Die in bestimmten interstellaren Moleküle nachgewiesene Radiostrahlung wird dem natürlichen Auftreten des Maser-Phänomens zugeschrieben [**?** **?**]. Astronomische Maserstrahlung wird durch Besetzungsinversion in Molekülen erzeugt und man beobachtet beispielsweise:

- Hohe Intensität der Strahlung im Verglich zur Umgebungstemperatur.
- Schmalbandige Emissionslinien.
- Anormale Linienverhältnisse, die eine Abweichung vom thermischen Gleichgewicht anzeigen.

Far-Infrared Hydrogen Lasers in the Peculiar Star MWC 349A [?]**:** Far-infrared hydrogen recombination lines H15α (169.4 μm), H12α (88.8 μm), and H10α (52.5 μm) were detected in the peculiar luminous star MWC 349A from the Kuiper Airborne Observatory. Here it is shown that at least H15α is strongly amplified, with the probable amplification factor being greater than or about equal to 10^3 and a brightness temperature that is greater than or about equal to 10^7 kelvin. The other two lines also show signs of amplification, although to a lesser degree. Beyond H10α the amplification apparently

[3] Theoretisch untermauert durch die Arbeiten von Dicke [**?**]

[4] MASER: Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation

[5] The Nobel Prize in Physics 1964 was divided, one half awarded to Charles Hard Townes, the other half jointly to Nicolay Gennadiyevich Basov and Aleksandr Mikhailovich Prokhorov *for fundamental work in the field of quantum electronics, which has led to the construction of oscillators and amplifiers based on the maser-laser principle*

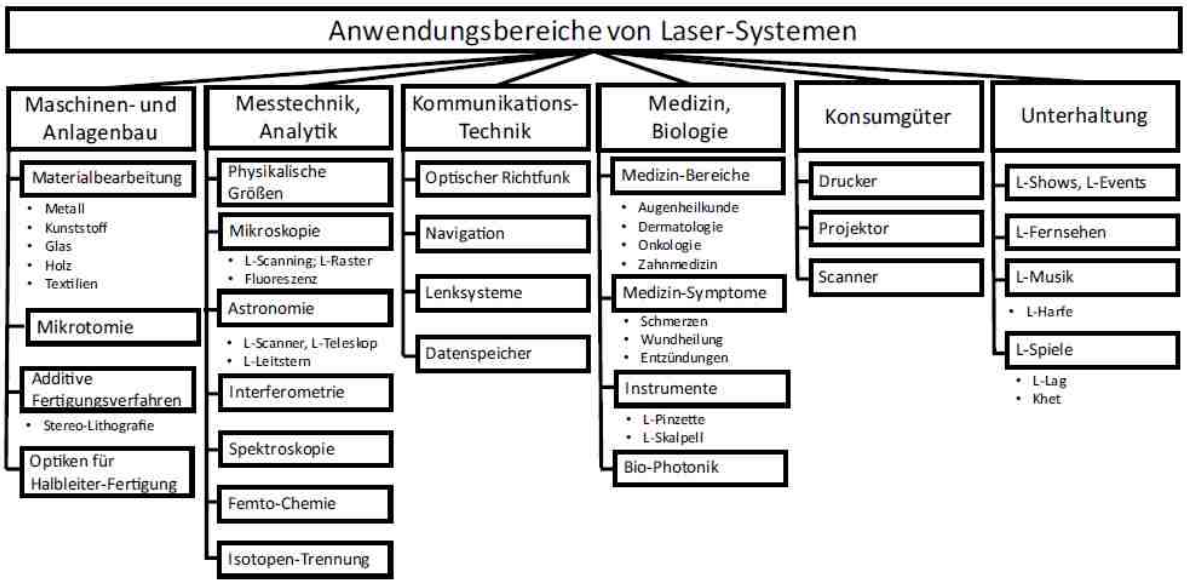


Abb. 20.3: Bandbreite der Laseranwendung [**?**].

vanishes. The newly detected amplified lines fall into the laser wavelength domain. These lasers, as well as the previously detected hydrogen masers, may originate in the photoionized circumstellar disk of MWC 349A and constrain the disk's physics and structure.

Im Jahr 1960 stellte Theodore Maiman den ersten Laser vor, genannt optischer Maser [**?**].[6] Kurze Zeit später wurden weitere Lasersysteme vorgestellt [**? ?**], unter anderem der von Bell Labs entwickelte Helium-Neon Laser [**?**].Danach setzte eine rasante Entwicklung ein. Lasersysteme sind allgegenwärtig (Abb. 20.2), können stecknadelgroß sein oder ganze Industriehallen füllen. Sie werden an Supermarktkassen, in der Bibliothek, CD-DVD- und Blue-Ray-Geräten eingesetzt. Laser schweißen, werden in Augenoperationen eingesetzt oder, wie kürzlich demonstriert, erlauben eine kontrollierte Fusion [**? ?**]. Laser sind damit die bedeutendste Lichtquelle, die im 20. Jahrhundert entwickelt wurde. Die Einsatzmöglichkeiten sind vielfältig, siehe Abb. 20.3. Abb. 20.5 gibt ein Beispiel für die Anwendung in der Anthropologie. Bei der Untersuchung wurde durch Laserplasma-Massenspektrometrie gezeigt, dass es unmittelbar nach der Geburt eines Menschen zu einem deutlichen Anstieg von Barium und Kalzium in den Milchzähnen kommt [**?**].

Leon Goldman gilt als Vater der Lasermedizin. Im Jahr 1960, nur ein Jahr nach der Erfindung des Lasers, begann er entgegen der Skepsis seiner Kollegen (*It's a pity as it interferes with progress.*) mit seiner Forschung *I think it has unlimited potential.* Er leistete Pionierarbeit in der Dermatologie, einschließlich der Behandlung von Warzen. *We can use an argon laser to get a white etching in red plastic. That was not possible before lasers.*

[6] Zeitgleich erschien eine weitere Arbeit zum Rubinlaser von Wieder und Sarles [**?**]

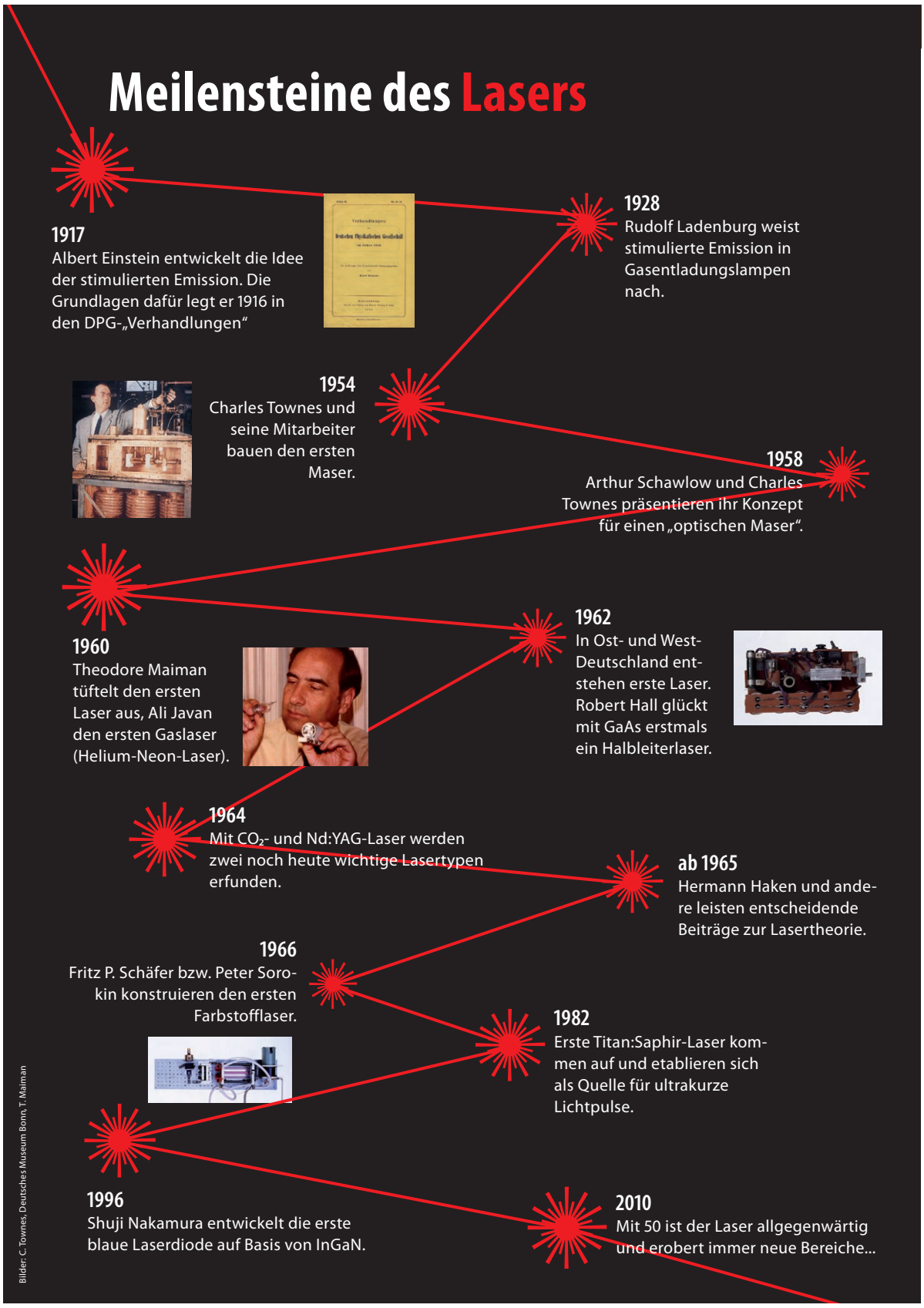
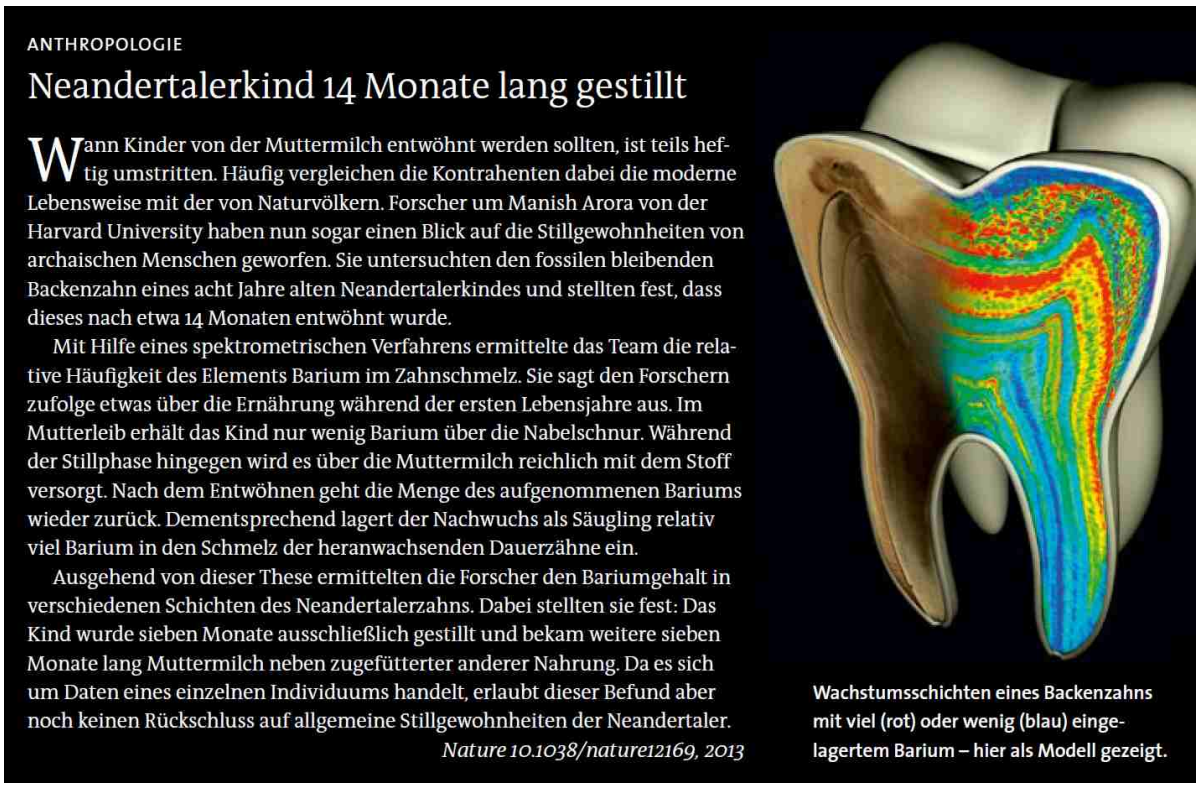


Abb. 20.4: Meilensteine in der Entwicklung der Lasertechnologie [**?**].



ANTHROPOLOGIE

Neandertalerkind 14 Monate lang gestillt

Wann Kinder von der Muttermilch entwöhnt werden sollten, ist teils heftig umstritten. Häufig vergleichen die Kontrahenten dabei die moderne Lebensweise mit der von Naturvölkern. Forscher um Manish Arora von der Harvard University haben nun sogar einen Blick auf die Stillgewohnheiten von archaischen Menschen geworfen. Sie untersuchten den fossilen bleibenden Backenzahn eines acht Jahre alten Neandertalerkindes und stellten fest, dass dieses nach etwa 14 Monaten entwöhnt wurde.

Mit Hilfe eines spektrometrischen Verfahrens ermittelte das Team die relative Häufigkeit des Elements Barium im Zahnschmelz. Sie sagt den Forschern zufolge etwas über die Ernährung während der ersten Lebensjahre aus. Im Mutterleib erhält das Kind nur wenig Barium über die Nabelschnur. Während der Stillphase hingegen wird es über die Muttermilch reichlich mit dem Stoff versorgt. Nach dem Entwöhnen geht die Menge des aufgenommenen Bariums wieder zurück. Dementsprechend lagert der Nachwuchs als Säugling relativ viel Barium in den Schmelz der heranwachsenden Dauerzähne ein.

Ausgehend von dieser These ermittelten die Forscher den Bariumgehalt in verschiedenen Schichten des Neandertalerzahns. Dabei stellten sie fest: Das Kind wurde sieben Monate ausschließlich gestillt und bekam weitere sieben Monate lang Muttermilch neben zugefütterter anderer Nahrung. Da es sich um Daten eines einzelnen Individuums handelt, erlaubt dieser Befund aber noch keinen Rückschluss auf allgemeine Stillgewohnheiten der Neandertaler.

Nature 10.1038/nature12169, 2013

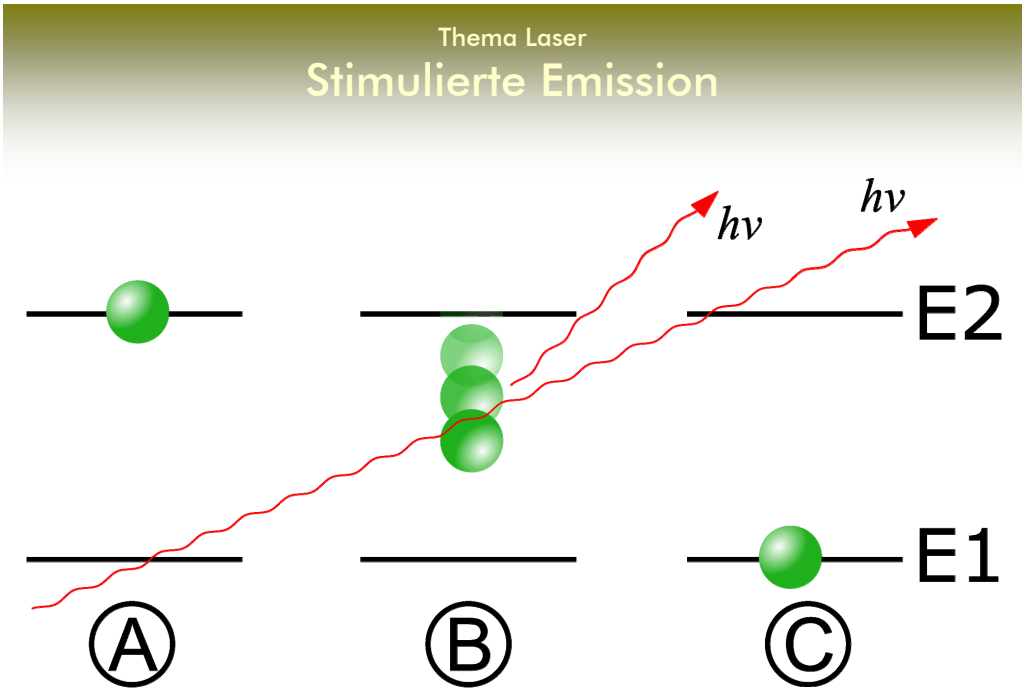
Wachstumsschichten eines Backenzahns mit viel (rot) oder wenig (blau) eingelagertem Barium – hier als Modell gezeigt.

Abb. 20.5: Archäologie mit Hilfe der Laserspektroskopie (Spektrum der Wissenschaft, Juli 2013, Seite 9).

Wir haben auch optische Werkstätten, wo wir Versuche mit sämtlichen Strahlen und Lichtarten sowie mit allen Farben anstellen. Aus durchsichtigen und farblosen Körpern erzeugen wir die einzelnen Farben, nicht nur in Form eines Regenbogens schillernd, wie es in Brillanten und Prismen geschieht, sondern durch sich selbst, einfach und selbständig. Außerdem bringen wir jede Vielfalt von Strahlen hervor, so daß wir Licht auf große Entfernungen aussenden und ihm solche Kraft und Stärke verleihen, daß man bei dieser Art Licht die zartesten Linien und Punkte erkennen kann.

Francis Bacon, *Nova Atlantis*, 1624

20.1 Stimulierte Emission



Es ist mir ein prächtiges Licht über die Absorption und Emission der Strahlung aufgegangen.

Albert Einstein, 1916

Stimulierte Emission

Das Bohrsche Atommodell beschreibt die Grundzüge der Licht-Materie Wechselwirkung. Ein Atom kann unter Absorption oder Emission von Strahlung in einen anderen Energiezustand wechseln. Die Frequenz des Licht ist dabei gegeben durch $\nu = \Delta E/h$, wobi ΔE der Differenz in der Energie der Zustände entspricht. Abb. 20.6 (a, b) verdeutlicht die beiden Prozesse. Bei der spontanen Emission trifft ein Strahl von Photonen unterschiedlicher Frequenz auf ein Material. Hat eines der Photonen eine Energie ($E = E_2 - E_1$), die dem Übergang ($E_1 \rightarrow E_2$) zwischen den Energieniveaus eines Atoms von einem energetisch tieferen Niveau E_1 zu einem höheren Niveau E_2 entspricht, kann das System in diesen Energiezustand wechseln. Für wenige Nanosekunden verbleibt das Atom in diesem angeregten Zustand und kehrt dann unter Aussendung eines Photons (spontane Emission) in den unteren Zustand zurück. Die Emission erfolgt damit in keine bestimmte

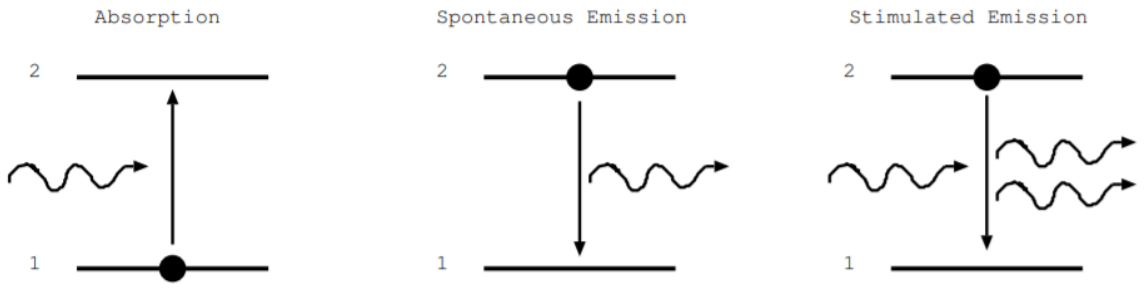


Abb. 20.6: Absorption (a), spontane (b) und stimulierte (c) Emission von Photonen bei der Wechselwirkung von Licht mit Materie.

Richtung. Mittelt man über viele dieser Vorgänge ergibt sich eine isotrope Abstrahlcharakteristik. Bose und Einstein fanden aufgrund statistischer Überlegungen, dass sich der Prozess der Emission über ein vorbeifliegendes Photon steuern lässt. Betrachtet man Licht als ein Gas ununterscheidbarer Lichtteilchen, ergibt sich, dass Photonen die Tendenz haben, gleiche Eigenschaften aufzuweisen. Im von Bose und Einstein beschrieben Prozess der stimulierten Emission wird bei der Lichtemission ein Zwilling des einfallenden Photons erzeugt [**?**]. Das emittierte Photon bewegt sich in dieselbe Richtung, in Phase, bei gleicher Frequenz und Polarisation. Die ausgesendeten Photonen übernehmen also alle Eigenschaften des stimulierenden Photons. Beispielsweise ist das Lichtbündel quasi-monochromatisch und zeichnet sich durch einen hohen Grad an Kohärenz[7] aus.[8] Abb. 20.7 illustriert die Unterschiede zu konventionellem Licht. Der Vorgang eröffnet damit neue Möglichkeiten für innovative Lichtquellen.

Besetzungsinversion

Wir betrachten exemplarisch das Temperaturverhalten eines Ensembles von Atomen mit diskreten Energiezuständen (E_i). Normalerweise befinden sich mehr Atome im Grundzustand E_1 als im höheren Zustand E_2. Um den Prozess der stimulierten Emission effektiv auszunutzen ist es notwendig, dass möglichst viele Atome im angeregten Zustand E_2 sind und der obere Energiezustand nicht durch spontane Emission vorzeitig entleert wird. Gibt es sogar mehr Atome im oberen als im unteren Energiezustand spricht man von Besetzungsinversion. Stimulierte Emission kann unter diesen Bedingungen die Ausstrahlung vieler Photonen bewirken, die sich alle in dieselbe Richtung und in Phase bewegen. Besetzungsinversion und spontane Emission sind die Grundvoraussetzungen für

[7] *Lexikon:* **Kohärenz** beschreibt die Eigenschaft von Wellen aufgrund einer konstante Phasenlage zu interferieren. Man unterscheidet räumliche (transversal) und zeitliche (longitudinale, spektrale) Kohärenz. Beides benötigt man, um ein Interferenzmuster zu beobachten.

[8] Die Schlagworte Laser und Maser werden auch bei astrophysikalischen Masern und Atomlasern verwendet, bei denen man auch Kohärenz beobachtet.

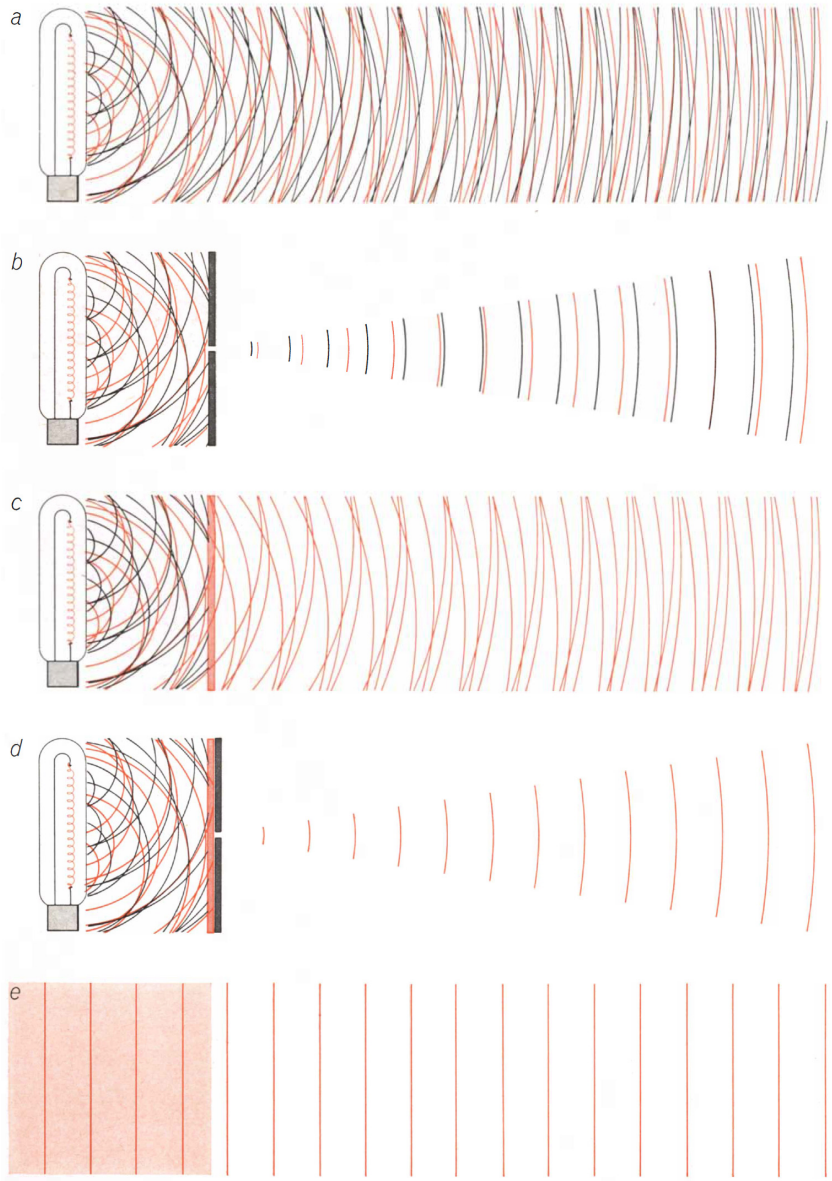


Abb. 20.7: Vergleich von gewöhnlichem Licht und Laserlicht. (a) In einer thermischen Lichtquelle (z.B. Glühlampe) (a) strahlen die Atome unabhängig voneinander und erzeugen Lichtwellen, die sowohl räumlich inkohärent (außer Phase) als auch zeitlich inkohärent (verschiedenen Wellenlängen) sind. (b) Zur Erzeugung von räumlich kohärentem Licht kann eine Lochblende eingesetzt werden. Allerdings kommt es zu Einbußen in der Leistungsabgabe der Lampe. (c) Verwendet man einen Farbfilter generiert man zeitlich kohärentes Licht. Allerdings führt auch dieses Verfahren zu Leistungseinbußen. (d) Kombiniert man Lochblende und Filter erhält man räumlich und zeitlich kohärentes Licht, allerdings bei nochmal geringerer Ausgangsleistung. (e) Laserlicht ist dagegen sowohl räumlich als auch zeitlich kohärent [**?**].

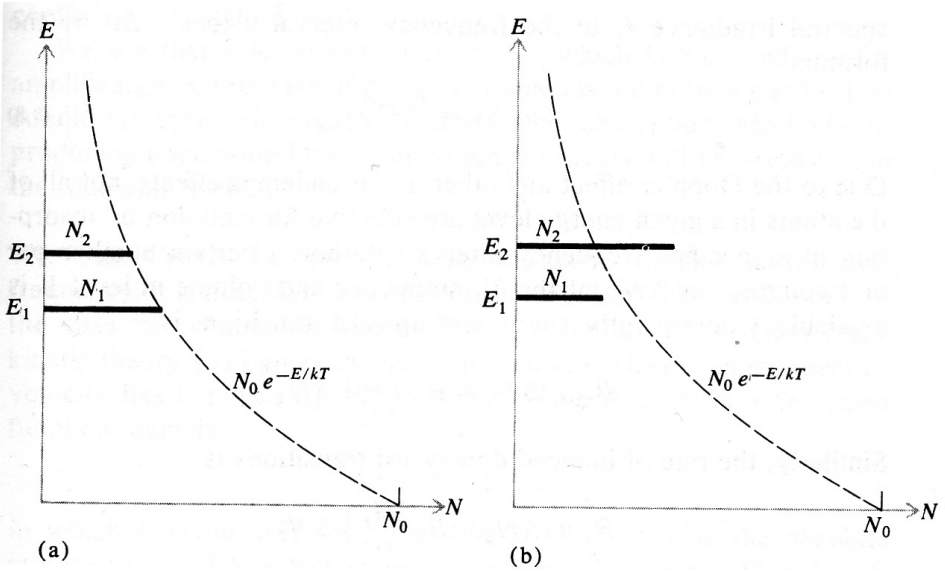


Abb. 20.8: Besetzung (N_1, N_2) von Energiezuständen (E_1, E_2) im thermischen Gleichgewicht (a) und im nicht-thermischen Gleichgewicht bei Besetzungsinversion (b) [**?**].

den Betrieb eines Lasers. Das Konzept lässt sich in Gasen, Flüssigkeiten, Plasmen und Festkörpern realisieren. Man nennt den optisch aktiven Bereich das Lasermedium. Um die Besetzungsinversion herzustellen, benötigt man eine externe Anregungsquelle. Dies kann beispielsweise eine andere Lichtquelle wie eine Blitzlampe oder ein andere Laser sein. Oft ist die Anregung nicht selektiv auf den ausgewählten Laserübergang, sondern regt die Atome durch spontane Absorption in unterschiedliche angeregte Zustände an. Erreicht werden muss, dass es zur Besetzungsinversion zwischen den beiden beteiligten Laserniveaus kommt. Diesen Mechanismus nennt man Optisches Pumpen.[9]

Wie erreicht man eine Besetzungsinversion? Im thermischen Gleichgewicht, das heißt bei einer Temperatur des Systems T_K, werden in einem System alle Energiezustände E_1, $E_2, E_3, \ldots$ aufgrund der herrschenden Temperatur und gemäß der Boltzmann-Verteilung[11] besetzt. Die relative Besetzung der Zustände N_1, N_2, $N_3, \ldots$ variiert zwischen NULL und EINS, wobei wir annehmen, dass $E_{i+1} > E_i$ und $N_{i+1} < N_i$. Exemplarisch

[9] *Lexikon:* Ein Medium optisch zu pumpen bedeutet, Licht in ein Medium einzukoppeln, um Atome auf höher liegende Energieniveaus anzuregen. Im Zusammenhang mit Lasern wird so versucht, eine Besetzungsinversion im Verstärkungsmedium zu erreichen und dadurch eine optische Verstärkung über stimulierte Emission für einen gewissen Bereich optischer Frequenzen zu realisieren. Den Vorgang nennt man **Optisches Pumpen**.[10]

[11] *Lexikon:* Die **Boltzmann-Verteilung** beschreibt, wie Teilchen Energieniveaus im thermischen Gleichgewicht besetzen. In Zustand mit der niedrigsten Energie befinden sich, im Vergleich zu einem höher energetischen Zustand, stets die größere Anzahl an Teilchen.

betrachten wir die Besetzungszahl[12] (N_1, N_2) für die Energiezustände (E_1, E_2) [**?**]:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\exp\left(-\frac{E_2}{k_B \cdot T_K}\right)}{\exp\left(-\frac{E_1}{k_B \cdot T_K}\right)} \tag{20.1}$$

Abb. 20.8 (a) zeigt, wie Energiezustände bei gegebener Temperatur besetzt werden. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teichen in einem bestimmten Energiezustand zu finden, nimmt exponentiell mit der Energie des Zustands ab. Für den Fall, dass ($E_x > E_y$) gilt für die Besetzungszahlen ($N_x < N_y$).[13] Wie hängen N_1 und N_2 voneinander ab? Unter Berücksichtigung des Planckschen Ausdrucks für die Energie des Photons $E = h \cdot \nu$, also der Verbindung zur Lichtemission, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{N_2} &= \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B \cdot T_K}\right) \\ \frac{N_1}{N_2} &= \exp\left(\frac{h \cdot \nu_{21}}{k_B \cdot T_K}\right) \end{aligned} \tag{20.2}$$

Im Jahr 1917 beschrieb Einstein einen weiteren Prozess, den man bei der Wechselwirkung von Licht und Materie berücksichtigen muss, nämlich den Vorgang der Stimulierten Emission [**?**]. Ein angeregtes Atom kann in einem Strahlungsfeld dazu angeregt werden, unter Aussendung eines Photons in einen energetisch tieferen Zustand zu wechseln. Betrachten wir für ein Atom die drei in Frage kommenden Prozesse und bestimmen die Übergangsraten. Bei der spontanen Emission relaxiert das System vom Niveau 2 ins Niveau 1 und emittiert ein Photon. Die zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ist A_{21}. Die Anzahl solcher spontaner Zerfälle ist abhängig von der Anzahl der Atome N_2 im Zustand E_2:

$$N_2 \cdot A_{21}$$

Dazu kommt nun die Rate der spontanen Übergänge. Diese hängt von der Stärke des Strahlungsfeldes ab, genauer von der Energiedichte u_ν. Damit ergeben sich Ausdrücke für die stimulierte Absorption und stimulierte Emission:

$$N_1 \cdot B_{12} \cdot u_\nu$$
$$N_2 \cdot B_{21} \cdot u_\nu$$

Die Proportionalitätsfaktoren A_{21}, B_{12}, B_{21} nennt man die Einstein-Koeffizienten. Im thermischen Gleichgewicht gilt für die Absorption und Emission von Strahlung durch das Atom:

$$N_1 \cdot B_{12} \cdot u_\nu = N_2 \cdot A_{21} + N_2 \cdot B_{21} \cdot u_\nu \tag{20.3}$$

[12] *Lexikon:* Die **Besetzungszahl** ist die Zahl der Teilchen, die sich in einem System, in einem bestimmten Energieniveau befinden. In Abhängigkeit von der Temperatur schwanken die Besetzungszahlen statistisch. Die mittlere Besetzungszahl im thermischen Gleichgewicht wird klassisch durch die Maxwell-Boltzmann-Statistik beschrieben.

[13] Bei einer genaueren Analyse muss man berücksichtigen, das Energiezustände entartet sein können. Dazu erweitert man Gl. 20.1 und ersetzt N_i durch $g_i \cdot N_i$. Für die weiteren Überlegungen kann man darauf verzichten, diesen Faktor einzubeziehen.

Löst man diese Gleichung nach u_ν auf, ergibt sich:

$$u_\nu = \frac{N_2 \cdot A_{21}}{N_1 \cdot B_{12} - N_2 \cdot B_{21}} \tag{20.4}$$

Nutzt man Gl. 20.2 findet man:

$$u_\nu = \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \left(\frac{B_{12}}{B_{21}} \exp\left[\frac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T_K} - 1 \right] \right)^{-1} \tag{20.5}$$

Damit es keine Abweichung von der Planckschen Strahlungsformel gibt, wertet man die Gleichung unter der Annahme gleich häufiger stimulierter Absorptions- und Emissionsprozesse aus und macht einen Koeffizientenvergleich:[14]

$$B_{12} = B_{21} \tag{20.6}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\,\pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^3} \tag{20.7}$$

Die Wahrscheinlichkeit für Absorption und spontane Emission ist also proportional zueinander, wobei die Letztere mit der dritten Potenz der Frequenz anwächst. Bei kleinen Wellenlängen ist die Relaxation demnach im Wesentlichen ein spontaner Prozess. Stimulierte Emission überwiegt dagegen bei längeren Wellenlängen. Für Atome im thermischen Gleichgewicht mit dem Strahlungsfeld ergibt sich damit für das Verhältnis von stimulierter zu spontaner Emission:

$$\begin{aligned} \frac{\text{stimulierte Emission}}{\text{spontane Emission}} &= \frac{B_{21} \cdot u_\nu}{A_{21}} \\ &= \exp\left(\frac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T_K} - 1 \right)^{-1} \end{aligned} \tag{20.8}$$

Es ist illustrativ sich als Analogie ein mechanisches Pendel bei resonanter externer Anregung zu betrachten, um den Prozess der Absorption von der Stimulierten Emission zu unterscheiden. Passt die Phase nicht, kann man keine Energie in das System einkoppeln. Ist die Phasenlage dagegen π verhindert nur die Dämpfung den Energieeintrag.

Setzt man typische Werte für sichtbares Licht (500 nm oder 600 THz) und Temperaturen von 10^3K ein, ergeben sich Werte von:

$$\begin{aligned} \frac{\text{stimulierte Emission}}{\text{spontane Emission}} &= \exp\left[\frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s}) \cdot (6 \cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1})}{(1.38 \cdot 10^{-23}\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (10^3\,\text{K})} - 1 \right]^{-1} \\ &= 8.4 \cdot 10^{-13} \end{aligned} \tag{20.9}$$

Stimulierte Emission spielt also unter diesen Alltagsbedingungen keine Rolle und Licht wird ausschließlich über spontane Emission und damit inkohärent ausgesendet.

[14] Einen Beweis der ersten Gleichung findet man in [**?**].

Betrachten wir ein optisches Medium in einem Strahlungsfeld. Dieses enthält Atome in unterschiedlichen Energiezuständen. Für zwei ausgewählte Energieniveaus E_1, E_2 ($E_1 < E_2$) sind die Raten für stimulierte Absorption und stimulierte Emission proportional zu $N_1 B_{12}$ bzw. $N_2 B_{21}$. Da $B_{12} = B_{21}$ ergibt eine größere Rate stimulierter Emission nur, wenn gilt

$$N_2 > N_1 \tag{20.10}$$

Das bedeutet, dass die Anzahl angeregter Atome im Energiezustand E_2 höher sein muss, als im Zustand E_1. Diese Bedingung lässt sich nur erreichen, wenn man sich NICHT im thermischen Gleichgewicht befindet. Man nennt dieses Szenario eine Besetzungsinversion, siehe Abb. 20.8 (b). Unter diesen Bedingungen kann man es erreichen, dass mögliche Verluste durch Beugung oder Reflexion kompensiert werden und ein Lichtstrahl beim Durchgang durch das Medium verstärkt wird. Den experimentellen Nachweis der stimulierten Emission wurde 1928 von Rudolf Ladenburg erbracht [**?**]. Im Jahr 1940 vermutete V. A. Fabrikant, dass stimulierte Emission in einer Gasentladung unter bestimmten Bedingungen einer Lichtverstärkung führen könnte [**?**]. Stellen wir die Unterschiede zwischen spontaner und stimulierter Emission nochmal gegenüber.

Die **Spontane Emission** zeichnet sich dadurch aus, dass

- es sich um einen spontan ablaufenden Prozess handelt, der sich nicht kontrollieren lässt.
- die Richtung der Emission nicht feststeht.
- das Licht unpolarisiert ist.
- das emittierte Licht, beispielsweise durch den Dopplereffekt, leichte Abweichung in Frequenz zeigt. Das Licht ist also streng genommen nicht monochromatisch.
- die Lichtquanten haben keine feste Phasenbeziehung zueinander.
- es nicht zu einer Verstärkung des Lichtfeldes kommt. Bei der Absorption von N_{in} Photonen ergibt sich die Lichtintensität der spontanen Emission I_{spE} mit:

$$I_{spE} \approx N_{ph} \tag{20.11}$$

Die **Stimulierte Emission** zeichnet sich dadurch aus, dass

- es sich hier nicht um einen spontan ablaufenden Prozess handelt.
- der Prozess kontrolliert werden kann.
- die Ausbreitungsrichtung übereinstimmt.
- die Polarisation übereinstimmt.
- das Licht monochromatisch ist.

- das Licht kohärent ist.

- das Lichtfeld verstärkt wird. Für die Intensität der stimulierten Emission I_{stE} gilt:

$$I_{stE} \approx N_{ph}^2 \tag{20.12}$$

Der Faktor N_{ph}^2 resultiert daraus, das sich alle Lichtwellen konstruktiv überlagern. Wenn die Anzahl der Atome in dem betrachteten Medium hoch ist, kommt es über diesen Prozess zu einer enoren Steigerung der Lichtausbeute. Das Lichtfeld wird verstärkt und dies ist die Grundvoraussetzung für den Betrieb eines Lasers.

Wie hoch fällt der maximale Verstärkungsfaktor $\alpha_{\max}$ aus, den man für den Betrieb eines Lasers nutzen kann?

$$\alpha_{\max} = \frac{\lambda^2 \cdot A_{21} \cdot (N_2 - N_1)}{8\,\pi \cdot \Delta\nu} \tag{20.13}$$

Der Verstärkungsfaktor wird positiv, wenn Besetzungsinversion vorliegt ($N_2 > N_1$). Durch den Faktor λ^2 erreicht man bei längeren Wellenlängen leichter eine Lichtverstärkung. Röntgenlaser sind aufgrund der kurzen Wellenlängen deshalb schwer zu realisieren. Hinzu kommt, dass hochreflektierende Spiegel bei kurzen Wellenlängen nicht zur Verfügung stehen. Die Verstärkung muss deshalb beim Durchgang de Pumpstrahls durch das Medium erfolgen. Wie testet man, dass es zur Lichtverstärkung kommt? Man beobachtet, ob es in Abhängigkeit von der Länge des Mediums zu einem exponentiellen Anwachsen der Röntgenlichtausbeute kommt. Abb. 20.9 zeigt das Ergebnis eines solches Experiments.

Kohärenzlänge

Um die Effizienz der stimulierten Emission zu erhöhen, ist es sinnvoll, dass das Verhältnis B_{21}/A_{21} groß ist. Das bedeutet, dass eine lange Lebensdauer des angeregten Zustands des Atoms vorteilhaft ist. Man beachte, dass der Kehrwert der spontanen Übergangsrate $1/A_{21}$ die Lebensdauer des Zustands beschreibt. Die Lebensdauer des oberen Laserzustands ist auch entscheidend für die Kohärenzeigenschaften. Dauert der Emissionsvorgang eine Zeit Δt, legt das Licht in der Zeit eine Entfernung von $\Delta x = c \cdot \Delta t$ zurück. Als grobe Näherung kann man für Atome einen Wert von 10 fs annehmen. Das ergibt eine Kohärenzlänge[15] im Bereich von ℓ_c=3 μm. Für den Laserprozess ist dagegen die typische Lebensdauer des angeregten Zustands entscheidend. Solche Zustände haben in Atomen eine typische Lebensdauer von 1 ns. Dadurch erhöht sich die Kohärenzlänge auf 300 m.

[15] *Lexikon:* Die **Kohärenzlänge** ℓ_c ist die maximale Wegstrecke den zwei Lichtstrahlen aus derselben Quelle haben dürfen, um bei Überlagerung ein Interferenzmuster in Raum und Zeit zu erzeugen. Die **Kohärenzzeit** τ_c ist die Zeitspanne, die das Licht braucht, um die Kohärenzlänge ℓ_c zurückzulegen. Beim Licht aus Lampen, Flammen oder bei Wärmestrahlung liegt die Kohärenzlänge im Bereich der emittierten Wellenlänge. Abb. 20.7 demonstriert, wie man aus Licht einer inkohärent strahlenden Quelle zunächst räumlich und durch spektrale Filterung zeitlich kohärentes Licht erzeugt.

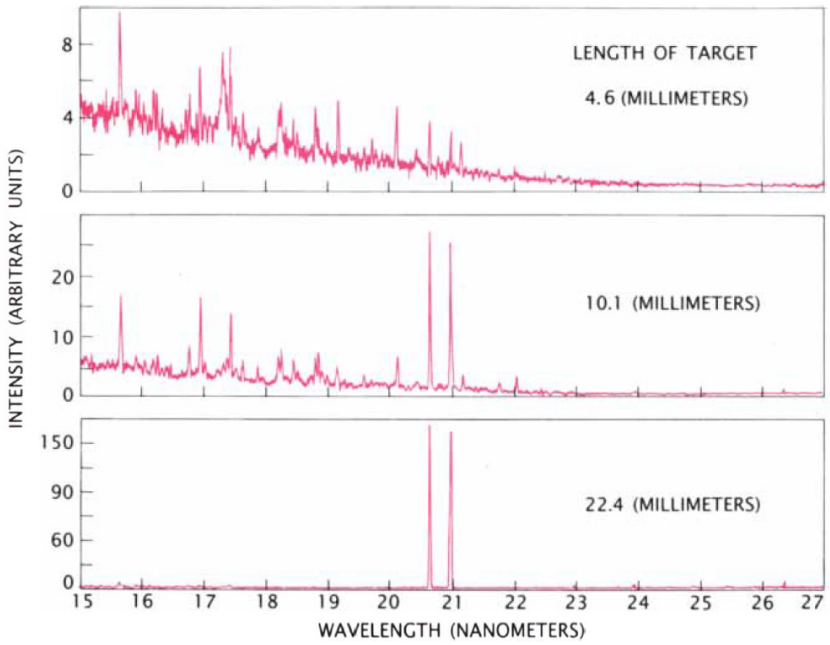


Abb. 20.9: Die Ausdehnung des Verstärkermediums bestimmt die Verstärkung. Die Anzahl, der an der Lasererzeugung beteiligten Photonen wächst dabei exponentiell mit der Länge des Mediums, wodurch auch die Strahlintensität exponentiell zunimmt. Dieses Verhalten wird in den Spektrallinien von Selen beobachtet. Die 21 nm-Emissionslinie wird immer intensiver, je länger das Medium wird. Bei einer Länge von 22.4 mm dominiert die Emissionslinien das Spektrum [**?**].

Es ist deshalb sofort ersichtlich, warum man Interferenzphänomene[16] mit Laserlicht gut visualisieren kann. Die Intensität der Strahlung spielt, anders als man vermuten mag, in diesem Kontext nur eine untergeordnete Rolle. Man kann die Kohärenzlänge durch ein Experiment mit einem Michelson-Interferometer testen. Handelt es sich um perfekte Sinuswellen, ändert sich die Amplitude bei konstruktiver Interferenz $I_{\max}$ nicht, wenn man die Wegstrecken gegeneinander verändert. In der Realität verschwindet die Kohärenz langsam, wenn man einen Spiegel immer weiter weg bewegt. Die maximale Amplitude wird geringer, wobei gleichzeitig die Amplitude der Minima zunimmt. Für große Abstände verschwindet der Kontrast. Wie Abb. 20.10 zeigt, kann man keine definierte Länge bestimmen, die angibt, wo die Kohärenz verschwindet. Statt dessen nimmt den Wert, für $I_{\max}$ auf den Wert $1/e$ abgefallen ist.

Man kann die Kohärenzlänge auch anhand der Heisenbergschen Unschärferelation (Kapitel *Heisenberg*) erklären. Jeder Lichtstrahl und das gilt auch für einen Laserstrahl, setzt

[16] *Lexikon:* Phänomene der **Interferenz** beobachtet man, wenn die Wellenzüge, die man überlagert, über eine längere Zeit eine konstante Phasendifferenz aufweisen. Solche Wellen nennt man kohärente Wellen. Bei Licht aus Atomen, erzeugt durch spontane Emission, stehen die Emissionsvorgänge in keinem Zusammenhang und Interferenzen mitteln sich heraus.

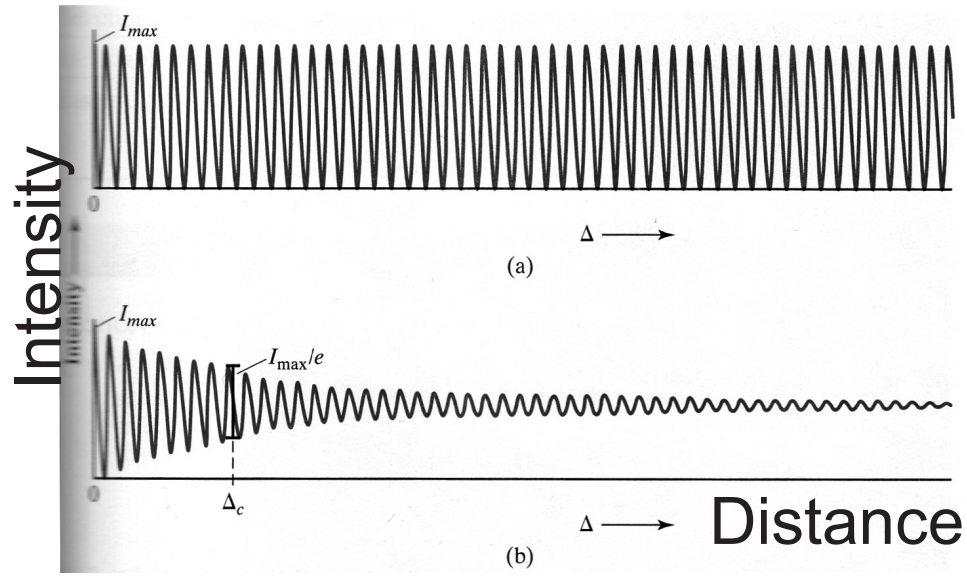


Abb. 20.10: Intensität des Interferenzmusters als Funktion der Weglängenverstimmung für perfekt kohärentes Licht (a). Bei einer realen kohärenten Lichtquelle verringert sich die Güte der Kohärenz und die Intensität der Maxima nimmt ab. Zusätzlich reduziert sich die Differenz zwischen den Maxima- und Minimawerten. Als Abschätzung für die Kohärenzlänge bestimmt man den Abstand Δ_c, bei dem die Maxima-Minima Differenz auf den Wert $1/e$ abgenommen hat [**?**].

sich zusammen aus Photonen unterschiedlicher Wellenlängen. Daraus ergeben sich, da $p = h/\lambda$, unterschiedliche Impulse der Photonen. Die Breite ergibt sich, wenn man den Ausdruck ableitet:

$$\Delta p = \frac{h \cdot \Delta\lambda}{\lambda^2} \tag{20.14}$$

Die Unschärferelation verknüpft Orts- und Impulsunschärfen

$$\Delta x \cdot \Delta p = \Delta x \cdot \frac{h \cdot \Delta\lambda}{\lambda^2} \approx h \tag{20.15}$$

In der Größe Δx kann man die Kohärenzlänge ℓ_c identifizieren.

$$\ell_c = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \tag{20.16}$$

Die Vorgabe durch die Unschärferelation, dass man Objekte und hier Photonen nicht unterscheiden lassen, die nur Δx auseinander sind, hat zur Folge, dass die Teilchen ununterscheidbar sind. Für die Interferenz heißt das, dass das Phänomen nicht verschwindet, solange man diese Abstand nicht überschreitet. In diesem Zusammenhang nennt man diese Größe die Kohärenzlänge.

Normale Lichtquellen emittieren inkohärente Wellenzüge. Aufgrund der fehlenden Phasenbeziehung α untereinander fluktuiert die Lichtintensität mit eine hohen Rate im GHz-Bereich (10^9 Hz). Typische Lichtdetektoren, wie das menschliche Auge, können diese schnellen Änderungen nicht auflösen. Die mittlere Intensität I_{avg} zweier Lichtquellen I_1, I_2 ergibt sich mit

$$I_{avg} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \langle \cos\alpha \rangle \tag{20.17}$$

Bei inkohärenten Lichtquellen ist der Interferenzterm $2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\alpha$ im Mittel NULL und die Intensität $I{=}I_1{=}I_2$ ergibt sich mit

$$I_{avg} = 2\,I \tag{20.18}$$

Die Gesamtintensität verschiedener Lichtquelle ist daher stets die Summe der Einzelbeiträge. Die Überlagerung führt NIE zu Dunkelheit. Die konstruktive Interferenz des Laserlichts, aufgrund der Kohärenz der Laserstrahlung, erhöht aber merklich die Intensität. Da $\alpha{=}0$, ergibt sich:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} = 2^2\, I_0 \tag{20.19}$$

Die kohärente Überlagerung von N Lichtwellen erhöht die Intensität danach um

$$I_{\max} = N^2 \dot{I}_0 \tag{20.20}$$

Wie wirkt sich die Lebensdauer Δt auf die spektrale Bandbreite $\Delta\nu$ aus? Die Antwort liefert die Unschärferelation. Wir haben schon gelernt, dass die Lebensdauer eng verknüpft ist mit der Kohärenzzeit. Der Zusammenhang zur spektralen Bandbreite ist

$$\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta\tau_c} = \frac{c}{\ell_c} \tag{20.21}$$

Auf der anderen Seite gilt der Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenlänge von Licht:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{20.22}$$

oder in differentieller Form

$$\mathrm{d}\nu = -\frac{c}{\lambda_0^2}\mathrm{d}\lambda \tag{20.23}$$

Einsetzen liefert, wie schon weiter oben abgeleitet, einen Ausdruck für die Abhängigkeit der Kohärenzlänge von der spektralen Bandbreite

$$\ell_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \tag{20.24}$$

Der Zusammenhang ist in Abb. 20.11 aufgeschlüsselt. Aus der Kohärenzlänge lässt sich auch eine wichtige Erkenntnis in Bezug auf das Interferenzmuster gewinnen. Die Differenz im optischen Weg muss für Interferenz geringer sein als ℓ_c. Interferenzmaxima treten unter der Bedingung auf, dass der Wegunterschied $d = m \cdot \lambda$ ist, wobei $m{=}1, 2, 3, \ldots$ Übersteigt d die Kohärenzlänge, verschwindet die Interferenz. Es gilt also:

$$\begin{aligned} d_{\max} &= m_{\max} \cdot \lambda \\ d_{\max} &\approx \ell_c \end{aligned}$$

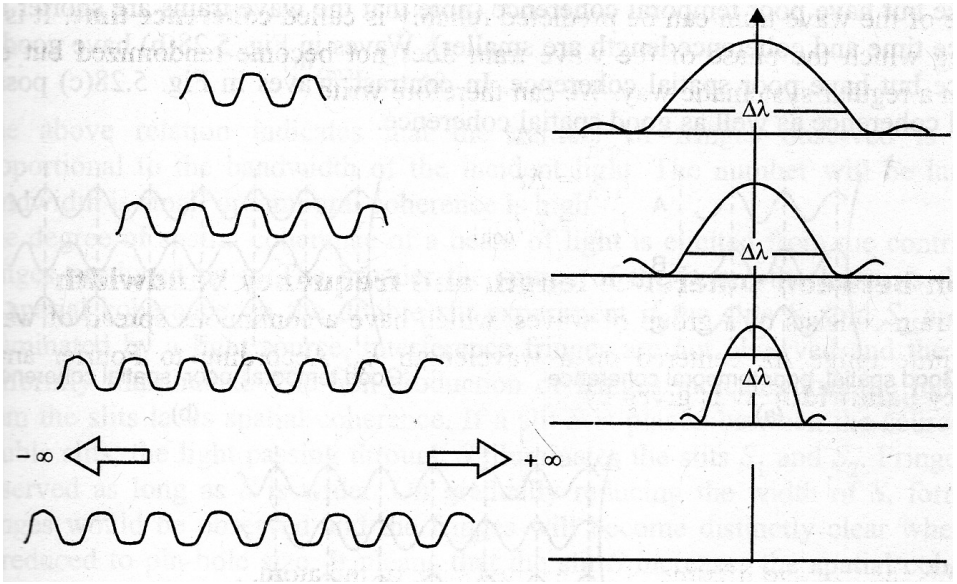


Abb. 20.11: Abhängigkeit der spektralen Bandbreite von der Länge des Wellenzugs [**?**].

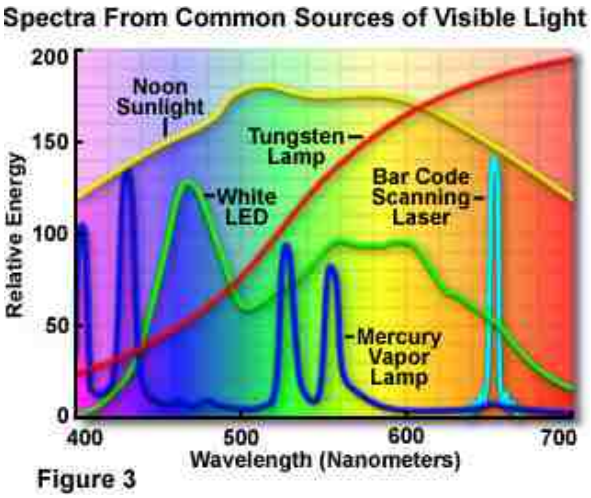


Abb. 20.12: Spektren herkömlicher Lichtquellen im Vergleich zum Laser.

Lasermedium	Zentralwellenlänge oberer Laserzustand	Lebensdauer	spektrale Bandbreite
HeNe	632.8 nm	30 ns	1.7 GHz
Ar^+	514.5 nm	6 ns	3.5 GHz
Nd:YAG	1064 nm	230 ns	120 GHz
Nd:glass	1054 nm	300 ns	5.4 THz
Rhodamine 6G	570 nm	5.5 ns	46 THz
Ti:Saphir	790 nm	3900 ns	100 THz

Tab. 20.1: Relevante Laserparameter für gängige Lasersysteme [**?**].

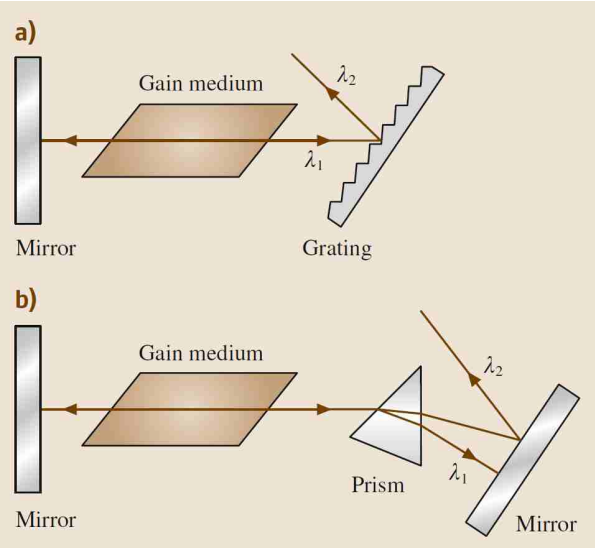


Abb. 20.13: Wellenlängenselektion mit Hilfe eines Beugungsgitter in Littrow-Konfiguration *(oben)* und unter Verwendung eines Prismas *(unten)* [**?**].

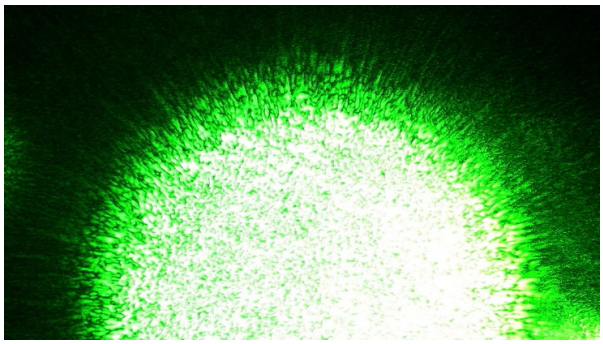


Abb. 20.14: Ein Speckle-Muster ist eine körnige Textur, die in Folge von Interferenzen zwischen Wellenfronten bei kohärenten Lichtquellen wie einem Laser beobachtet werden.

Die Anzahl der Beugungsmaxima ist also invers proportional zur spektralen Bandbreite. Bei geringer Bandbreite oder großer zeitlicher Kohärenz beobachtet man eine große Anzahl an Interferenzstreifen. Die hohe zeitliche Kohärenz von Laserstrahlung resultiert also aus der monochromatischen Strahlung. Abb. 20.12 liefert einen Vergleich unterschiedlicher Lightquellen. Tabelle 20.1 stellt für häufig eingesetzte Lasersysteme, den Zusammenhang zwischen der Lebensdauer des oberen Laserzustands und der spektralen Bandbreite des Laserübergangs gegenüber. Linienbreiten von 5 mHz bei einer Wellenlänge von 1.5μm wurden mittlerweile erreicht [**?**]. Einige Lasermedien wie Ti:Saphir Kristall bieten einen breiten Wellenlängenbereich an, der für den Laserprozess genutzt werden kann. Durchstimmbarkeit erreicht man durch dispersive optische Elemente, die die breitbandige Laserstrahlung spektral einengen. Abb. 20.13[17] zeigt Beispiele.

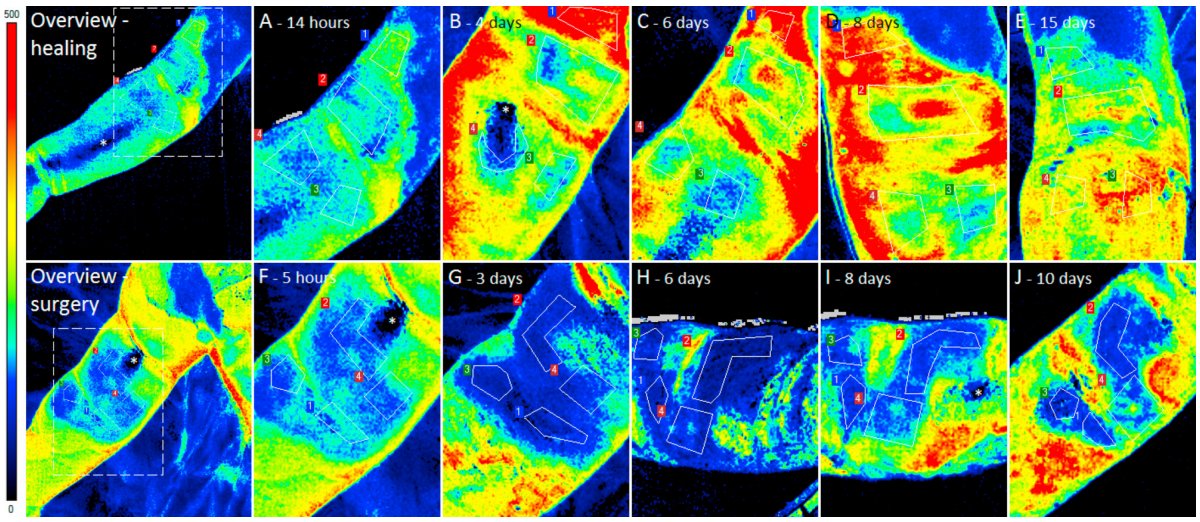


Abb. 20.15: Beispiele für die Durchblutung von Gewebe (Perfusion) nach Verbrühungen mit unterschiedlichen Heilungszeiten bei Kindern, nachgewiesen mit Hilfe der Laserspeckle-Kontrasttechnik. Oben: Wunde am Arm, 14 Stunden bis 15 Tage nach der Verletzung aufgenommen. Unten: Wunde am Oberarm, die nach 14 Tagen noch nicht verheilt ist und anschließend operiert wurden, 5 Stunden bis 10 Tage nach der Verletzung aufgenommen. Der Farbbalken auf der linken Seite zeigt die Perfusionsskala [**?**].

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Medizin

Eine interessante Anwendung für kohärentes Licht sind Speckle (Abb.20.14), da das Muster äußerst empfindlich auf Änderung der Reflexionsbedingungen reagiert. Man kann ein Specklemuster nutzen, um Sehschwächen zu erkennen. Bei Kurzsichtigkeit liegt der Fokuspunkt des Auge vor der Retina, während er sich bei Weitsichtigkeit hinter der Netzhaut befindet. Für den Versuch wird ein Laserstrahl durch eine Linse stark aufgeweitet und auf eine raue Oberfläche projiziert. Betrachtet man das Specklemuster und bewegt leicht den Kopf bewegt sich das Muster, je nach Sehschwäche in eine bestimmte Richtung. Insbesondere für Kurzsichtige wandert das Specklemuster in die entgegengesetzte Richtung. Für Personen, die weder kurz noch weitsichtig sind, folgt das Muster dagegen exakt der Kopfbewegung. Wenn sich ein Objekt bewegt, wird sich das Specklemuster im Laufe der Zeit ändern. Laserspeckle-Kontrasttechniken [**?**] verwenden diese Änderung im

[17] *Lexikon:* Als **Littrow-Anordnung** werden optische Systeme bezeichnet, die ein reflektierendes Gitter enthalten, bei denen die Orientierung des Gitters so ist, dass die erste Beugungsordnung mit der Richtung des einfallenden Strahls zusammenfällt.

Specklemuster,[18] [19] um dynamische Vorgänge in Gewebe zu visualisieren. Die Bewegung der Teilchen, z.B. rote Blutzellen, verursacht Schwankungen im Speckle-Muster. Diese Intensitätsschwankungen verändern das Bild und reduzieren den Kontrast Abb. 20.15 zeigt, wie man mit Hilfe einer Speckle-Kontrast Analyse die Durchblutung von Gewebe kontrollieren kann [**?**]. Die Methode kann zur Diagnose von Rheuma, bei Herz-Kreislauf-Untersuchungen, in der Dermatologie, Ophthalmologie, Neurologie, Magen-Darm Chirurgie und Zahnheilkunde eingesetzt werden.

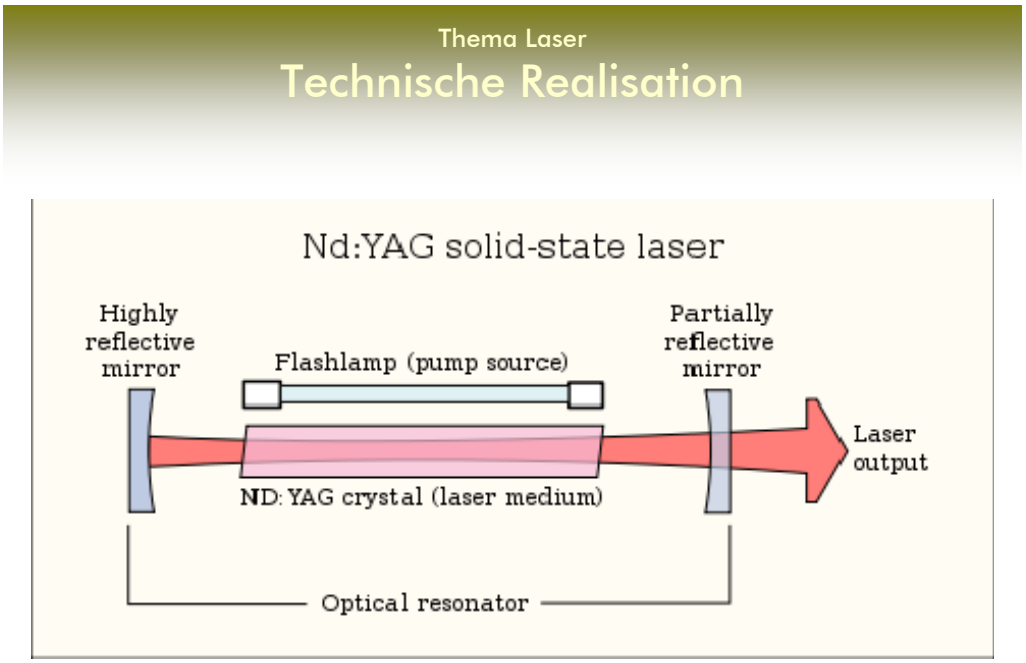
[18] *Lexikon:* Beim Phänomen **Speckle** handelt es sich um ein zufälliges körniges Muster, das beispielsweise entsteht, wenn kohärenter Lichtstrahl an einer komplex strukturieren also rauen Oberfläche diffus reflektiert wird. dies kann ein Papier, ein Farbanstrich oder eine metallische Oberfläche sein. Der Effekt resultiert aus der Interferenz der vielen Teilreflexionen, die der einfallende Strahls erfährt und der zu zufälligen relativen optischen Phasen führt. Geringfügige Änderungen im Objekt oder in der Richtung des einfallenden Lichts, können das Specklemuster verändern. Speckle können die Bildqualität bei der Laserprojektion beeinträchtigen oder laserbasierte Positionsbestimmungen behindern. Wie kann man das verhindern? Man verwendet Lichtquellen mit ausreichend hoher optischer Bandbreite, wie Superlumineszenzdioden [**?**], um die Kohärenzlänge zu reduzieren.

[19] *Lexikon:* **Superlumineszenzdioden** arbeiten wie eine Laserdiode. Allerdings nutzt man nur die stimulierte Emission und verzichtet auf den Resonator. Ihre Lichtleistung ist vergleichbar mit Laserdioden bei einer geringen Kohärenz, was sie wiederum vergleichbar macht zu Leuchtdioden.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie werden im thermischen Gleichgewicht Energiezustände besetzt?
2. Wie kommt es, dass man das Phänomen de Stimulierten Emission erst sehr spät entdeckt hat?
3. Was versteht man unter Stimulierter Emission?
4. Warum ist eine Besetzungsinversion notwendig, um Stimulierte Emission anzuregen?
5. Wie unterscheidet sich das Licht einer Glühbirne von Laserlicht?
6. Was unterscheidet kohärentes von monochromatischem Licht?
7. Was versteht man unter Speckle?
8. Wie kann ein BlueRay-Abspielgerät mehr Informationen auszulesen im Vergleich zu einem CDROM-Gerät?

20.2 Technische Realisation



. . . that maser techniques could just as easily be applied to the visible region and in fact visible waves would probably be easier than the infrared, because . . . no more excited atoms or molecules were necessary . . . while experimental techniques in the visible range were already well developed.

C. H. Townes to R. Shelton, 1986

Was waren die entscheidenden Fortschritte, die zur Entwicklung des Lasers führte? Da war zuallererst die Erkenntnis von Lamb[20] und Retherford, dass man über die Kernspinresonanz eine Besetzungsinversion erreichen könnte [**?**]. Dies führte im Jahr 1951 zum Nachweis Stimulierter Emission bei 50 kHz Radiowellen.[21] [22] Townes und Gordon demonstrierten den ersten Mikrowellen Maser (*Microwave Amplification by Stimulated*

[20] The Nobel Prize in Physics 1955 was divided equally between Willis Eugene Lamb *for his discoveries concerning the fine structure of the hydrogen spectrum* and Polykarp Kusch *for his precision determination of the magnetic moment of the electron*

[21] *A Nuclear Spin System at Negative Temperature* [**?**]

[22] The Nobel Prize in Physics 1952 was awarded jointly to Felix Bloch and Edward Mills Purcell *for their development of new methods for nuclear magnetic precision measurements and discoveries in connection therewith*



Abb. 20.16: Arthur Schawlow schießt mit einer Spielzeugpistole, die einen funktionierenden Rubinlaser enthält, auf einen Luftballon. Dieser beinhaltet einen weiteren Ballon. Der rote Laserstrahl durchquert praktisch ohne Verluste den äußeren transparenten Luftballon und lässt nur den inneren blauen Ballon zerplatzen. Es sei angemerkt, dass Rubinlaser auch mittlerweile für den Unterricht erhältlich sind [**?**].

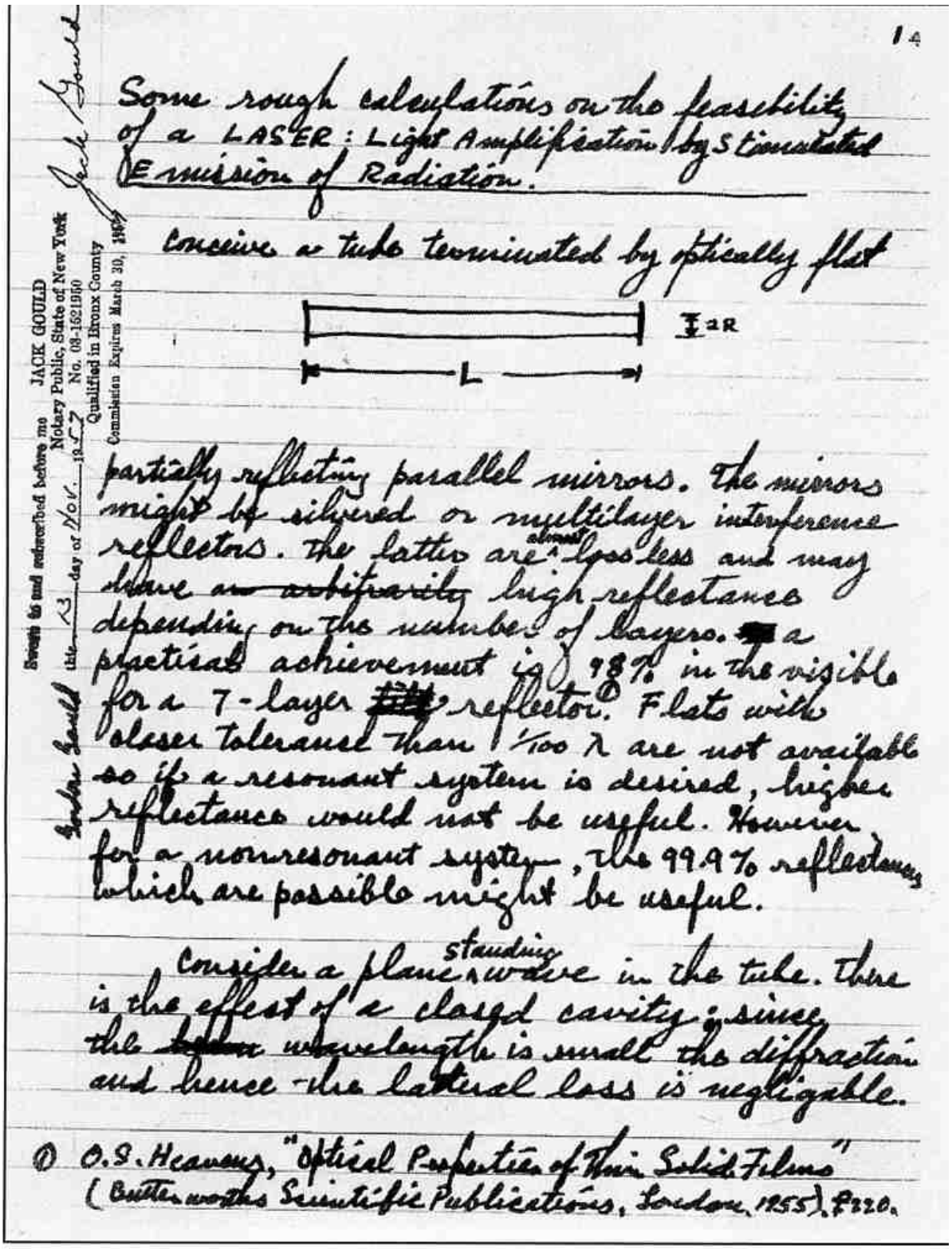
Emission of Radiation), indem sie angeregte Ammoniakmoleküle in einen Resonator bei 24 GHz brachten und die Lichtverstärkung nachwiesen [**?**].[23]

Das Ammoniakmoleküls zeichnet sich durch ein Doppelmuldenpotenzial aus. Dieses Potenzial nutzt man, um einen Maser zu realisieren. Berechnet man im Rahmen der Schrödingergleichung den Grundzustand, stellt an fest, dass es zwei eng beieinanderliege Zustände gibt, die sich nur um $\Delta E{=}10^{-4}$ eV unterscheiden. Die zugehörige Wellenlänge liegt mit 1.6 cm im Mikrowellenbereich. Bei Raumtemperatur sind diese beiden Zustände aufgrund des geringen Energieunterschieds mit gleicher Wahrscheinlichkeit besetzt. In einem elektrischem Quadrupolfeld regieren die beiden Zustände aber anders und so kann man den höherenergetischen Zustand separieren. Diese Moleküle leitet man in ein Mikrowellenfeld, wo Mikrowellen die Moleküle zur Stimulierten Emission anregen. Es sei noch angemerkt, das Penzias und Wilson den Maser einsetzen, als sie die Kosmische Hintergrundstrahlung (Kapitel *Schwarzer Strahler*) entdeckten [**?**].

Im Jahr 1965 machten Astronomen eine unerwartete Entdeckung [**?**]. Sie beobachteten 1665 MHz-Strahlung von unbekannter Herkunft. Damals glaubten viele Forscher nicht

[23] Shortly after we built a second maser and showed that the frequency was indeed remarkably pure, I visited Denmark and saw Niels Bohr, the great physicist and pioneer in the development of quantum mechanics. As we were walking along the street together, he quite naturally asked what I was doing. I described the maser and its performance. *But that is not possible,* he exclaimed. I assured him it was. Similarly, at a cock-tail party in Princeton, New Jersey, the Hungarian mathematician John von Neumann asked what I was working on. After I told him about the maser and the purity of its frequency, he declared, *That can't be right!* But it was, I replied, and told him it was already demonstrated. Such protests were not offhand opinions concerning obscure aspects of physics; they came from the marrow of these men's bones. These were objections founded on principle - the uncertainty principle.

C. H. Townes [**?**]



14

Some rough calculations on the feasibility of a LASER: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

Jack Gould

Sworn to and subscribed before me this 23 day of Nov. 1957
JACK GOULD
Notary Public, State of New York
No. 03-1621960
Qualified in Bronx County
Commission Expires March 30, 1959

Conceive a tube terminated by optically flat

partially reflecting parallel mirrors. The mirrors might be silvered or multilayer interference reflectors. The latter are almost lossless and may have an arbitrarily high reflectance depending on the number of layers. A practical achievement is 98% in the visible for a 7-layer reflector. Flats with closer tolerance than 1/100 λ are not available so if a resonant system is desired, higher reflectance would not be useful. However for a nonresonant system, the 99.9% reflectances which are possible might be useful.

Consider a plane standing wave in the tube. There is the effect of a closed cavity; since the wavelength is small the diffraction and hence the lateral loss is negligible.

① O.S. Heavens, "Optical Properties of Thin Solid Films" (Butterworths Scientific Publications, London, 1955), p. 220.

Abb. 20.17: Die erste Seite des Notizbuchs von Gordon Goulds vom November 1957 zeigt seine Skizze eines Fabry-Pérot-Laserresonators und Kommentare zu Resonatorspiegeln [**?**].

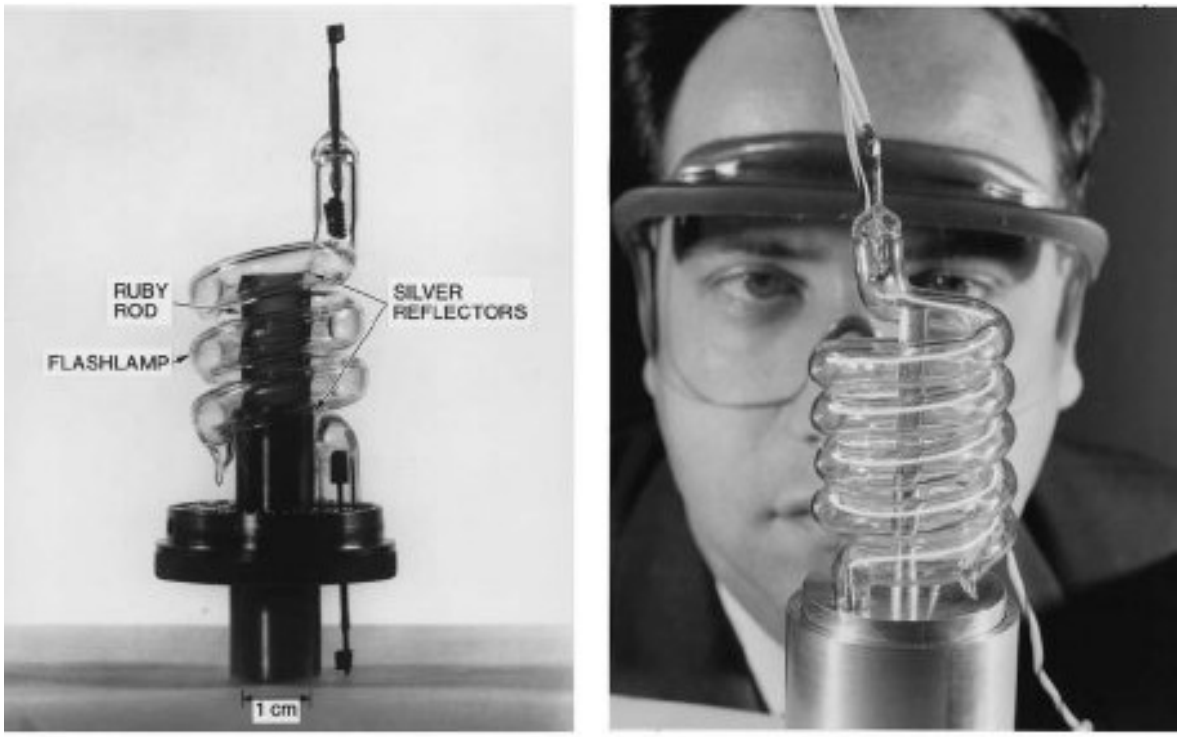


Abb. 20.18: Rechts: Theodore Maiman hinter einem Rubinlaser. Dieses Photo wurde bei der Pressekonferenz von Hughes Research an die Journalisten ausgehändigt. Der Fotograf hatte darauf bestanden, Maiman so abzubilden. Anfänglich vermuteten viele, dass dies der erste Laser sei. Das Original war tatsächlich merklich kleiner (links).

an die Existenz von Molekülen im Weltraum. Die Strahlung wurde einer neuen Form interstellarer Materie zugeschrieben, genannt *Mysterium*. Es stellte sich aber schnell heraus, dass es sich um maser-artige stimulierte Emission aus Molekülen handelte. Diese Moleküle sind Wasser, Hydroxylradikale, Methanol oder Formaldehyd [**?**]. Bei Wassermolekülen in Sternentstehungsregionen kommt es zu einer Populationsinversion, was zur Aussendung von Mikrowellenstrahlung bei 22 GHz führt. Nebenbei bemerkt handelt es sich hier um die stärkste Spektrallinie im Radiobereich.

Townes und Schalow [**?**] werden am häufigsten mit der Erfindung des Lasers in Verbindung gebracht, siehe Abb. 20.16.[24] Die Frage, wer den Laser tatsächlich erfunden hat, war tatsächlich lange umstritten. Gordon Gould meldete ein Patent aufgrund von Notizen in seinem Laborbuch im November 1957 an, siehe Abb. 20.17.[25] Nach jahrzehntelang

[24] Man siehe auch Jun-ichi Nishizawa, der im Jahr 1957, im Rahmen einer Patentanmeldung, das Konzept eines Optischen Halbleitermasers vorstellte [**?**].

[25] *Lexikon:* Das **Fabry-Perot-Interferometer** besteht aus zwei parallelen, flachen, halbdurchlässigen Spiegeln, die durch einen festen Abstand voneinander getrennt sind. Licht, das in das **Etalon** eintritt,

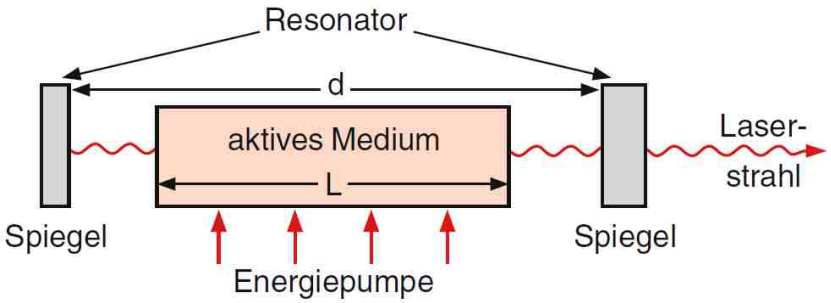


Abb. 20.19: Charakteristische Komponenten eines Lasers [**?**].

Rechtsstreit wurde ihm im Jahr 1973 das Originalpatent zuerkannt. Townes verfolgte die Idee, über den Prozess des Optischen Pumpens eine Besetzungsinversion im Optischen zu erreichen. Maiman erkannte, das ein Rubinkristall eine starke Fluoreszenz zeigte [**?**] und durch Licht einer Blitzlampe effektiv angeregt werden kann. Der Nachweis der Lasertätigkeit gelang im Jahr 1960 [**? ?**], siehe Abb. 20.18.

Reporter: Dr. Maiman Are you willing to say that the laser can not be used as a weapon
Theodore Maiman: I can't say that
Reporter: That is all I wanted to know

L.A. man discovers science fiction death ray, *Los Angeles Herold*, 1960

Optischer Resonator

We put the first gas in the tube, lined up the concave mirrors, and bingo, it went.

Alan White (1962)

Um einen Laser zu realisieren, benötigt man folgende Komponenten:

- Ein aktives Medium, in dem eine Besetzungsinversion ermöglicht wird.
- Eine externe Energiequelle, die die Besetzungsinversion im Lasermedium herbeiführt.
- Einen optischen Resonator, der die Fluoreszenz des Mediums einfängt und den Laserprozess lawinenartig verstärkt [**?**].

Abb. 20.19 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Lasers. Beim Betrieb entstehen Verluste durch Absorption, Beugung, Reflexion und Streuung des Laserlichts, die kompensiert

wird mehrfach reflektiert, und die Interferenz, des aus dem Etalon austretenden Lichts, bei jeder Reflexion verursacht eine Modulation in den übertragenen und reflektierten Strahlen. Während einer Reflexion ändert sich die Phase der Lichtwelle abhängig von der Winkeleinstellung des **Etalon**. Konstruktive und destruktive Interferenz tritt in Abhängigkeit er Winkelstellung und der optischen Dicke des Etalon und der Wellenlänge auf.

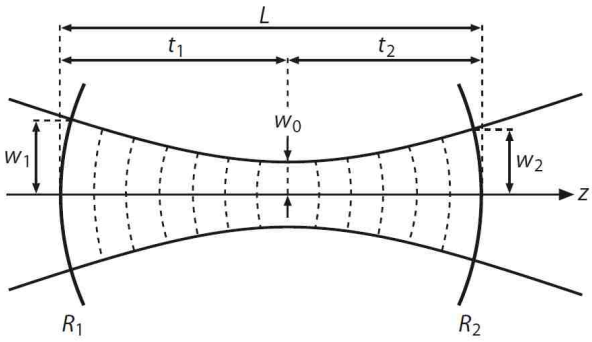


Abb. 20.20: Adaption eines sphärischen Spiegelsystems an einen Gaußschen Laserstrahl [**?**].

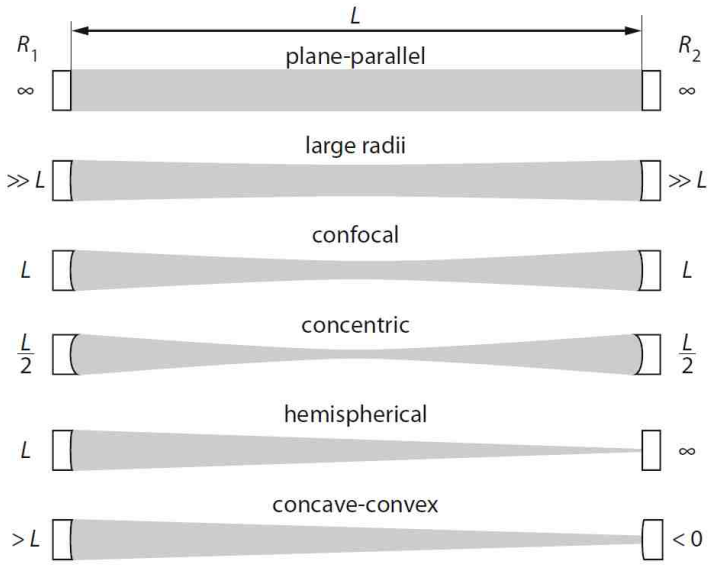


Abb. 20.21: Optische Resonatoren, aufgebaut mit zwei Spiegeln unterschiedlicher Krümmung. Die Strahlung im grau unterlegten Bereich wird eingefangen [**?**].

werden müssen, um den Laserprozess in Gang zu halten. Welche Bedingungen muss ein Laserresonator erfüllen [**?**]? Der einfachste Aufbau sind zwei planparallele Spiegel, die die Laserstrahlung reflektieren und immer wieder durch das Lasermedium schicken. Man kann sich aber leicht überlegen, dass solch ein Aufbau nicht zu einer stabilen Strahlgeometrie führt. Geringste Abweichungen in der Strahlführung führen dazu, dass der Lichtstrahl über kurz oder lang die Anordnung verlässt. Statt dessen verwendet man Aufbauten aus fokussierenden Spiegeln. Stabile Reflexionseigenschaften erreicht man beispielsweise, indem man die Spiegeloberfläche an die Krümmung eines Gaußschen Strahls anpasst, siehe Abb. 20.20. Abb. 20.21 zeigt Beispiele für Bauformen von Lasersystemen. Auch asymmetrische Aufbauten sind möglich. Die Charakteristika des Strahlengangs lassen sich über die ABCD-Matrix erfassen, siehe die Tabelle in Abb. 20.22. Das Prinzip ist wie folgt: Jedes optische Element (Linse, Spiegel oder gradlinige Ausbreitung) wird ist mit einer spezifischen 2x2-Matrix beschrieben. Die Ausbreitungseigenschaften werden durch Multiplikation der Basismatrizen ermittelt [**?**].

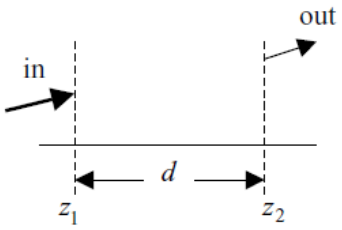
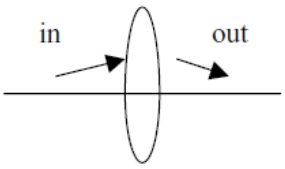
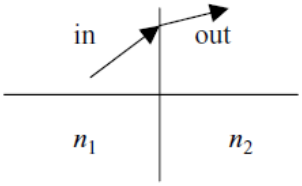
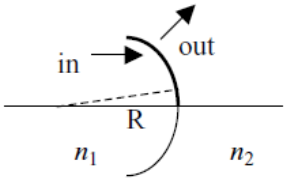
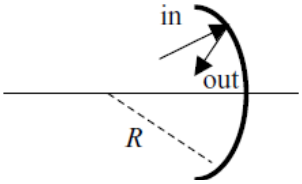
Transformation description	Figure	Matrix
Homogeneous medium Length d		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Thin lens Focal length f ($f > 0$, converging; $f < 0$, diverging)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Dielectric interface Refractive indices n_1, n_2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Spherical dielectric interface Radius R		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 \cdot R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Spherical mirror Radius of curvature R		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

Abb. 20.22: Die ABCD-Transformationsmatrix für gängige optische Elemente und Medien [**?**].

Das im Resonator gefangene Licht wird von den Spiegeln vielfach reflektiert. Durch Interferenz sind allerdings nur bestimmte Strahlwege und Lichtfrequenzen im Resonator stabil. Andere Strahlwege werden aufgrund destruktiver Interferenz unterdrückt. Die Strahlungsmuster, die sich bei jedem Umlauf reproduzieren, nennt man die Moden des Resonators.[26] Man unterscheidet longitudinale und transversale Moden. Die fundamentale transversale Mode ist ein Gaußscher Strahl. Die Spiegelgeometrie lässt aber auch andere Modengeometrien zu, siehe Abb. 20.23. Abb, 20.19 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Lasers. Im Resonator bildet sich eine stehende Welle aus. Aus der Länge des Resonators L_R ergeben sich folgende Beziehung für passende Wellenlängen:

$$L_R = n_R \cdot \frac{\lambda}{2} \tag{20.25}$$

wobei n_R eine ganze Zahl ist. Der zugehörige Frequenzabstand der Moden ist:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2\,L_R} \tag{20.26}$$

Um die Laserstrahlung zu nutzen, hat einer der Endspiegel eine geringere Reflektivität, so dass bei jedem Umlauf im Resonanter ein Teil der Laserstrahlung ausgekoppelt wird. Der Auskopplungsgrad hängt vom Lasersystem ab und muss so gewählt werden, dass die Besetzungsinversion aufrechterhalten bleibt. Man muss bedenken, dass beim Betrieb Verluste durch Absorption, Beugung, Reflexion und Streuung des Laserlichts entstehen, die kompensiert werden müssen. Der Spektralbereich, der vom Medium verstärkt wird, bestimmt welche Lichtwellenlängen im Resonator anschwingen können. Folgende Eigenschaften sind gefragt:

- Ein Laserübergang im gewünschten Wellenlängenbereich mit möglichst hoher Lichtverstärkung.
- Eine hohe Transparenz des Mediums in diesem Wellenlängenbereich.

Lasersysteme

Eine Besetzungsinversion lässt sich in der Regel nur erreichen, wenn mehrere Energieniveaus (E_1, E_2, ...) beteiligt sind. Typisch sind Drei- oder Vier-Niveausschemata, siehe Abb. 20.24. Beispiele sind der Rubinlaser (Drei-Niveau Pumpschema) und NdYAG-Laser (Vier-Niveau Pumpschema). Im ersten Schritt werden durch Optisches Pumpen Elektronen aus dem Grundzustand E_1 in ein höheres Energieniveau E_3 angeregt. Dieser Zustand zeichnet sich oft durch eine größere spektrale Breite aus. Der Vorteil ist, dass man zur Anregung breitbandige Lichtquellen, wie z.B. Blitzlampen, verwenden kann. Dieser

[26] *Lexikon:* Eine **Transversalmode** elektromagnetischer Strahlung (TEM) ist ein Intensitätsmuster, das in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Strahls gemessen wird. Transversalmoden treten bei Radiowellen und Mikrowellen auf, die auf einen Wellenleiter beschränkt sind. Man findet sie auch in einer optischen Faser oder in einem Laserresonator.

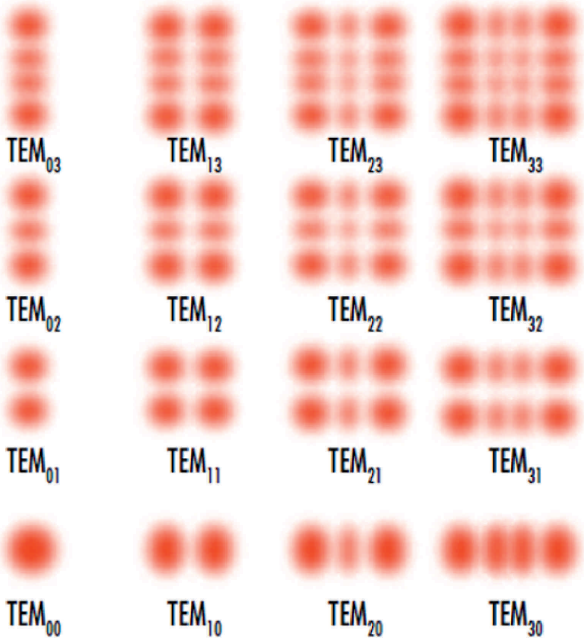


Abb. 20.23: Querschnitte transversaler elektromagnetischer Moden (TEM) niedrigster Ordnung, die sich in einem Laserresonator ausbilden können.

Zustand zerfällt mit einer Zeitkonstante τ_3 in den oberen Laserzustand E_2.Es ist notwendig, dass dieser Vorgang schnell erfolgt, damit der obere Laserzustand unmittelbar besetzt wird und dieser Vorgang nicht zum Flaschenhals wird. Die Lebensdauer dieses Zustands, gekennzeichnet durch die Relaxationsrate τ_2, muss hoch sein, da man eine Besetzungsinversion gegenüber dem unteren Laserzustand erreichen will. Man erkennt das Problem. In Drei-Niveausystemen ist der untere Laserzustand mit dem Grundzustand identisch (Abb. 20.25 (links)). Im Drei-Niveauschema muss sich mindestens die Hälfte der Atome im Zustand (E_3) befinden, um eine Besetzungsinversion gegenüber (E_1) zu erreichen. Da dieser in der Regel stark besetzt ist, kann es problematisch sein, die notwendigen Bedingungen herzustellen, die einen Laserbetrieb erlauben. Vorteilhafter sind Vier-Niveausysteme, siehe Abb. 20.25 (rechts). Hier ist die Bedingung, dass die Lebensdauer des unteren gering gegenüber dem des oberen Laserzustands ist ($\tau_1 \ll \tau_2$). Der untere Laserzustand entleert sich, das System fällt in den Grundzustand zurück und der Pumpprozess kann von vorne beginnen. Unter diesen Bedingungen lässt sich eine Besetzungsinversion leichter erreichen. Prinzipiell wird Besetzungsinversion erreicht, wenn sich nur ein Atom im oberen Laserzustand befindet. Daher wird möglichst das Vier-Niveauschema verwendet. Man unterscheidet [**?** **?** **?**]:

- Gaslaser [**?**]
- Excimerlaser [**?**]
- Farbstofflaser [**?**]
- Chemische Laser [**?** **?**]

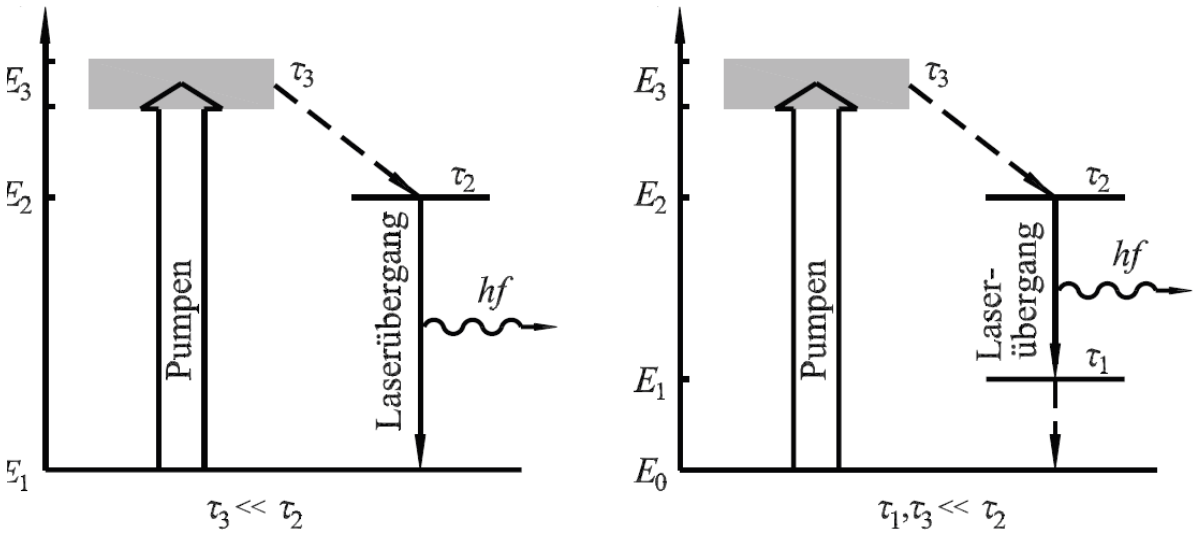


Abb. 20.24: Anordnung der Energieniveaus beim Drei- bzw. Vier-Niveausystem [**?**].

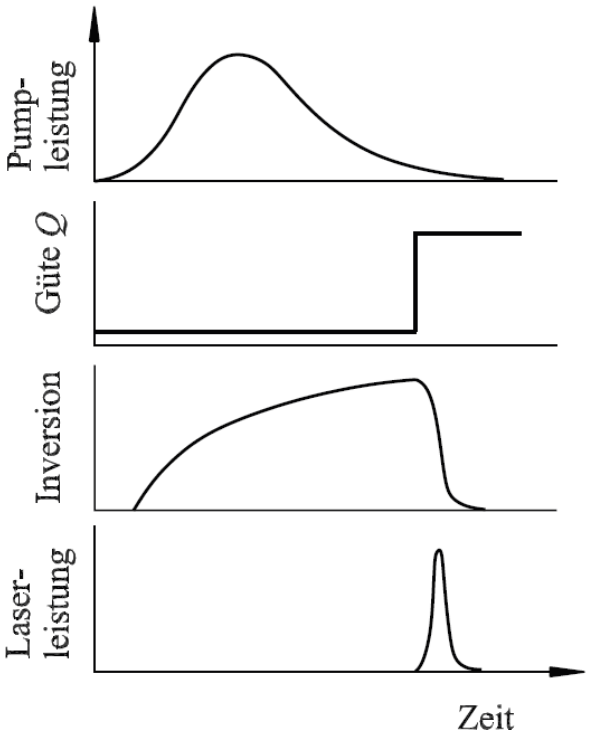


Abb. 20.25: Prinzip der Güteschaltung. Man erkennt, dass die Erhöhung der Güte des Resonators zu einer gesteuerten Abbau der Besetzungsinversion führt und ein Laserstrahl hoher Leistung erzeugt wird [**?**].

Laser Technology [?]: A recent example of a large, powerful laser is the chemical laser based on an iodine transition at a wavelength of 1.3 mm that is envisioned as a defensive weapon [?]. It could be mounted in a Boeing 747 aircraft and would produce average powers of 3 megawatts, equivalent to 30 acetylene torches. New advances in high quality dielectric mirrors and deformable mirrors allow this intense beam to be focused reliably on a small missile carrying biological or chemical agents and destroy it from distances of up to 100 km. This *star wars* attack can be accomplished during the launch phase of the target missile so that portions of the destroyed missile would fall back on its launcher, quite a good deterrent for these evil weapons. Captain Kirk and the starship Enterprise may be using this one on the Klingons!

- Festkörperlaser [?]
- Halbleiterlaser [? ?]
- Faserlaser [?]
- Photonischer Kristalllaser [?]
- Freie-Elektronenlaser [?]

Die Details der Anregung und des Laserübergangs bestimmen, in welcher Weise ein Laser betrieben werden kann. Die Lasertätigkeit setzt ein, sobald die Schwelle für die Besetzungsinversion (Inversionsschwelle) überschritten wird. Grob unterscheidet man zwischen DauerstrichsystemenLaser!Dauerstrich L. (Ar^+-Laser) und gepulsten Lasern (Nd-YLF Laser). Eine oft verwendete Methode nanosekundenlange Laserpulse zu erzeugen, ist die Güteschaltung. Dabei unterdrückt den Laservorgang, indem man die Güte zunächst gering wählt und erst bei hoher Besetzungsinversion durch geeignete Maßnahmen, wie zum Beispiel eine Polarisationsdrehung durch eine Pockels-Zelle,[27] erhöht. Abb. 20.25 zeigt, wie der Vorgang abläuft.

Drei-Niveau-Lasersysteme

Der erste Laser, der vorgestellt wurde, war ein gepulster Rubinlaser ($Cr3+:Al_2O_3$) [?]. Die emittierte Wellenlänge ist 694.3 nm wird von den dotierten Chromionen erzeugt. Chrom dreifach ionisiert, hat ein einzelnes *d*-Elektron und Eigenschaften vergleichbar zu Aluminium, so dass es Al-Atome im Kristallgitter ersetzen kann. Der Anteil an Cr^{3+} beträgt 0.05%. Der Rubinlaser gehört zur Klasse der Festkörperlaser wie der Alexandrit- oder Ti:Saphirlaser [?]. Durch Einkopplung von Licht bei etwa 550 nm wird der Zustand

[27] *Lexikon:* Eine **Pockelszelle** ist ein optisch transparenter Kristall versehen mit Elektroden, in dem sich ein Lichtstrahl ausbreiten kann. Durch Anlegen einer Spannung kann die Phasenverzögerung im Kristall (**Pockels-Effekt**) gesteuert werden. Pockelszellen sind die Grundkomponenten von elektrooptischen Modulatoren und optischen Schaltern, beispielsweise für gütegeschaltete Laser, regenerative Verstärker oder Spannungssensoren.

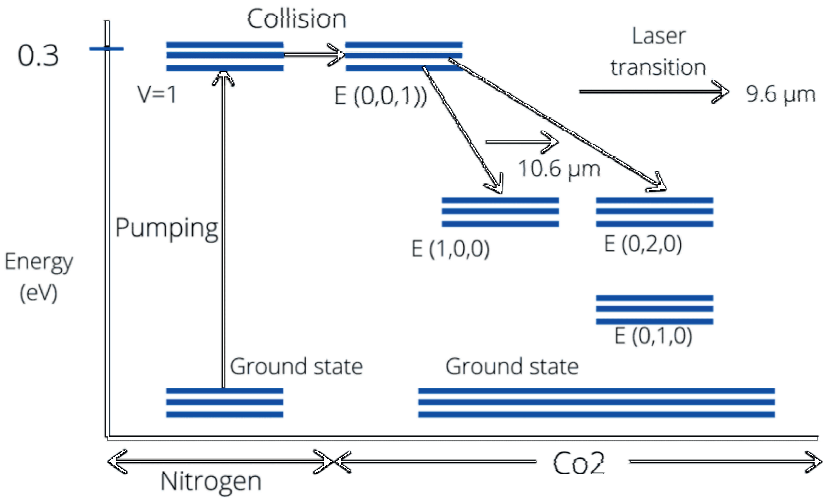


Abb. 20.26: Energieniveaus und Pumpschema des CO_2 Lasers.

E_3 besetzt, siehe Abb. 20.24. Die mittlere Lebensdauer ist mit 10^{-8} s kurz, sodass Elektronen nicht lange in diesem angeregten Zustand verbleiben. Nach kurzer Zeit fallen sie strahlungslos in den metastabilen Zustand E_2. Hier beträgt die mittlere Lebensdauer 10^{-3} s, was deutlich länger ist als die in E_3. Daher wird der Zustand E_2 viel schneller besetzt als Elektronen E_2 ihn verlassen. Dies resultiert in einer Erhöhung der Besetzungszahl in E_2 und somit zu einer Besetzungsinversion. Beim Übergang in den Grundzustand wird Energie in Form von Photonen freigesetzt. Diese kann für den Prozess der Stimulierten Emission genutzt werden und erlaubt es, Laserstrahlung mit diesem System zu erzeugen.

Vier-Niveau-Lasersysteme

Der Laserübergang beim CO_2-Laser resultiert aus der Nutzung quantisierter Schwingungsniveaus. Für den Pumpprozess nutzt man aus, dass man über den Umweg der Anregung von Stickstoff (N_2) den oberen Laserzustand bevölkern kann. Die verwendete Gasmischung enthält N_2 (1.2 Torr), CO_2 (0,3 Torr) und Helium (7 Torr). Abb. 20.26 zeigt das zugehörige Pumpschema. Die Energiedifferenz zwischen den Schwingungsniveaus von Stickstoff und Kohlendioxid ist mit 0.3 eV gering. Durch eine elektrische Entladung werden die Gasmoleküle angeregt und es gibt daher eine große Anzahl von Molekülen in einem angeregten Schwingungszustand 0.3 eV oberhalb des Grundzustands. Der angeregte Schwingungszustand in N_2 ist metastabil. Dies erlaubt einen effektiven Energieübertrag an CO_2-Moleküle über Stöße. Über diesen Prozess werden die Kohlendioxidmoleküle in den Energiezustand $E(0,0,1)$ angeregt und es kommt zur Besetzungsinversion im Vergleich zu den anderen Schwingungszuständen wie $E(1,0,0)$, $E(0,0,2)$ und $E(0,1,0)$. Als Laseremission ergibt sich der Übergang vom Energieniveau $E(0,0,1)$ nach $E(1,0,0)$ oder $E(0,2,0)$. Die zugehörigen Wellenlängen sind 19.6 und 9.6 μm. Welche Funktion hat die Zugabe von Helium? Helium beeinflusst die Lebensdauern, führt aber nicht zu ei-

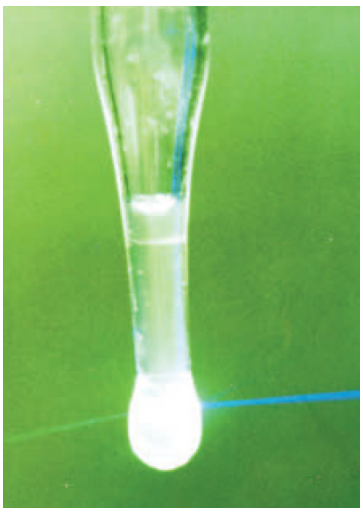


Abb. 20.27: One-Drop-Only Laser - ein Vorläufer des *essbaren* Lasers. Dieses Bild wurde 1970 an einer Labortür in Stanford angebracht [**?**].

ner Änderung in der Besetzungsinversion. Helium hat eine hohe Wärmeleitfähigkeit und trägt so dazu bei, die thermische Energie über Stöße mit den Wänden abzugeben und das Gas dadurch gekühlt wird. Für den Laserprozess bedeutet das, dass das unter Laserniveau schnell entleert wird und die Besetzungsinversion länger aufrecht erhalten werden kann. Die Laserwellenlänge von 10.6 μm wird bei chirurgischen Eingriffen genutzt, da diese Strahlung von Wasser stark absorbiert wird, was insbesondere bei Operationen an Weichgewebe nützlich ist.

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Welt der genießbaren Laser

Eine kleine Geschichte am Rande, in der Arthur Schawlow versucht einen Laser auf der Basis von Gelatine zu realisieren. Leider zeigte keiner der zwölf gekauften Geschmacksrichtungen eine Lasertätigkeit. Die Experiment wurden in Schalows Büro durchgeführt und der Forscher vertilgte die Snacks nach dem Misserfolg [**?**]. Natrium-Fluorescein ist *nahezu ungiftig*, und so wurde dieser Farbstoff schließlich unter die Gelatine gemischt und es wurde Lasertätigkeit beobachtet [**?**], siehe Abb. 20.27. Erste Berichte über die Lasertätigkeit von Farbstoffen stammt aus dem Jahr 1966. Forscher beobachteten Laseremission aus Lösungen mit Cyanin-Farbstoffen [**?** **?**]. Die Relevanz dieser Arbeiten war, dass die Lasertätigkeit durch breite, diffuse Energiebänder ausgelöst wurde und nicht durch diskrete Energieniveaus. Die damit erreichte Abstimmbarkeit in der Wellenlänge ist eine Folge der stark verbreiterten elektronischen Zustände, die charakteristisch sind für organische Farbstoffe. Ein wichtiger Fortschritt war, die Emission des Farbstofflaser spektral einzuschränken [**?**]. Dies wurde erreicht, indem man einen der Resonatorspiegel durch ein Beugungsgitter ersetzte. Damit gelang zum ersten Mal, einen Laser über brei-

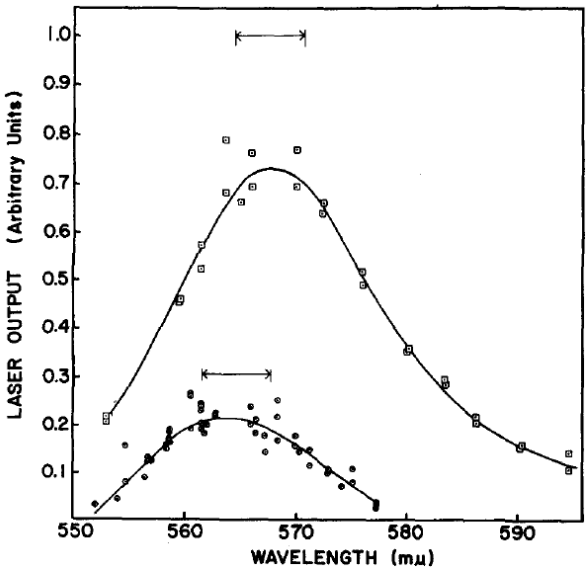


Abb. 20.28: Relative Effizienz bei Selektion der Laseremission von Rhodamin 6G als Funktion der Wellenlänge bei unterschiedlicher Konzentration des Farbstoffes [?].

teren Spektralbereich abzustimmen, siehe Abb. 20.28. Abb. 20.29 zeigt, wie ein solches Lasersystem aufgebaut ist und wie die Durchstimmbarkeit erreicht wird.[28]

A monolithic white laser [?]: Monolithic semiconductor lasers capable of emitting over the full visible-colour spectrum have a wide range of important applications, such as solid-state lighting, full-colour displays, visible colour communications and multi-colour fluorescence sensing. The ultimate form of such a light source would be a monolithic white laser. However, realizing such a device has been challenging because of intrinsic difficulties in achieving epitaxial growth of the mismatched materials required for different colour emission. Here, we demonstrate a monolithic multi-segment semiconductor nanosheet based on a quaternary alloy of ZnCdSSe that simultaneously lases in the red, green and blue. This is made possible by a novel nanomaterial growth strategy that enables separate control of the composition, morphology and therefore bandgaps of the segments. Our nanolaser can be dynamically tuned to emit over the full visible-colour range, covering 70% more perceptible colours than the most commonly used illuminants.

Röntgenlaser[4LP]

The physics of x-ray free-electron lasers [?]: X-ray free-electron lasers (x-ray FELs) give us for the first time the possibility to explore structures and dynamical processes of atomic and molecular systems at the angstrom-femtosecond space and time scales. They generate coherent photon pulses with time duration of a few to 100 fs,

[28] The Nobel Prize in Physics 2005 was divided, one half awarded to Roy J. Glauber *for his contribution to the quantum theory of optical coherence*, the other half jointly to John L. Hall and Theodor W. Hänsch *for their contributions to the development of laser-based precision spectroscopy, including the optical frequency comb technique*

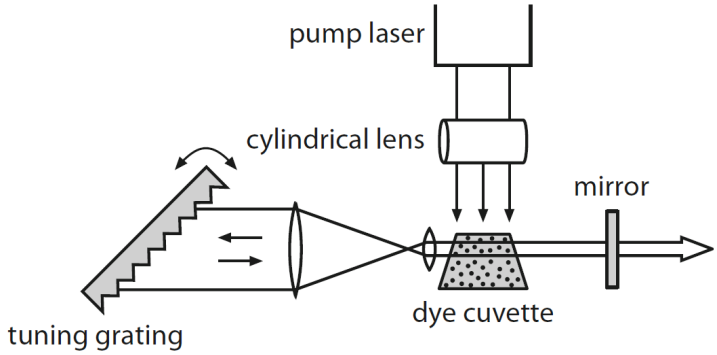


Abb. 20.29: Realisierung eines durchstimmbaren Farbstofflasersystems, gepumpt durch einen Stickstofflaser. Ein Teleskop, platziert im Resonator zur Strahlaufweitung, und ein Beugungsgitter in Littrow-Anordnung sorgen für eine reproduzierbare Wellenlängenabstimmung [**?**]. Eine Verringerung der Bandbreite auf weniger als $0.4 \cdot 10^{-12}$ m (0.004 Å) erreicht man durch ein Fabry-Perot-Etalon. Bei Spitzenleistungen im kW-Bereich, Pulsbreiten von 5 bis 100 ns und Wiederholungsraten bis 100 Hz können so Laserpulse im nahen Ultravioletten und gesamten sichtbaren Spektralbereich erzeugt werden. [**?**].

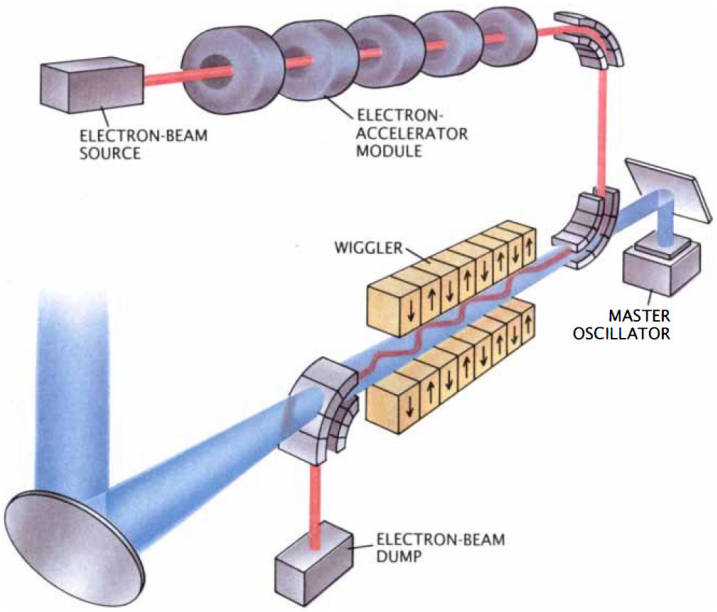


Abb. 20.30: Elektronen in einem Freie-Elektronen-Laser werden in einem Beschleuniger auf hohe Geschwindigkeiten gebracht. In der Wechselwirkung mit einem alternierenden magnetischen Feld wird das einfallende Licht verstärkt. Die Wellenlänge des Lichts, das die Elektronen effektiv verstärken, hängt von der Geschwindigkeit der Elektronen und dem Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Polen der Magnetanordnung ab [**?**].

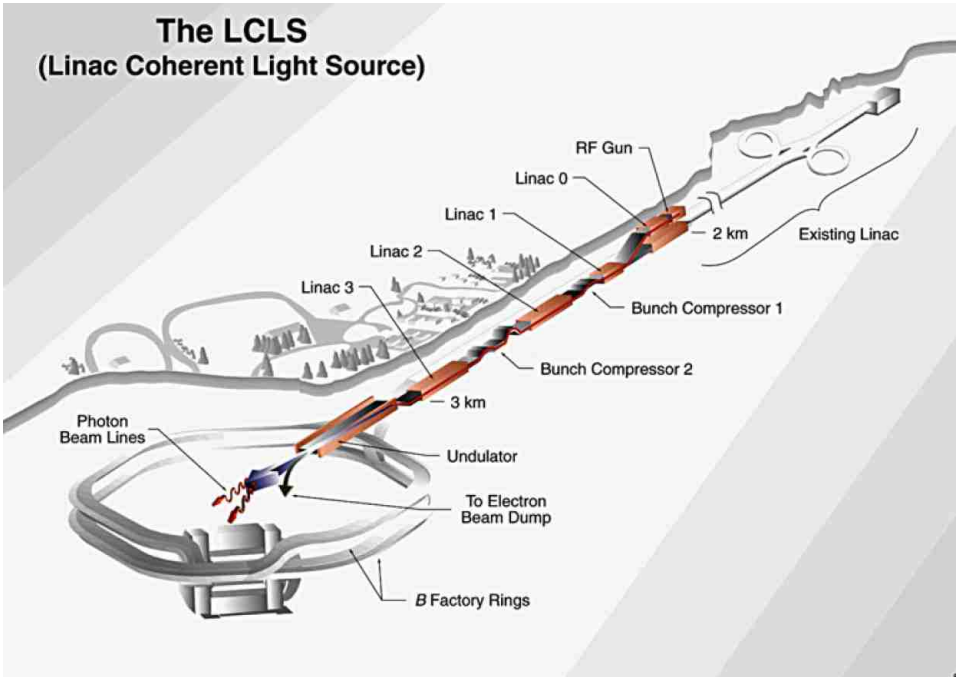


Abb. 20.31: Der Röntgenlaser LCLS mit Angabe seiner Länge. Auf dem letzten Kilometer des Linearbeschleunigers werden die Elektronen auf etwa 14 GeV beschleunigt und das Elektronenbündel auf etwa 30 μm komprimiert. Damit erreicht man Pulsbreiten im fs-Bereich [**?**].

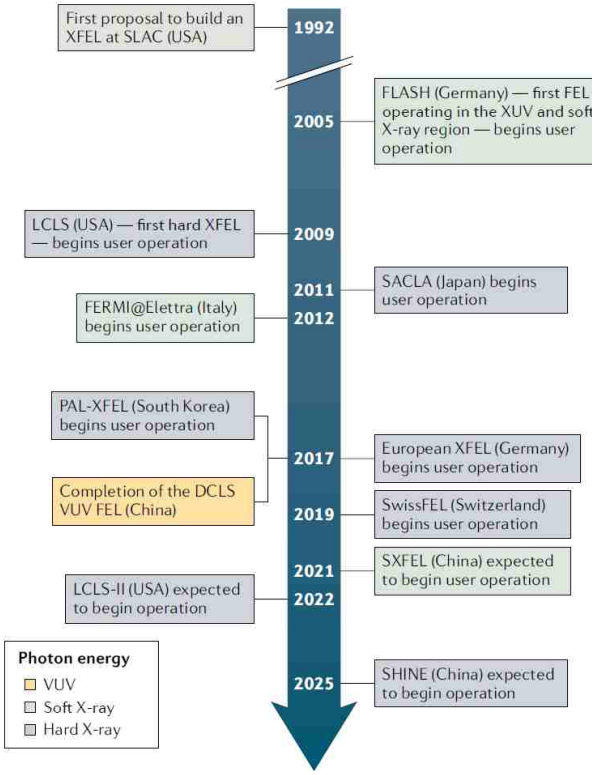


Abb. 20.32: Zeitachse der XFELs [**?**].

peak power of 10 to 100 GW, over a wavelength range extending from about 100 nm to less than 1 Å. Using these novel and unique capabilities new scientific results are being obtained in atomic and molecular sciences, in areas of physics, chemistry, and biology.

Ganz anders arbeitet der Freie-Elektronen-Laser (FEL). Ein FEL besteht im Wesentlichen aus einem Elektronenbeschleuniger und einem Wiggler- oder Undulatormagneten (siehe Kap.), wie in Abb. 20.30 gezeigt.[29] Linearbeschleuniger (LINAC), die die Elektronen auf 1 bis 15 GeV Kinetische Energie bringen, für Röntgen-FELs verwendet. Im Magnetfeld des Undulators bewegt sich das Elektron entlang einer sinusförmigen Bahn in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld und sendet aufgrund der Beschleunigung Licht aus (siehe Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*). Die Wellenlänge der emittierten Strahlung ist proportional zum Quadrat der kinetischen Energie der Elektronen. Diese quadratische Abhängigkeit erlaubt es allein durch Änderung der Elektronenenergie die Wellenlänge vom cm- in den Å-Bereich zu bringen. Der Erste FEL arbeitete im Infraroten bei 10.6 μm [**?**]. Wie man erkannte, kann man den Elektronenstrahl aus einem ungeordneten Anfangszustand in einen Zustand überführen, in dem sich die Elektronen in Mikrobündeln organisieren [**?**]. Diese bilden sich im Abstand der emittierten Wellenlänge. Dieser Prozess, der aus dem Rauschen heraus erfolgt, charakterisiert einen SASE-FEL. [30] Während die Strahlungsintensität eines Elektronenstrahls im konventionellen Synchrotron proportional zur Anzahl der Elektronen ist, ist die Intensität eines FELs, bei dem alle Elektronen ihre Strahlung in Phase emittieren, proportional zum Quadrat der Elektronenanzahl, was einen enormen Anstieg der Lichtintensität zur Folge hat. Da die SASE Rechnungen vorhersagen, dass der Prozess nicht von der Wellenlänge abhängt, wurde auf der Grundlage dieses Konzeptes ein Röntgen-FEL realisiert [**?**].

[29] The FEL light is produced by an interaction among three elements: the electron beam, an electromagnetic wave traveling through the laser cavity in the same direction as the electrons, and a spatially periodic magnetic field produced by an assembly of magnets known as a wiggler. The magnetic field of the wiggler acts on the electrons so that they give up energy to the electromagnetic wave. The energy the electrons give up amplifies the wave, which is then emitted by the laser. When a light wave moves through an undulatory magnetic field such as that produced by a wiggler, the spatial variations of the wiggler field combine with those of the light wave's electromagnetic field to produce a beat wave, which is essentially an interference pattern between the two. The beat wave has the same frequency as the light wave, but its wave number (a measure of the number of wavelengths in a given distance) is the sum of the wave numbers of the light beam and the wiggler field. The beat wave has the same frequency as the light wave but a larger wave number (and thus a shorter wavelength); therefore it travels slower than the light wave and consequently is called a ponderomotive wave. Since the electromagnetic field of the ponderomotive wave is the combination of the light wave and the stationary field of the wiggler, it is the effective field that an electron sees when it passes through the free-electron laser. If an electron is moving at the same speed as the wave, it will see a constant field: that of the part of the wave with which it is traveling. A good analogy to the interaction between electrons and the ponderomotive wave is the interaction between surfers and a wave approaching a beach. If the surfers remain stationary in the water, the incoming wave will merely lift them up briefly and then let them down to their previous level. But if the surfers "catch the wave" by paddling so as to match its speed, they will be able to gain significant momentum from the wave and be carried inshore. (In a free-electron laser the electrons amplify the wave, and so the situation is more analogous to the surfers *pushing* on the wave and increasing its height.) [**?**]

[30] SASE: *Self-Amplified Spontaneous Emission*

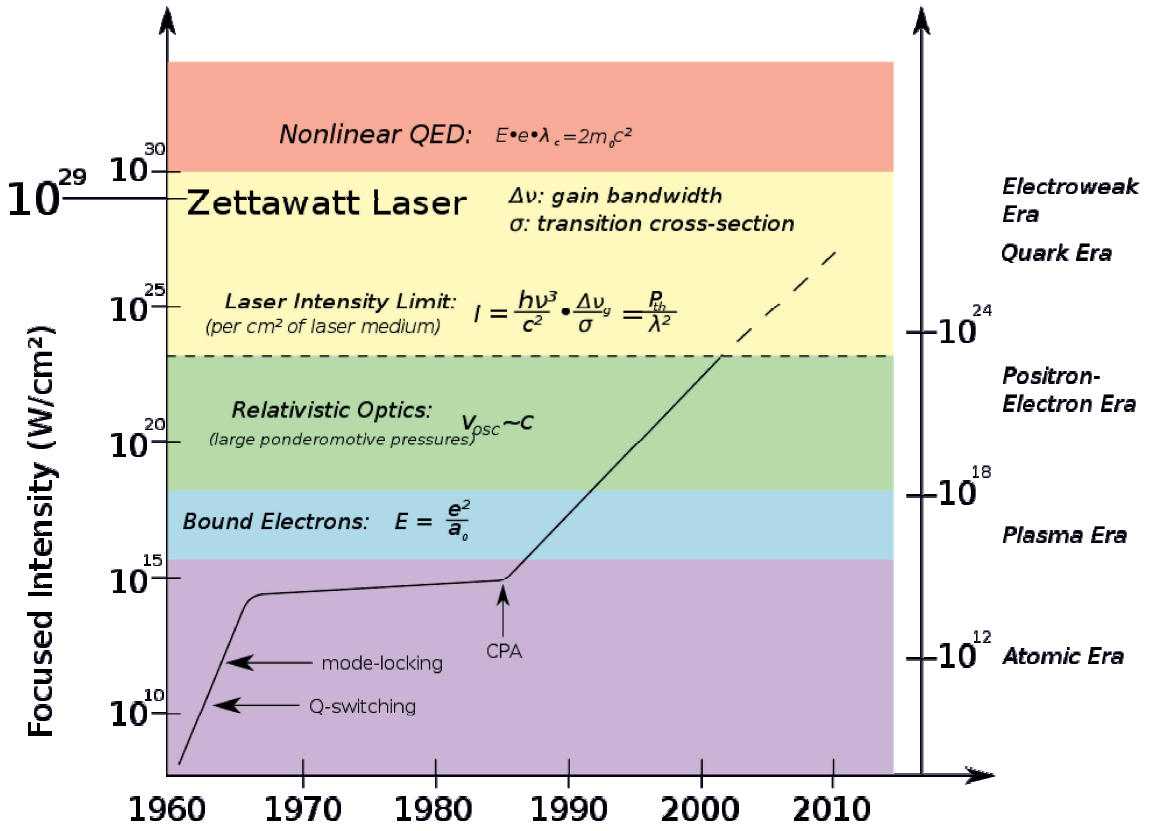


Abb. 20.33: Entwicklung der maximalen Pulsintensität [**?**].

Abb. 20.31 zeigt LCLS,[31] ein Röntgen-FEL (0.15-15 nm) in Stanford (USA), der Lichtpulse von $8 \cdot 10^{-14}$ s bereit stellt. Abb. 20.32 gibt einen Überblick über die historische Entwicklung der Röntgen-FELs. In Hamburg arbeiten FLASH und der EurXFEL.

Many amateur photographers are disappointed when they discover that their shots of fast-moving objects are blurred beyond recognition. The most likely reason for this is that the exposure time was not short enough to freeze the motion. In contrast, modern ultrahigh-speed cameras can take up to a million images every second and can capture motion that is normally imperceptible to the human eye. By projecting the photographs on a screen in sequence, the action can be replayed in slow motion. While these techniques are ideal for studying macroscopic objects, how can we possibly follow the motion of atoms and electrons?

Ference Krausz [**?**]

[31] LCLS: *Linac Coherent Light Source*

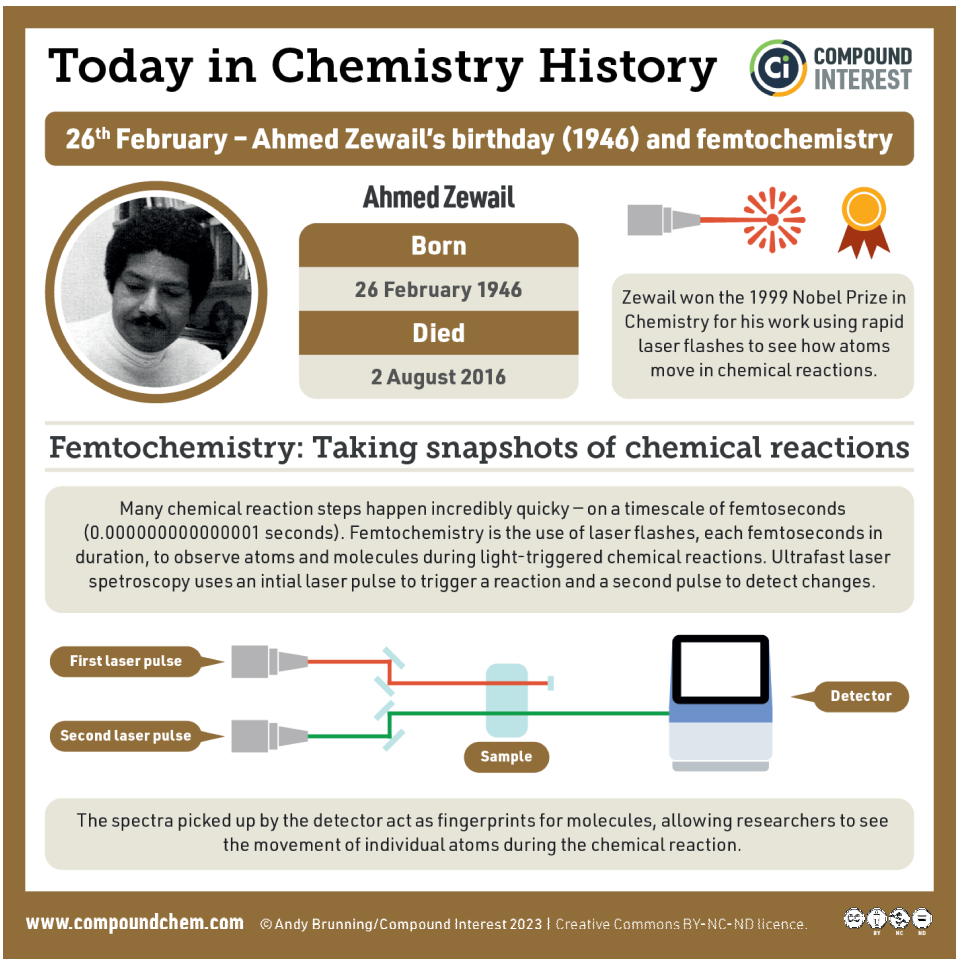


Abb. 20.34: Ahmed Zewail (1946-2016)

Ein Beispiel aus der Welt ultrakurzer Laserpulse

Abb. 20.33, zeigt, wie sich die Lasertechnologie in Bezug auf die Pulsintensität seid der Vorstellung des Rubinlasers entwickelt hat. Wichtige Schritte waren die Entwicklung modengelockter Lasersysteme [**?**] und die Entwicklung[32] der CPA Technik.[33] [**?**] Der Trick besteht darin, die im Laser enthaltene Energie auf eine möglichst kurze Zeitskala zu komprimieren. Das erste Lasersystem, das Pulse kürzer als 0.1 ps erzeugte wurde im Jahr 1981 von den Bell Telephone Laboratories vorgestellt [**?**]. Es beruhte auf dem Prinzip des *colliding-pulse mode-locking*. Lichtimpulse aus einem gepumpten Farbstoff bewegen sich in entgegengesetzte Richtung durch einen Laserresonator, der außer dem Verstärkermedium einen sättigbaren Absorber enthält. Hierbei handelt es sich ebenfalls

[32] CPA: *Chirped Pulse Amplification*

[33] The Nobel Prize in Physics 2018 was awarded "for groundbreaking inventions in the field of laser physics" with one half to Arthur Ashkin *for the optical tweezers and their application to biological systems*, the other half jointly to Gérard Mourou and Donna Strickland *for their method of generating high-intensity, ultra-short optical pulses*

um einen Farbstoff. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass er nur optisch durchsichtig wird, wenn kurzzeitig eine bestimmte Energiemenge im Farbstoff deponiert wird. Reicht die Energie nicht aus, wird das einfallende Licht stark abgeschwächt. Erst durch die gleichzeitige Wechselwirkung der gegenläufigen Impulse im sättigbaren Absorber wird der Farbstoff transparent und die Pulse können kurzzeitig den Farbstoff passieren. Im verstärkenden Medium sind die Pulse maximal zeitlich getrennt, so dass eine maximale Verstärkung erreicht werden kann. Durch diese Kombination erreicht man, nur diese Pulse sich im Resonator ausbreiten können und bei jedem Umlauf kürzer werden. Die Charakteristika des Laserresonantor beschränkt schließlich die Pulslänge, die erreicht werden kann. Durch solche CPM-Systeme erreicht man Pulslängen von 27 fs. Heutzutage verwendet man als Lasermedium statt eines Farbstoffes den nochmal deutlich spektral breiter fluoreszierenden Ti:Saphir Kristall, der im nahen Infrarot arbeitet. Damit kann man optische Pulse erzeugen, deren Länge einer einzigen Oszillation des elektrischen Feldes entsprechen. Welche Pulslänge ergibt sich bei einer Zentralwellenlänge von 800 nm? Das sind wenige Femtosekunden [**?**]. Aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation ist eine Pulsverkürzung mit einer gesteigerten Energiebreite verbunden. Ein ultrakurzer Lichtpuls zeichnet sich durch eine enorme spektrale Breite aus. Diese kann locker eine Oktave betragen, erstreckt also im sichtbaren Spektralbereich über das gesamte sichtbare Spektrum. Bei der Ausbreitung des Pulses in einem Medium wie Luft, muss man die Dispersion berücksichtigen, da sich unterschiedliche Wellenlängen unterschiedlich schnell ausbreiten. Der Puls verbreitert sich also, wenn man keine geeigneten Maßnahmen ergreift. Die Lösung sind speziell gefertigte dielektrische Spiegel [**?**]. Diese haben zwei Randbedingungen zu erfüllen. Sie müssen spektral breitbandig sein und zusätzlich die Pulsverbreitung kompensieren. Die steile Entwicklung auf dem Gebiet der Erzeugung ultrakurzer Laserpulse hat zu den Forschungsgebieten Femtochemie[34] [35] [**? ?**] (Abb. 20.34) und Attophysik[36] [**? ?**] geführt.

Femtochemistry is concerned with the very act of the molecular motion that brings about chemistry, chemical bond breaking, or bond formation on the femtosecond (10^{-15} second) time scale. With lasers it is now possible to record snapshots of chemical reactions with sub-angstrom resolution. This strobing of the transition-state region between reagents and products provides real time observations that are fundamental to understanding the dynamics of the chemical bond.

Ahmed Zewail [**?**]

[34] The Nobel Prize in Chemistry 1967 was divided, one half awarded to Manfred Eigen, the other half jointly to Ronald George Wreyford Norrish and George Porter *for their studies of extremely fast chemical reactions, effected by disturbing the equilibrium by means of very short pulses of energy*

[35] The Nobel Prize in Chemistry 1999 was awarded to Ahmed H. Zewail *for his studies of the transition states of chemical reactions using femtosecond spectroscopy*

[36] The Nobel Prize in Physics 2023 was awarded to Pierre Agostini, Ferenc Krausz and Anne L'Huillier *for experimental methods that generate attosecond pulses of light for the study of electron dynamics in matter*

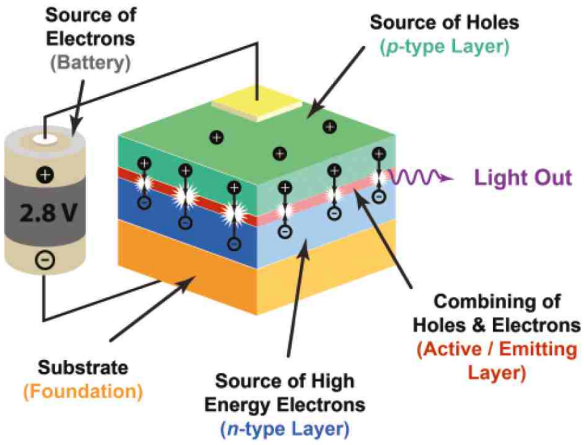


Abb. 20.35: Leuchtdiode (LED) mit Doppelheterostruktur (DH), die von einer Batterie gespeist wird. Innerhalb der aktiven Schicht rekombinieren Elektronen und Löcher und emittieren Licht, wobei die Photonenenergie mit der Bandlücke dieser Schicht übereinstimmt [**?**].

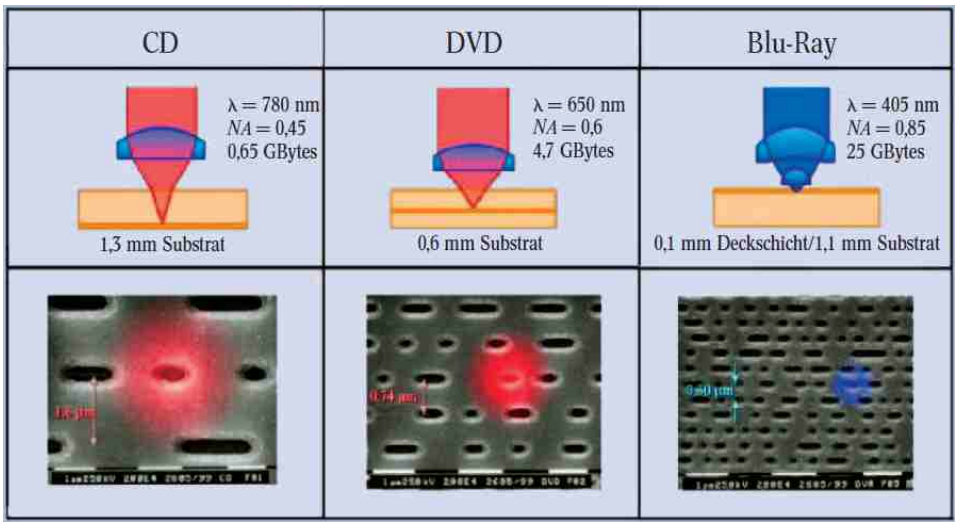


Abb. 20.36: Entwicklung optischen Speichertechnologie. Grundlage war die Reduzierung der Wellenlänge, die Erhöhung der numerischen Apertur und die Verlagerung des Speichersubstrats auf die Oberseite [**?**].

Blaue Laserdiode

Mit der Erfindung des Diodenlasers wurden Laser von Spezialgeräten zu preisgünstigen und weit verbreiteten Komponenten. Diode bestehen aus Halbleitermaterialen, die elektrischen Strom nur in eine Richtung durchlassen. Im Jahr 1962 berichteten Forscher, dass Dioden aus Galliumarsenid große Mengen Infrarotlicht aussenden [**?**]. Die Emission resultiert aus Rekombination der in Halbleitern vorkommenden Ladungsträgertypen (negative Elektronen, positive Löcher). Ein kleiner Kristall aus Galliumarsenid wurde an gegenüberliegenden Flächen poliert und so ein Resonator für das Diodenlicht geschaffen.

Eine Leuchtdiode (LED) emittiert inkohärentes, ungerichtetes und unpolarisiertes Licht, wobei es nicht zu einer Verstärkung durch stimulierte Emission kommt. Eine LED hat keinen Schwellenstrom und leuchtet, sobald ein Injektionsstrom über die Verbindung

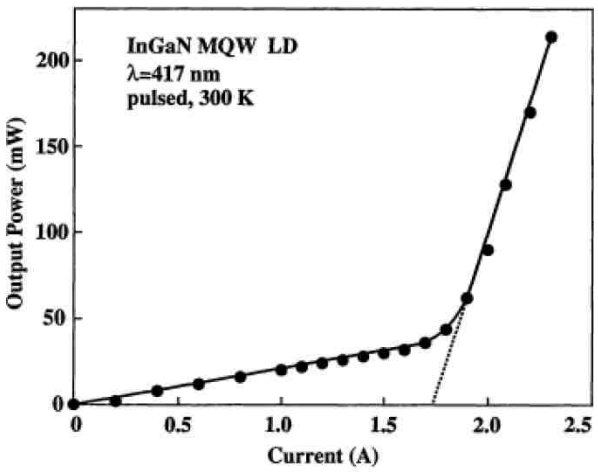


Abb. 20.37: Die Abhängigkeit der Ausgangsleistung einer blauen Laserdiode vom elektrischen Strom demonstriert das Einsetzen der Lasertätigkeit bei etwa 1.7 A [**?**].

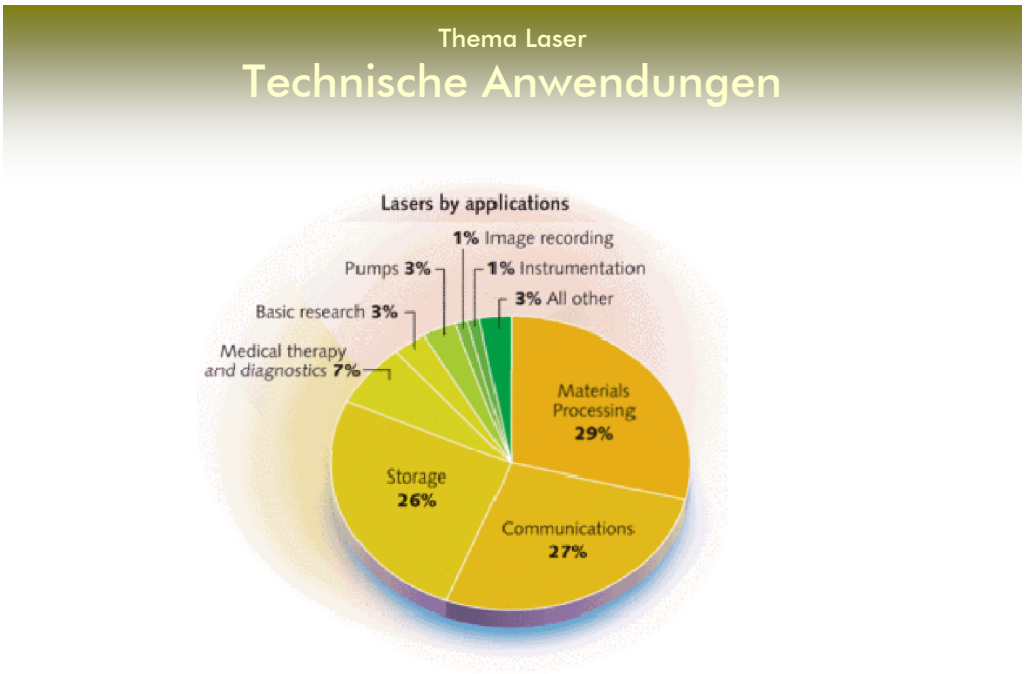
fließt. Die Grundstruktur einer effizienten Leuchtdiode mit Doppelheterostruktur zeigt Abb. 20.35. Dieses optoelektronische Gerät besteht aus Halbleitermaterialien und enthält eine lichtemittierende Schicht zwischen einer n- und p-Schicht. Die n-Halbleiterschicht hat Elektronen mit hoher Energie auf, während die p-Schicht positive Löcher hat. Der Energieunterschied zwischen den Energiezuständen bezeichnet man als Bandlücke des Materials. Wenn eine Diode an eine Gleichstromquelle angeschlossen, werden Elektronen und Löcher aus der n- und p-Schicht in die aktive Schicht injiziert. Dort rekombinieren Elektronen und Löcher und emittieren dabei Photonen. Rote und grüne Dioden gab es bereits seit den 1960er-Jahren. Allerdings bedurfte es der Entwicklung blauer Leuchtdioden, um weißes LED-Licht durch Überlagerung erzeugen.[37] Auf die blauen Halbleiterdioden folgten 1998 blaue Halbleiterlaser, die, aufgrund der geringen Fokusgröße (<300 nm) im Jahr 2003 in der Blue-Ray mit einer Speicherkapazität 25 Gigabyte gipfelte, siehe Abb. 20.36. Die Endflächen einer Laserdiode sind teilreflektierend und bilden einen optischen Resonator, in dem sich eine stehende Lichtwelle ausbilden kann. Damit erreicht man eine Besetzungsinversion, die die stimulierte Emission zum dominierenden Strahlungsprozess macht. Abb. 20.37.

[37] The Nobel Prize in Physics 2014 was awarded jointly to Isamu Akasaki, Hiroshi Amano and Shuji Nakamura *for the invention of efficient blue light-emitting diodes which has enabled bright and energy-saving white light sources*

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Spiegel verwendet man in Laserresonatoren?
2. Was versteht man unter der ABCD-Matrix Methode?
3. Was bedeutet TEM_{00}?
4. Warum ist für die Erzeugung von Laserlicht ein metastabiler Zustand notwendig?
5. Gibt es Stimulierte Emission ohne Besetzungsinversion?
6. Welche Möglichkeiten kennen Sie, eine Besetzungsinversion herzustellen?
7. Skizzieren Sie ein Drei-Niveau Laserschema und erklären Sie die Nachteile dieses Konzeptes gegenüber einem Vier-Niveauschema!
8. Warum gab es zuerst den Maser und erst später den Laser?
9. Der erste arbeitende Maser verwendet als aktives Medium NH_3. Erklären Sie das Laserschema!
10. Was versteht man unter einem Astrophysikalischen Maser?
11. Was unterscheidet einen Laser von einem Maser und einem Phaser?
12. Welche Prozesse führen beim Helium-Neon Laser zur Besetzungsinversion?
13. In welcher Weise kann man die Laserfrequenz nutzen, um eine Wolke aus Atomen auf tiefe Temperaturen zu kühlen? Informieren Sie sich!
14. Bei welchen Wellenlänge arbeitet der CO_2-Laser?
15. Welche Art von Energiezuständen nutzt man beim CO_2-Laser?
16. Wie arbeitet ein FEL?
17. Welche Möglichkeiten kennen Sie ultrakurze Laserpulse zu erzeugen?

20.3 Laser im Einsatz



Jede normale Fensterscheibe nimmt die Schallwellen von Gesprächen mit feinen Schwingungen auf und wirkt wie ein hochempfindliches Mikrophon. Ein Laserstrahl, der von außen auf ein solches Fenster gerichtet und reflektiert wird, überträgt diese Schwingungen auf ein Empfangsgerät, das sie zurück in Schallwellen umwandelt und aufzeichnet. Dass es ein hervorragendes Mittel für Spionage darstellt, scheint den Herstellern erst im Verlauf ihrer Versuche klar geworden zu sein. Sie gaben daher auch gleich die einzig mögliche Abwehrmassnahme mit an: Doppelfenster.

Neuheiten und Erfindungen 385, 220 (1968)

Die herausragenden Eigenschaften von Laserstrahlung, machen dieses Werkzeug zu einem universell einsatzfähigen Instrument. Die Möglichkeit, Licht unterschiedlichster Wellenlänge und nahezu frei einstellbarer Intensität bereitzustellen, findet Anwendung in Forschung, Technologie und Medizin [**?**]. Beispiele sind (siehe auch Abb. 20.38):

- Optische Messtechnik
  - Entfernungsmessung
  - Laser-Doppler-Anemometer

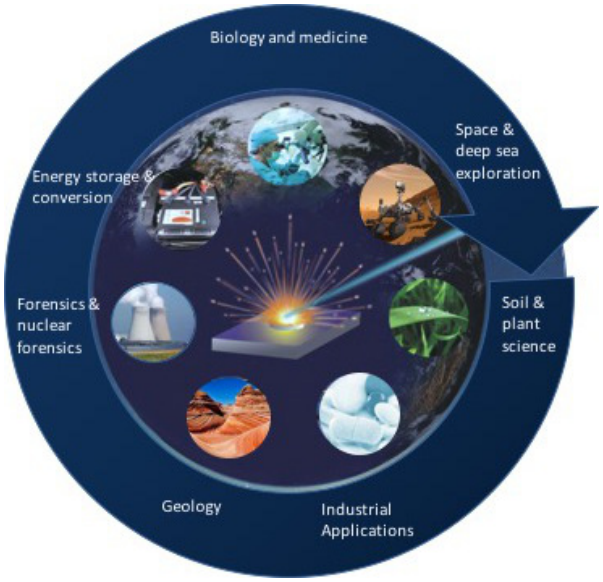


Abb. 20.38: Aktuelle Anwendungsbereiche von Laserstrahlung [**?**].

  - Spektroskopie
  - Interferometrie
  - Holografie
- Materialbearbeitung
  - Bohren, Schweißen und Schneiden
  - Aufdampfen und Härten
  - Auswuchten rotierender Teilen
- Informationstechnologie
  - Optische Nachrichtenübertragung[38] und Datenspeicherung
  - CD, Blue-ray, DVD
  - Displays, Beamer, Scheinwerfer
- *life sciences*
  - Augenheilkunde
  - Zahnheilkunde
  - Laserskalpell
  - Behandlung von Krebszellen

[38] Im Jahr 1968 schlugen Kao und Hockman (Standard Telecommunications Laboratories, GB) vor optische Fasern zur Lichtleiter zu nutzen. Maurer, Keck und Schultz (Corning Glass Works, USA) brauchten vier Jahre, um die Verluste auf die von Kao und Hockman geforderten 20 dB/km zu reduzieren.

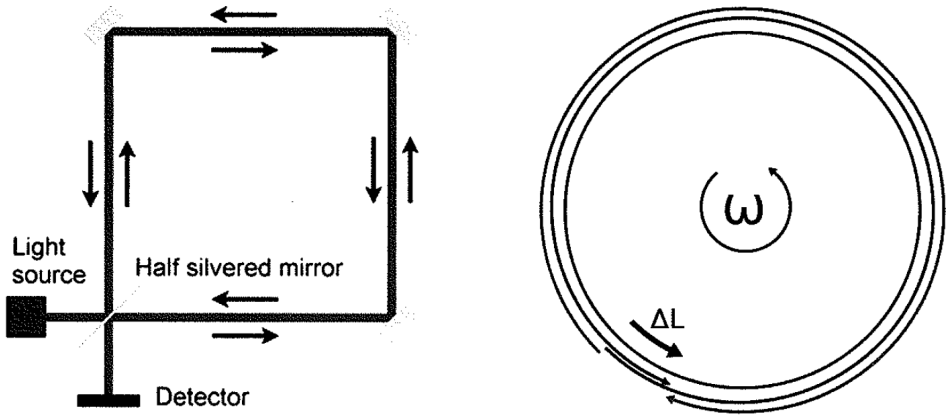


Abb. 20.39: *links:* Aufbau eines Sagnac-Interferometers. Ein halbdurchlässiger Spiegel dient als Strahlteiler, sodass sich die Lichtstrahlen in entgegengesetzte Richtungen im Interferometer bewegen und am Detektor überlagert werden. *rechts:* Illustration des Sagnac-Effekts bei gegenläufigen Lichtstrahlen. Licht, das sich in Richtung der Rotation bewegt hat in Bezug auf den gegenläufigen Lichtstrahl einen effektiv längeren Weg zurückzulegen.

Interferometrie^{4LP}

Ein Beispiel aus der Welt der Relativität

Ringinterferometrie wird eingesetzt, um die Rotation von Systemen zu erfassen. Wenn sich das Objekt, auf dem sich das Interferometer befindet, dreht, unterscheiden sich aufgrund der Rotation die Lichtlaufzeiten in den Armen des Interferometers. Dadurch wird das Interferenzmuster folglich im Vergleich zur ursprünglichen Position verschoben. Die Verschiebung ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit des Interferometers [**?**]. Der Aufbau, genannt Sagnac-Interferometers[39] ist bestens geeignet, um Rotationsbewegungen aufzulösen und auch Aspekte der Relativitätstheorie zu klären [**?**]. Die Erde dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von $7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Hat die Rotation der Erde einen Einfluss auf die Lichtausbreitung in knapp über der Erde? Michelson und Gale haben dazu im Jahr 1926 ein Ringinterferometer von 1.9 km Umfang aufgebaut. Das Experiment bestätigte die astronomisch bestimmte Winkelgeschwindigkeit der Erde. Das Michelson-Gale-Experiment erlangte keine wissenschaftliche Bedeutung, ist aber technisch interessant. Astronomen messen die Erdrotation in Bezug auf andere Sterne. Das Michelson-Gale-Experiments bestimmt die Rotation der Erde in Relation zum Weltraum. Für die Kalibrierung des Instruments werden keine Informationen über entfernte Himmelskörper benötigt.

[39] *Lexikon:* Der **Sagnac-Effekt** offenbart sich in einem rotierenden System. Ein Lichtstrahl wird in zwei Teilstrahlen aufgeteilt und laufen in einem Ring in entgegengesetzte Richtung und zur Interferenz gebracht (Ringinterferometrie), siehe Abb. 20.39. Die Rotationsachse muss nicht innerhalb des umschlossenen Bereichs liegen. Die Position der Interferenzstreifen ist abhängig von der Winkelgeschwindigkeit des Aufbaus. Diese Anordnung wird auch als **Sagnac-Interferometer** bezeichnet.

Forscher stellten sich kürzlich die Frage, ob man den Sagnac-Effekts zur Charakterisierung eines Schwarzen Lochs nutzen kann. Aufgrund der enormen Anziehungskraft bewegen sich Lichtstrahlen um ein Schwarzes Loch. Man stelle sich vor, die Lichtstrahlen bewegen sich in entgegengesetzter Richtung: The corresponding setup is based on an interferometer carried by a satellite that uniformly rotates in a circular orbit around the black hole. This satellite also carries a clock that measures the difference between propagation time of each of the co-propagating and counter-propagating beams [**?**].

Darüber hinaus arbeiten Lasergyroskope auf der Basis von Sagnac-Interferometern. Wenn eine Rotation auftritt, ändert ein Strahl kontinuierlich die Phase in Bezug auf den anderen Strahl. Das sich dabei verändernde Interferenzmuster wird in digitale Impulse umgesetzt, wobei jeder Impuls einen bestimmte Winkeländerung darstellt (typisch sind $5 \cdot 10^{-4}$ Grad pro Impuls). Die Rate, mit der die Impulse erzeugt werden, ist ein Maß für die Rotationsgeschwindigkeit.

Nobelpreisträger Arthur Schawlow hat sich eine interessante Methode überlegt, wie man in einem kleinen Experiment die Wellenlänge des Laserlichts bestimmen kann [**?**]. In der Messung wird das Interferenzmuster beobachtet, das entsteht, wenn das Licht unter streifendem Einfall auf ein Metalllineal fällt. Man sieht verschiedene Ordnungen n konstruktiver Interferenz. Aus der Geometrie und dem Abstand Interferenzmaxima wird die Wellenlänge des Lichts ermittelt. Dazu nutzt man, dass

$$n \cdot \lambda = d_{ruler} \cdot \frac{(y_n^2 - y_0^2)}{x_n - x_0} \tag{20.27}$$

wobei d_{ruler} der Abstand der Striche auf dem Metallmaßstab, x_0 der Abstand des Punkts, wo der Laser auf den Metallstab trifft zum Schirm, y_0 der Leuchtpunkt der spekularen Reflexion und y_n der Ort an dem die n-te Interferenzordnung auftritt. Mit der Methode erreicht eine Genauigkeit in der Größenordnung von 1%.

Laser in der Technik[4LP]

Beispiele aus der Welt der Isotope

Kohlendioxidlaser werden zum Schweißen, Härten, Umschmelzen, Schneiden, und zur Strukturierung eingesetzt. Zentimeterdicke Stähle können zerschnitten werden. Eine weitere Anwendung ist die Nutzung von kleinen spektroskopischen Unterschieden bei Isotopen [**?**]. Als Folge der Änderung der Kernmasse durch den Austausch von Atomen verschieben sich die Schwingungsfrequenzen in einem Molekül. Diese selektive Antwort der Isotope auf Lichteinstrahlung kann man nutzen zur isotopenselektiven Chemie und zur Isotopenanreicherung [**?**]. Man nutzt also die Quantisierung der Energiezustände der Materie! Das Molekül Schwefelhexafluorid SF_6 dient hier als Beispiel. Schwefel hat zwei Hauptisotope, ^{32}S und ^{34}S mit den Häufigkeiten 96% und 4%. Die Isotope schwingen mit leicht veränderter Frequenz. Das im Infrarotem liegen Absorptionsband liegt bei $950\,cm^{-1}$ und weist eine Isotopenverschiebung von $17\,cm^{-1}$ zwischen $^{32}SF_6$ und $^{34}SF_6$

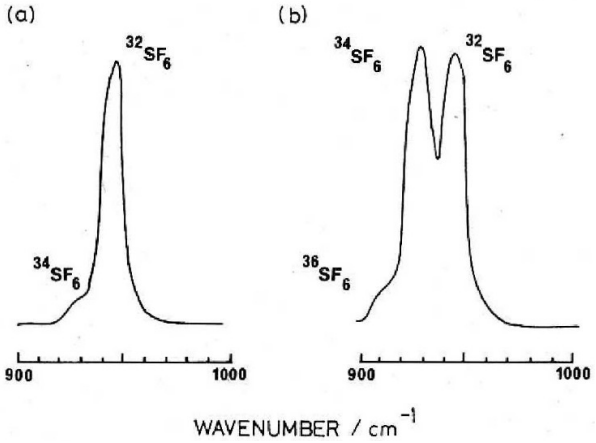


Abb. 20.40: Ausschnitt aus dem Infrarotspektrum von SF_6 (a) vor und (b) nach der Bestrahlung mit einem CO_2-Lasers bei 942.5 cm^{-1} [**?**].

auf. Die beiden Absorptionsbanden sind klar voneinander getrennt und können deshalb mit einem abgestimmten Laserstrahl selektiv angeregt werden. Dazu wird ein CO_2-Laser auf eine Wellenlänge eingestellt, die mit den Absorptionsbändern von $^{32}SF_6$ und $^{34}SF_6$ übereinstimmen. Bei Einstrahlung von 10.61 μm beispielsweise dissoziieren die $^{32}SF_6$ Moleküle praktisch vollständig, so dass das Restgas mit $^{34}SF_6$ angereichert wird. Abb. 20.40 zeigt, wie effektiv das Verfahren ist. Man nennt das Verfahren laser isotope separation, LIS Das Ausmaß der Anreicherung hängt entscheidend von den Druckverhältnissen ab. Typisch sind 1 Torr. Bei diesem Druck ist die mittlere Weglänge der Moleküle groß und Stöße zwischen den Molekülen rar und hat keine nachteilige Auswirkung auf den Grad der Isotopenanreicherung.

Die Urananreicherung ist ein weitere Anwendung dieser Methode [**?**]. Die Kernkraftwerke benötigen zur Energieproduktion angereichertes Uran. Ausgehend von Natururan (U-238: 99.27%; 0.72% U-235) wird die Konzentration des Isotops Uran-235 erhöht. Die gängigen Verfahren (Zentrifugen- und Diffusionstechnik) sind ineffizient und technisch anspruchsvoll. Da Uranisotope unterschiedlich auf CO_2-Laserfrequenzen reagieren, lassen sich Uran-235 und Uran-238 trennen. Das Verfahren nennt sich SILEX.[40] Etwaige Uranfabriken würden nur ein Viertel der Fläche konventioneller Anlagen beanspruchen und auch weniger Energie benötigen. Allerdings ist das Verfahren zur Herstellung von Kernwaffen geeignet und daher umstritten. Wie geht man vor? Moleküle, hier UF_6 wird isotopenselektiv durch Kohlendioxidlaserstrahlung angeregt. Die Moleküle werden in einem kalten Molekularstrahl transportiert. Wird $^{235}UF_6$ angeregt, verhindert man im Gegensatz zu $^{238}UF_6$ eine Kondensation der Teilchen. Die schwereren Aggregate (UF_6 Cluster) verbleiben auf der Molekularstrahlachse, während die leichteren $^{235}UF_6$-Moleküle senkrecht zur Strahlachse diffundieren und abgeschält werden können.

Eine Anwendung der Lasertechnik ist die Materialprüfung an Autoreifen. Hierzu wird der Laserstrahl in zwei Komponenten aufgeteilt und trifft von auf zwei Spiegel. Nach der Auffächerung des Strahls vor dem dritten Spiegel wird der Referenzstrahl auf die

[40] SILEX: *Separation of Isotopes by Laser Excitation*

Fotoplatte geworfen. Der zweite Strahl trifft nach dem Umweg über den Reifen auf die Platte und erzeugt das Hologramm. Bringt man dieses Hologramm des unbelasteten Zustands mit Belastungszuständen zur Deckung, ergeben sich Interferenzbilder. Ist der Reifen in einwandfreiem Zustand, werden die Linien gleichmäßig verlaufen. Treten infolge eines Defekts Spannungen auf, ergibt sich ein Muster.

Elektronik 4, 144 (1971)

Ein Beispiel aus der Welt der Computer

Excimerlaser spielen eine Schlüsselrolle in der Photolithografie. Diese dient der Herstellung von VLSI-Chips.[41] Als die Strukturen der integrierten Schaltkreise von 350 nm auf 130 nm im Jahr 2002 reduziert wurden, musste die Wellenlänge der für die photolithografische Strukturierung verwendeten Lichtquelle von 400 nm auf unter 200 nm verrigert werden. Quecksilberbogenstrahlung hatten bei Wellenlängen von 436 nm und 365 nm genügend Leistung um hohe Produktionsraten Strukturierungen nach den älteren 500 nm bzw. 350 nm Designregeln zu garantieren. Für die kleineren Strukturen nutzt man Excimerlaser. Die zugehörigen Linienbreiten sind breit genug, um die Bildung von Speckle-Mustern zu verhindern, aber gleichzeitig schmal genug (<2 nm), um Probleme durch Dispersion bei der optischen Bildgebung zu vermeiden. Die Strahlung aus KrF-Excimerlasern (248 nm) Wellenlänge unterstützt die Anforderungen bei 250 nm Designregeln, und der ArF-Excimerlaser (193 nm) können bei Strukturgrößen von 180 nm eingesetzt werden. Bei noch kleineren Strukturen, bis hinunter bis 100 nm sollten F_2-Excimerlaser zum Einsatz kommen, was aber an nicht verfügbaren optischen Elementen scheiterte. Mittlerweile setzt man hochrepetierende Systeme, die Licht aus lasererzeugten Plasmen nutzen (EUV-Lithographie)[42] [**? ? ?**].

Ein Beispiel aus der Fusionsforschung

Die bekannteste Methode, Bedingungen zu schaffen, um Fusion zu ermöglichen ist die Aufheizung eines Plasmas, das durch ein magnetisches Feld fixiert wird. Es gibt zwei unterschiedliche Konzepte: Tokamak und Stellerator.[43] Mit Beginn der 1970er Jahre wurde ein gänzlich anderes Konzept verfolgt: Erhitzen und Einschließen eines Plasmas mit Hilfe intensiver Laserstrahlen. Dazu wird das Laserlicht in viele Teilstrahlen aufgeteilt, einzeln verstärkt und schließlich am Target, einer millimetergroßen Kugel aus gefrorenem Deuterium/Tritium, wieder zusammengebracht. Der Vorteil ist, dass man das Laserlicht auf höchste Intensitäten bringen kann, ohne die Zerstörschwelle der optischen Komponenten erreicht. Außerdem kann man das Target gleichmäßig von allen Seiten beleuchten. Der Laserpuls ionisiert fast augenblicklich die Atome im Außenbereich des Pellets. Die

[41] VLSI: *Very Large Scale Integrated Circuit*

[42] EUV: *extended ultraviolet*

[43] *Lexikon:* **Tokamak** und **Stellerator** sind Fusionsreaktoren, die einen magnetischen Plasmaeinschluss nutzen. Das Deuterium/Tritium-Plasma wird in einer torusförmigen Vakuumkammer durch ein starkes Magnetfeld zusammengehalten.

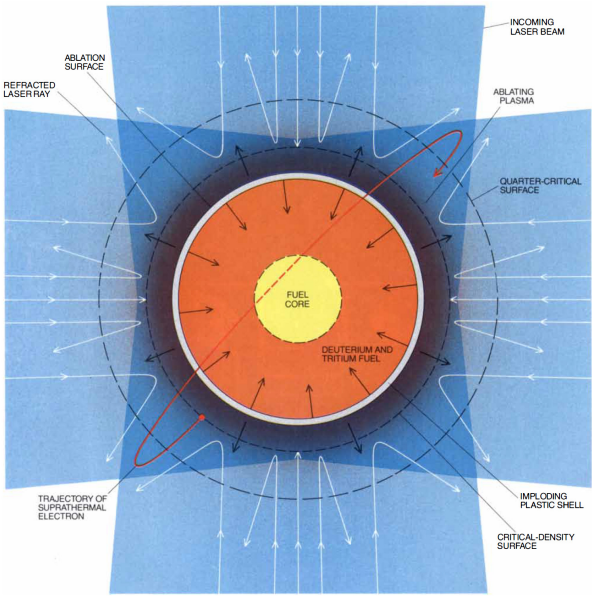


Abb. 20.41: Konzept der laserbasierten Fusion [**?**].

einfallende Energie wird dadurch in der äußeren Schicht stark erhitzt und dehnt sich explosionsartig aus. Gleiches passiert aber auch im Innern. Das heißt, die Kugel implodiert. Der Wasserstoff soll dadurch stark komprimiert und so stark erhitzt werden, das Fusion einsetzt. Abb. 20.41 illustriert das Konzept. Im Jahr 2021 gelang es am NIF[44], das erste Mal ein Experiment durchzuführen, in dem die Ausgangsenergie die einfallende Energie um das achtfache übertraf [**?**]. Der Wert 1.35 MJ. Wie wurde das Experiment durchgeführt? 192 Laserstrahlen werden in einen kleinen Goldzylinder geleitet und erhitzen ihn von innen. Dabei entsteht Röntgenstrahlung, die das D/T-Target implodieren lässt und einen Fusionsprozess auslöst.

Bei ihren Versuchen benutzten Studenten vom Massachusetts Institute of Technology einen Laserstrahl und richteten ihn auf eine Felsenoberfläche von etwa 40 mm Durchmesser. Auf dieser erschienen nach wenigen Sekunden Risse, die sich bald vermehrten. Nach Ansicht von Professor McGarry sollte es möglich sein, Tunnelbauten in gewachsenem Fels auszuführen, ohne dass dabei Abraum entsteht.

Neuheiten und Erfindungen 370, 108 (1967)

Beispiele aus der Materialbearbeitung

CO_2-Laser werden zum Schneiden, Schweißen und Bohren eingesetzt. Der Vorteil der Materialbearbeitung mit einem Laser ist, dass man Bleche schneiden kann, ohne auf Stanzwerkzeuge oder eine thermische Abtrennung zurückgreifen muss. Abb. 20.42 demonstriert, welche Schweißgeschwindigkeiten erzielt werden können. Die Bereiche für

[44]NIF: National Ignition Facility, USA

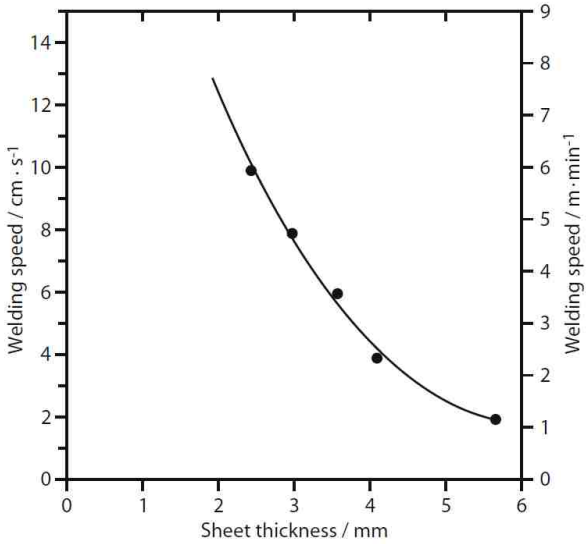


Abb. 20.42: Schweißgeschwindigkeit eines Hochleistungs-CO_2-Lasers (3.6 kW Ausgangsleistung) bei der Bearbeitung von unlegiertem Stahl [?].

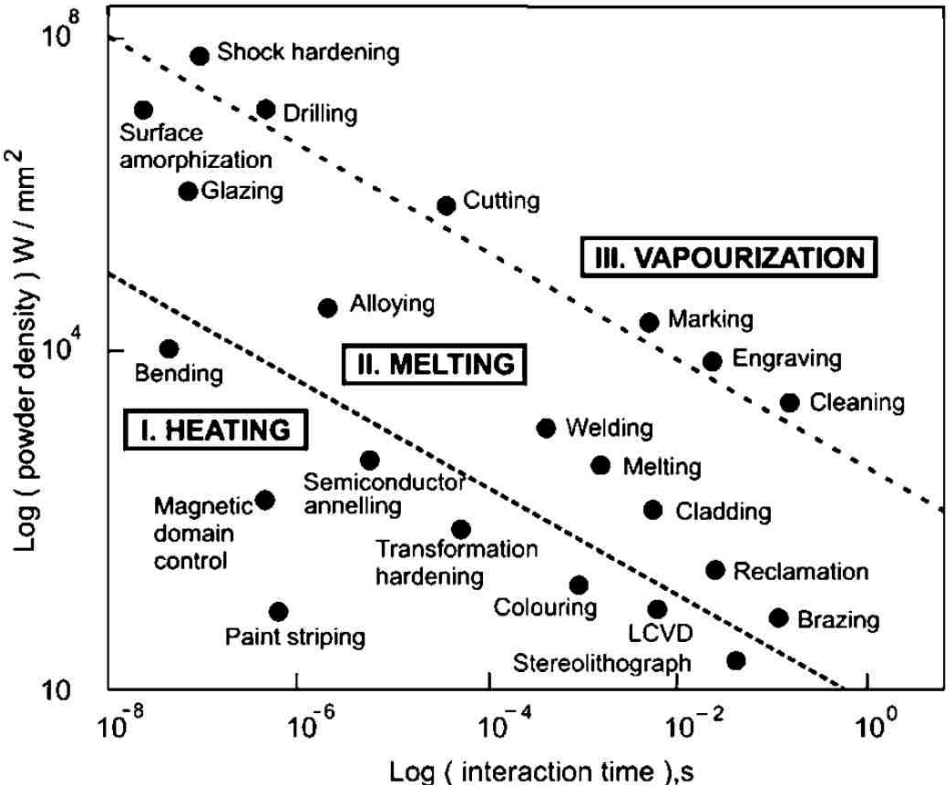


Abb. 20.43: Lasergetriebene Prozesse in Bezug auf die Kombination von Laserleistungsdichte und Wechselwirkungszeit für verschiedene Arten der Materialbearbeitung [?].

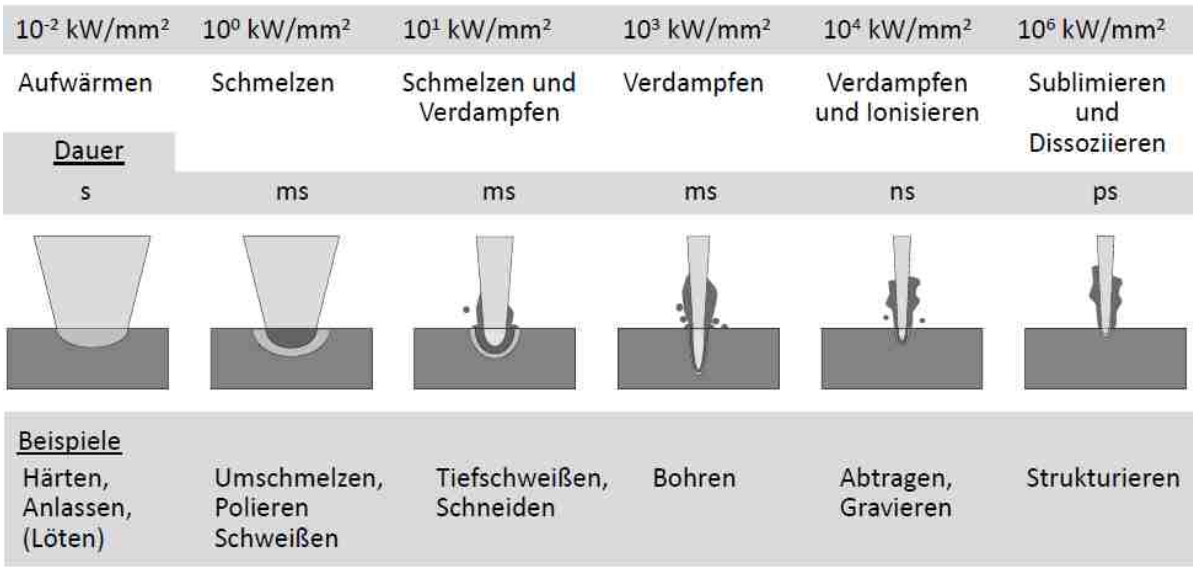


Abb. 20.44: Materialbearbeitung bei unterschiedlichen Pulsdauern und Laserintensitäten [?].

die lasergestützte Materialbearbeitung zeigt Abb. 20.43. Abb. 20.44 zeigt was mit Oberflächen passiert, wenn man die Intensität der Pulse, z.B. durch Verkürzung der Pulsdauer, immer weiter steigert. Eine kontinuierliche Bestrahlung mit $10^{-2}\,\mathrm{kW/mm^2}$ führt zum Aufwärmen der Probe. Man verwendet diese Bedingungen zum Laserhärten und -löten. Bei stärkerer Fokussierung $1.0\,\mathrm{kW/mm^2}$ und Pulsdauern im Bereich von ms kommt es zum Aufschmelzen der Oberfläche (Laserpolieren oder Cladding). Bei Intensitäten von mehr als $10\,\mathrm{kW/mm^2}$ verdampft die Schmelze, wobei eine Vertiefung entsteht, die es dem Laserstrahl erlaubt noch tiefer einzudringen. Bei über $10^3\,\mathrm{kW/mm^2}$ kommt es zur Sublimation (Bohren und Sublimationsschneiden) und schließlich ab $10^4\,\mathrm{kW/mm^2}$ und ns-Pulsen zur Bildung eines Plasmas. Alle physikalischen Zustandsformen (Festkörper, Schmelze, Dampf und Plasma) treten unter diesen Bedingungen auf kleinstem Raum auf. Eine Anwendung ist die Entwicklung kleiner und komplexer Komponenten durch den Einsatz der Laserbearbeitung unter Verwendung von *Computer Aided Design*. Diese Technologie basiert auf der wiederholten Abscheidung und Bearbeitung von Materialschichten, die als additive Freiform-Fertigungstechnik bekannt sind. Vorteil ist die Fähigkeit, komplexe Komponenten bei hoher Verarbeitungsgeschwindigkeit mit hoher Genauigkeit herzustellen.

Pulsed Laser Beam Welding of $Pd_{43}Cu_{27}Ni_{10}P_{20}$ Bulk Metallic Glass [?]: We used pulsed laser beam welding method to join $Pd_{43}Cu_{27}Ni_{10}P_{20}$ (at.%) bulk metallic glass and characterized the properties of the joint. Fusion zone and heat-affected zone in the weld joint can be maintained completely amorphous as confirmed by X-ray diffraction and differential scanning calorimetry. No visible defects were observed in the weld joint. Nanoindentation and bend tests were carried out to determine the mechanical properties of the weld joint. Fusion zone and heat-affected zone exhibit very similar elastic

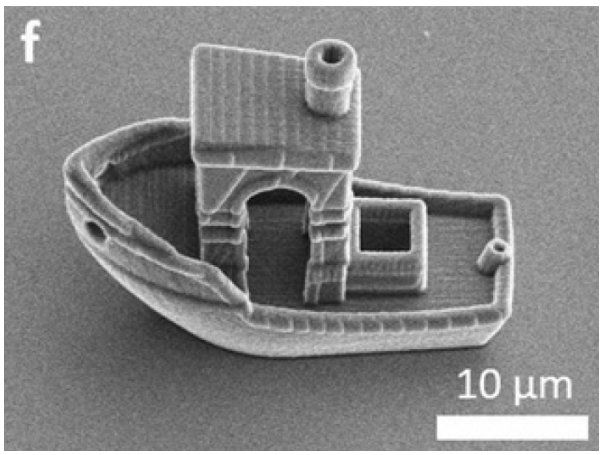


Abb. 20.45: Rasterelektronenaufnahme eines Schiffchens erzeugt durch das Verfahren der Zweiphotonen-Polymerisation [**?**].

moduli and hardness when compared to the base material, and the weld joint shows high ductility in bending which is accomplished through the operation of multiple shear bands. Our results reveal that pulsed laser beam welding under appropriate processing parameters provides a practical viable method to join bulk metallic glasses.

Partikel mit Durchmessern von wenigen μm sogenannte Mikroschwimmer, sollen, so die Vorstellung von Forschern im menschlichen Körper Arzneimittel zu Krankheitsherden transportieren. Kürzlich wurde ein 3D-Druckverfahren für Mikroschwimmer vorgestellt, bei der man durch Zweiphotonen-Polymerisation extrem kleine Strukturen erzeugen kann, siehe die Rasterelektronenaufnahme in Abb. 20.45 [**?**]. Der Länge des Boots beträgt nur 30 μm. Durch eine Mischung aus Wasser und Wasserstoffperoxid und eine katalytisch-wirkende Beschichtung aus Pt/Pd kann sich das Boot fortbewegen. Die entstehenden Bläschen treiben das Boot an.

Ein Beispiel aus der Supermarkt

Es ist interessant, dass es Barcodes schon lange vor der Einführung von Barcode-Laserscannern gab (Patent 1952). Wie funktioniert so ein Laserscanner? Ausgenutzt wird, dass die Dicke der Striche variiert. Änderungen in der reflektierten Laserstrahlung werden vom System detektiert, ausgewertet und einem Produkt zugeordnet. Eine ähnliche Technologie wird bei CDs (Firma Phillips, 1983), DVDs (1995) und BlueRays (2006) eingesetzt. Hier liefert ein Halbleiterlaser Licht, das durch einen Strahlteiler geschickt und auf die *disc* fokussiert wird. Reflektiertes Licht wird auf dem Rückweg über den Strahlteiler auf einen Detektor geleitet. Die Höhe der eingearbeiteten Unebenheiten ist $\lambda/4$ der verwendeten Laserwellenlänge. Trifft der Laserstrahl auf einen Höhenwechsel beträgt der Wegunterschied zwischen dem oberen und unteren Graben $\lambda/2$ und Interferenz führt zu einem Lichtsignal NULL auf dem Detektor. Gibt es keine Höhenänderung ergibt das Interferenzmuster den Wert EINS.

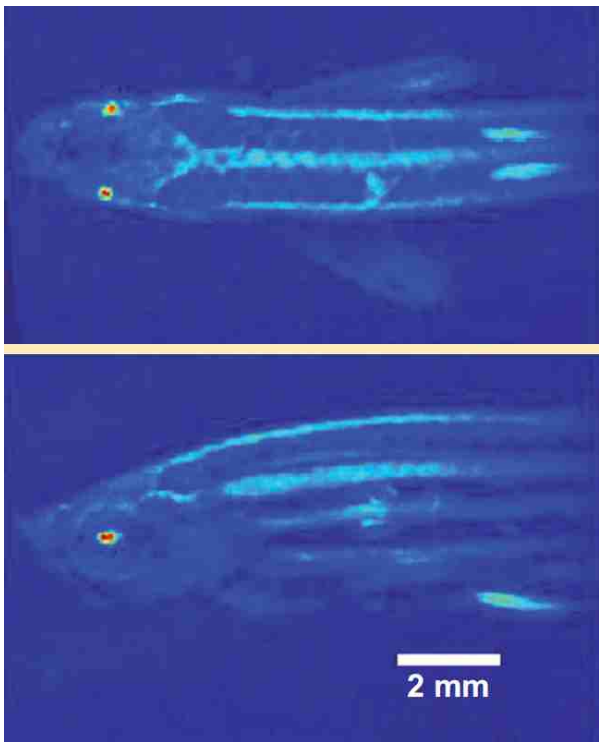


Abb. 20.46: Zwei Projektionen eines photoakustisches Tomographiebild eines Zebrafisches. Während der Bestrahlung mit 10 ns langen Laserpulsen wurden Drucksignale mit einem Mach-Zehnder-Interferometer aufgenommen. Das Bild wurde aus insgesamt 36 000 Drucksignalen rekonstruiert [**?**].

Laser in der Medizin^{4LP}

Ein Beispiel aus der Dermatologie

Der in den Bergen an der Grenze zu Österreich und Italien im Eis gefundene *Ötzi* stammte aus der Bronzezeit. Der Mann hatte mehrere Tätowierungen auf seinem Körper, die Tausende von Jahren überdauert haben. Welche laserbasierten Techniken gibt es, Tattoos zu entfernen? Dies geschieht mit Hilfe gütegeschaltete Rubinlaser, die seid den 70er Jahren eingesetzt werden [**?**]. Moderne Tätowiernadeln platzieren Tintenkörnchen in der Lederhaut unterhalb der Epidermis. Dies erfordert, dass Laserlicht tief in die Haut eindringen muss, um ein Tattoo zu entfernen. Dazu muss das Laserlicht die Epidermis durchdringen, die Melaninpigmente enthält. Das Problem ist, dass Melanin in einem breiten Wellenlängenbereich Licht absorbiert. Der Grad der Absorption nimmt allerdings bei längeren Wellenlängen ab. Eine weitere Anforderung ist, dass das einfallende Strahlung vom Tattoofarbstoff absorbiert werden muss. Bei farbigen Tattoos ist es deshalb notwendig, die Behandlung mit unterschiedlichen Laserwellenlängen durchzuführen. Bei der Behandlung werden die Farbpigmente in der Haut mit kurzen Laserpulsen bestrahlt. Dabei erreicht man Leistung im Bereich von $30 \cdot 10^6$ W. Die kurze Einwirkzeit verhindert, dass es zu einer thermischen Wechselwirkung (Verbrennungen) kommt. Zusätzlich wird die Wellenlänge so gewählt, dass man selektiv eine starke Absorption in den Tattoo-Pigmenten erreicht, ohne dass das umgebende Gewebe merklich geschädigt wird. Die bei der Lichteinkopplung ausgelöste photoakustische Schockwelle bewirkt man eine mechanische Schädigung des Farbpigments. Die Fragmente des Pigments werden über die Blutbahn abtransportiert.

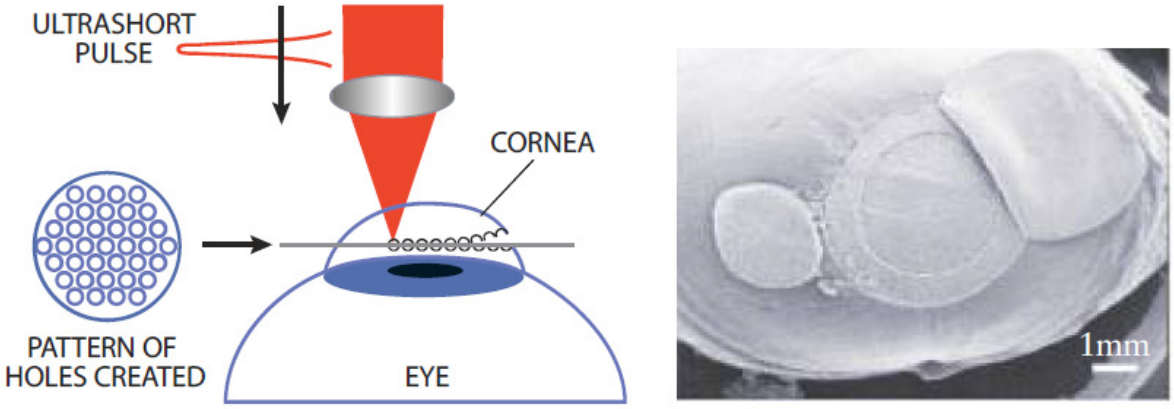


Abb. 20.47: Laserbehandlung eines Auges zur Wiederherstellung der Sehschärfe. Ultrakurze Laserpulse bohren feine Löcher in die Hornhaut, womit ein Teil der Cornea abgetrennt und aufgeklappt werden kann. Im nächsten Schritt wird die Augenlinse ebenfalls mit Laserpulsen bearbeitet und die Fehlsichtigkeit korrigiert [**?**].

Ein Beispiel aus der Bildgebung

Alexander Graham Bell berichtete im Jahr 1880 das erste Mal von der Erzeugung von Schall durch Licht [**?**]. Die Photoakustische Bildgebung hat das Potenzial, Bilder von Organen, wie Brust und Gehirn, bei gleichzeitig hohem Kontrast und hohe räumliche Auflösung zu erzeugen. Das Verfahren detektiert nicht Licht, sondern die lichtinduzierte Erwärmung. Eine tiefere optisch absorbierende Gewebeschicht nimmt dabei Energie aus dem Lichtfeld auf. Regt man die Struktur mit einem kurzen Laserpuls (ns) auf, erwärmt sich das Material bei nahezu konstantem Volumen. Die führt zu messbaren Schockwellen. Die Herausforderung, ist aus den akustischen Signalen auf die zugrundeliegende Struktur zu schließen. Die Methoden der Rekonstruktion sind inzwischen so weit entwickelt, dass man nicht mikroskopische, sondern auch tomographische Aufnahmen erstellen kann, siehe Abb. 20.46.

Beispiele aus der Augenheilkunde

Um Fehlsichtigkeiten zu korrigieren, ist es notwendig, die Augenlinse freizulegen und dann mit geeigneten Methoden die Brechkraft anzupassen. Erste chirurgische Eingriffe wurden schon im Jahr 1885 durchgeführt [**?**]. Durch mathematisch fungierte Perfektionierung (Nomogramme) von Hornhautschnitten stellten sich erste Erfolge ein. Der Einsatz von Laserstrahlen hat die Chirurgie in dieser Richtung extrem vorangebracht und man kann heutzutage mit hoher Präzession, solche Operationen durchzuführen [**?**]. Abb. 20.47 zeigt, wie das Verfahren arbeitet. Mit LASIK[45] ist es möglich, Kurzsichtig-

[45] *Lexikon:* Die refraktive Chirurgie bezeichnet Augenoperationen, die die Brechkraft des Auges verändern. Beim **LASIK-Verfahren**[46] wird die Laserstrahlung verwendet, um Myopie, Hyperopie oder einen Astigmatismus zu korrigieren, siehe Abb. 20.48.

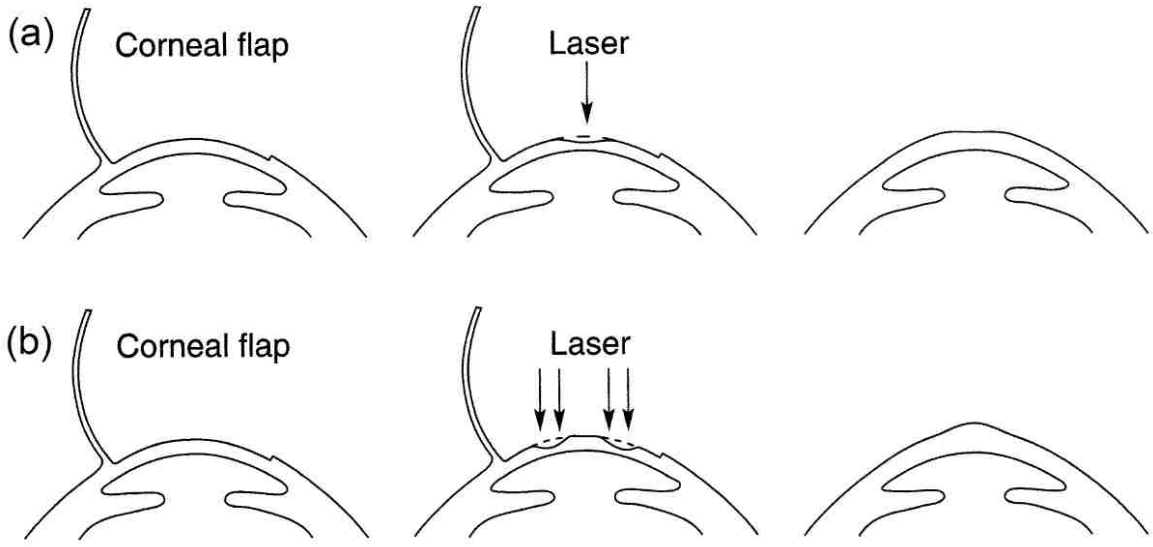


Abb. 20.48: Bei einer LASIK-Operation wird die zentrale Hornhaut durch die Laserbehandlung bei Myopie (a) abgeflacht und bei Hyperopie (b) stärker gekrümmt [**?**].

keit bis –10 dpt, Weitsichtigkeit bis +4 dpt und Astigmatismus bis –5 dpt zu korrigieren.

Ein Laserverfahren zur Früherkennung eines Glaukoms ist Scanning Laser Polarimetrie (SLP). Beim gesunden Auge sorgt der Augeninnendruck für eine gleichmäßige Form des Augapfels. Wenn das Kammerwasser, welches Linse, Iris und Hornhaut umspült, über den Blutkreislauf nicht mehr abfließen kann, steigt der Augeninnendruck und beeinträchtigt die Durchblutung des Sehnervs. In Folge dessen kommt es zur Zerstörung von Nervenfasern. Die Nervenfaserschicht der Netzhaut ist komplex strukturiert. Entscheidend für Untersuchung sind die zueinander parallelen Axone, deren regelmäßige Anordnung dafür sorgt, dass es bei einer polarisierten Lichtwelle zur Formdoppelbrechung kommt, siehe Abb. 20.49. Abhängig von der Polarisationsebene des Lichts breitet sich die Lichtwelle in der Nervenfaserschicht mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus und kommt es zu einer Phasenverschiebung. Geschädigte Abschnitte sind dünner und führen zu einer geringeren Doppelbrechung gegenüber gesunden Nervenfasern. Die hohe Empfindlichkeit des Verfahrens erlaubt es, Schädigungen an der Nervenfaserschicht festzustellen, lange bevor der Patient Einschränkungen seines Sehvermögens bemerkt.

Beispiele aus der Therapie

Wie kann man die Durchstimmbarkeit von Laserstrahlung in der Therapie nutzen?
Die Lichtabsorption wird im wesentlichen durch Wasser, Melanin und Hämoglobin bestimmt. Das für optische Eingriffe nutzbare therapeutische Fenster liegt zwischen 600 und 1200 nm. Die Absorption von Strahlung durch Blut nimmt bei längeren Wellenlängen ab. Das führt dazu, dass die Eindringtiefe bei einer Wellenlänge von 700 nm etwa 10-mal

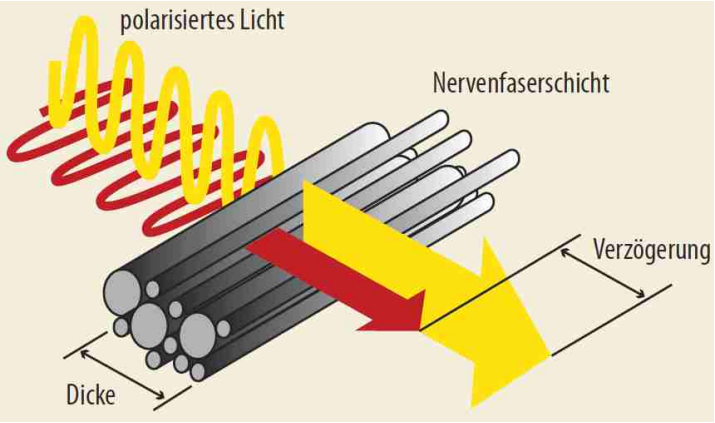


Abb. 20.49: Bei der Formdoppelbrechung durchlaufen die Komponenten eines polarisierten Laserstrahl die Nervenfaserschicht mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Die resultierende Phasenverzögerung ist proportional zur Schichtdicke und gibt dadurch Auskunft über den Gesundheitszustand des Gewebes [**?**].

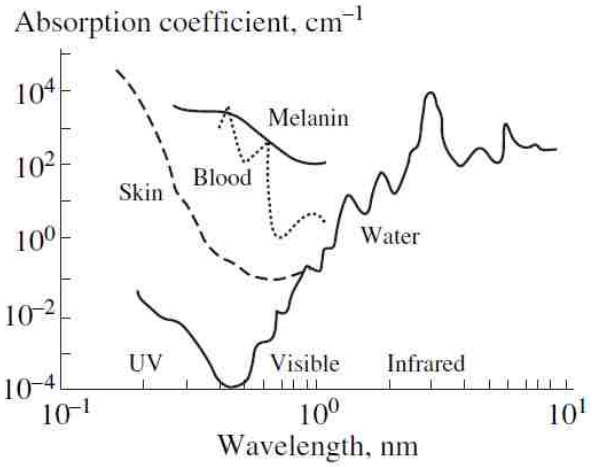


Abb. 20.50: Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten für verschiedene Gewebe [**?**].

größer ist als bei 500 nm. Langwellige Laserstrahlung eignet sich also, um tiefere Hautschichten zu behandeln. Eine spektrale Analyse liefert, dass es im Bereich von 540 und 570 nm zwei Wellenlängenbereiche gibt, bei denen Blut Licht deutlich stärker absorbiert. Verwendung von Laserlicht bei diesen Wellenlängen führt also im Blut zu einer starken Absorption von Strahlung. Die darauf aufbauende Photodynamische Therapie beruht auf der Wirkung eines lichtempfindlichen Medikaments, die dem Patienten verabreicht wird [**?**]. Nach einer gewissen Zeitspanne hat sich die Arznei im erkrankten Gewebe angesammelt. Der erkrankte Bereich wird dann mit Licht geeigneter Wellenlänge beleuchtet. Vom Medikament absorbiertes Licht führt zur Umwandlung in toxische Spezies, die die Umgebung des Gewebes zerstört. Da weder das Medikament noch Licht allein ausreicht, um einen Schaden zu verursachen, eröffnet sich mit dieser Behandlung die Möglichkeit, Krebszellen mit minimalem Wirkung auf benachbartes gesundes Gewebe abzutöten. Gegenüber anderen Therapien, wie der Verwendung ionisierender Strahlung

(Kapitel *Ionisierende Strahlung*) oder Chemotherapie wird das Gewebe nicht großflächig zerstört und Nebenwirkungen reduziert.

A laser-driven nanosecond proton source for radiobiological studies [?]: Ion beams are relevant for radiobiological studies and for tumor therapy. In contrast to conventional accelerators, laser-driven ion acceleration offers a potentially more compact and cost-effective means of delivering ions for radiotherapy. Here, we show that by combining advanced acceleration using nanometer thin targets and beam transport, truly nanosecond quasi-monoenergetic proton bunches can be generated with a table-top laser system, delivering single shot doses up to 7 Gy[47] to living cells. Although in their infancy, laser-ion accelerators allow studying fast radiobiological processes as demonstrated here by measurements of the relative biological effectiveness of nanosecond proton bunches in human tumor cells.

Für eine effiziente und präzise Ablation von Gewebe ist eine starke Absorption der Laserstrahlung wünschenswert, so dass die optisch zugeführte Energie, bei der Umwandlung in Wärme nur ein geringes Volumen aufheizt. Gewebe enthält Chromophore, wie Hämoglobin oder Proteine, die Licht absorbieren, allerdings in unterschiedlichen Spektralbereichen, wie Abb. 20.50 zeigt. Wie geht man bei diesen mikrochirurgischen Eingriffen vor? Gewebe wird durch den Laserstrahl bis zum Siedepunkt erhitzt. Wasser verdunstet und der Schneidprozess erreicht tiefere Gewebeschichten. Bei CO_2-Lasern ist die Absorptionslänge mit cira 10 μm gering. An den Grenzen der Schnittzone ist die Temperatur niedrig, was zu einer guten Gerinnung führt. Bei manchen Krankheiten werden Blutgefäße blockiert, was eine ernsthafte Gefahr für das Leben eines Patienten sein. Das Plaque kann unter Umständen schwer zu entfernen sein. Angioplastie nennt man die Methode, die diese Blutgefäße wieder öffnet. Bei der Angioplastie mit Lasern führt man eine optische Faser in das Blutgefäß ein und man nutzt die Einwirkung von Laserlicht, um die Gefäßbahn wieder zu öffnen. Es zeigt sich, dass ein im Vergleich rein thermisches Vorgehen benachbarte Bereiche aufgrund der Wärmeleitung deutlich stärker schädigt.

Fernerkundung[4LP]

Das erste Fernerkundungssystem unter Verwendung von Laserstrahlung (LIDAR) wurde von Smullin und Fiocco auf der Basis des Rubinlasers entwickelt. Dieses System ermöglichte es, den Abstand zwischen Erde und Mond mit hoher Genauigkeit zu bestimmen [**?**]. Was ist die experimentelle Herausforderung? Der Reflektor, der beispielsweise von der Apollo-15 Mission auf dem Mond zurückgelassen wurde, hat eine Fläche von nur 0.34 m^2. Das deutlich kleiner als der von der Erde ausgestrahlte Laserfleck, der auf dem Mond viele Quadratkilometer groß ist. Messungen können deshalb nur bei extrem gute Atmosphärenbedingungen durchgeführt werden. Aufgrund der Divergenz des Laserstrahls trifft nur eines der $25 \cdot 10^6$ Photonen den Retro-Reflektor . Der reflek-

[47] Das Gray (Gy) (Einheit J/kg) ist im SI-System die durch ionisierende Strahlung verursachte Energiedosis.

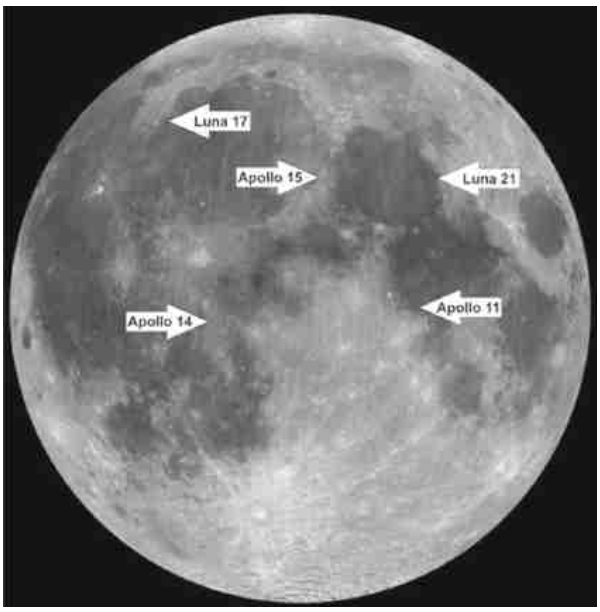


Abb. 20.51: Retroreflektor-Arrays auf der Mondoberfläche [**?**].

tierte Lichtstrahl ist ebenfalls divergent und beleuchtet auf der Erde eine Fläche mit einem Durchmesser von 15 km (700 km^2). Hinzukommen Verluste in der Atmosphäre und an den optischen Komponenten (Reflektor, Teleskop). Im Mittel erreicht, bei einem Signalverlust von 18 Größenordnungen, kaum eines der ausgesendeten Photonen den Empfänger. Eine räumliche, spektrale und zeitliche Filterung sorgt dafür, die schwachen Signale vom Untergrund zu unterscheiden.

Zwei Arten von Lasern, der Halbleiter-Laser und der mit einem Rubin-Laser gekoppelte Flüssigkeitslaser, sind so weit entwickelt worden, daß sie als Detektoren zur Bestimmung von Luftverschmutzungen eingesetzt werden können. Beide Laser, die im infraroten Bereich zwischen 2 ?m und 20 ?m arbeiten, haben Linienbreiten, die schmal genug sind, um selbst die schmalsten Absorptionslinien schwerer Moleküle im Freien zu ermöglichen. Neben einem Einsatz im Laboratorium ist auch die Verwendung im Freien möglich.

Naturwissenschaftliche Rundschau 5, 201 (1972)

Lunar Laser Ranging: A tool for general relativity, lunar geophysics and Earth science [**?**]**:** Only a few sites on Earth are technically equipped to carry out Lunar Laser Ranging (LLR) to retroreflector arrays on the surface of the Moon, see Fig. 20.51. Despite the weak signal, they have successfully provided LLR range data for about 49 years, generating about 26,000 normal points. Recent system upgrades and new observatories have made millimeter-level range accuracy achievable. Based on appropriate modeling and sophisticated data analysis, LLR is able to determine many parameters associated with Earth–Moon dynamics, involving the lunar ephemeris, lunar physics, the Moon's interior, reference frames and Earth orientation parameters. LLR has also become one of the strongest tools for testing Einstein's theory of general relativity in the solar system. By extending the standard solution, it is possible to solve for parameters related to gravitational physics, like the temporal variation of the gravitational constant,

metric parameters as well as the strong equivalence principle, preferred-frame effects and standard-model extensions.

LIDAR[48] ist eine Abtasttechnik und wird in der Hauptsache Entfernungsmessungen verwendet. Darüber hinaus ist es möglich an zusätzliche Informationen, wie die Ozonkonzentration oder vulkanische Aerosole in der Stratosphäre, zu gelangen [**?**]. Zur Abstandsbestimmung werden Echos aufgezeichnet, die von den Objekten (Atome, Moleküle, Aerosolen, Wolken) zurück gestreut werden. Der Zeitabstand zwischen der Aussendung des Lichtstrahls und der Detektor der Photonen gibt Auskunft über die Entfernung.

Die Möglichkeiten der LIDAR-Systeme kann durch die Messung inelastischer Streuprozesse erweitert werden. Dies beinhaltet Raman-[49] und Brillouinstreuung[51] oder Fluoreszenz. Damit kann man die physikalisch-chemische Zusammensetzung eines Mediums bestimmen. Das Prinzip beruht darauf, dass es bei der Rückstreuung des Lichts an den Molekülen zu einer Wellenlängenverschiebung in Bezug auf die einfallen Strahlung kommt. Beispielsweise sorgt der Raman-Effekt dafür, dass Licht von 355 nm, das mit Wassermolekülen wechselwirkt, spektral nach 407 nm verschoben wird. Man nennt dieses Phänomen Ramanstreuung. In einem anderen Verfahren verwendet man die Methode der differentieller Absorption [**?**]. Licht wird bei zwei eng benachbarten Wellenlängen auf ein Medium eingestrahlt. Eine der beiden Wellenlängen wird im Ausbreitungsmedium stark absorbiert. Im Vergleich mit der vom Medium nicht absorbierten Wellenlänge erhält man aus dem Verhältnis der rückgestreuten Intensitäten ein Signal, das proportional zur Molekülkonzentration ist. Schließlich gibt es Doppler-LIDARs, die man zur Messung von Windgeschwindigkeiten verwenden kann (siehe Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*). Im Experiment wird die durch die Geschwindigkeit der Partikel hervorgerufene Wellenlängenverschiebung im reflektierten Licht bestimmt.

Comparative lidar study of the optical, geometrical, and dynamical properties of stratospheric post-volcanic aerosols, following the eruptions of El Chichon and Mount Pinatubo [**?**]**:** The spatiotemporal evolution of aerosols formed from precursors injected into the stratosphere by major volcanic eruptions, such as those of El Chichon in 1982 and Mount Pinatubo in 1991, has been studied using a ground-based lidar system located at the Observatoire de Haute-Provence (OHP) in southern France (44^{o}N, 5^{o}E). From the inversion of the lidar signals the optical, geometrical and dynamical properties of the particles have been determined as a function of time after the eruption. In immediate post-volcanic conditions, when the optical thickness of

[48] LIDAR: Light Detection And Ranging

[49] *Lexikon:* Der **Raman-Effekt**[50] bewirkt bei der Wechselwirkung mit Molekülen eine Änderung der Wellenlänge des Lichts. Die Wellenlängenverschiebung charakteristisch ist für das betrachtete Molekül.

[51] *Lexikon:* Die **Brillouin-Streuung** wird durch die nichtlineare Wechselwirkung mit akustischen Phononen verursacht. Das gestreute Photon hat nach der Wechselwirkung eine geringere Energie, wobei die restliche Energie an ein Phonon abgegeben wird. Die Kopplung der optischen Feldern mit den akustischen Wellen erfolgt über Elektrostriktion.

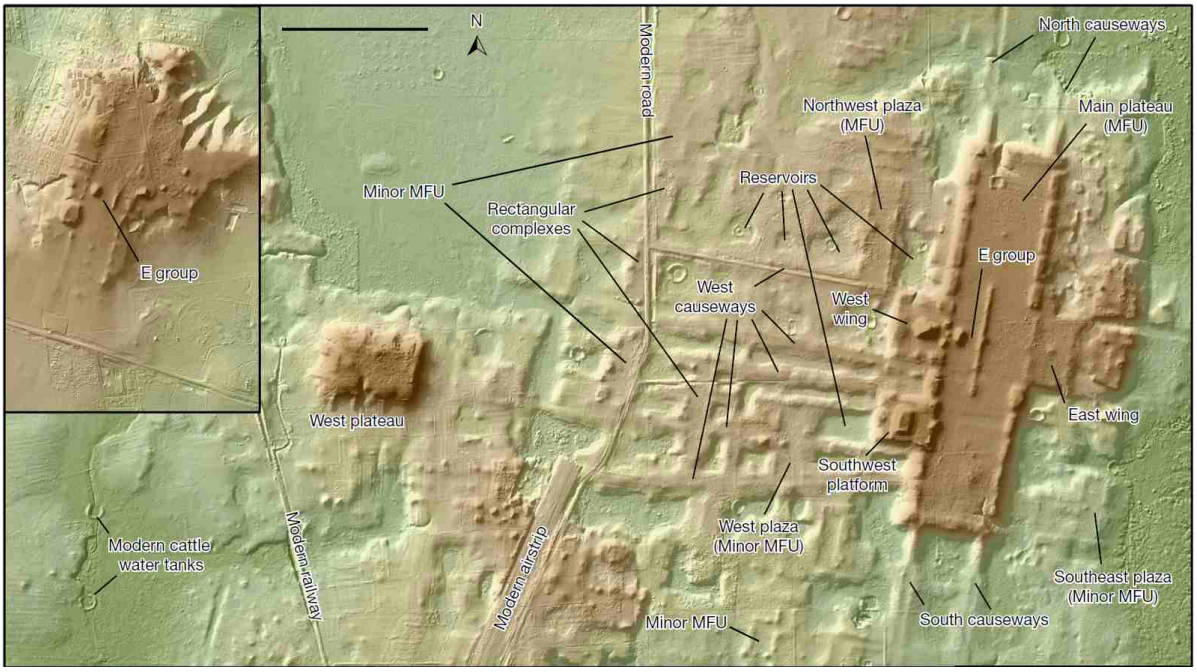


Abb. 20.52: LIDAR-Erkundung, die zur Entdeckung einer riesigen Plattform aus Lehm und Erde in Mexiko führte, die man auf 1000-800 v.Chr. datiert kann. Die Struktur (E group) wurde wahrscheinlich für astronomische Beobachtungen verwendet (Maßstab 500 m) [**?**].

particles in the stratosphere is largely enhanced, an estimate of the aerosols backscatter phase function has been evaluated directly from the lidar measurements, using a size-distribution model adjusted to in situ balloon measurements. The precision of this determination lies in the ±15% range. Values of the mean radius of the particles, of their integrated content, surface areas, and sedimentation velocities are then derived from the systematic lidar measurements performed at OHP. These values are compared for the two major volcanic eruptions which have occurred over the last decade. Although the injection of sulphur dioxide was twice as large for the Mount Pinatubo eruption as compared to the El Chichon case, the diffusion of the cloud in the two hemispheres due to the interaction of the particular phase of the quasi-biennal oscillation with several other dynamical processes at the time of the eruption, led to the observation of similar values for the aerosol content over the Observatoire de Haute-Provence in the months just following the two events. However, the residence time of the particles in atmospheric layers below 20 km are 4 months longer after the Mount Pinatubo eruption, caused by the observed difference in the initial vertical distribution of the aerosol cloud.

LiDAR-Systeme werden auf Satelliten eingesetzt oder befinden sich in Flugzeugen, Helikoptern und Drohnen. Das erste Weltraumeinsatz als Höhenmesser war im Jahr 1969 an Bord von Apollo 11. Spätere Mission erkundeten die Topographie von Mond, Mars, Merkur oder des Asteroiden 433 Eros.

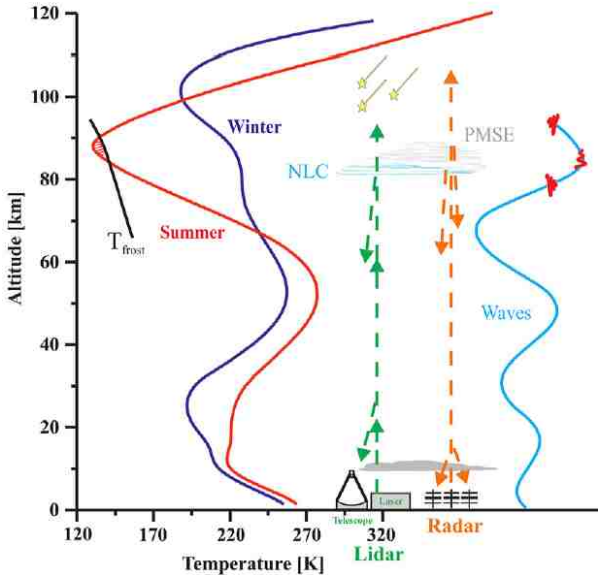


Abb. 20.53: Temperaturprofile in hohen Breiten (70°N) für Sommer (rot) und Winter (blau). Im Sommer sind die Frosttemperaturen (schwarz) in der Mesopausenregion höher als die atmosphärischen Temperaturen. Dies ermöglicht die Bildung von Eispartikeln (leuchtende Nachtwolken, NLC) und führt zu Radarechos (MSE) [**?**].

Ein Beispiel aus der Archäologie

Eine interessante Anwendung für LIDAR findet man in der Altertumsforschung. Mit dem Flugzeug oder einer Drohne wird die Topographie einer Landschaft aufgezeichnet. Mittels Bildverarbeitung wird ein Modell des Geländes erstellt, bei dem die Vegetation digital entfernt wird. Bereiche mit Wohnungen, Pyramiden oder Paläste verraten sich durch gerade Linien und Ecken und verweisen auf einen menschlichen Ursprung. Auf den ersten Blick erscheint ein solches Vorgehen nicht beeindruckend, insbesondere für trockene Landschaften. Es ist aber sehr effektiv, wenn Bäume die Sicht verdecken. Eine mit einem Flugzeug durchgeführte LIDAR-Kampagne kann in kürzester Zeit mehr Informationen liefern, als jahrzehntelange herkömmliche archäologische Untersuchungen.

Monumental architecture at Aguada Fénix and the rise of Maya civilization [?]: Archaeologists have traditionally thought that the development of Maya civilization was gradual, assuming that small villages began to emerge during the Middle Preclassic period (1000-350 BC; dates are calibrated throughout) along with the use of ceramics and the adoption of sedentism. Recent finds of early ceremonial complexes are beginning to challenge this model. Here we describe an airborne lidar survey and excavations of the previously unknown site of Aguada Fénix (Tabasco, Mexico) with an artificial pla-

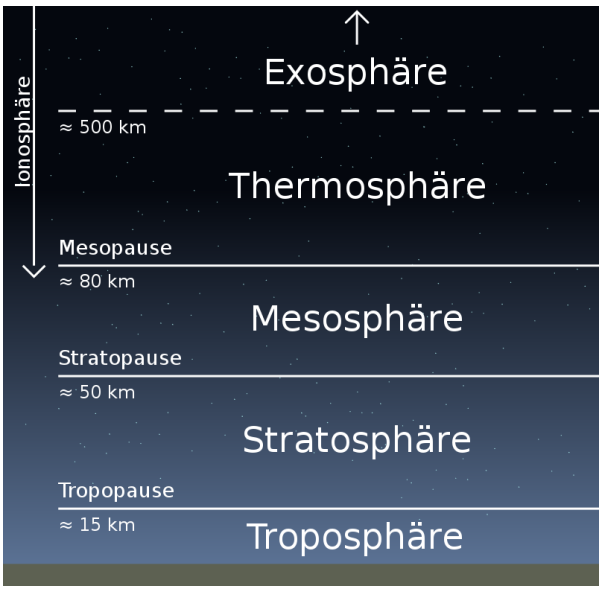


Abb. 20.54: Aufbau der Erdatmosphäre.

teau, which measures 1,400 m in length and 10 to 15 m in height and has 9 causeways radiating out from it, see Fig. 20.52. We dated this construction to between 1000 and 800 BC using a Bayesian analysis of radiocarbon dates. To our knowledge, this is the oldest monumental construction ever found in the Maya area and the largest in the entire pre-Hispanic history of the region. Although the site exhibits some similarities to the earlier Olmec centre of San Lorenzo, the community of Aguada Fénix probably did not have marked social inequality comparable to that of San Lorenzo. Aguada Fénix and other ceremonial complexes of the same period suggest the importance of communal work in the initial development of Maya civilization.

Ein Beispiel aus der Atmosphärenphysik

Das Institut für Atmosphärenforschung (IAP) in Kühlungsborn bei Rostock hat eine Reihe von LIDARs im Einsatz, um optische Messungen in der oberen Atmosphäre durchzuführen, Abb. 20.54. Mit Hilfe dieser Systeme werden Prozesse in der Mesosphäre beobachtet. Die obere Mesosphäre charakterisiert den Übergang von der Erdatmosphäre zum Weltraum. Die mittlere freie Weglänge der Atome und Moleküle wird hier makroskopisch groß. Objekte aus dem Weltraum kommen hier erstmals mit der Erdatmosphäre in Berührung. Abb. 20.53 zeigt den Temperaturverlauf als Funktion der Höhe über Grund im Vergleich von Sommer und Winter.[52] Man erkennt, dass es in der oberen Atmosphäre im Winter wärmer ist als im Sommer und dass es innerhalb weniger Höhenkilometer zu starken Temperaturänderungen kommt. Die obere Atmosphäre beeinflusst auch das Klima auf der Erdoberfläche, da der Hauptteil der einfallenden Strahlung in der Mesosphäre

[52] *Lexikon:* **Leuchtende Nachtwolken** sind kaum sichtbare wolkenähnliche Phänomene in der oberen Atmosphäre der Erde. Aus dem Weltraum betrachtet sind sie aufgrund diffuser Streuung an Kristallen im Sommer im Bereich der polaren Mesopause sichtbar. Sie bestehen aus Eiskristallen und sind vom Erdboden aus nur bei Dämmerung beobachtbar.



Abb. 20.55: Laserlicht (rechts) kann für mehr Fahrsicherheit auf dunklen Straßen sorgen. Die Reichweite ist doppelt so groß wie gewöhnliches Fernlicht (links) [**?**].

absorbiert wird. Man vermutet einen merklichen Einfluss auf die auf der Erde herrschenden Temperaturen durch den Sonnenzyklus. Allerdings ist der zugrundeliegende Mechanismus, d.h. wie die Dynamik in der Mesosphäre an die unteren Regionen koppelt, noch unklar [**?**].

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Welt der Automobile

Laser und LIDAR-Systeme werden auch in nichtwissenschaftlichen Bereichen eingesetzt. LIDARs sollen beispielsweise in autonom fahrenden Autos zum Einsatz kommen, um die Verkehrssicherheit erhöhen. Das LIDAR-Verfahren hat im Vergleich zum Radar eine höhere Auflösung und ist weniger rechenintensiv als eine Auswertung von Kamerabildern. Abb. 20.55 zeigt ein Beispiel, wie man unter Verwendung von Laserdioden, die Eigenschaften des Fernlichts im Auto merklich verbessern kann [**?**].

Ein Beispiel aus der Biologie

Laserlicht ist geeignet, um die chemische Zusammensetzung einer Probe zu bestimmen. Diese Methode nennt sich LIBS[53] Bei der LIBS-Analyse wird ein Laserstrahl wird auf einen kleinen Bereich fokussiert, wodurch ein μm-großes Plasma mit Temperaturen von etwa $2 \cdot 10^4$ K erzeugt wird. Der vom Laser bestrahlte Bereich der Probe wird vollständig verdampft und in seine atomaren Bestandteile zerlegt. Eine spektroskopische Analyse der Plasmawolke liefert Emissionslinien der in der Probe enthaltenen Elemente. Abb. 20.56 zeigt die einzelnen Phasen des LIBS-Prozesses. Innerhalb von μs erhält man eine vollständige Analyse der Probe. Ist das Verfahren geeignet, ein Bakterium allein anhand seiner atomaren Zusammensetzung zu identifizieren? JA [**?**]! Es wurde gezeigt, dass man mit LIBS Bakterien, Sporen, Pollen und Proteine anhand der atomaren Signaturen der anorganischen Spurenelementen in Mikroorganismus identifizieren kann, siehe

[53]LIBS: *Laser-Induced Breakdown Spectroscopy*

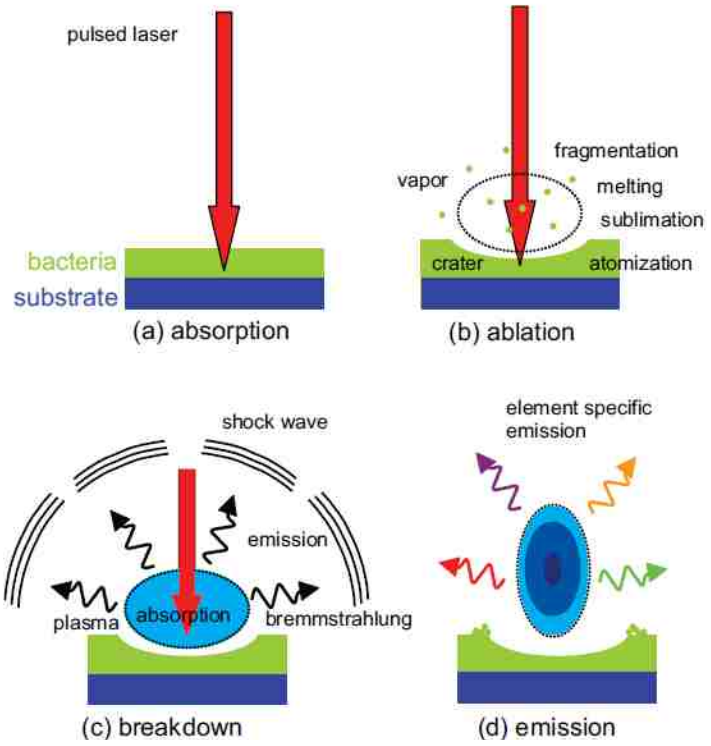


Abb. 20.56: Schema der LIBS Untersuchungsmethode. (a) Energie wird durch kurze (ns) Laserpulse im Substrat deponiert. (b) Der Energieübertrag erhitzt die Probe. Durch die Verdampfung bildet sich eine Gaswolke über der Oberfläche. (c) Es bilden sich nm-große Tropfen. Durch die Wechselwirkung des Partikels mit der intensiven Laserstrahlung kommt es zuerst zur Bildung eines Plasmas. (d) Die Plasmafahne dehnt sich aus und kühlt ab. Nach etwa einer μs beobachtet man Lichtemission aus Atomen und Ionen und damit Signaturen der in der Probe vorhandenen Elemente [**?**].

Abb. 20.57. Darüber gibt es auch Erfolge beim Nachweis medizinisch relevanter Bakterien wie Streptokokken und Staphylokokken. Es sollte klar sein, dass man mit LIBS nicht alle biologischen Substanzen identifizieren kann. Lebendes Gewebe ist komplex und die Bausteine sind zu facettenreich. Eine Analyse der atomaren Linien ist daher nicht ausreichend, um Signaturen komplexerer Strukturen aufzulösen. Die LIBS-Analyse der Elemente liefert aber möglicherweise wichtige Informationen, und man kann eine entsprechende Datenbank nutzen, um beispielsweise gefährliche Stoffe frühzeitig und schnell zu erkennen.

Modernste Instrumente erfassen über das LIBS-Spektren einen chemischen Fingerabdruck, mit dem sich antike Artefakte aus Schiffswracks identifizieren lassen. Die Analyseobjekte wurden in vier verschiedene Gruppen unterteilt, Bronzelegierungen, Metallstücke, Keramik und Murmeln. Das Modell wurde unter unterseeisch simulierten Laborbedingungen an einer Reihe von Stücken getestet, die aus verschiedenen Schiffswracks von vier Unterwasser-Ausgrabungsstätten unterschiedlichen Alters gesammelt

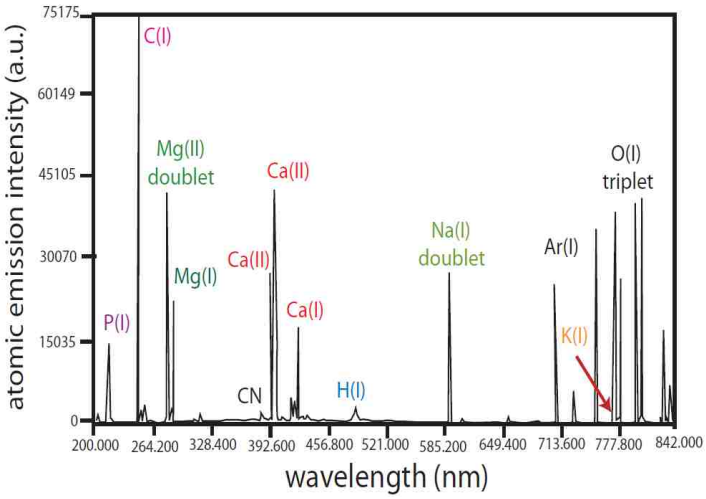


Abb. 20.57: LIBS-Emissionsspektrum von Escherichia coli C. Die relativen Intensitäten von 31 atomaren Emissionslinien (Atme (I), Ionen (II)) kann man sechs in der Probe vorhandenen Elementen zuordnen und diese ergeben einen spektralen Fingerabdruck des Bakteriums [**?**].

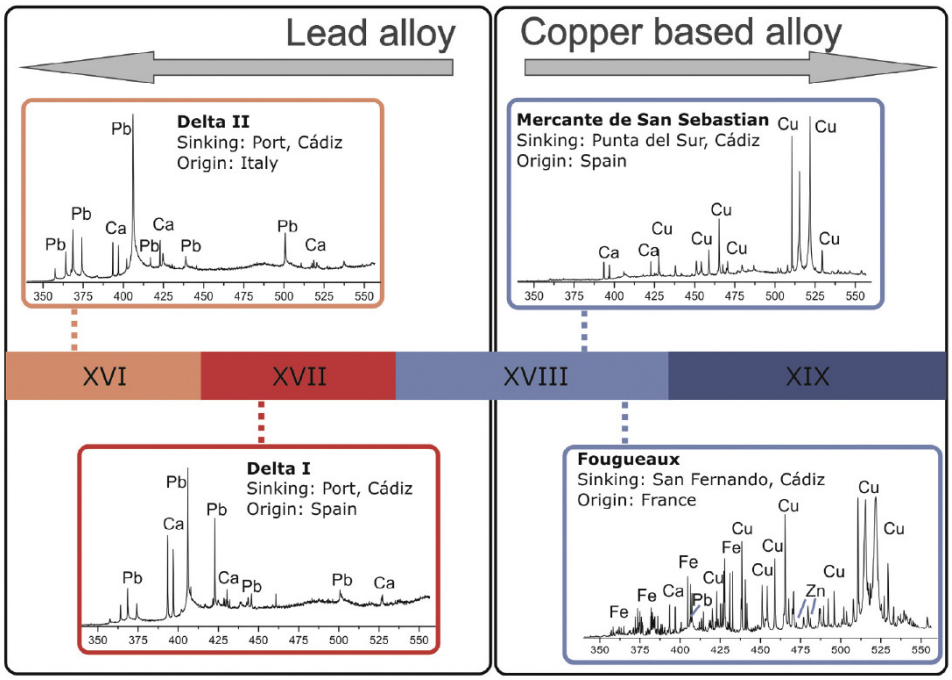


Abb. 20.58: Chronokulturelle Sortierung der Entwicklung der Zusammensetzung von Artefakten beginnend mit Blei bis zu kupferbasierten Legierungen [**?**].

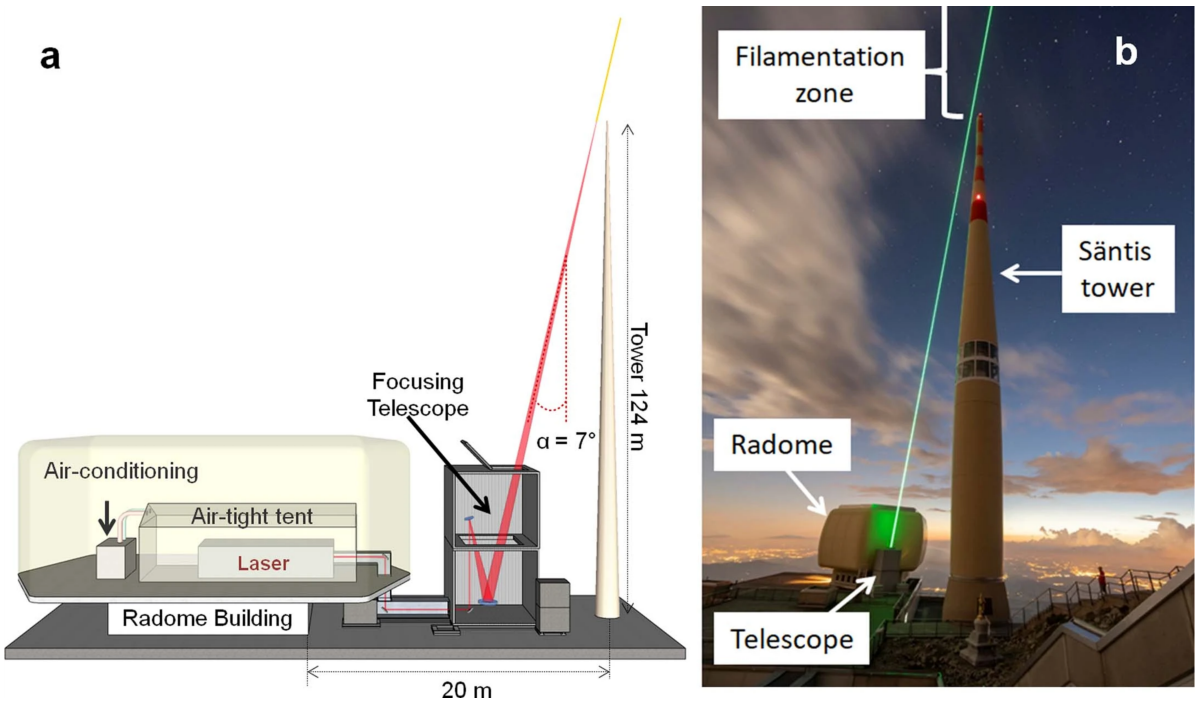


Abb. 20.59: Versuchsaufbaus auf dem Gipfel des Säntis und Ausrichtung des Laserstrahls [**?**].

wurden. Es war möglich, die Proben chronologisch und geografisch zu sortieren und zu klassifizieren, siehe Abb. 20.58.

Single-cell biological lasers [?]: Since their invention some 50 years ago, lasers have made a tremendous impact on modern science and technology. Nevertheless, lasing has so far relied on artificial or engineered optical gain materials, such as doped crystals, semiconductors, synthetic dyes and purified gases. Here, we show that fluorescent proteins in cells are a viable gain medium for optical amplification, and report the first successful realization of biological cell lasers based on green fluorescent protein (GFP). We demonstrate in vitro protein lasers using recombinant GFP solutions and introduce a laser based on single live cells expressing GFP. On optical pumping with nanojoule/nanosecond pulses, individual cells in a high-Q microcavity produce bright, directional and narrowband laser emission, with characteristic longitudinal and transverse modes. Lasing cells remained alive even after prolonged lasing action. Light amplification and lasing from and within biological systems pave the way to new forms of intracellular sensing, cytometry and imaging.

Ein Beispiel aus der Welt der Blitze

Die Idee eines Blitzableiters geht auf Benjamin Franklin zurück. An der obersten Spitze eines hohen Gebäude montiert, stellt es einen bevorzugten Einschlagsort für Blitze

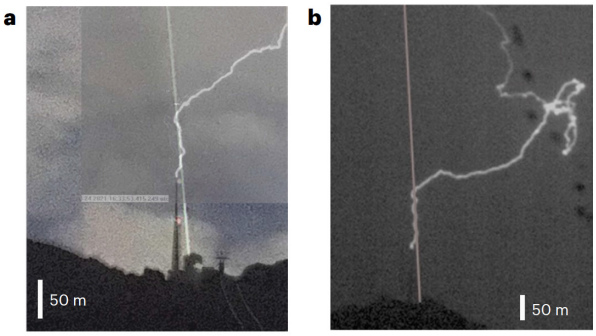


Abb. 20.60: Schnappschüsse von lasergesteuerten Blitzereignissen vom 24. Juli 2021 [**?**].

dar. Ein Leiter, mit einer Erdungselektrode verbunden, leitet die Entladung in die Erde ab. Allerdings schützt ein solcher Blitzableiter nur die unmittelbare Umgebung des Gebäudes. Können Laser hier hilfreich sein? Erste Versuche gehen auf das Jahr 1974 zurück [**?**]. Allerdings war die Lasertechnologie damals noch nicht so weit entwickelt wie heute. Dazu wird ein ultrakurzer intensiver Laserpuls in der Nähe eines hohen Turms in den Himmel geschickt (Abb. 20.59) und dieser erzeugt einen Plasmakanal, der einen Blitz auszulöst. Kürzlich ist es gelungen Blitzentladungen über eine Distanz von 50 m zu erzwingen, siehe Abb. 20.60 [**?**]. Damit ist ein erster Schritt getan zu einer laserbasierten Kontrolle von Blitzen.

Near infrared spectroscopic analysis of single malt Scotch whisky on an optofluidic chip [**?**]**:** Standardization and quality monitoring of alcoholic beverages is an important issue in the liquor production industry. Various spectroscopic techniques have proved useful for tackling this problem. An ideal sensing device for alcoholic beverages should be able to detect the quality of alcohol with a small amount of sample at a low acquisition time using a portable and easy to use device. We propose the use of near infra-red spectroscopy on an optofluidic chip for quality monitoring of single malt Scotch whisky. This is chip upon which we have previously realized waveguide confined Raman spectroscopy. Analysis on this alignment-free, portable chip may be performed in only 2 seconds with a sample volume of only 20 ?l. Using a partial least square (PLS) calibration, we demonstrate that the alcohol content in the beverage may be predicted to within a 1% prediction error. Principal component analysis (PCA) was employed for successful classification of whiskies based upon their age, type and cask. The prospect of implementing an optofluidic analogue of a conventional Fiber based spectroscopic probe allows a rapid analysis of alcoholic beverages with dramatically reduced sample volumes.

Ein in schwarz verhülltes Gerüst verwehrt derzeit den Blick auf das Michaelportal an der Nordseite des Doms. Hinter den Planen arbeiten die Steinmetzinnen und Restauratoren. So reinigt Steinmetzgesellin Bianca Koca gerade eine der Figuren mit einem speziellen Lasergerät. Dieses entfernt nur die schwarze Schmutzkruste, lässt den Stein aber absolut unversehrt, da das Licht nur von dunklen Oberflächen absorbiert wird. Die Schmutzschicht verdampft und zum Vorschein kommt wieder der helle Kalkstein. Etwa eine Woche benötigt die Reinigung einer der kleinen Figuren.

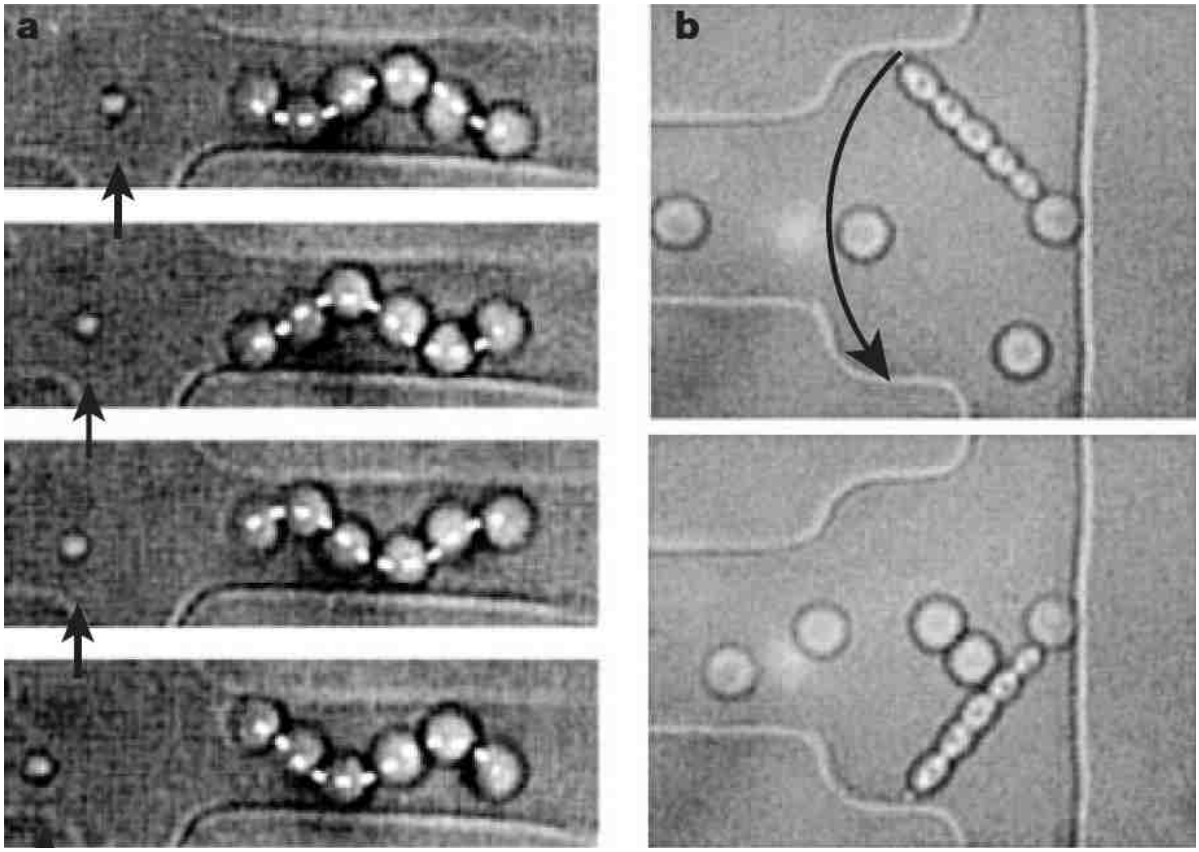


Abb. 20.61: Einsatz einer optisch betriebenen Pumpe und eines Ventil aus kolloidalen Partikeln in der Mikrofluidik. (a) Die Pumpe erzeugte Wasserströmung wird durch die Position des Teilchens angezeigt (Pfeil) (b) Die Ventilklappe wird mit Hilfe einer Optischen Pinzette umgeklappt und bestimmt damit den Weg der Partikel [**?** **?**].

Westdeutsche Zeitung (09.03.2015)

Ein Beispiel aus dem Facebook Universum

Kann man Laserstrahlen für die Antriebstechnik nutzen? Auf jeden Fall gibt es schon seid langer Zeit ein Konzept [**?**], bei dem man den Strahlungsdruck nutzt, um eine Rakete zu beschleunigen.[54]. Aufgrund der unvermeidlichen Divergenz ist ein Laserstrahl mit großem Durchmesser notwendig, damit möglichst die gesamte Strahlungsenergie übertragen wird. Die Solarsegel müssen außerdem gut verstellbar sein, um Schwankungen in der Position des Laserflecks zu kompensieren. Diese Anforderungen sind mit dem Abstand zur Laserquelle immer schwerer zu erfüllen. In diesem Zusammenhang ist das Breakthrough Starshot Projekt interessant. Es wurde im Jahr 2016 von Yuri Milner, Stephen Hawking und Mark Zuckerberg ins Leben gerufen, um Mikrolabore (Starchips)

[54]Das gleiche Prinzip kommt auch bei Solarsegeln zum Einsatz, siehe Kapitel *Materiewellen*

mit Hilfe von interstellaren Lichtsegeln zum 4.37 Lj entfernten Stern Alpha Centauri zu schicken. Bei einer Geschwindigkeit von β=0.2 könnte die Mission den Stern in 20-30 Jahren erreichen. Das Konzept dieses interstellaren Reiseprojekts ist in [**?**] beschrieben. Zum Beschleunigung wird eine kilometerlange Anordnung aus Lasern mit einer Gesamtleistung von 100 GW benötigt. Der Laserstrahl soll das Sonnensegel des Starchips 10 Minuten lang über eine Strecke von etwa 20 Millionen Kilometer beleuchten und durch den Strahlungsdruck auf relativistische Geschwindigkeiten bringen.

Ein Beispiel aus der Welt der Optischen Manipulation

Kann man mit Licht mikroskopische Objekte sortieren? JA! Die Methode nennt sich Optische Pinzette und das Verfahren haben wir schon im Kapitel *Materiewellen* kennengelernt. Optische Pinzetten nutzen die Kräfte (fN bis nN) eines stark gebündelten Lichtstrahl aus, um Objekte im Größenbereich von nm bis μm zu fangen und zu bewegen. Seit ihrer Einführung im Jahr 1986 hat sich die optische Pinzette zu einem mächtigen Werkzeug für die Forschung in der Biologie, Chemie und der Physik der weichen Materie entwickelt [**?** **?** **?**]. Abb. 20.61 demonstriert, wie man eine Optische Pinzette verwenden kann, um auf mikroskopischer Skala Flüssigkeitsströme zu steuern. Aus biologischer Sicht lassen sich damit Prozesse in und zwischen Zellen untersuchen. Weiter erschließt sich für Physik und Chemie der diffuse Bereich zwischen Klassischer Physik und Quantenphysik. Eine holografische Anordnungen optischer Flaschen könnte zur Manipulation von Atomen dienen [**?**], beispielsweise in Richtung von Quantencomputern oder als Anwendung in der Atomphysik [**?**]. Welcher Mechanismus ist verantwortlich? Der durch das Laserfeld induzierte Dipol in den Mikroobjekten führt zur Bewegung im elektrischen Feldgradienten des fokussierten Lichts in Richtung des Laserfokus. Bei größeren Partikeln kommt es zur Lichtbrechung, die mit einem Impulsübertrag verbunden ist, der das Teilchen ebenfalls in Richtung des Fokus treibt. Für makroskopisches Objekte spielen diese Effekte keine Rolle, sie haben aber merkliche Auswirkungen bei mesoskopischen Teilchen.

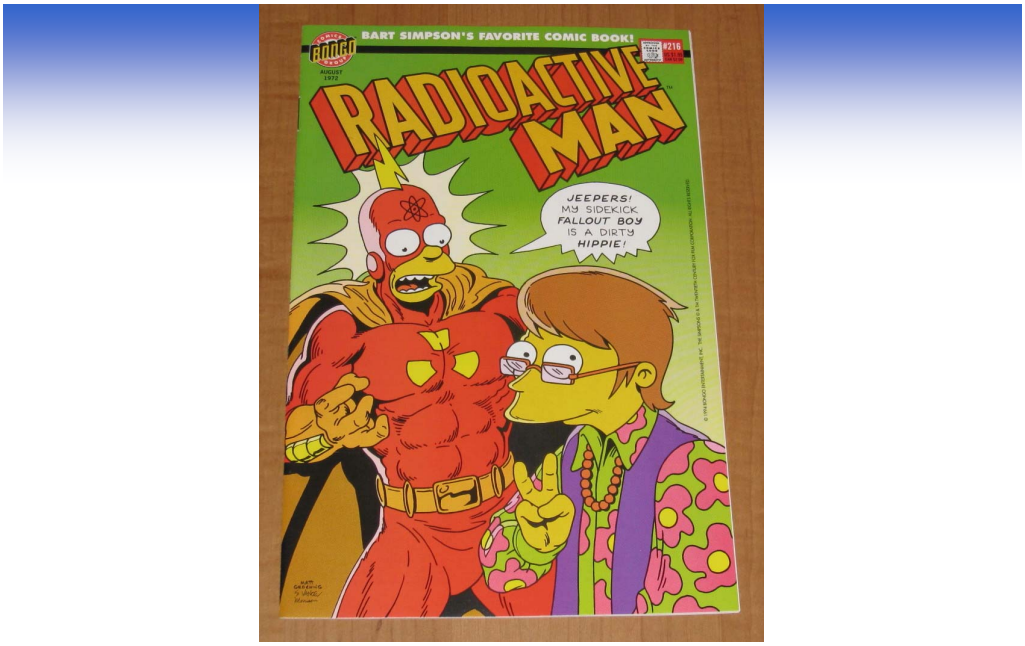
Konzeptionelle und andere Fragen

1. Kennen Sie Beispiele, bei der die Wellenlänge des Lasers eine Rolle spielt!
2. Kennen Sie Beispiele, bei der die Intensität der Laserstrahlung eine Rolle spielt!
3. Was versteht man unter dem Sagnac-Effekt?
4. Wie arbeitet ein Laserkompass?
5. Warum schädigt der Laserstrahl bei der Laserbehandlung der Augenlinse nicht die Netzhaut?
6. Was versteht man in der klassischen Optik unter Doppelbrechung?
7. Wie lange braucht ein Laserstrahl, um die Strecke bis zum Mond zurückzulegen?
8. Was versteht man unter dem Begriff LIDAR?
9. Welche Rolle spielt die Optische Spektroskopie bei LIBS?
10. Kann man mit Licht Objekte bewegen?
11. Was ist eine Optische Pinzette und welche Effekte werden im Betrieb genutzt?

Was war relevant für die Klausur?

Nothing so far.

21 Kerne



Kerne

Glückwunsch, Sie haben ein neues Element erschaffen! **Jarvis zu Tony Stark in Iron Man 2**

Glückwunsch, Sie haben ein neues Element erschaffen!

Jarvis zu Tony Stark im Film *Iron Man 2*

[1]Eines der großen Geheimnisse des Universums ist die Natur der Materie. Man unterscheidet sechs unterschiedlichen Phasen, wobei die beiden letztgenannten bislang in der physikalischen Betrachtung keine Rolle spielten:

- die feste Phase
- die flüssige Phase
- die gasförmig Phase

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

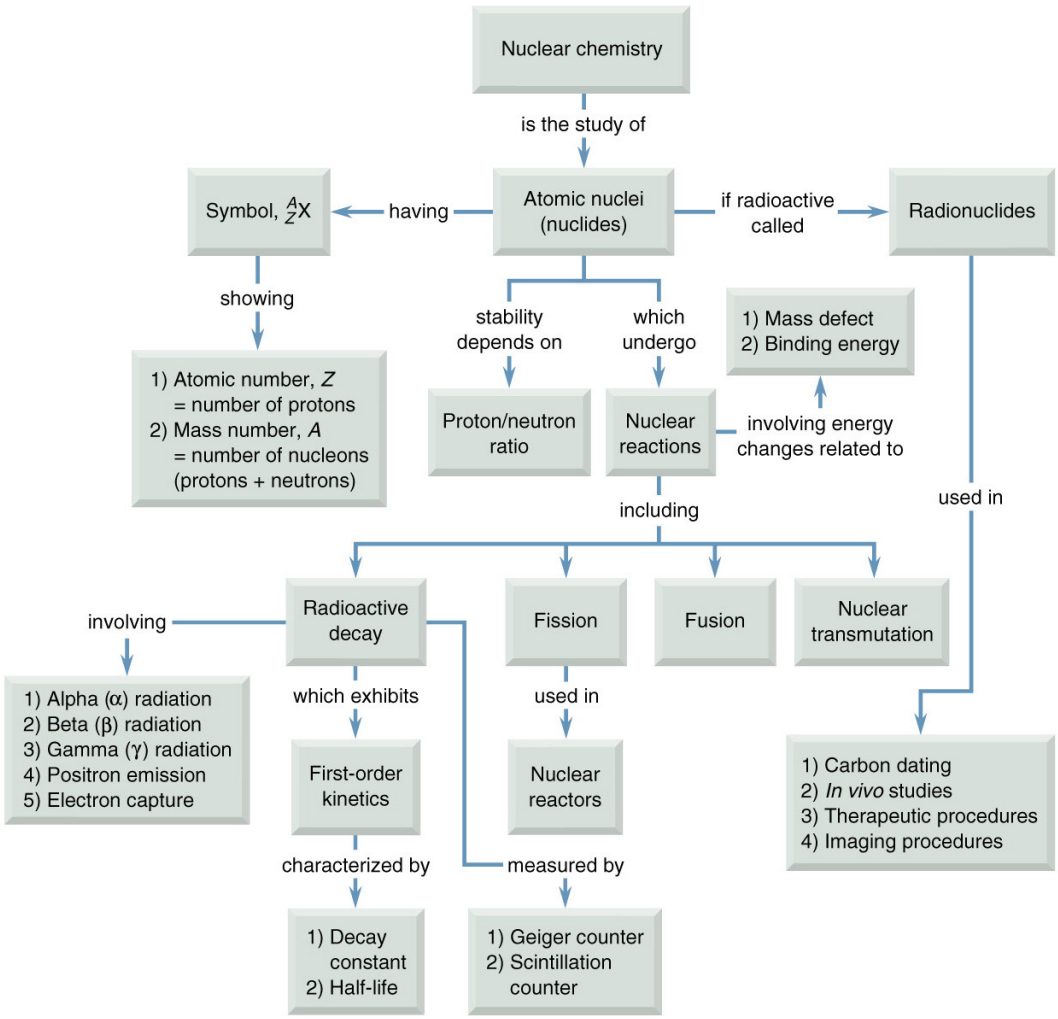


Abb. 21.1: Objekte und Reaktionsprozesse, die in der Kernphysik untersucht werden.

- Plasmen
- Kernmaterie
- Quarkmaterie

Das soll sich jetzt ändern. In den bisherigen Vorlesungen haben wir den Aufbau der Atome betrachtet, Quantenzahlen entdeckt und das wichtige Pauli-Prinzip kennengelernt. Der Atomkern war nur in sofern wichtig, als dass er der Ort war, an dem die positive Ladung des Atom konzentriert ist. Durch das Rutherford-Experiment wurde geklärt, dass der Kern ein ziemlich kleines Gebiet in der Größenordnung von 10^{-15} m=1 fm umfasst. Der Kern ist außerdem deutlich schwerer als die Elektronen in der Atomhülle und kann deshalb im Bezug auf die Bewegung der Elektronen als nahezu unbeweglich angesehen werden. Für die Belange der Atomphysik kann man den Kern als Punktteilchen behan-

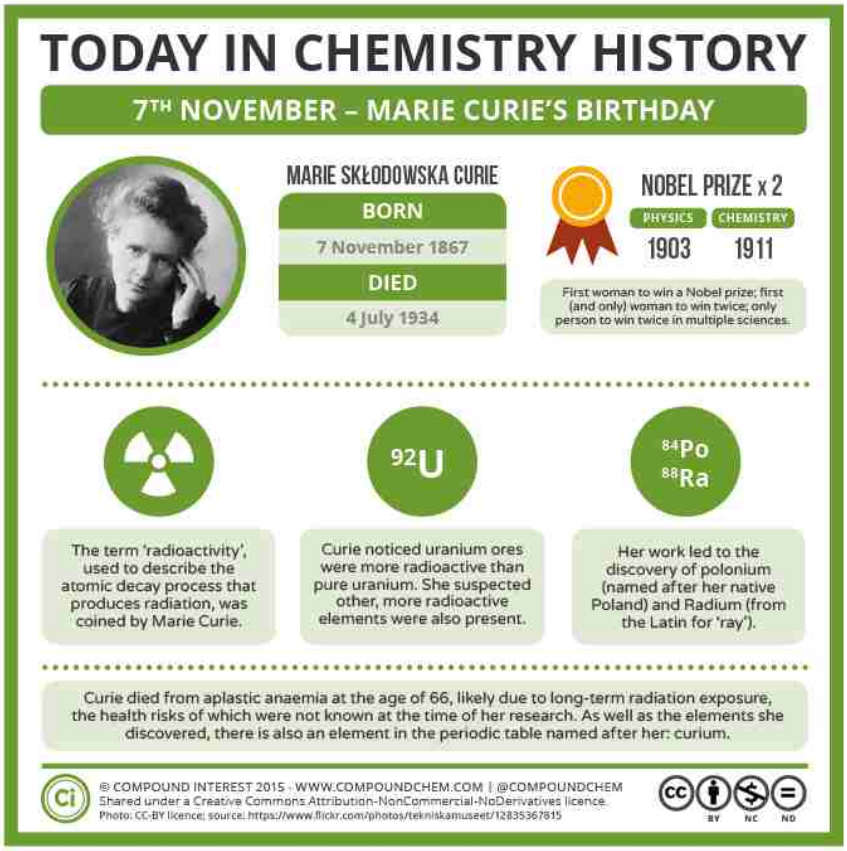


Abb. 21.2: Leben und Werk von Marie Curie.

deln. In den folgenden Kapiteln widmen wir uns der inneren Struktur des Kerns. Neue Phänomene treten zutage und wir werden feststellen, dass die Konzepte der Fluide und der Atomphysik nahezu nahtlos auf die Kernbausteine übertragen werden können.

- Was sind die Grundbestandteile des Atomkerns?
- Wie wechselwirken die Kernbausteine untereinander?
- Warum lässt der Coulombdruck den Kern nicht explodieren?
- Woraus setzen sich die Elemente zusammen?
- Wie ergeben sich ihre physikalisch-chemischen Eigenschaften?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Kernen und Radioaktivität?
- Wie kann kernphysikalische Phänomene technisch nutzen?

Diese grundlegenden Fragen sind das Gebiet der Kern- und Elementarteilchenphysik. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf die Physik der Kerne. Prozesse, die die Wechselwirkung beispielsweise unter Quarks beinhalten, spielen in unserem Alltag keine Rolle, Kernreaktionen allerdings schon. Die Kernphysik befasst sich mit der Struktur des Atomkerns und der Strahlung emittiert aus instabilen Kernen. Abb. 21.1 gibt einen Überblick, welche Phänomene untersucht werden. Der Atomkern ist etwa 10^5-mal kleiner als das Atom (Kapitel *Der Weg zum Atom*). Die Bausteine des Kerns (Protonen und Neutronen) ziehen sich durch die Starke Wechselwirkung (eine der vier fundamentalen Kräfte) so stark an, dass die Energieverhältnisse um etwa einen Faktor 10^6 größer sind im Vergleich zu den Verhältnissen in der Elektronenschale des Atoms. Instabile radioaktive Kerne emittieren Strahlung. Dazu gehören energiereiche Photonen (γ-Strahlung) und Teilchen: Elektronen und Positronen (β-Strahlung), Heliumkerne (α-Strahlung) und Neutrinos. Die Untersuchung der Eigenschaften der Kerns erfolgt mit Hilfe von Stoßprozessen. Energiereiche Projektile wie Elektronen oder Protonen treffen auf Kerne. Die Energie- und Impulsbilanz wird analysiert und die in der Wechselwirkung erzeugten Produkte nachgewiesen. Radioaktivität und Stoßprozesse, die einen Zerfall des Kerns auslösen, ändern möglicherweise auch die Chemie, nämlich dann, wenn sich die Ordnungszahl ändert. Schließlich können Kernspaltung und Kernfusion Energien freisetzen, die die Energien in chemischen Reaktionen bei weitem übersteigt.

Die erste Kernreaktion wurde bei der Streuung von α-Teilchen an $^{212}_{83}$Bi beobachtet.

$$^4_2\mathrm{He} + ^{14}_7\mathrm{N} \rightarrow ^1_1\mathrm{H} + ^{16}_8 0 \tag{21.1}$$

Die leichten Reaktionsprodukte hatten -wie Wasserstoffkerne- in Luft eine deutlich größere mittlere Reichweite als α-Teilchen. Rutherford vermutete deshalb, dass es sich um H-Kerne handelt und stellte die Hypothese auf, dass alle Kerne Wasserstoffkerne enthalten. Er nannte sie Protonen.[2] Anhand der obigen Reaktionsgleichung ergeben sich zwei Erhaltungssatz

- Der obige Index ist die Massenzahl. Addiert man, findet man

$$4 + 14 = 1 + 17 \tag{21.2}$$

  Die Nukleonenzahl ist in einer Kernreaktion also erhalten.

- Addiert man den unteren Index (Ordnungszahl), ergibt sich

$$2 + 7 = 1 + 8 \tag{21.3}$$

  Dahinter versteckt sich der Ladungserhaltungssatz. Wie wir im Kapitel *Ionisierende Strahlung* sehen werden, gibt es Reaktionen, wie den β-Zerfall, bei dem neue Teilchen erzeugt werden, wodurch sich die Anzahl an Protonen ändert. An dieser Stelle kann man anhand der Reaktionsgleichung also nur überprüfen, ob der betrachtete Prozess prinzipiell möglich ist.

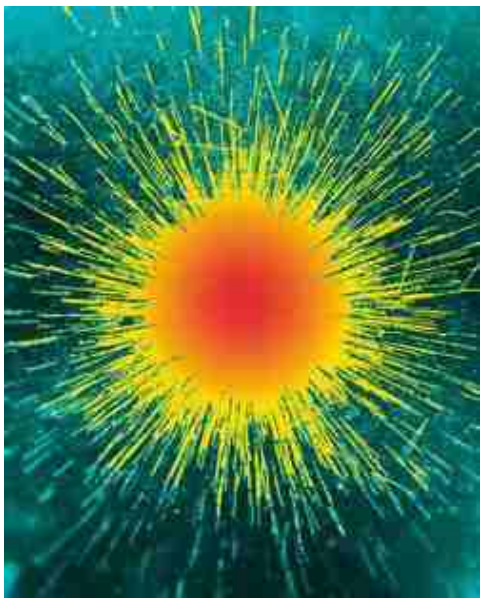


Abb. 21.3: Eine winzige Probe Radium, zu klein, um den radioaktiven Stoff unter einem Mikroskop zu betrachten. Zur Sichtbarmachung der radioaktiven Strahlung wurde das Radium in eine Emulsion eingebracht und nach einigen Tagen entwickelt [**?**].

Im Jahr 1896 beobachtete Becquerel,[3] dass Uranverbindungen ohne äußere Beeinflussung hochenergetische Strahlen aussenden. Dem Ehepaar Curie gelang es, eine Substanz mit hoher Strahlungsleistung zu isolieren.[4] Der Name: Radium, die Strahlende (Abb. 21.3). Im Vergleich zu Röntgenstrahlung findet man eine vielfach erhöhte Durchdringungsfähigkeit. Hier ein Überblick über wichtige Schritte im Zusammenhang mit der Forschung an Radionukliden [**?**]:

1898 Marie und Pierre Curie isolieren Polonium, siehe Abb. 21.2

$$^{212}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow ^{212}_{8}\,4\mathrm{Po} + ^{4}_{2}\,\mathrm{He} \tag{21.4}$$

[2]griechisch: Das Erste

[3]Unter dem Eindruck der neuentdeckten Röntgenstrahlen stellte Becquerel die falsche Hypothese auf, dass Substanzen, wie die phosphoreszierenden Uransalze, Sonnenlicht absorbieren und als Röntgenstrahlen wieder emittieren. Um diese Idee zu testen, wickelte er photographische Platten in schwarzes Papier, um sie vor Sonnenlicht zu schützen. Dann legte er die Uransalzkristalle auf die eingewickelten Platten und stellte die ganze Anordnung nach draußen in die Sonne. Als er die Platten entwickelte, sah er einen Umriss der Kristalle. Er platzierte auch Objekte wie Münzen oder ausgeschnittene Metallformen zwischen den Kristallen und der photographischen Platte und stellte fest, dass er Umrisse dieser Formen auf den photographischen Platten erzeugen konnte. Die Geschichte von Becquerels Entdeckung ist beispielhaft für eine zufällige Entdeckung. Weniger bekannt ist, dass 40 Jahre vorher der Photograph Abel Niepce de Saint Victor mit Uranverbindungen experimentierte. Wie Becquerel setzte er diese Chemikalien dem Sonnenlicht aus und legte sie zusammen mit Photopapier in eine dunkle Schublade. Als er die Schublade öffnete, stellte er fest, dass Uran das Photopapier belichtete. Niepce glaubte eine neue Art unsichtbarer Strahlung gefunden zu haben, und meldete seine Ergebnisse der Französischen Akademie der Wissenschaften. Niemand hat die Wirkung weiter untersucht.

[4]Die Forschung des Ehepaars Curie führte dazu eine damals große Lücke zwischen Wismut (Z=83) und Thorium (Z=90) im Periodensystem zu schließen. Mit Hilfe der Radioaktivität konnte man neue Elemente entdecken. Die Curies zeigte auch, dass Radioaktivität eine Eigenschaft ist, die bei vielen Atomen auftritt und Auskunft gibt über die Struktur der Kerne.

1919 Ernest Rutherford erzeugt das erste künstliche Nuklid

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + +^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow^{17}_{8} \mathrm{O} +^{1}_{1} \mathrm{H} \tag{21.5}$$

1930 Cockroft und Walton beobachten Kernreaktionen bei Stößen beschleunigter Teilchen

1932 James Chatwick entdeckt das Neutron

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + +^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow^{12}_{6} \mathrm{O} +^{1}_{0} n \tag{21.6}$$

1932 Joliot und Irene Curie entdecken die künstlichen Radioaktivität

1937 Emilio Segre und Carlo Perrier erzeugen mit Technetium das erste künstliche Element

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + +^{97}_{42}\mathrm{Mo} \rightarrow 2^{1}_{0}n +^{97}_{43} \mathrm{Tc} \tag{21.7}$$

1938 Lise Meitner, Otto Hahn und Fritz Strassmann bestrahlten Uran mit Neutronen und entdecken die Kernspaltung

1942 Enrico Fermi führt die erste kontrolliert ablaufende Kettenreaktion durch

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + +^{1}_{0}n \rightarrow^{87}_{35} \mathrm{Br} +^{146}_{57} \mathrm{La} + 3^{1}_{0}n \tag{21.8}$$

Inhalt

Kerne

- Kernnotation (Ordnungszahl, Isotope)
- Exponentielles Zerfallsgesetz (Aktivität, Zerfallskonstante, Halbwertszeit)
- Alterbestimmung mit radioaktiven Stoffen (C14, Schwermetalle, Fe-60)
- kurzreichweitige Kernkräfte
- Zusammenhang Bindungsenergie und Masse

Kapitel 1
Nuklide



Kapitel 2
C14-Methode



Kapitel 3
Massendefekt



Radium-Manie[4LP]



Radium wurde 1898 von Marie[5] und Pierre Curie in Pechblende entdeckt. Wegen seiner ausgeprägten Strahlungseigenschaften kam es zu seinem Namen. Radium galt zunächst als ungefährlich (Abb. 21.4), wurde unter anderem als Krebsmedikament eingesetzt und als Zusatz für selbstleuchtende Produkte verwendet. Dem Element wurden Wunderdinge zugeschrieben (Abb. 21.5). Radium, genannt flüssiger Sonnenschein, wurde verwendet in Zahnpasta, Lidschatten, Schokolade, Spielzeug, und Kleidung. Es beleuchtete nicht nur Krankenhäuser, sondern auch Theater, Geschäfte und Bücherregale. Der Hype fand sich auch in Cartoons und Romanen wieder (Abb 21.6).

Die Verarbeitung geschah dabei ohne jegliche Schutzvorkehrungen. Wegen seiner vermuteten Heilwirkung entstanden Radiumbäder, z.B. in Bad Kreuznach (Abb. 21.7). Die gesundheitsschädlichen Effekte wurde erst spät (Mitte der 1920er Jahre) erkannt. Die Zifferblatt-Malerinnen der Uhrenindustrie befeuchteten ihre Pinsel zum Auftragen von Radium mit ihrer Zungenspitze, wodurch das Radium in den Körper gelangte (Abb. 21.8). 1924 beschrieb der Zahnarzt Theodore Blum erstmals eine schwere Kie-

[5] The Nobel Prize in Chemistry 1911 was awarded to Marie Curie *in recognition of her services to the advancement of chemistry by the discovery of the elements radium and polonium, by the isolation of radium and the study of the nature and compounds of this remarkable element*



Abb. 21.4: Kosmetikwerbung für Radium

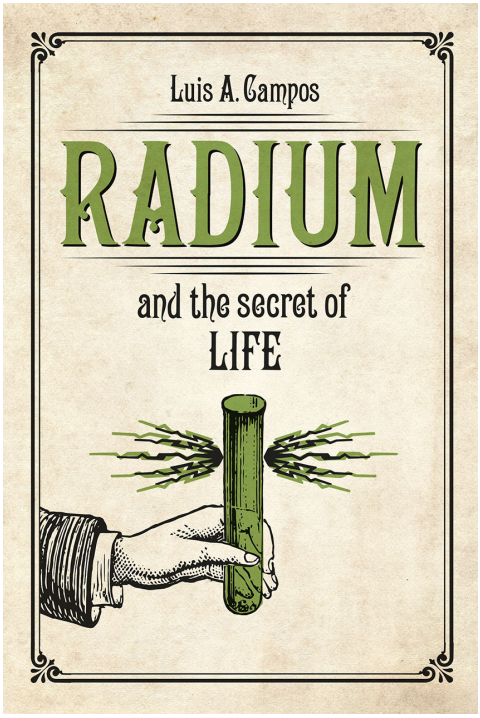


Abb. 21.5: Before the hydrogen bomb indelibly associated radioactivity with death, many chemists, physicians, botanists, and geneticists believed that radium might hold the secret to life.

fererkrankung bei Personen aus dieser Berufsgruppe in einer Fachzeitschrift.

Mit Radium versetztes Wasser (Radithor) wurde zum Trinken verkauft (Abb. 21.10). Nach dem Tod des Stahlmagnaten Byers, der über Jahre täglich zwei Fläschchen Radithor trank, stand fest, dass Radium schwerste Gesundheitsschäden hervorruft. Umweltbelastungen durch radioaktive Stoffe sind allgegenwärtig und konnten auch an den Fassaden von Schulen nachgewiesen werden [**?**].

Wegen Radioaktivität: Bundesamt warnt vor Paranüssen
Paranussbäume wachsen in tropischen Regenwäldern Südamerikas. Laut Bundesamt für

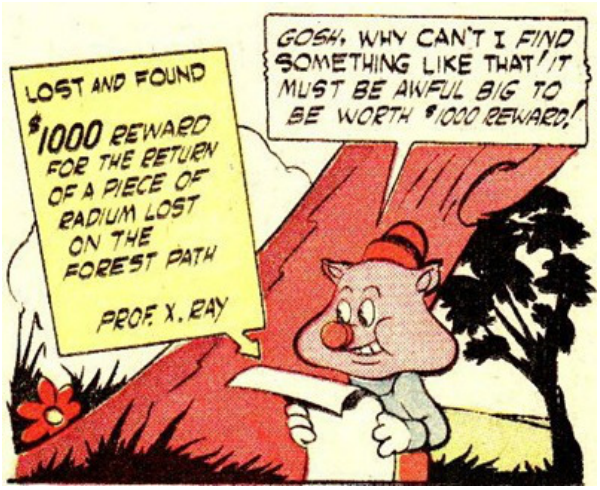


Abb. 21.6: Verwendung von Radium in Comics.



Abb. 21.7: Seit über 100 Jahren wird das radioaktive Gas Radon im Bad Kreuznacher Radonstollen für therapeutische Zwecke genutzt.



Abb. 21.8: Nach dem Ersten Weltkrieg starben in den Vereinigten Staaten Frauen an einer merkwürdigen Krankheit: Die Frauen verloren ihre Zähne und ihre Kieferknochen lösten sich auf. In die Geschichte gingen sie ein als *Radium Girls*.

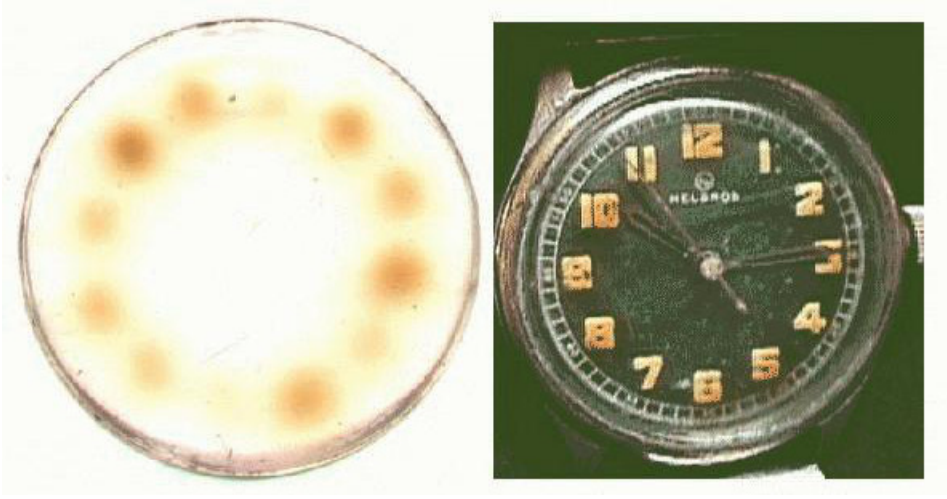


Abb. 21.9: Armbanduhr, bei der Radium verwendet wurde. Das Bild zeigt rechts das Zifferblatt und links die stark radioaktiven Bereiche der Uhr.



Abb. 21.10: Radithor ist eine radioaktive Tinktur, die eindeutig mit dem Tod von Menschen in Verbindung gebracht werden kann.

Strahlenschutz gibt es dort Böden, die natürlicherweise große Mengen an Radium enthalten. Das radioaktive Element werde über die Wurzeln aufgenommen und im Baum bis in die Nüsse transportiert, so das Bundesamt für Strahlenschutz.
Für Erwachsene sei es im Allgemeinen zwar unbedenklich, Paranüsse in Maßen zu verzehren, wie es vom Bundesamt hieß. Aber bei Kindern könne die gleiche Menge zu einer deutlich höheren Strahlendosis führen. Radium lagere sich wie Kalzium in Zähne und Knochen ein - und die seien bei Kindern noch im Aufbau. Ungeborene Kinder und Säuglinge wiederum nehmen den radioaktiven Stoff über die Plazenta beziehungsweise die Muttermilch auf.

Mitteldeutscher Rundfunk (29.22.2023)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welchen Versuch führte Becquerel durch, der zur Entdeckung Radioaktivität führte?
2. Erhielt Marie Curie den Nobelpreis in Physik oder Chemie?
3. Gab es andere Familienmitglieder von Marie Curie, die mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurden?

Nuklide



The first two elements and their stable isotopes, hydrogen and helium, emerged from the first few minutes of the early hightemperature, high-density stage of the expanding universe, the so-called *big bang*... Where did the heavier elements originate? The generally accepted answer is that all of the heavier elements from carbon, element six, up to long-lived radioactive uranium, element ninety-two, were produced by nuclear processes in the interior of stars in our own Galaxy... Let me remind you that your bodies consist for the most part of these heavy elements. Apart from hydrogen you are 65% oxygen and 18% carbon, with smaller percentages of nitrogen, sodium, magnesium, phosphorus, sulfur, chlorine, potassium, and traces of still heavier elements. Thus it is possible to say that you and your neighbor and I, each one of us, are truly and literally a little bit of stardust.

William F. Fowler (Noble Lecture, 1983)

Wenn man die Elemente unseres Körpers wiegen würden, stellte man Folgendes fest: Wir bestehen zu 56% aus Sauerstoff, zu 28% aus Kohlenstoff, zu 9% Wasserstoff, zu 2% aus Stickstoff und zu 1.5% aus Calcium. Der Rest sind Spurenelemente. Alle diese Elemente stammen aus Sternen. Nur Wasserstoff entstand kurz nach dem Urknall vor $13.8 \cdot 10^9$ Jahren. Der Rest der Elemente ist jünger. Wie setzen sich die Kerne im Detail

zusammen?

The discovery of the heaviest elements [?]: The nuclear shell model predicts that the next doubly magic shell closure beyond ^{208}Pb is at a proton number between Z=114 and 126 and at a neutron number N=184. The outstanding aim of experimental investigations is the exploration of this region of spherical superheavy elements (SHE's). This article describes the experimental methods that led to the identification of elements 107 to 112 at GSI, Darmstadt. Excitation functions were measured for the one-neutron evaporation channel of cold-fusion reactions using lead and bismuth targets. The maximum cross section was measured at beam energies well below a fusion barrier estimated in one dimension. These studies indicate that the transfer of nucleons is an important process for the initiation of fusion. The recent efforts at JINR, Dubna, to investigate the hot-fusion reaction for the production of SHE's using actinide targets are also presented. First results were obtained on the synthesis of neutron-rich isotopes of elements 112 and 114. However, the most surprising result was achieved in 1999 at LBNL, Berkeley. In a study of the reaction ^{86}Kr+^{208}Pb$\rightarrow^{294}$ 118*, three decay chains were measured and assigned to the superheavy nucleus ^{293}118. The decay data reveal that, for the heaviest elements, the dominant decay mode is alpha emission, not fission. The results are discussed in the framework of theoretical models. This article also presents plans for the further development of the experimental setup and the application of new techniques. At a higher sensitivity, the exploration of the region of spherical SHE's now seems to be feasible, more than 30 years after its prediction.

Schon kurz nach der Aufstellung des Periodensystems durch Mendelejew haben Experimente gezeigt, dass sich die Atome nur begrenzt aufladen lassen. Beispielsweise wurde niemals H^{2+} oder He^{3+} beobachtet. Nachdem Thomson das Elektron entdeckte und Millikan die Elementarladung fand, war schnell klar, dass Wasserstoff nur ein und Helium zwei Elektronen, sowie ein beziehungsweise zwei Protonen beinhaltet. Aber es gab ein Problem mit der Wägung. Helium ist viermal und Lithium siebenmal so schwer wie Wasserstoff. Wie kann das sein, wenn die Anzahl der Protonen 2 beziehungsweise 3 ist? Die Ladungsneutralität der Atome ist erfüllt: Die Anzahl der Protonen entspricht der Anzahl der Elektronen. Woher kommt die zusätzliche Masse? Heute wissen wir, dass der *missing link* die Neutronen sind.

So wie chemische Formeln und Gleichungen Symbole verwenden, werden Kerne durch Symbole dargestellt. Das Kernsymbol enthält das Zeichnen für das Element und die Zahlen, die sich auf die Anzahl der Protonen und Neutronen in diesem bestimmten Kern beziehen. Die Standard-Kernnotation zeigt das chemische Symbol, die Massenzahl (A) und die Ordnungszahl (Z) des Isotops.

Anwendungen 1^{4LP}

Measurement of the first ionization potential of astatine by laser ionization spectroscopy [?]: The radioactive element astatine exists only in trace amounts in

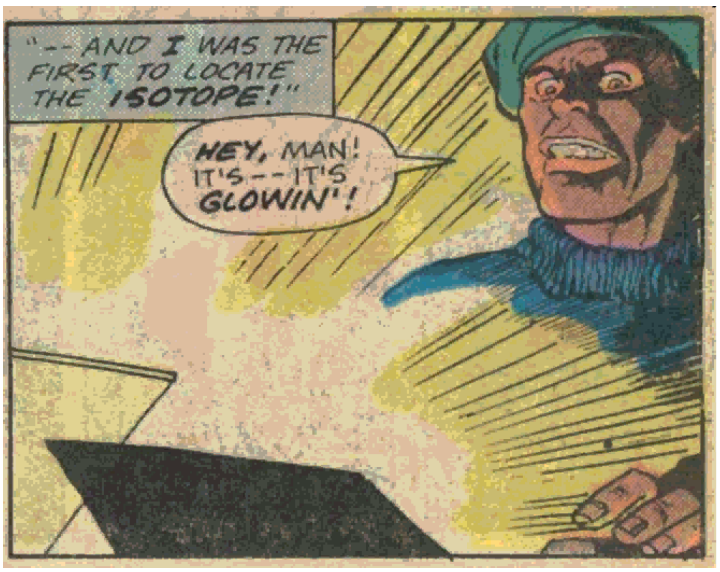


Abb. 21.11: Hey man!

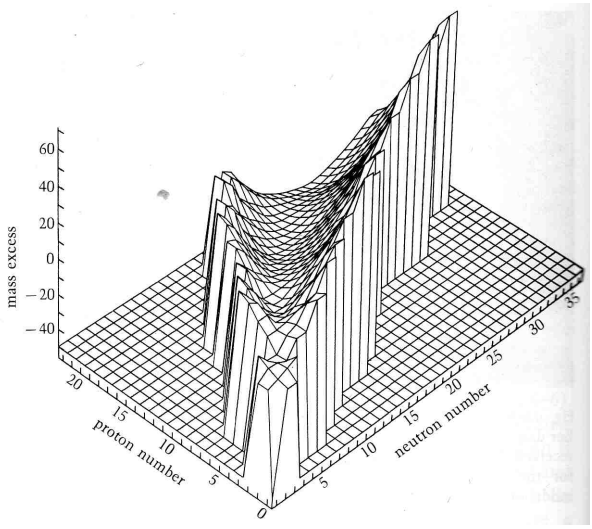


Abb. 21.12: Überschussmasse als Funktion von Proton- und Neutronenanzahl. Die stabilen Kerne finden man im Tal [**?**].

nature. Its properties can therefore only be explored by study of the minute quantities of artificially produced isotopes or by performing theoretical calculations. One of the most important properties influencing the chemical behaviour is the energy required to remove one electron from the valence shell, referred to as the ionization potential. Here we use laser spectroscopy to probe the optical spectrum of astatine near the ionization threshold. The observed series of Rydberg states enabled the first determination of the ionization potential of the astatine atom, 9.31751(8) eV. New ab initio calculations are performed to support the experimental result. The measured value serves as a benchmark for quantum chemistry calculations of the properties of astatine as well as for the theoretical prediction of the ionization potential of superheavy element 117, the heaviest homologue of astatine.

Isotop[6]	Anwendung
Al-26	Saurer Regen
As-73	Arsen-Kontamination und -Transport
Cd-09	Analyse von Metalllegierungen
	Überprüfung des Lagerbestands
	Sortierung von Schrott
Ca-47	Zellfunktionen
	Knochenbildung von Säugetieren
Cf-252	versteckte Sprengstoffe
	Feuchtigkeitsgehalt des Bodens und in Silos
C-14	Stoffwechsel
Cs-137	Krebsbehandlung
Cr-51	Studien an roten Blutkörperchen
Co-57	Diagnostik bösartiger Blutarmut
Co-60	Sterilisieren von chirurgischen Instrumenten, Gewürzen und Früchten
Cu-67	Krebsbehandlung
Na-22, Sr-87	geochemische und hydrologische Transportdynamik
Si-32	Transportwege in Ozeanen, Klimawandel

Tab. 21.1: Isotope und Anwendungsgebiete.

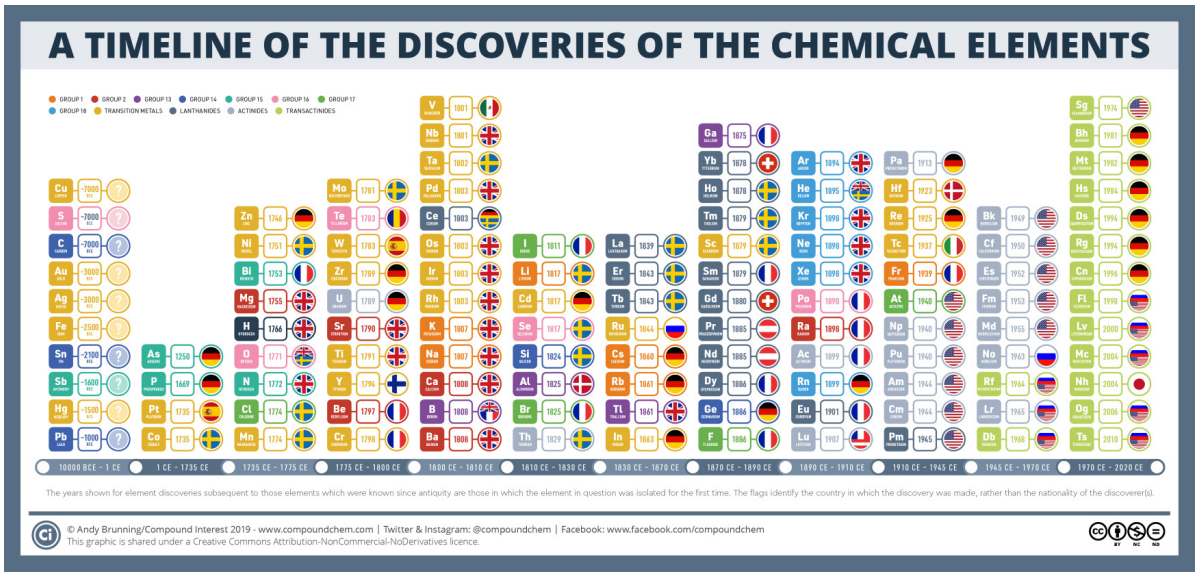


Abb. 21.13: Zeitleiste der Entdeckungen der chemischen Elemente.

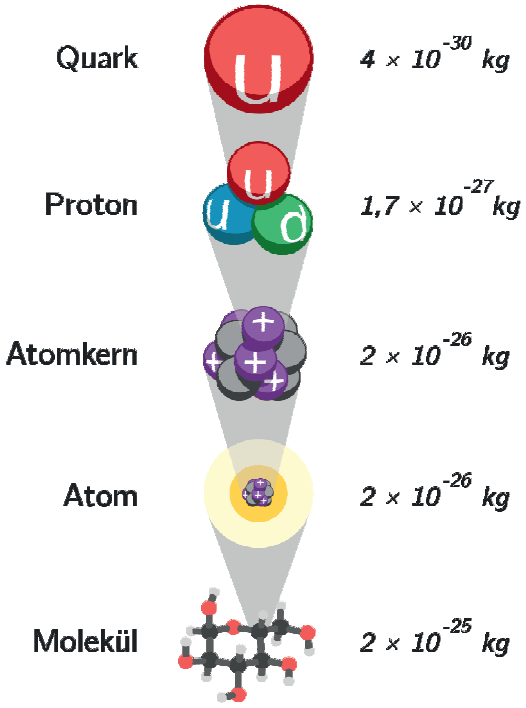


Abb. 21.14: Typische Massen der Bausteine des Atoms.

Ein Beispiel aus der Astophysik

Abb. 21.12 zeigt, wie sich die Bindungsenergie der Nuklide mit der Anzahl der Protonen und Neutronen entwickelt. Nicht jede Kombination aus Protonen und Neutronen führt zu stabilen Isotopen, siehe Kapitel *Kernmodelle*. Die stabilsten Nuklide bilden das Tal in der Abbildung. Diese Isotope haben die höchste Bindungsenergie. Am Verlauf erkennt man, dass Elemente mit höherer Ordnungszahl immer mehr Neutronen benötigen, um stabil zu bleiben. Hochenergieexperimente zeigen, dass Protonen und Neutronen zur Teilchenfamilie der Hadronen gehören. Heute kennt man mehr als 200 verschieden Hadronen (Stichwort Teilchenzoo). Hadronen sind keine fundamentalen Bausteine der Materie, sondern bilden sich aus unterschiedlichen Konfigurationen von Quarks, siehe Abb. 21.14. Die charakteristische Längenskala der Quarks ist 10^{-18} m.

Origin of the heavy elements in binary neutron-star mergers from a gravitational-wave event [?]: The cosmic origin of elements heavier than iron has long been uncertain. Theoretical modelling shows that the matter that is expelled in the violent merger of two neutron stars can assemble into heavy elements such as gold and platinum in a process known as rapid neutron capture (r-process) nucleosynthesis. The radioactive decay of isotopes of the heavy elements is predicted to power a distinctive thermal glow (a *kilonova*). The discovery of an electromagnetic counterpart to the gravitational-wave source GW170817 represents the first opportunity to detect and scrutinize a sample of freshly synthesized r-process elements. Here we report models that predict the electromagnetic emission of kilonovae in detail and enable the mass, velocity and composition

of ejecta to be derived from observations. We compare the models to the optical and infrared radiation associated with the GW170817 event to argue that the observed source is a kilonova. We infer the presence of two distinct components of ejecta, one composed primarily of light (atomic mass number less than 140) and one of heavy (atomic mass number greater than 140) r-process elements. The ejected mass and a merger rate inferred from GW170817 imply that such mergersare a dominant mode of r-process production in the Universe.

Ordnungszahl

Bisher ist nicht zu erkennen, woher das Uran seine Energie nimmt, die es mit solcher Beharrlichkeit abstrahlt.

Henri Antoine Becquerel[7]

Die Experimente von Röntgen zeigten, dass durch die Einwirkung von Röntgenstrahlung in bestimmten Materialien Phosphoreszenz[8] ausgelöst wurde. Becquerel vermutete einen Zusammenhang zur Röntgenstrahlung. Er stellte die Hypothese auf, dass Uran Licht absorbiert und als Röntgenstrahlung wieder abgibt. Uran auf Photoplatten gelegt, liefert tatsächlich energiereiche Strahlung. Bei der Entwicklung von Photoplatten, wobei das Uran nicht dem Sonnenlicht ausgesetzt war, entdeckte er, dass trotzdem Strahlung emittiert wurde. In darauf folgenden Experimenten stellte er fest, dass, im Gegensatz zur Röntgenstrahlung, die Strahlung durch elektrische und magnetische Felder zu beeinflussen war. Das war die Geburtsstunde der Forschung zur Radioaktivität.
Die Elemente werden mit einer eindeutigen Buchstabensignatur, wie beispielsweise Ar für Argon, bezeichnet. Zu den Buchstaben werden zwei Zahlen hinzugefügt. Ein Element wird durch die Anzahl der Protonen im Atomkern bestimmt. Die Anzahl der Protonen ist die Ordnungszahl (kleinere Zahl), die im Periodensystem für jedes Element steht. Die Ordnungszahl für Wasserstoff ist Eins. Bei einem Kern, der ein Proton enthält, handelt es sich, unabhängig von der Anzahl der Neutronen, um einen Wasserstoffkern. Die Massenzahl für einen Kern ist die Gesamtzahl der Protonen und Neutronen (Anzahl der Nukleonen). Eine durch Protonen- und Neutronenzahl charakterisierte Atomsorte nennt man ein Nuklid. Da es keine Bruchteile von Nukleonen gibt, sind Massenzahl[9] und

[7] The Nobel Prize in Physics 1903 was divided, one half awarded to Antoine Henri Becquerel *in recognition of the extraordinary services he has rendered by his discovery of spontaneous radioactivity*, the other half jointly to Pierre Curie and Marie Curie *in recognition of the extraordinary services they have rendered by their joint researches on the radiation phenomena discovered by Professor Henri Becquerel.*

[8] *Lexikon:* **Phosphoreszenz** ist die Eigenschaft eines Materials, nach einem Beleuchten mit Licht im Dunkeln lange nachzuleuchten.

[9] *Lexikon:* Man unterscheidet zwischen der **Atommasse** (*atomic mass*) und der leicht davon abweichenden **Massenzahl** (*atomic mass number*). Letztere ist eine ganze Zahl. Die Massenzahl (Nukleonenzahl) ist die Anzahl an Protonen und Neutronen im Kern. Wasserstoff ist das leichteste Element und wenn man sein Atomgewicht auf den Wert EINS setzt, dann ist das Atomgewicht von beispielsweise Sauerstoffs 15.88. Man setzt jedoch das Atomgewicht des Kohlenstoffisotops ^{12}C auf den

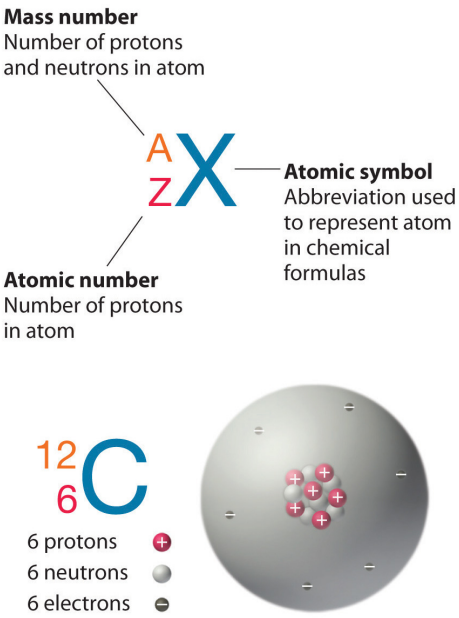


Abb. 21.15: Kennzeichnung von Isotopen in der Kernphysik am Beispiel von Kohlenstoff (C-12).

Ordnungszahl immer ganze Zahlen. Um die Anzahl der Neutronen im Kern zu ermitteln, subtrahiert man die Ordnungszahl von der Massenzahl (Abb. 21.15).

Isotope

In einem chemischen Element (gleiche Anzahl an Protonen) kann die Anzahl Neutronen im Kern unterschiedlich sein. Kerne mit gleicher Ordnungszahl aber unterschiedlicher Neutronenanzahl nennt man Isotope (Abb. 21.16).[10] [11] Ein Beispiel sind die oben gezeigten Isotope des Wasserstoff, nämlich Deuterium (schweres Wasser)[12] und das radioaktive Tritium. Deuterium wurde auf Jupiter, im Orionnebel, in interstellaren Wolken und anhand der Ly-α Emissionslinie des Sterns β-Centauri entdeckt [**?**]. Von besonderem Interesse ist das Verhältnis von Wasserstoff zu Deuterium, da D, wie man vermutet ein Produkt des Urknalls ist. Das H/D-Verhältnis dient dazu, Angaben über die Dichte der

Wert 12. Damit hat Wasserstoff das Atomgewicht 1.00784. Alle anderen Elemente werden ebenfalls auf das Kohlenstoff-Atomgewicht bezogen. Das Atomgewicht ist also eine Verhältniszahl und hat die Dimension NULL. Hinzu kommt, dass Elektronen Masse haben, Protonen und Neutronen eine leicht unterschiedliche Masse haben und miteinander wechselwirken.

[10] The Nobel Prize in Chemistry 1914 was awarded to Theodore William Richards *in recognition of his accurate determinations of the atomic weight of a large number of chemical elements.*

[11] The Nobel Prize in Chemistry 1921 was awarded to Frederick Soddy *for his contributions to our knowledge of the chemistry of radioactive substances, and his investigations into the origin and nature of isotopes.*

[12] The Nobel Prize in Chemistry 1934 was awarded to Harold Clayton Urey for his discovery of heavy hydrogen.

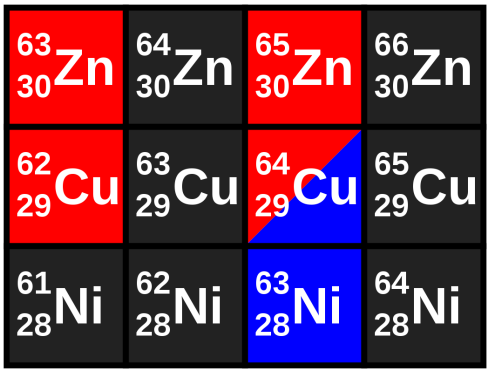


Abb. 21.16: Isotope der Elemente Nickel (Ni), Kupfer (Cu) und Zink (Zn). Schwarz: stabiles, blau: β^--radioaktives, rot: β^+-radioaktives Isotop.

Materie im Universum zu erhalten. Neunzehn der Element im Periodensystem haben nur ein einziges Isotop: Beryllium, Fluor, Natrium, Aluminium, Phosphor, Scandium, Mangan, Cobalt, Arsen, Yttrium, Niob, Rhodium, Iod, Caesium, Praseodym, Terbium, Holmium, Thulium, Gold. Neben diesen so genannten Reinstelementen zählt man noch Bismut, Thorium und Plutonium dazu, obwohl dieses Elemente nicht stabil sind. Da ihre Halbwertszeiten aber extrem hoch sind existieren nach Vorkommen auf der Erde. Alle Nuklide mit $Z > 83$ sind radioaktiv. Die Lebensdauer variiert dabei zwischen 10^{-22} und 10^{+28} s. Auf Flugzeiten umgerechnet entspricht dies dem Lichtweg durch den Kern bzw. 10^{10} mal dem Alter des Universums.

Element Kohlenstoff[4LP]

Eine besondere Position im Periodensystem nimmt Kohlenstoff ein. Kohlenstoff bildet aufgrund seiner quantenchemischen Eigenschaften unterschiedlichste Strukturen aus. Diese reichen von Graphit, Diamant bis zu Fullerenen [**?**][13] und Graphen[**?**][14] (Abb. 21.18). Die ungewöhnliche Stabilität von Fullerenen (Abb. 21.17) gegenüber Licht und Wärme lässt vermuten, dass Fullerene im Universum reichlich vorhanden sein sollten, beispielsweise in den Emissionen von Kohlenstoffsternen. Da Fullerene bei hohen Temperaturen und Druck entstehen, liegt es nahe, Meteoriteneinschläge auf das Vorhandensein von Fullerene zu untersuchen. Tatsächlich wurden Forscher am Sudbury Krater in Kanada fündig und entdeckten C_{60} und C_{70} [**?**]. Die Reichhaltigkeit in der Strukturbildung durch Kohlenstoff ist die Grundlage für die Entwicklung von Leben auf der Erde. Das Kohlenstoffisotop C-14 spielt dabei eine wichtige Rolle bei der Datierung archäologischer Funde.

The ^{13}CO-rich atmosphere of a young accreting super-Jupiter [?]: Isotope abundance ratios have an important role in astronomy and planetary sciences, provi-

[13] The Nobel Prize in Chemistry 1996 was awarded jointly to Robert F. Curl Jr., Sir Harold W. Kroto and Richard E. Smalley *for their discovery of fullerenes.*

[14] The Nobel Prize in Physics 2010 was awarded jointly to Andre Geim and Konstantin Novoselov *for groundbreaking experiments regarding the two-dimensional material graphene.*

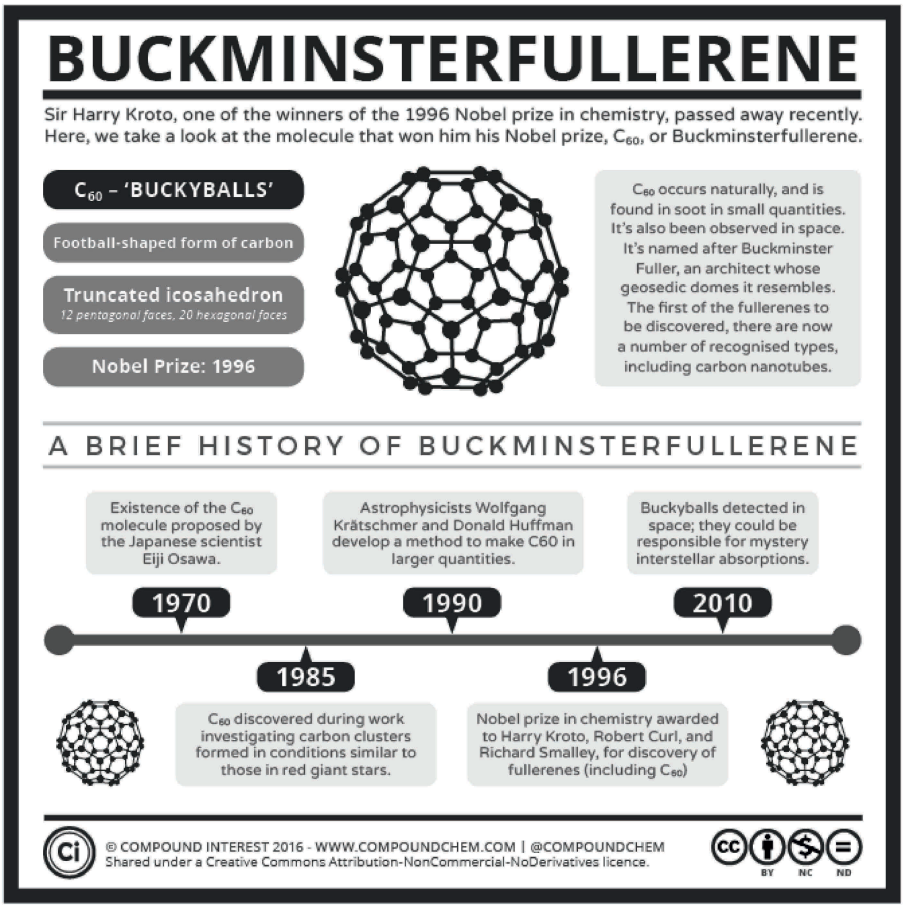


Abb. 21.17: Geschichte der Fullerene.

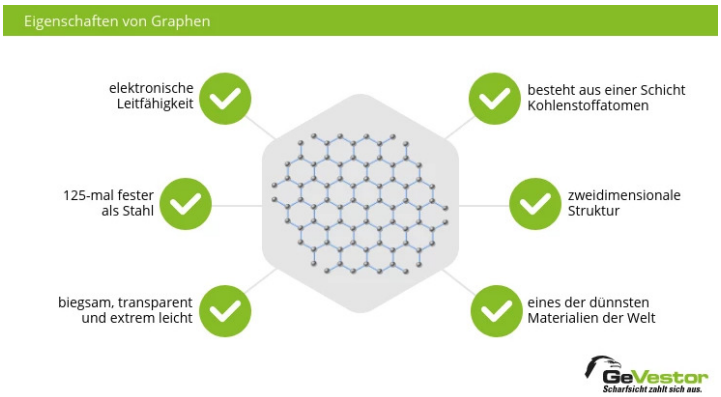


Abb. 21.18: Das zweidimensionale Graphen ist nur EINE Lage Kohlenstoffatomen dick. Die C-Atome bilden einen sechseckigen Maschendraht.

ding insights into the origin and evolution of the Solar System, interstellar chemistry and stellar nucleosynthesis. In contrast to deuterium/hydrogen ratios, carbon isotope ratios are found to be roughly constant (around 89) in the Solar System, but do vary on galactic scales with a $^{12}C/^{13}C$ isotopologue ratio of around 68 in the current local interstellar medium. In molecular clouds and protoplanetary disks, $^{12}CO/^{13}CO$ ratios can be altered by ice and gas partitioning, low-temperature isotopic ion-exchange reactions and isotope-selective photodissociation. Here we report observations of ^{13}CO in the atmosphere of the young, accreting super-Jupiter TYC 8998-760-1 b, at a statistical significance of more than six sigma. Marginalizing over the planet's atmospheric temperature structure, chemical composition and spectral calibration uncertainties suggests a $^{12}CO/^{13}CO$ ratio of 31^{+17}_{-10}(90% confidence), a substantial enrichment in ^{13}C with respect to the terrestrial standard and the local interstellar value. As the current location of TYC 8998-760-1 b at greater than or equal to 160 astronomical units is far beyond the CO snowline, we postulate that it accreted a substantial fraction of its carbon from ices enriched in ^{13}C through fractionation.

Im Jahr 1869 postulierte Dmitri Mendelev in seinem periodischen System der Elemente, dass es ein Eka-Cäsium geben muss. Im Jahr 1925 behauptete der sowjetische Chemiker Dmitri Dobroserdow, er habe in einer Probe radioaktiven Kaliums das Element 87 gefunden. Er benannte es nach seinem Heimatland Russland Russium. Später stellte sich heraus, dass es sich um Kalium-40 handelte. Im Jahr 1932 behauptete der Fred Allison, sechs verschiedene Isotope des Elements 87 entdeckt zu haben, das er nach seinem Heimatstaat Virginia Virginium nannte. Später entlarvten Forscher Allisons Methode, und Nobelpreisträger Irving Langmuir bemerkte dazu: *Ein Beispiel für pathologische Wissenschaft*. Im Jahr 1936 fand der Physiker Horia Hulubei ein stabiles Isotop, das er für Element 87 hielt. Hulubei nannte seine Entdeckung Moldavium nach der Provinz Moldawien in seiner Heimat Rumänien. Wissenschaftler widerlegten die Analyse zu Moldavin, nachdem kernphysikalische Untersuchungen ergaben, dass das Element 87 keine stabilen Isotope hatte. Letztendlich war es Marguerite Perey, die das Element nach ihrem Heimatland Francium taufte.

Im Jahr 1958 gelang die erste Synthese eines Isotops des Transuranelements 102 durch eine Arbeitsgruppe in Berkeley [**?**] (siehe Abb. 21.19, siehe auch die Tabelle in Abb. 21.20. Zur Herstellung wurde eine neue Technik zur Identifizierung von Elementen mit hohem Z-Wert verwendet. Ein Jahr zuvor hatten Forscher am Nobel-Institut in Schweden behauptet, ein Isotop dieses Elements mit einer Halbwertszeit von 10 Minuten entdeckt zu haben [**?**], und den Namen Nobelium vorgeschlagen. Diese Entdeckung konnte allerdings nicht bestätigt werden [**?**]. Die Berkeley-Gruppe bekam schließlich die Anerkennung für die Entdeckung und das Namensrecht, empfahl jedoch, den Namen Nobelium beizubehalten. Inzwischen hat man das Element Oganesson mit einer Ordnungszahl von 118 erzeugt [**?**].

Francium has no uses, having a half-life of only 22 minutes [**?**].

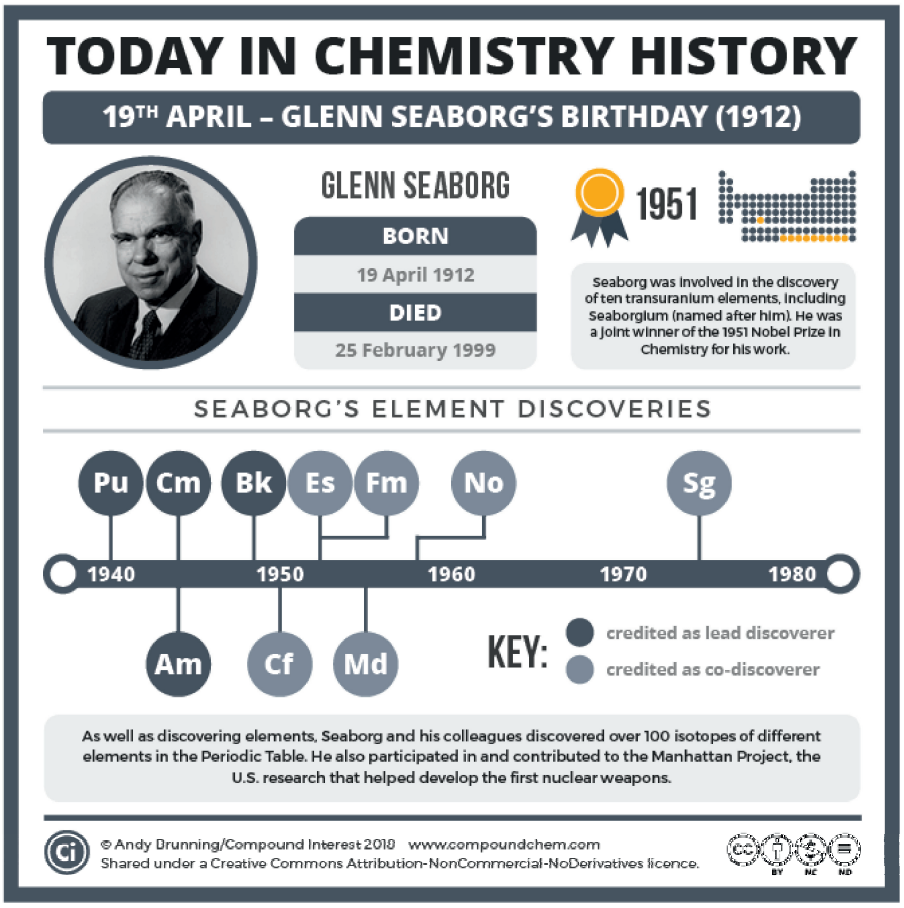


Abb. 21.19: Glenn-Seaborg (1912-1999)

ATOMIC NUMBER	NAME	SYMBOL	YEAR DISCOVERED	SOURCE OF FIRST PREPARATION	FIRST ISOTOPE IDENTIFIED	HALF LIFE OF FIRST ISOTOPE IDENTIFIED
93	NEPTUNIUM	Np	1940	Irradiation of uranium 238 with neutrons	Np^{239}	2.35 DAYS
94	PLUTONIUM	Pu	1941	Bombardment of uranium 238 with deuterons	Pu^{238}	86.4 YEARS
95	AMERICIUM	Am	1945	Irradiation of plutonium 239 with neutrons	Am^{241}	458 YEARS
96	CURIUM	Cm	1944	Bombardment of plutonium 239 with helium ions	Cm^{242}	162.5 DAYS
97	BERKELIUM	Bk	1949	Bombardment of americium 241 with helium ions	Bk^{243}	4.5 HOURS
98	CALIFORNIUM	Cf	1950	Bombardment of curium 242 with helium ions	Cf^{245}	44 MINUTES
99	EINSTEINIUM	Es	1952	Irradiation of uranium 238 with neutrons in first thermonuclear explosion	Es^{253}	20 DAYS
100	FERMIUM	Fm	1953	Irradiation of uranium 238 with neutrons in first thermonuclear explosion	Fm^{255}	22 HOURS
101	MENDELEVIUM	Md	1955	Bombardment of einsteinium 253 with helium ions	Md^{256}	1.5 HOURS
102			1958	Bombardment of curium 246 with carbon ions	102^{254}	3 SECONDS
103	LAWRENCIUM	Lw	1961	Bombardment of californium 252 with boron ions	Lw^{257}	8 SECONDS

Abb. 21.20: Tabelle der Transurane (Stand 1963) mit Entdeckungsjahr und wie sie erzeugt wurden [**?**].

Massenspektrometrie^{4LP}

Unsere empfindlichsten Waagen könnten umgerechnet auf die Masse des Airbus A-380 herausfinden, ob eine Mücke als blinder Passagier an Bord ist.

Klaus Blaum (2015)

Mit welche Wägemethode kann man Isotope nachweisen? Das erste Instrument, das Massenspektren lieferte, wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts J. J. Thomson[15] gebaut. Schon damals erkannte Thomson das Potential der Methode für die Physik und Chemie. Im Experiment trennt man Partikel mit unterschiedlichen Massen innerhalb eines Molekularstrahls und bestimmte ihre relative Häufigkeit [**?**]. Damit gelang der Nachweis der Existenz nicht-radioaktiver Isotope. Abb. 21.22 zeigt die historische Aufnahme, die die massenspektroskopische Trennung der Neon-Isotope Ne-20 und Ne-22 demonstriert. Abb. 21.21 zeigt den schematischen Aufbau eines magnetischen Massenspektrometers. Aufgrund der Bedeutung der Methode für Naturwissenschaft, *life sciences* und Technik lohnt sich an dieser Stelle ein Ausflug in die Welt der massenspektrometrischen Anwendung.[16]

In der Anfangszeit der Massenspektrometrie wurde das Instrument zur Aufklärung der atomaren Natur der Materie genutzt.[17] Mit der Zeit entwickelte sich dieses Werkzeug zum Arbeitspferd der Analyik, vorangetrieben durch Paul und Dehmelt[18] sowie Fenn und Tanaka.[19] Abb. 21.23 zeigt ein Massenspektrum, das die AG Zimmermann in Rostock (Physikalische Chemie) an einer Probe schwerem Dieseltreibstoff gemessen hat.

[15] The Nobel Prize in Physics 1906 was awarded to Joseph John Thomson *in recognition of the great merits of his theoretical and experimental investigations on the conduction of electricity by gases.*

[16] *Lexikon:* The basic principle of **mass spectrometry** is to generate ions from either inorganic or organic compounds by any suitable method, to separate these ions by their mass-to-charge ratio (m/z) and to detect them qualitatively and quantitatively by their respective m/z and abundance. The analyte may be ionized thermally, by electric fields or by impacting energetic electrons, ions or photons. The ions can be single ionized atoms, clusters, molecules or their fragments or associates. Ion separation is effected by static or dynamic electric or magnetic fields.

[17] The Nobel Prize in Chemistry 1922 was awarded to Francis William Aston *for his discovery, by means of his mass spectrograph, of isotopes, in a large number of non-radioactive elements, and for his enunciation of the whole-number rule.*

[18] The Nobel Prize in Physics 1989 was divided, one half awarded to Norman F. Ramsey *for the invention of the separated oscillatory fields method and its use in the hydrogen maser and other atomic clocks*, the other half jointly to Hans G. Dehmelt and Wolfgang Paul *for the development of the ion trap technique.*

[19] The Nobel Prize in Chemistry 2002 was awarded *for the development of methods for identification and structure analyses of biological macromolecules* with one half jointly to John B. Fenn and Koichi Tanaka *for their development of soft desorption ionisation methods for mass spectrometric analyses of biological macromolecules* and the other half to Kurt Wüthrich *for his development of nuclear magnetic resonance spectroscopy for determining the three-dimensional structure of biological macromolecules in solution.*

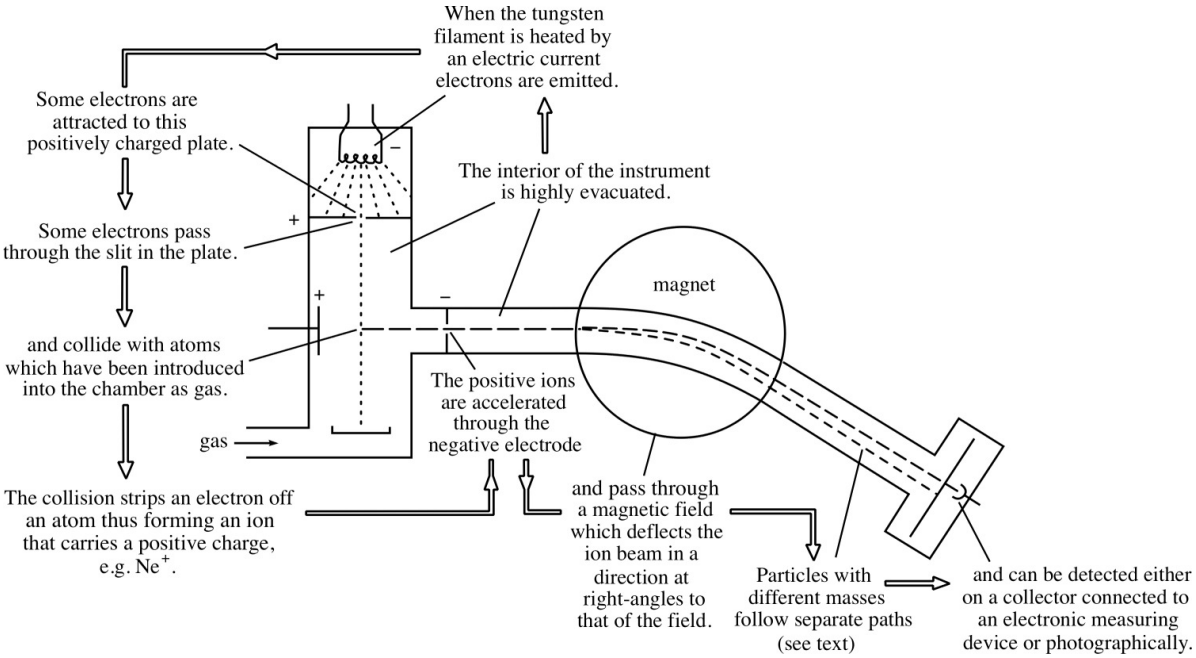


Abb. 21.21: Prinzip eines Ionen-Massenspektrometers. Die Ionisation der neutralen Atome und Moleküle erfolgt durch Elektronenstoß. Die Ionen werden in einem elektrischen Feld beschleunigt und werden dann in einem magnetischen Feld in Abhängigkeit ihres Impulses abgelenkt. Aus dem Ablenkwinkel kann auf das m/e-Verhältnis geschlossen werden.

Im Vergleich zum Spektrum von Thomson bemerkt man die deutliche Erhöhung in der Massenauflösung.

Mass measurements of $^{99-101}$In challenge ab initio nuclear theory of the nuclide ^{100}Sn[?]: The tin isotope ^{100}Sn is of singular interest for nuclear structure due to its closed-shell proton and neutron configurations. It is also the heaviest nucleus comprising protons and neutrons in equal numbers-a feature that enhances the contribution of the short-range proton-neutron pairing interaction and strongly influences its decay via the weak interaction. Decay studies in the region of ^{100}Sn have attempted to prove its doubly magic character but few have studied it from an ab initio theoretical perspective, and none of these has addressed the odd-proton neighbours, which are inherently more difficult to describe but crucial for a complete test of nuclear forces. Here we present direct mass measurements of the exotic odd-proton nuclide ^{100}In, the beta-decay daughter of ^{100}Sn, and of ^{99}In, with one proton less than ^{100}Sn. We use advanced mass spectrometry techniques to measure ^{99}In, which is produced at a rate of only a few ions per second, and to resolve the ground and isomeric states in ^{101}In. The experimental results are compared with ab initio many-body calculations. The 100-fold improvement in precision of the ^{100}In mass value highlights a discrepancy in the atomic-mass values of ^{100}Sn deduced from recent beta-decay results.

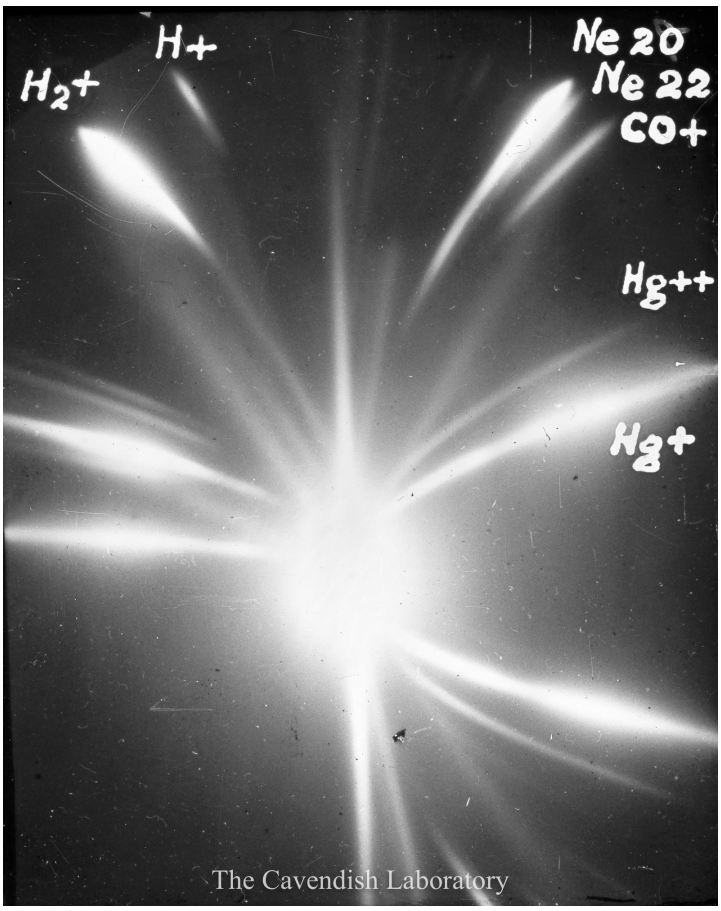


Abb. 21.22: Bei der Forschung an von Kanalstrahlen im Jahre 1912 schickte Thomson und Aston Neonatome durch ein kombiniertes magnetisches und elektrisches Feld und bestimmte die Ablenkung. Sie beobachteten zwei Signaturen auf der Photoplatte, die er Neonatomen mit unterschiedlicher Atommasse (Ne-20, Ne-22) zuordnete.

Ein Beispiel aus der Medizin

Gene sind die Grundbausteine der Vererbung, aber sie werden erst in Proteinen, den primären funktionellen Akteure der Biologie lebendig. Proteine umfassen einen enormen Funktionsumfang: biochemische Reaktionen, Signalübertragung, Transport, Struktur. Das Proteom ist eine Sammlung von Proteinen, die in Biofluiden, Zellen und Geweben vorhanden sind und den Funktionszustand der biologischen Systeme widerspiegeln. Die vollständige Charakterisierung aller Proteine ist Ziel der Proteomik. Die Merkmale, mit denen ein Protein beschrieben werden kann, sind dabei vielfältig. Während das Genom eines Organismus im Allgemeinen nicht von Zelle zu Zelle variiert, ist dies beim Proteom nicht der Fall. Selbst für eine einzelne Zelle ändert sich das Proteom als Reaktion auf äußere Reize. Unter den Methoden, mit denen Proteine in großem Maßstab untersucht werden können, hat die Massenspektrometrie die Fähigkeit, die Komplexität der Proteo-

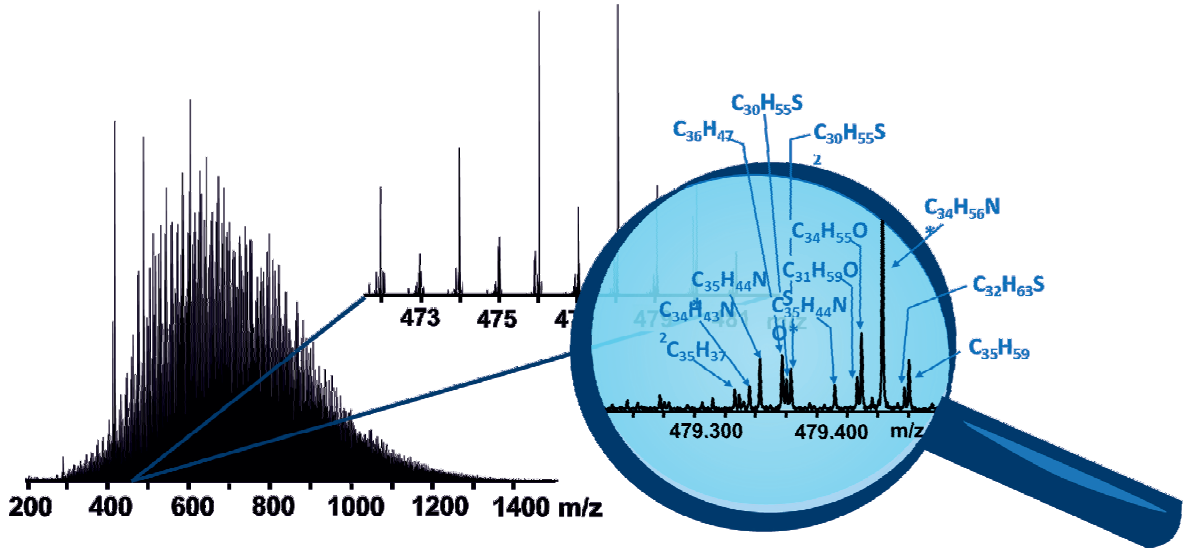


Abb. 21.23: High resolution mass spectrometry enables the exact assignment of the mass-to-charge ratio of ions with the help of high mass resolving power and mass accuracy. Due to the mass defect of the individual isotopes, each exact mass composed of CcHhNnOoSs is unique and be used for the calculation of the sum formulae of unknown signals. That way, high resolution mass spectrometers are able to resolve signals which have the same nominal mass and therefore, thousands of species can be identified in a single spectrum without further separation (AG Zimmermann, U Rostock).

me auflösen zu können. Hauptanwendung der Massenspektrometrie für die Proteomik sind beispielsweise die Identifizierung von Stellen, an denen Proteine modifiziert werden. Abb. 21.24 zeigt eine typische Anwendung der Methode zur Diagnose von Urinproben.

Accurate compound-specific ^{14}C dating of archaeological pottery vessels [?]: Pottery is one of the most commonly recovered artefacts from archaeological sites. Despite more than a century of relative dating based on typology and seriation, accurate dating of pottery using the radiocarbon dating method has proven extremely challenging owing to the limited survival of organic temper and unreliability of visible residues. Here we report a method to directly date archaeological pottery based on accelerator mass spectrometry analysis of ^{14}C in absorbed food residues using palmitic ($C_{16:0}$) and stearic ($C_{18:0}$) fatty acids purified by preparative gas chromatography. We present accurate compound-specific radiocarbon determinations of lipids extracted from pottery vessels, which were rigorously evaluated by comparison with dendrochronological dates and inclusion in site and regional chronologies that contained previously determined radiocarbon dates on other materials. Notably, the compound-specific dates from each of the $C_{16:0}$ and $C_{18:0}$ fatty acids in pottery vessels provide an internal quality control of the results and are entirely compatible with dates for other commonly dated materials. Accurate radiocarbon dating of pottery vessels can reveal: (1) the period of use of

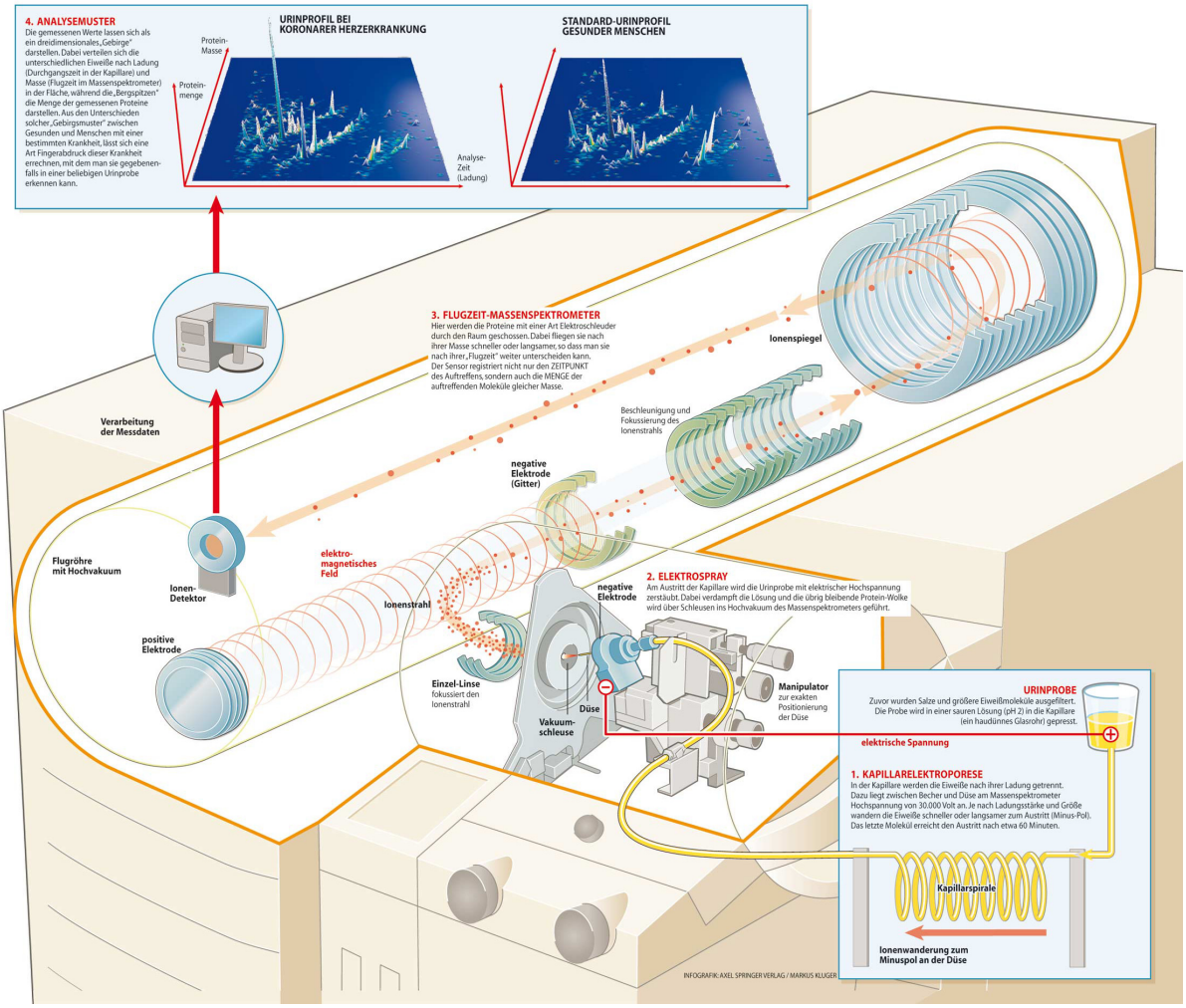
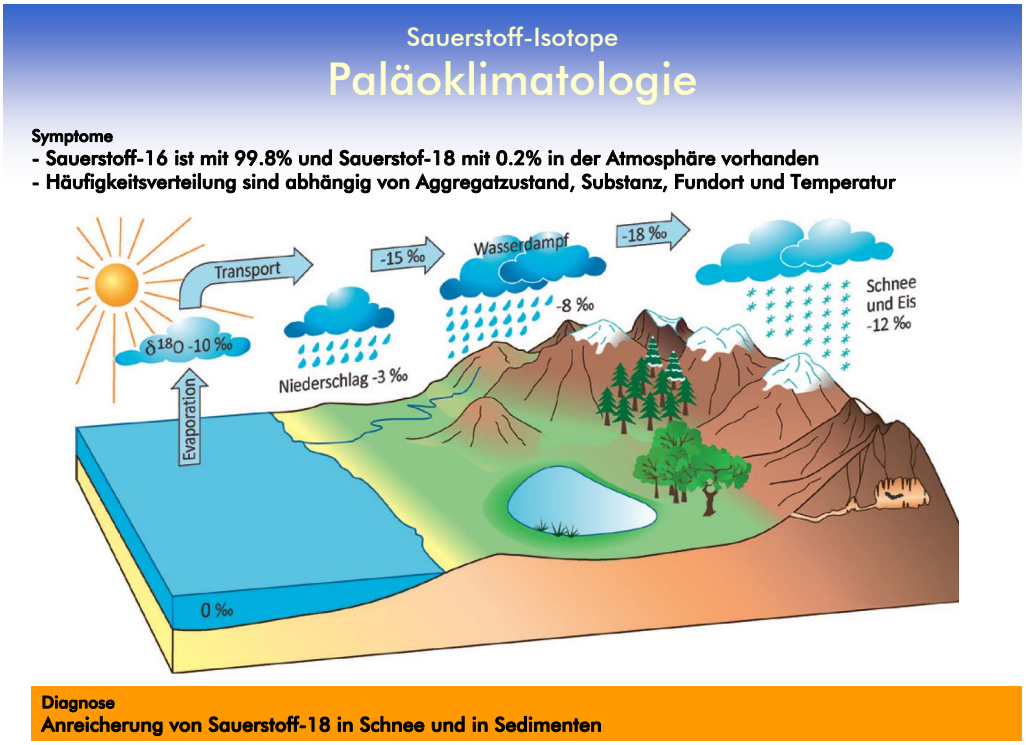


Abb. 21.24: Anwendung der Massenspektrometrie in der Medizin.

pottery; (2) the antiquity of organic residues, including when specific foodstuffs were exploited; (3) the chronology of sites in the absence of traditionally datable materials; and (4) direct verification of pottery typochronologies. Here we used the method to date the exploitation of dairy and carcass products in Neolithic vessels from Britain, Anatolia, central and western Europe, and Saharan Africa.



Beispiel aus der Klimaforschung

Die Isotope der leichten Elemente spiegeln die vor Ort herrschenden Umweltbedingungen wider. Dazu gehören Niederschlag, Temperatur oder Vegetationstyp. Um Erkenntnisse aus der Bestimmung von Isotopenverhältnissen bezüglich vergangener Klimabedingungen zu extrahieren, wurden Massenspektrometer eingesetzt, die die Auswirkung beispielsweise saisonaler Veränderungen auf Isotopensignale erfassen. Sauerstoff-Isotope spielen in der Paläoklimatologie eine wichtige Rolle . Die beiden Sauerstoff-Isotope O-16 und O-18 sind mit 99.8% und 0.2% in der Atmosphäre vorhanden. Wie sich herausgestellt, ist die Häufigkeitsverteilung abhängig vom Aggregatzustand, der Trägersubstanz, dem Fundort und der Umgebungstemperatur. Im Allgemeinen spiegeln die Isotopenverhältnisse von Sauerstoffisotopen Änderungen in atmosphärischen Zirkulationssystemen wider, die wichtige Treiber für die Klimavariabilität sind. Im Laufe der Zeit sind die Variationen der Sauerstoffisotopenverhältnisse im Niederschlag und einen Fingerabdruck des Klimas findet man in Seesedimenten und Baumringen. Sauerstoffisotopen-Datensätze ermöglichen es, lokale und regionale Klimaveränderungen in der Vergangenheit aufzudecken.

In den letzten Millionen Jahren schwankte das Erdklima zwischen glazialen und interglazialen Bedingungen und verursachte große Schwankungen des Meeresspiegels. Die

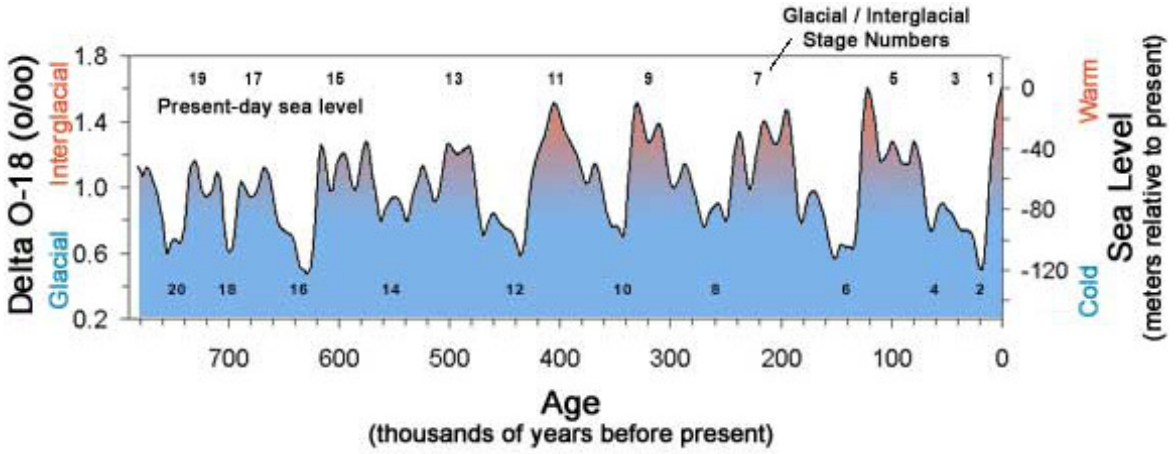


Abb. 21.25: In den letzten Millionen Jahren schwankte das Klima der Erde zwischen Eiszeiten und Zwischeneiszeiten und verursachte große Schwankungen des Meeresspiegels. Die Isotopenkurve von Sauerstoff dient als Maß für Änderungen in der Höhe des Meeresspiegels. Bei einer Eiszeit sinkt der Meeresspiegel um etwa 120 Meter. Während warmer Zwischeneiszeiten, wie beispielsweise heute, ist der Meeresspiegel hoch, weil Gletscher und Eiskappen schmelzen [**?**].

Sauerstoff-Isotopenkurve (Abb. 21.25) zeigt diese Eiszeitzyklen und dient als Indikator für Änderungen des Meeresspiegels.

Bohrprojekte mit dem Ziel das älteste Eis zu bergen, zielen darauf hin, die Klimageschichte der Erde aufzudecken. Ein geeignetes Gebiet ist die Ostantarktis, wo sich die Eisschichten durch den Niederschlag sich in Schichten ablagert [**?**]. Allerdings muss man bei den Kampagnen tief bohren. Ein Kern enthielt Proben von 1.5. Millionen altem Eis. Woanders, im Transantarktischen Gebirge sind die Proben nicht so rein, man gelangt aber mit weniger tiefen Bohrungen an das alte Eis. Wie geht man vor? Man untersucht eingeschlossene Luftblasen. Diese liefern Momentaufnahmen der Entwicklung der Erdatmosphäre. Dazu wurde kürzlich aus einem Gletscher ein 10 Meter langer Eiskern analysiert. Mit dem Wissen, wie das Eis entstand, entwickelten Forscher wurde ein Modell der Häufigkeit seltener Isotope von Beryllium-10, Aluminium-26 und Neon-21. Hochenergetische kosmische Strahlung erzeugen diese Isotope. Durch Vergleich des gemessenen Isotopenprofils des Eiskerns mit dem Modells bestimmte man, dass die frühesten Daten 3 Millionen Jahre alt sind [**?**].

Beispiel aus der Biologie

Carbon, nitrogen, and oxygen stable isotopes in modern tooth enamel: A case study from Gorongosa National Park, central Mozambique [?]: The analyses of the stable isotope ratios of carbon (δ^{13}C), nitrogen (δ^{15}N), and oxygen (δ^{18}O)

in animal tissues are powerful tools for reconstructing the feeding behavior of individual animals and characterizing trophic interactions in food webs. Of these biomaterials, tooth enamel is the hardest, most mineralized vertebrate tissue and therefore least likely to be affected by chemical alteration (i.e., its isotopic composition can be preserved over millions of years), making it an important and widely available archive for biologists and paleontologists. Here, we present the first combined measurements of $\delta^{13}C$, $\delta^{15}N$, and $\delta^{18}O$ in enamel from the teeth of modern fauna (herbivores, carnivores and omnivores) from the well-studied ecosystem of Gorongosa National Park (GNP) in central Mozambique. We use two novel methods to produce high-precision stable isotope enamel data: (i) the *oxidation-denitrification method* which permits the measurement of mineral-bound organic nitrogen in tooth enamel ($\delta^{15}N_{enamel}$), which until now, has not been possible due to enamel's low organic content, and (ii) the *cold trap method*, which greatly reduces the sample size required for traditional measurements of inorganic $\delta^{13}C_{enamel}$ and $\delta^{18}O_{enamel}$ (from $\geq$0.5 to $\leq$0.1 mg), permitting analysis of small or valuable teeth and high-resolution serial sampling of enamel. The stable isotope results for GNP fauna reveal important ecological information about trophic level, dietary niche, and resource consumption. $\delta^{15}N_{enamel}$ values clearly differentiate trophic level (i.e., carnivore $\delta^{15}N_{enamel}$ values are 0.4‰ higher, on average, than herbivores), $\delta^{13}C_{enamel}$ values distinguish C3 and/or C4 biomass consumption, and $\delta^{18}O_{enamel}$ values reflect local meteoric water ($\delta^{18}O$ water) in the park. Analysis of combined carbon, nitrogen and oxygen stable isotope data permit geochemical separation of grazers, browsers, omnivores and carnivores according to their isotopic niche, while mixed-feeding herbivores cannot be clearly distinguished from other dietary groups. These results confirm that combined C, N, and O isotope analyses of a single aliquot of tooth enamel can be used to reconstruct diet and trophic niche. Given its resistance to chemical alteration, the analysis of these three isotopes in tooth enamel has high potential to open new avenues of research in (paleo)ecology and paleontology.

Aktivität

Wie charakterisiert man die Abgabe ionisierender Strahlung durch eine radioaktive Probe? Die Aktivität einer radioaktiven Strahlungsquelle gibt an, wie viele Kerne in einer bestimmten Zeit zerfallen und ionisierende Strahlung abgeben:

$$A_{decay} = \frac{d}{dt} N_{decay}(t) \tag{21.9}$$

Die Aktivität[20] einer Probe ist hoch, wenn die Anzahl instabiler Kerne und die Zerfallskonstante hoch (Halbwertszeit gering) sind. Die Aktivität der in der Natur vorkommenden radioaktiven Proben kann, wie das Beispiel Radium zeigt, bis zu $37 \cdot 10^9$ Bq pro Gramm des radioaktiven Materials betragen. Tab. 21.2 zeigt Beispiele für andere radioaktive Isotope. Der Aktivität einer Probe zu einem bestimmten Zusammenhang

[20] *Lexikon:* Die Einheit der **Aktivität** ist das Becquerel (Bq) mit der Einheit [1/s]. Ein Bq entspricht einem Zerfall pro Sekunde.

Element		Aktivität	
Kalium	K	31 200	Bq/kg
Osmium	Os	1	Bq/kg
Rubidium	Rb	913 300	Bq/kg
Rhenium	Rh	1 020 000	Bq/kg
Platin	Pt	10	Bq/kg
Thorium	Th	4 060 000	Bq/kg

Tab. 21.2: Aktivität ausgewählter radioaktiver Isotope.

Zeitpunkt t ist

$$A_{decay}(t) = \lambda_{decay} \cdot N_{decay}(t) \tag{21.10}$$

Kombiniert man diese Gleichung mit dem radioaktiven Zerfallsgesetz

$$N_{decay}(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda_{decay} \cdot t) \tag{21.11}$$

kann man die Aktivität einer Probe aus der Kenntnis der Anfangsbedingungen bestimmen:

$$A_{decay} = \lambda_{decay} \cdot N_0 \cdot \exp(-\lambda_{decay} \cdot t) \tag{21.12}$$

Wichtig sind auch die in der Literatur häufig verwendete Zerfallszeit $T_{1/e}$ und die Halbwertszeit $T_{1/2}$, die anstatt der Zerfallskonstante angegeben werden:

$$T_{1/e} = \frac{1}{\lambda_{decay}} \tag{21.13}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_{decay}} \tag{21.14}$$

Der Begriff Halbwertszeit bedeutet NICHT, dass nach zwei Halbwertszeiten die Radioaktivität der Probe auf NULL absinkt! Für die Darstellung eines radioaktiven Zerfalls nach Gl. 21.11 bietet es sich an, die y-Achse zu logarithmieren, siehe Abb. 21.26.[21] Dann kann die Zerfallskonstante direkt aus der Steigung der sich ergebenden Geraden bestimmt werden.

Es ist bemerkenswert, dass bei radioaktiven Proben dN/N unabhängig von der Zeit ist! Das bedeutet, dass man an jeden beliebigen Zeitpunkt mit der Charakterisierung beginnen kann.[22] Bei Lebewesen hängt die Wahrscheinlichkeit zu sterben vom Alter ab. Einhundertjährige haben eine höhere Todesrate als zwanzigjährige Menschen. Dagegen hängt die Zerfallswahrscheinlichkeit von Atomkernen nicht von Alter der Probe ab.

[21] Rutherford erkannte als Erster, dass die Anzahl radioaktiver Kerne mit der Zeit exponentiell abnimmt.

[22] Man könnte sagen, dass ein radioaktiver Atomkern seine eigene Geschichte nicht kennt. Zu jeder beliebigen Sekunde, sei es nach einem Tag oder nach Jahrtausenden, ist die Wahrscheinlichkeit für einen radioaktiven Zerfalls unverändert!

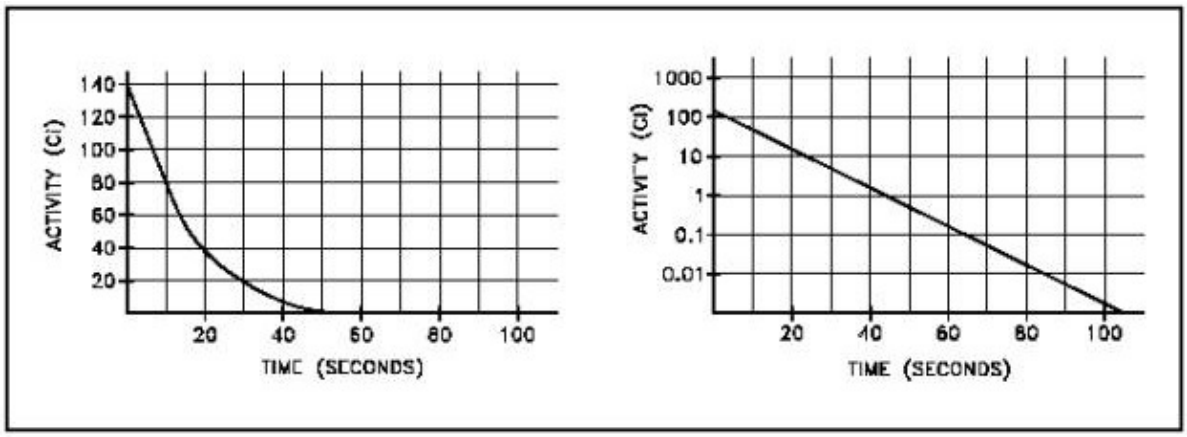


Abb. 21.26: Auftragung der Aktivität mal linear, mal mit logarithmischer Ordinate.

Nuklidkarte

Die in Abb. 21.27 dargestellte Nuklidkarte[23] zeigt die stabilen und radioaktiven Elemente in Abhängigkeit von der Anzahl an Protonen und Neutronen. Man erkennt für die Anzahl der Protonen Z und Neutronen N:

- Die stabilen Kerne nahe beieinander liegen. Man nennt diese Kurve die Linie der Stabilität.
- Man findet keinen natürlich vorkommenden Kern mit einer Ordnungszahl größer als Z=83. Das zugehörige Element ist Wismut.
- Radioaktive Kerne findet man sowohl links als auch rechts von der Linie der Stabilität.
- Für die leichten Elemente Z <16 findet man, dass N=Z. ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ und ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ beispielsweise haben eine gleiche Anzahl an Protonen und Neutronen.
- Bei größerem Z nimmt die Anzahl der Neutronen überproportional zu. Bei Z=40 ist das Verhältnis N/Z=1.2, während es bei Z=80 auf 1.5 anwächst.

Man muss sich dieses Verhalten so vorstellen. Die anziehenden Kräfte scheinen stärker zu sein als die Abstoßung durch die Coulombwechselwirkung. Messungen zeigen, dass für leichte Kerne die Bindungsenergie pro Nukleon mit A anwächst. Durch die Überlagerung der Kräfte wird ein Nukleon umso stärker angezogen wird, je mehr Nukleonen es umgeben. Atomkerne mit etwa A=80 sind am stärksten gebunden. Oberhab von A=80 nimmt die Bindungsenergie pro Nukleon langsam ab. Abb. 21.28 zeigt den Verlauf. Man

[23] *Lexikon:* Die **Nuklidkarte** ist eine grafische Darstellung wichtiger Eigenschaften der Nuklide [**?**]: Massenzahl, Häufigkeit der stabilen Elemente, Halbwertszeit, Zerfallsart und Zerfallsenergie. Für die Kernphysik hat die Nuklidkarte eine ähnliche Bedeutung wie das Periodensystem der Elemente für die Chemie.

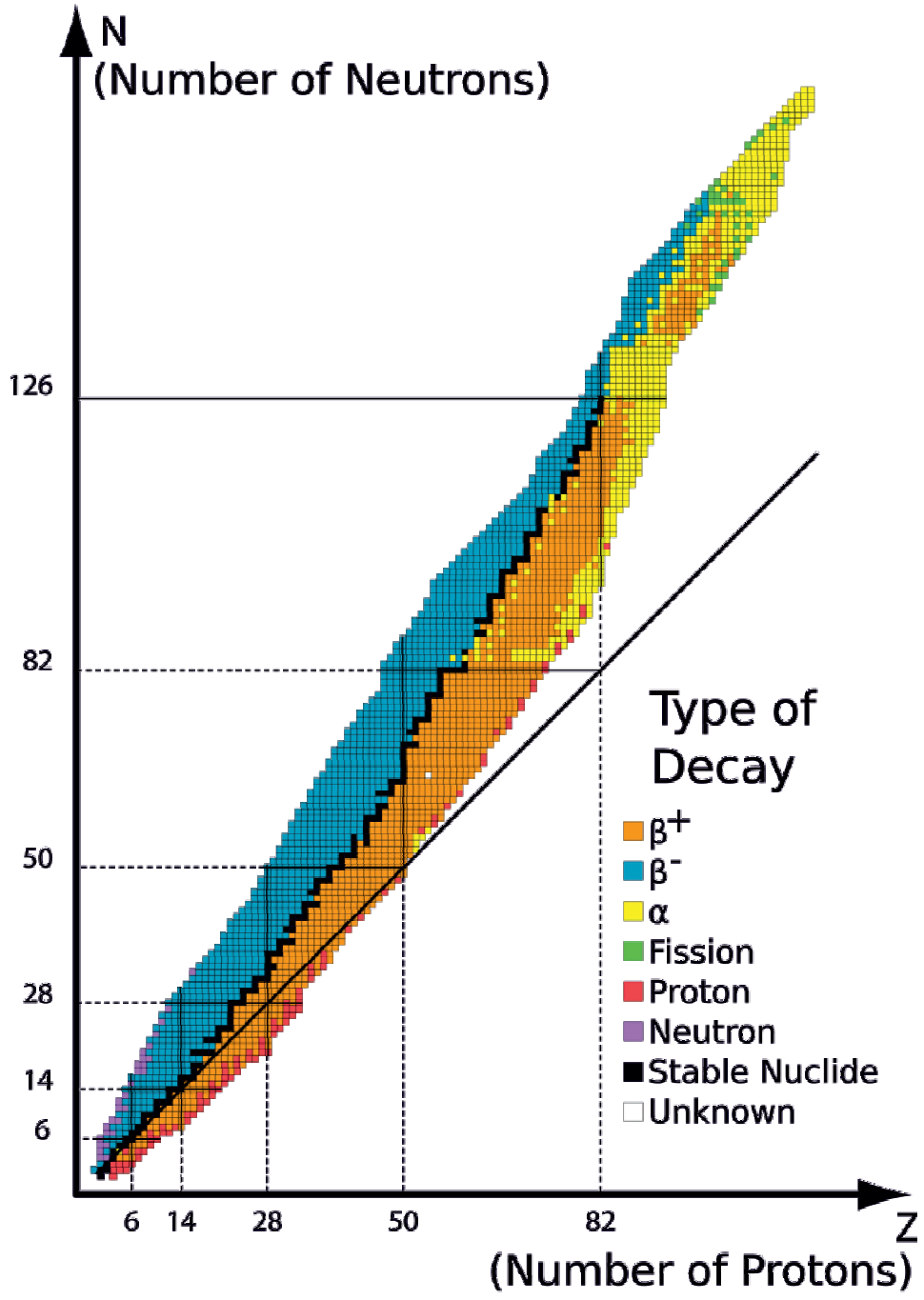


Abb. 21.27: Isotope, geordnet nach der Art des Kernzerfalls. Die nichtradioaktiven Elemente mit $Z > 20$ enthalten mehr Neutronen als Protonen.

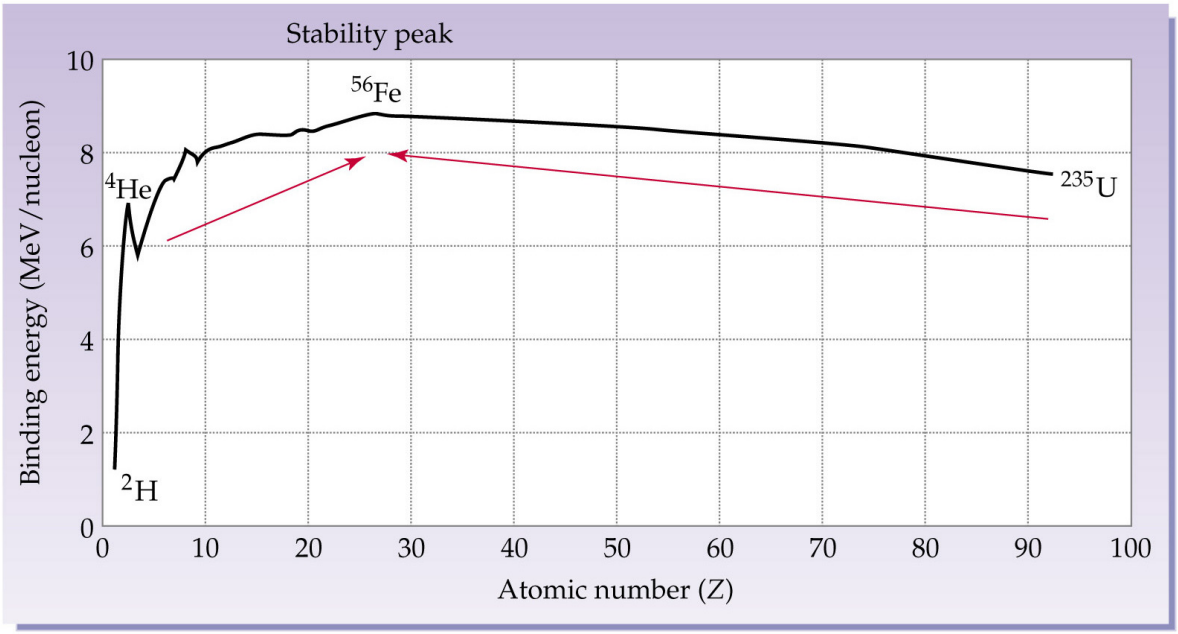


Abb. 21.28: Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Ordnungszahl. Der höchste Wert wird für Eisen-56 erreicht.[a]

[a] Das Atomium ist ein Wahrzeichen Brüssels und stellt die Kristallstruktur von Eisen in $1.65 \cdot 10^{11}$-facher Vergrößerung dar.

kann daraus schließen, dass die Reichweite der Kernkraft gering ist und in etwa dem Durchmesser eines Nukleons entspricht. Für größe Abstände überwiegt die abstoßende Coulombwechselwirkung der Protonen untereinander.

Experimental detection of α-particles from the radioactive decay of natural bismuth [?]: Physicists in France have measured the longest ever radioactive half-life - over twenty billion billion years -in a naturally occurring element that decays by emitting alpha-particles. Noel Coron and colleagues at the Institut Astrophysique Spatiale in Orsay used a scintillating bolometer at very low temperatures to detect the emission of α particles - charged particles that consist of two protons and two neutrons - as bismuth-209 decays into thallium-205

Die Halbwertszeiten der radioaktiven Elemente unterscheiden sich drastisch. Abb. 21.29 gibt einen Überblick über die Halbwertszeiten aller Isotope.

Extreme ^{13}C, ^{15}N and ^{17}O isotopic enrichment in the young planetary nebula K4-47 [?]: Carbon, nitrogen and oxygen are the three most abundant elements in the Galaxy after hydrogen and helium. Whereas hydrogen and helium were created in the Big Bang, carbon, nitrogen and oxygen arise from nucleosynthesis in stars. Of particular interest are the isotopic ratios ^{12}C/^{13}C, ^{14N}/^{15}N and ^{16}O/^{17}O because they are effective tracers of nucleo-

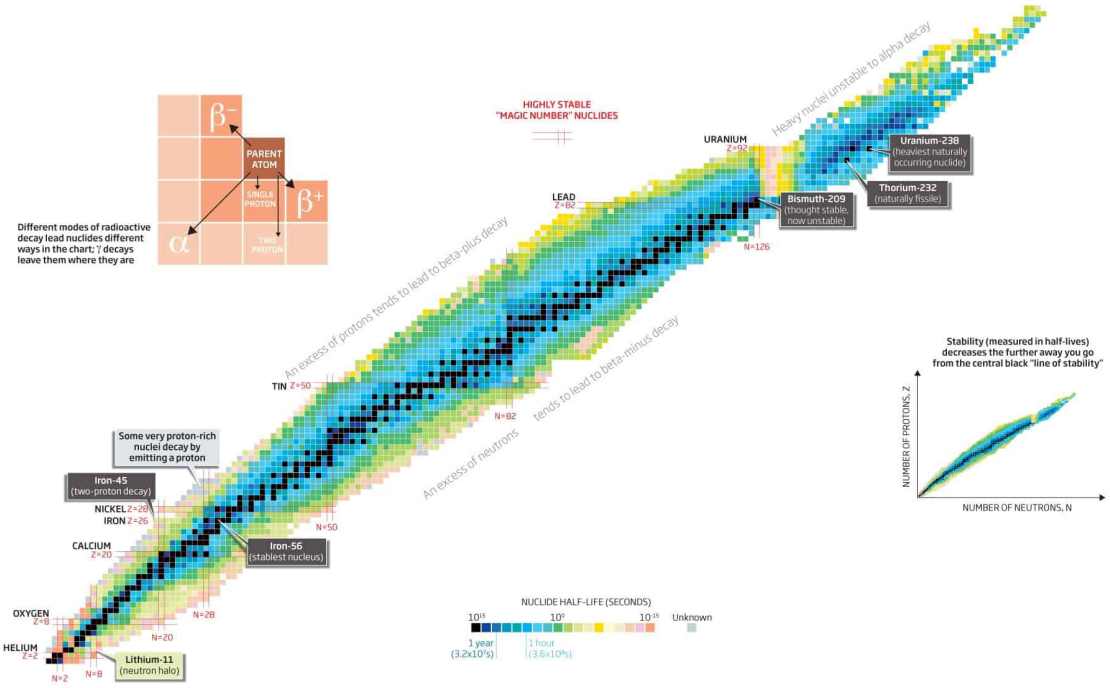


Abb. 21.29: Halbwertszeiten der Isotope im Periodensystem.

synthesis and help to benchmark the chemical processes that occurred in primitive interstellar material as it evolved into our Solar System. However, the origins of the rare isotopes ^{15}N and ^{17}O remain uncertain, although novae and very massive stars that explode as supernovae are postulated to be the main sources of ^{15}N. Here we report millimetre-wavelength observations of the young bipolar planetary nebula K4-47 that indicate another possible source for these isotopes.

Anwendungen 2^{4LP}

In welchen Bereichen werden radioaktive Nuklide eingesetzt?

Abb. 21.30 gibt eine Übersicht über häufig verwendete Isotope. Die Aufzählung gibt Beispiele für typische Anwendungsbereiche.

- Technik: Messung von Füllhohe, Dicke und Dichte, Spurennachweis, Transportprozesse, Abriebbestimmung und Radionuklid-Batterien
- Medizin: Diagnostik, Szintigraphen und Strahlentherapie
- Chemie: Sterilisierung medizinischer Produkte und Nahrungskonservierung, Abwasserbehandlung

Isotope	Half-life	Decay Mode	Comments
Carbon-14 ($^{14}_{6}$C)	5730 years	β^-	Used in radiocarbon dating
Iodine-131 ($^{131}_{53}$I)	8.04 days	β^-	Fission product abundant in fallout from nuclear weapons and reactor accidents; damages thyroid gland
Oxygen-15 ($^{15}_{8}$O)	2.03 minutes	β^+	Short-lived oxygen isotope produced with cyclotrons and used for medical diagnosis in PET
Potassium-40 ($^{40}_{19}$K)	1.25×10^9 years	β^-	Comprises 0.012% of natural potassium; dominant radiation source within the normal human body; used in radioisotope dating
Plutonium-239 ($^{239}_{94}$Pu)	24,110 years	α	Fissile isotope used in nuclear weapons; produced by neutron capture in $^{238}_{92}$U
Radium-226 ($^{226}_{88}$Ra)	1600 years	α	Highly radioactive isotope discovered by Marie and Pierre Curie; results from decay of $^{238}_{92}$U
Radon-222 ($^{222}_{86}$Rn)	3.82 days	α	Radioactive gas formed naturally in decay of $^{226}_{88}$Ra; seeps into buildings, where it may cause serious radiation exposure
Strontium-90 ($^{90}_{38}$Sr)	29 years	β^-	Fission product that behaves chemically like calcium; readily absorbed into bones
Tritium ($^{3}_{1}$H)	12.3 years	β^-	Hydrogen isotope used in biological studies and to enhance yields of nuclear weapons
Uranium-235 ($^{235}_{92}$U)	7.04×10^8 years	α	Fissile isotope comprising 0.72% of natural uranium; used as reactor fuel and in simple nuclear weapons
Uranium-238 ($^{238}_{92}$U)	4.46×10^9 years	α	Predominant uranium isotope; cannot sustain a chain reaction

Abb. 21.30: Halbwertszeiten, Zerfallskanäle und Einsatzgebiete ausgewählter Isotope [**?**].

- Biologie: Anreicherung von bestimmten Stoffen in Ökosystemen und radioaktive Markierung

67P-Churyumov-Gerasimenko a Jupiter family comet with a high D-H ratio [?]: The provenance of water and organic compounds on Earth and other terrestrial planets has been discussed for a long time without reaching a consensus. One of the best means to distinguish between different scenarios is by determining the deuterium-to-hydrogen (D/H) ratios in the reservoirs for comets and Earths oceans. Here, we report the direct in situ measurement of the D/H ratio in the Jupiter family comet 67P Churyumov-Gerasimenko by the ROSINA mass spectrometer aboard the European Space Agency Rosetta spacecraft, which is found to be $(5.3 \pm 0.7) \cdot 10^{-4}$ - that is, approximately three times the terrestrial value. Previous cometary measurements and our new finding suggest a wide range of D/H ratios in the water within Jupiter family objects and preclude the idea that this reservoir is solely composed of Earth ocean-like water.

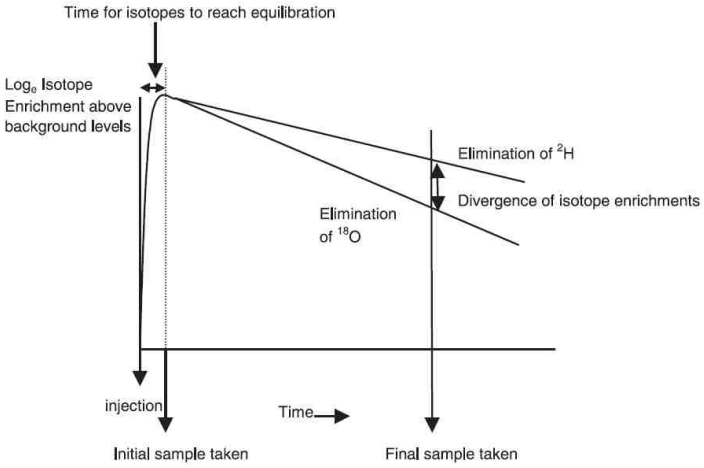


Abb. 21.31: Schematische Darstellung der Veränderungen der Isotopenanreicherung von Deuterium und Sauerstoff-18 im Körper eines Tieres nach einer Injektion. Die Isotope verteilen sich im Wasser des Körper. Nach einem steilen Anstieg in der Anreicherung stellt sich ein Gleichgewicht, der danach langsam und in exponentieller Weise elementspezifisch abgebaut wird. Da Sauerstoff-18 sowohl über Wasser als auch über CO_2 abgebaut wird, nimmt die Konzentration schneller ab als die von Deuterium (In erster Näherung nur über Wasser). Anhand der Differenz kann auf die CO_2-Erzeugung schießen [**?**].

Ein Beispiel aus der Astrophysik

Die Kenntnis der Verteilung der chemischen Elemente ist ein wichtiges Puzzleteil, um unser Verständnis des Universums zu erweitern [**?**]. [24] Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff sind nach Wasserstoff und Helium die am häufigsten vorkommenden Elemente. C, N und O entstehen bei der Nukleosynthese in Sternen. Eine Herausforderung ist es, darüber hinaus Isotopenverhältnisse zu bestimmen. Diese sind von besonderem Interesse. Sie können helfen, die chemischen Prozesse zu verstehen, die in der interstellarem Materie ablaufen, beispielsweise bei der Bildung unseres Sonnensystem. Kürzlich gelang es die Zusammensetzung eines jungen Planetaren Nebel K4-47 zu bestimmen. Dabei handelt es sich um leuchtende Wolke aus Gas und Staubteilchen, die sich bei der Sternentstehung in unmittelbarer Umgebung der Sonne gebildet hat. Wie sich herausstellte, ist der Nebel, im Gegensatz zu anderen untersuchten Nebeln und Stern, reich an seltenen Isotopen (C-13, N-15, O-17) [**?**]. Eine endgültige Klärung für diese überraschende Beobachtung konnte bislang nicht gegeben werden. Eine Möglichkeit ist ein *helium-shell flash* eines Sterns vom J-Typ. Auch Dynamik in einem Doppelsternsystem, wobei einer der Sterne ein Weißer Zwerg ist, kommt in Betracht.

[24] The Nobel Prize in Physics 1983 was divided equally between Subrahmanyan Chandrasekhar *for his theoretical studies of the physical processes of importance to the structure and evolution of the stars* and William Alfred Fowler *for his theoretical and experimental studies of the nuclear reactions of importance in the formation of the chemical elements in the universe.*

Structural and spectroscopic characterization of an einsteinium complex [?]: The transplutonium elements (atomic numbers 95–103) are a group of metals that lie at the edge of the periodic table. As a result, the patterns and trends used to predict and control the physics and chemistry for transition metals, main-group elements and lanthanides are less applicable to transplutonium elements. Furthermore, understanding the properties of these heavy elements has been restricted by their scarcity and radioactivity. This is especially true for einsteinium (Es), the heaviest element on the periodic table that can currently be generated in quantities sufficient to enable classical macroscale studies. Here we characterize a coordination complex of einsteinium, using less than 200 nanograms of ^{254}Es (with half-life of 275.7(5) days), with an organic hydroxypyridinone-based chelating ligand. X-ray absorption spectroscopic and structural studies are used to determine the energy of the L_3-edge and a bond distance of einsteinium. Photophysical measurements show antenna sensitization of Es^{III} luminescence; they also reveal a hypsochromic shift on metal complexation, which had not previously been observed in lower-atomic-number actinide elements. These findings are indicative of an intermediate spin–orbit coupling scheme in which j-j coupling (whereby single-electron orbital angular momentum and spin are first coupled to form a total angular momentum, j) prevails over Russell–Saunders coupling. Together with previous actinide complexation studies2, our results highlight the need to continue studying the unusual behaviour of the actinide elements, especially those that are scarce and short-lived.

Ein Beispiel aus der Medizin

Beim Menschen macht der Grundumsatz etwa 60% des Gesamtumsatzes aus. Dieser liegt bei etwa 10 00 kJ/Tag, wobei die restlichen Beiträge, der Leistungsumsatz 500 kJ/Tag Wärmeregulation, 10% Verdauung und 25% körperliche Aktivität sind. Wie bestimmt man den Gesamtumsatz? Zwei Methoden kennen Sie vielleicht: Kalorimetrie oder eine Messung des O_2-Verbrauchs. Beide Ansätze sind nur unter speziellen Bedingungen (thermisch isolierter Raum, Sauerstoffmaske) zu realisieren und deshalb nicht wirklich praktikabel. An dieser Stelle kommen Isotope ins Spiel und zwar die der Elemente, die im Körper an der Energieverwertung teilnehmen. Man verwendet deshalb schweren Wasserstoff (Deuterium: ^{2}H oder D) und Sauerstoff (^{17}O, ^{18}O) als Isotopenmarkierung. Für die Untersuchungen wird den Patienten eine bestimmte Mengen an diesem speziellen Wasser (HD^{18}O) verabreicht. Diese Stoffmenge verteilt sich gleichmäßig im Körper und nimmt am Stoffwechsel teil. Wie werden Wasserstoff und Sauerstoff ausgeschieden? Das ist unterschiedlich! Während Wasserstoff nur in Form von Wasser den Körper verlässt, kann Sauerstoff über die Atmung ausgeschieden werden. Nach einer gewissen Zeitspanne ergibt sich ein Unterschied in der Konzentration der beiden Stoffe, siehe Abb. 21.31. Mit dieser Information kann man auf den CO_2 Verbrauch und damit auf den Leistungsumsatz schließen [**? ?**]. Bei Menschen dauern solche Studien typisch einen Monat. Da der Sauerstoffverbrauch auch korreliert ist mit der Herztätigkeit, können auch Informationen über den Herzschlag gewonnen werden. Zunächst wurde die Methode nur bei Tieren angewendet, mittlerweile auf in klinischen Studien am Menschen. Die hohe Empfindlichkeit der erlaubt es, selbst geringste Mengen dieser speziellen Isotopen nachzuweisen. Bestimmte

chemische Reaktionen im Körper, wie die Bildung von Glukose, bevorzugen bestimmte Isotope, so dass sich diese Verbindungen im Körper im Vergleich zum natürlichen Vorkommen anreichern. Die Messung des Isotopenverhältnisses gibt also ebenfalls Auskunft über die im Körper stattfindenden Prozesse [**?**].

Ein Beispiel aus der Nahrungsmittelindustrie

Die Globalisierung der Lebensmittelmärkte und der damit verbundene Transport von Nahrungsmitteln zwischen Ländern und Kontinenten treibt die Verbraucher um und es kommen Fragen nach der Herkunft der Lebensmittel auf. Dies beinhaltet beispielsweise Einzelheiten zur Verwendung von Naturstoffen. Isotopenvariationen und Elementkonzentrationen können als geografische Indikatoren dienen, um die geographische Herkunft zu bestimmen. Diese Untersuchungen nutzen die globalen Variationen von Wasserstoff- und Sauerstoffisotopenverhältnissen, schweren Isotopen wie Strontium-87, in Kombination mit Elementkonzentrationen aus. Die Messung der Isotopenverhältnisse von Wasserstoff und Sauerstoff geben Auskunft über den geographischen Ursprung, da sie stark vom geographischen Breitengrad abhängig sind. Der meteorologische Kreislauf aus Verdunstung, Kondensation und Niederschlag beeinflusst das Grundwasser und liefert eine systematische geografische Isotopenvariation [**?**]. Sinkende Temperaturen führen zu einer Isotopenverarmung des Niederschlags, wenn sich Wasserdampf aus den Ozeanen aus äquatorialen Regionen in höher gelegene Regionen bewegt. Dabei verringert sich die Konzentration von Deuterium ($^{1}H^{2}H^{16}O/^{1}H^{1}H^{16}O$) in den Wolken im Vergleich zum Meer. Das Wasser, dass auf den Boden abregnet, spiegelt diesen Isotopengradienten von der Küste bis zum Landesinneren wieder [**?**]. Die Konzentration des schweren Sauerstoff zeigt ein ähnliches Verhalten. Studien haben gezeigt, dass sich der Sauerstoff-18 und Deuteriumgehalt des von Tieren aufgenommenen Wassers in den organischen Verbindungen tierischer Produkte wie Milch, Butter und Käse widerspiegelt [**?**].

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 3.1: Berechnen Sie die die Dichte von Kernmaterie in der Einheit Nukleonen pro cm^3!

Die Anzahl der Nukleonen A pro Volumen V, d.h. $N_V$ist $N_V = A/V$. Das Volumen des Kerns berechnet sich aus

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\,\pi}{3}\,r^3 \cdot A \\ V &= \frac{4\,\pi}{3}\,(1.2 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m})^3 \cdot A \\ V &= 7.24 \cdot 10^{-39}\,\mathrm{m}^3 \cdot A \\ N_V &= \frac{A}{\frac{4\,\pi}{3}\,(1.2 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m})^3 \cdot A} \\ N_V &= 1.38 \cdot 10^{38}\,\frac{\mathrm{Nukleonen}}{\mathrm{cm}^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2: Kohlenstoff ist das sechste Element im Periodensystem. Wie viele Protonen und wie viele Neutronen enthält $^{14}\mathrm{C}$?[25]

Aufgabe 3.3: Bestimmen Sie den Kernradius $R_{nucleus}$ aus der Streuung hochenergetischer Elektronen ($v \approx c$) am Kern!

Ein Elektronen (Impuls $\vec{p}$) fliegt am Kern (Ladungs $Z \cdot e$) vorbei. Beim Abstand b wird das Teilchen um den Winkel α abgelenkt. Der Winkel berechnet sich aus dem Superpositionsprinzip, indem man die Komponenten von $\vec{p}$ auswertet ($p_{||}$, $p_{\perp}$). Zwei Dinge müssen berücksichtigt werden: (i) Je näher das Elektron dem Kern kommt desto stärker ist die Coulombkraft und umso größer ist der Ablenkwinkel. (ii) Dringt das Elektron in den Kern ein, reduziert sich die effektive Kernladung (vgl. Newtonsches Schalentheorem). Es gibt also einen minimalen Abstand b_{min} und damit einen maximalen Winkel α_{max}. b_{min} kann man mit dem Kernradius gleichsetzen. Die Impulsänderung ist nach Newton

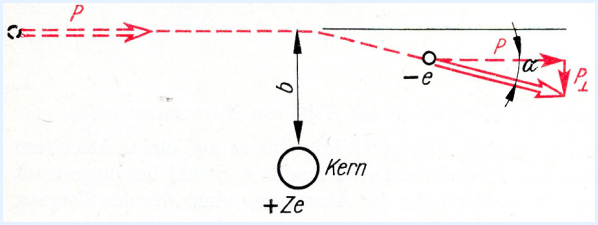
$$\Delta p = F \cdot \Delta t = \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}\,\frac{Z \cdot e}{b} \cdot \Delta t$$

In erster Näherung kann man annehmen, dass die Kraft über eine Entfernung $2\,b$ nahezu konstant und ansonsten NULL ist. Dann findet man für den Vorbeiflug Δt

$$\Delta t \approx \frac{2\,b}{v}$$

[25] Antwort: 6 Protonen, 8 Neutronen

Abb. 21.32:



Für die Impulsänderung ergibt sich

$$\Delta p \approx \frac{Z \cdot e^2}{b^2} \cdot \frac{2\,b}{v}$$

Aus Abb. 21.32 ergibt sich ein weiter Ausdruck für Δp

$$\Delta p = p \cdot \tan\,\alpha$$

Insgesamt findet man

$$\begin{aligned} p \cdot \tan\,\alpha &\approx \frac{Z \cdot e^2}{v \cdot b^2} \\ b &\approx \frac{Z \cdot e^2}{p \cdot v \dfrac{\tan\,\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Diese Näherung ist gar nicht so schlecht und wird umso genauer, je kleiner α wird. Die exakte Formel lautet

$$b = \frac{Z \cdot e^2}{p \cdot v \cdot \tan(\alpha/2)}$$

Für Teilchen, die sich mit relativistischer Geschwindigkeit bewegen, kann man die Ruheenergie des Elektrons vernachlässigen. Für die Kinetische Energie setzt man $p \cdot v$ ein:

$$p \cdot v = m \cdot v^2 \approx m \cdot c^2 \approx E_{kin}$$

findet man schließlich für den Fall $\alpha_{\max}$ den gesuchten Kernradius $b_{\min}{=}R_{nucleus}$:[26]

$$R_{nucleus} = \frac{Z \cdot e^2}{E_{kin} \cdot \tan(\alpha_{\max}/2)}$$

Aufgabe 3.4: Ein radioaktives Gleichgewicht liegt vor, wenn ein radioaktives Nuklid mit der gleichen Geschwindigkeit zerfällt, mit der es produziert wird. In bestimmten Kernreaktoren kann ein radioaktives Gleichgewicht beobachtet werden. In einem natriumgekühlten Kernreaktor entsteht radioaktives Natrium-24 (Na-24), wenn Na-23 ein Neutron aus der Spaltung von U-235 absorbiert. Na-24 zerfällt allerdings in das stabile Magnesium-24 (Mg-24). Wenn die Erzeugungsrate $R_P = 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$ und die Aktivität

[26] Die meisten Atomkerne sind sphärisch. Nur wenige sind prolat oder oblat deformiert. Die Abweichungen sind in der Regel gering. Nur in wenigen Fällen erreichen die Werte 30%

$\lambda_{decay} \cdot N$ ($\lambda_{decay} = 1.28 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$) gleich sind, bleibt die Anzahl der vorhandenen Na-Atome N über die Zeit konstant. Auf welche Menge an Na-24 pendelt sich der Prozess ein?

Wenn das Na-24 Isotop stabil wäre, ergäbe sich nach der Zeit t eine bestimmte Menge an Na-24. Natrium-24 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 14.96 Stunden. Wenn anfänglich keine Na-24 Isotope vorhanden sind, ist die Produktionsrate zu Anfang NULL. Die Zerfallsrate nimmt allerdings zu, wenn die Menge an Natrium-24 zunimmt. Die Menge an Natrium-24 wird zunächst schnell zunehmen. Allerdings steigt auch die Zerfallsrate. Nach einer gewissen Zeit pendeln sich Produktions- und Zerfallsrate auf einen konstanten Wert ein. Die genaue Rechnung ergibt folgende Gleichung:

$$N = \frac{R_P}{\lambda_{decay}} \left(1 - \exp(-\lambda_{decay} \cdot t)\right)$$

Für große Zeiten kann man den Exponentialterm vernachlässigen und es ergibt sich $N = 7.8 \cdot 10^{10}$.

Ein vorübergehendes radioaktives Gleichgewicht tritt ein, wenn das Mutter- und das Tochternuklid im Wesentlichen mit der gleichen Geschwindigkeit zerfallen. Damit ein vorübergehendes Gleichgewicht eintritt, muss der Elternkern im Vergleich zum Tochterkern eine lange Halbwertszeit haben. Ein Beispiel ist Barium-140, das durch einen β-Zerfall in Lanthan-140 zerfällt. Das Tochternuklid La-140 zerfällt über einen β-Zerfall und wird zum stabilem Cer-140. Aufgrund der geringen anfänglichen Menge an La-140 beobachtet am deutlich höhere Raten an Zerfällen bei Ba-140. Wenn die relative Anteil des Tochterkerns zunimmt, nähert sich die Zerfallsrate des Tochternuklids der Zerfallsrate des Elternnuklids an. Wenn beide Anteile klein hoch sind, spricht man von einem transienten Gleichgewicht.

Aufgabe 3.6: Kohlenstoff ist das sechste Element im Periodensystem. Wie viele Elektronen hat C^{2+}?[27]

Aufgabe 3.7: Betrachtet man die Auftragung der Elemente als Funktion von N und Z findet man die Isobaren entlang[28]

(a) einer vertikalen Linie

(b) einer horizontalen Linie

(c) einer Diagonale in Richtung nach rechts oben

(d) einer Diagonale in Richtung nach links-oben

[27] Antwort: 4

[28] Antwort: (d), da man, um A konstant zu halten, N um 1 erhöht und Z um 1 erniedrigen muss.

Aufgabe 3.8: Eine Probe enthält 1000 radioaktive Kerne. Wie viele Halbwertszeiten dauert es, bis 750 Kerne zerfallen sind[29]

(a) 0.25

(b) 1.5

(c) 2.0

(d) 2.5

Aufgabe 3.9: Isotone sind Elemente mit[30]

(a) gleicher Massenzahl, aber unterschiedlicher Anzahl an Neutronen

(b) gleicher Ordnungszahl, aber unterschiedliche Anzahl an Neutronen

(c) gleiche Ordnungszahl, gleiche Massenzahl und gleiche Anzahl an Neutronen

(d) unterschiedliche Ordnungs- und Massenzahl, aber gleiche Anzahl an Neutronen

Aufgabe 3.10: Nukleonen sind[31]

(a) Protonen und Elektronen

(b) Protonen und Neutronen

(c) Protonen und Photonen

(d) Elektronen und Neutronen

(e) Elektronen, Neutronen und Protonen

Aufgabe 3.11: Ein Sauerstoffisotop hat die Massenzahl 18. Andere Sauerstoffisotope haben die gleiche[32]

(a) Masse

(b) atomares Gewicht

(c) Anzahl an Neutron

(d) Anzahl an Protonen

(e) Anzahl an Nukleonen

Aufgabe 3.12: Der Kern des Elements ${}^{45}_{21}\mathrm{E}$ enthält[33]

[29] Antwort: (a)
[30] Antwort: (d)
[31] Antwort: (b)
[32] Antwort: (d)
[33] Antwort: (b)

(a) 45 Protonen und 21 Neutronen

(b) 21 Protonen und 24 Neutronen

(c) 21 Protonen und 45 Neutronen

(d) 24 Protonen und 21 Neutronen

Aufgabe 3.12: Tritium ist ein Isotops des Elements[34]

(a) Wasserstoff

(b) Kohlenstoff

(c) Helium

(d) Stickstoff

(e) Schwefel

Aufgabe 3.13: Ein Sauerstoffisotop hat die Massenzahl 18. Andere Sauerstoffisotope haben[35]

(a) dieselbe Massenzahl.

(b) dasselbe Atomgewicht.

(c) dieselbe Anzahl an Neutronen.

(d) dieselbe Anzahl an Protonen.

(e) dieselbe Anzahl an Neutronen und Protonen.

Aufgabe 3.14: Durch welche Eigenschaften unterscheiden sich Isotope in neutralen Atomen eines Elements?[36]

(a) Masse.

(b) Ordnungszahl.

(c) chemische Eigenschaften.

(d) Anzahl an Elektronen.

(e) Anzahl an Protonen.

Aufgabe 3.15: Die Ordnungszahl eines Elements ist immer gleich[37]

[34] Antwort: (a)
[35] Antwort: (d)
[36] Antwort: (a), (c)
[37] Antwort: (d)

(a) dem Atomgewicht durch zwei!

(b) der Anzahl der Neutronen!

(c) des Gewichts des Kerns!

(d) der elektrischen Ladung des Kerns!

(e) Stimmt alles nicht!

Aufgabe 3.16: Die Anteil der Magnesium-Isotope sind: ^{2}4Mg (79%), ^{2}5Mg (10%), ^{2}6Mg (11%). Welche Atommasse ist im Periodensystem angegeben.

$$(0.79 \cdot 24\,\text{amu}) + (0.10 \cdot 25\,\text{amu}) + (0.11 \cdot 26\,\text{amu}) = 24.3\,\text{amu} \tag{21.15}$$

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie große ist der Unterschied von Wasser und Kernmaterie in Bezug auf die Dichte?

2. Wie groß ist das Verhältnis in der Dichte zweier Kerne, bei denen die Massenzahlen im Verhältnis 1-zu-4 stehen?

3. Was ist ein Isotop?

4. Welche Bedeutung haben die Werte 27 und 60 bei der Angabe $^{60}_{27}\mathrm{Co}$?

5. Die Kernladung des Kupferatoms ist 29. Wie viele Neutronen haben die beiden Isotope Cu-63 und Cu-65?

6. Man schreibt beispielsweise $^{28}_{14}\mathrm{Si}$. Ist diese Notation die kürzest mögliche?

7. Warum haben Isotope desselben Atoms dieselben chemischen Eigenschaften? Siehe dazu Abb. 21.33!

8. Element X hat mehrere Isotope. Was haben sie gemeinsam, was unterscheidet sie?

9. In welcher Beziehung steht die Masse eines Isotops zur atomaren Masse, die im Periodensystem angegeben ist?

10. Sowohl bei Rutherford als auch bei Bohr vernachlässigt man weitestgehend die Welleneigenschaften der Teilchen. Schätzen Sie dazu folgendes ab, um zu einer Einschätzung zu kommen:
    - Wie groß ist die deBroglie-Wellenlänge eines Elektrons im Bohr-Atom im Vergleich zur Größe des Atoms.
    - Wie groß ist die deBroglie-Wellenlänge eines α-Teilchens im Vergleich zur Größe des Kerns?

11. Wie unterscheidet man im Experiment zwischen Wasserstoff, Deuterium und Tritium?

12. Wie verändert sich mit der Zeit die Aktivität einer radioaktiven Probe?

13. Wie hängt die anfängliche Aktivität eines radioaktiven Stoffes von seiner Halbwertszeit ab?

14. Wie bestimmt man den Leistungsumsatz eines Menschen.

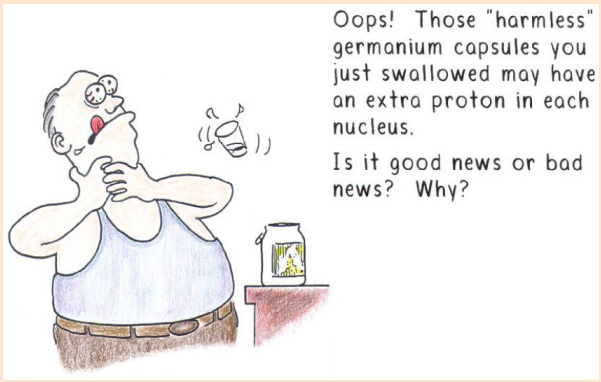
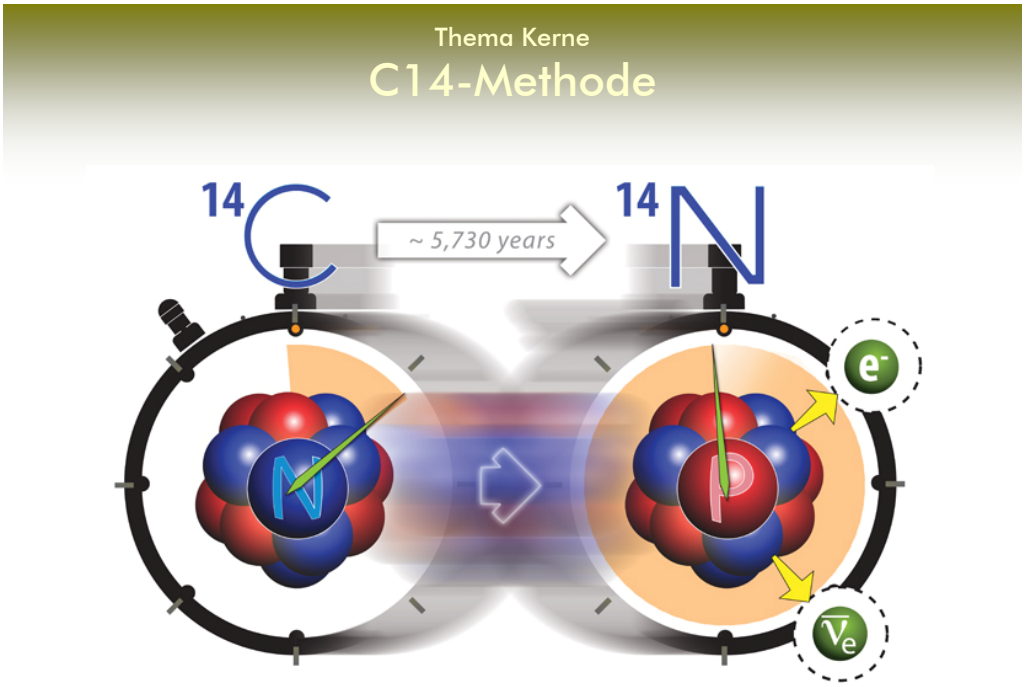

Oops! Those "harmless" germanium capsules you just swallowed may have an extra proton in each nucleus.
Is it good news or bad news? Why?

Abb. 21.33:

Altersbestimmung



We are stardust, we are golden, we are billion-year-old carbon.

Woodstock by Joni Mitchell (1970)

Dendrochronologie[4LP]

Prof. Douglass vom Carnegie-Institut in Washington hat an Hand vieljähriger Untersuchungen und Wetterberichten festgestellt, daß die Dicke der Jahresringe von den jährlichen Niederschlägen abhängt. Diese Abhängigkeit muß auch in der Vergangenheit, in der man Wetterberichte nicht herausgab, bestanden haben, so daß die Jahrhunderte alten Bäume die Möglichkeit bieten, die klimatischen Verhältnisse der Vergangenheit zu ermitteln. Der Gelehrte hat Bäume aus den verschiedensten Landstrichen der Erde untersucht und konnte mittels kalifornischer Baumarten seine Forschungen auf mehr als 3000 Jahre ausdehnen.

Prometheus 7, 181 (1921)

Die Aufklärung der Geschichte der Menschheit hat früh das Interesse der Wissenschaftler geweckt, lange bevor Archäologie als Wissenschaft betrieben wurde. Die Affinität der westlichen Kultur an biblischer Geschichte bestätigt sich in Arbeiten zur Wasseranalyse



Abb. 21.34: Eichenholzprobe aus dem Rathaus von Gödenroth in Rheinland-Pfalz [**?**]

am Toten Meer und am Jordan, was die Moderne Chemie mit begründete. Hier tauchen Namen wie Lavoisier und Gay-Lussac auf [**?**]. Es gibt verschiedene Ansätze, das Alter archäologischer Funde zu bestimmen. Eine Möglichkeit ist die Dendrochronologie. Die Methode ist ein Datierungsverfahren, das auf der Ähnlichkeit von zeitgleich gewachsener Jahresringe in Bäumen beruht und genaue Datierungen ermöglichen (Abb. 21.34). Die Dendrochronologie ist von Bedeutung für die Archäologie, Hausbau- und Siedlungsgeschichte, Kunstgeschichte, Paläoklimatologie, Klimatologie und Vulkanismus.

In the 1930's we began a search for carbon-14 to fill an obvious blank in the isotope table, for the reason that carbon is so very important in biology - a radioactive carbon isotope longer lived than a few minutes would be very valuable as a tracer. Due to an error in theoretical judgment we failed to find carbon-14. I t was later discovered by Samuel Ruben working with Martin Kamen. An interesting point about the failure was that we, Kamen, Ruben, and I, guessed the halflife to be about three months. As you all know, it is 5730 years. This meant that we did not make enough of it to detect it . Kamen and Ruben [**?**] bombarded graphite with a deuteron beam - a sledge hammer approach - and found it [**?**].

W. F. Libby (1982)

In 1946, Willard Libby (1908-1980) developed a method for dating organic materials by measuring their content of carbon-14, a radioactive isotope of carbon. The method is now used routinely throughout archeology, geology and other sciences to determine the age of ancient carbon-based objects that originated from living organisms. Libbys discovery of radiocarbon dating provides objective estimates of artifact ages, in contrast to previous methods that relied on comparisons with other objects from the same location or culture. This radiocarbon revolution has made it possible to develop more precise historical chronologies across geography and cultures.

American Chemical Society

Ein Beispiel aus der Welt der Musikinstrumente

Alte Streichinstrumente gehören zu den wertvollsten Objekten der Kunst und Kunstgeschichte und manche Instrumente erzielen auf Auktionen astronomische Preise. Die Instrumente von Geigenbauern in Norditalien im 17. und 18. Jahrhundert werden besonders geschätzt. Sie haben oft eine überragende Klangqualität. Die Fähigkeiten des Geigenbauers und die Qualität des verwendeten Holzes sind dabei entscheidende Faktoren. Wie kann die Echtheit nachgewiesen werden? Die Überprüfung stellt eine Herausforderung dar. Die Analyse von Design, Konstruktion und Lack reichen in der Regel nicht aus, um den Hersteller zu identifizieren. Die dendrochronologische Analyse des Holzes stellt eine zerstörungsfreie Untersuchung dar, um eine Datierung zu erreichen.[38] Dendrochronologie liefert kein Datum für die Herstellung eines Instruments. Unklar bleibt, wie viel Zeit zwischen dem Fällen des Baumes und der Verarbeitung des Holzes vergingen. Zusätzliche Informationen aus anderen Quellen sind deshalb erforderlich. Diese fehlen für viele Regionen und nur wenige Referenzdaten gehen zurück bis ins 14. Jahrhundert. Hilfe bieten eine Reihe anderer physikalischer Methoden, die für diese erst kurz zurückliegende Zeitspanne entwickelt wurden. Details über über Fourier-Transform-Infrarot-, Raman-, Röntgen-Fluoreszenz-Spektroskopie, Optische Kohärenztomomographie oder Kaliometrie, die man aktuell für die Bestimmung historischer Objekte verwendet, werden in [**?**] besprochen.

Evidence for European presence in the Americas in AD 1021 [**?**]**:** Transatlantic exploration took place centuries before the crossing of Columbus. Physical evidence for early European presence in the Americas can be found in Newfoundland, Canada. However, it has thus far not been possible to determine when this activity took place. Here we provide evidence that the Vikings were present in Newfoundland in AD 1021. We overcome the imprecision of previous age estimates by making use of the cosmic-ray-induced upsurge in atmospheric radiocarbon concentrations in AD 993. Our new date lays down a marker for European cognisance of the Americas, and represents the first known point at which humans encircled the globe. It also provides a definitive tie point for future research into the initial consequences of transatlantic activity, such as the transference of knowledge, and the potential exchange of genetic information, biota and pathologies

Radiokarbonmethode

You read statements in books that such and such a society or archeological site is 20,000 years old. We learned rather abruptly that these numbers, these ancient ages, are not known accurately; in fact, it is at about the time of the First Dynasty in Egypt that the

[38] Bäume in Europa beispielsweise wachsen nur vom Frühjahr bis in den Herbst und stellen dann ihr Wachstum ein. Das erzeugt die bekannten Jahresringe. Aus der Anzahl bestimmt man das Alter des Baumes. Die Dicke der Baumringe von den Wachstumsbedingungen ab. Daraus ergibt sich eine charakteristische Struktur der Ringe, die Auskunft gibt über die klimatischen Bedingungen.

first historical date of any real certainty has been established.

Willard Libby, Nobel Lecture, 12 December 1960

Doch wie bestimmt man Proben der Menschheitsgeschichte, die deutlich älter sind? Die Idee ist, dass man die Angabe anhand eines physikalischen Ereignisses feststellt. Als Indikator kommt, wie sich heraus stellt, Kohlenstoff in Frage, da dieser über die Nahrung aufgenommen und über die Atmung wieder abgegeben wird. Kohlenstoff weist eine erhebliche Anzahl an Isotopen auf, siehe Tab. 21.3. Interessant ist das radioaktive Isotop C-14. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren. Das heißt, sein Zerfall findet auf einer Zeitskala statt, die, in seiner Größenordnung, vergleichbar ist, mit dem Alter der Menschheit (Abb. 21.35). Welche Erkenntnisse ebneten den Weg? (i) Serge Korffs entdeckte, dass die kosmische Strahlung im Mittel etwa 2 Sekundärneutronen pro cm^2 Erdoberfläche und Sekunde erzeugt; (ii) die Mehrheit der Neutronen thermalisieren und reagieren dann mit atmosphärischem Stickstoff. Über eine Kernreaktion wird C-14 gebildet; (iii) C-14-Atome oxidieren, bildet $^{14}CO_2$ und vermischt sich im Verlauf seiner Halbwertszeit mit den anderen Bestandteilen der Atmosphäre. Mit Hilfe einer Schätzung des globalen Kohlenstoffaustauschreservoirs ($8.5\,g/cm^2$) ergaben sich etwa 14 Zerfälle pro Minute und Gramm Kohlenstoff (230 mBq/g).

Der Anteil des Isotops in Kohlenstoff ist allerdings mit $1{:}10^{12}$ sehr gering. Daher benötigt man ein empfindliches Nachweisverfahren, um die Konzentration auch im Vergleich zur normalen radioaktiven Umweltbelastung zu bestimmen (Stichwort Massenspektrometrie). Hinzu kommt, dass C-14 nahezu dieselbe Masse hat, wie das natürlich in der Atmosphäre häufig vorkommende N-14. Deshalb sind hochauflösende Massenspektrometer notwendig, um die Masse von C-14 (14.003242 amu) von N-14 (14.003074 amu) zu unterscheiden (Abb. 21.36).

Surgical amputation of a limb 31,000 years ago in Borneo [?]: The prevailing view regarding the evolution of medicine is that the emergence of settled agricultural societies around 10,000 years ago (the Neolithic Revolution) gave rise to a host of health problems that had previously been unknown among non-sedentary foraging populations,

Isotop	Häufigkeit	Halbwertszeit
$^{9}_{6}C$	instabil	0.13 s
$^{10}_{6}C$	instabil	10 s
$^{11}_{6}C$	instabil	20.6 m
$^{12}_{6}C$	99%	stabil
$^{13}_{6}C$	1%	stabil
$^{14}_{6}C$	instabil	5730 a
$^{15}_{6}C$	instabil	2.25 s
$^{16}_{6}C$	instabil	0.74 s

Tab. 21.3: Kohlenstoff-Isotope mit Angabe der Häufigkeit und der Halbwertszeit.

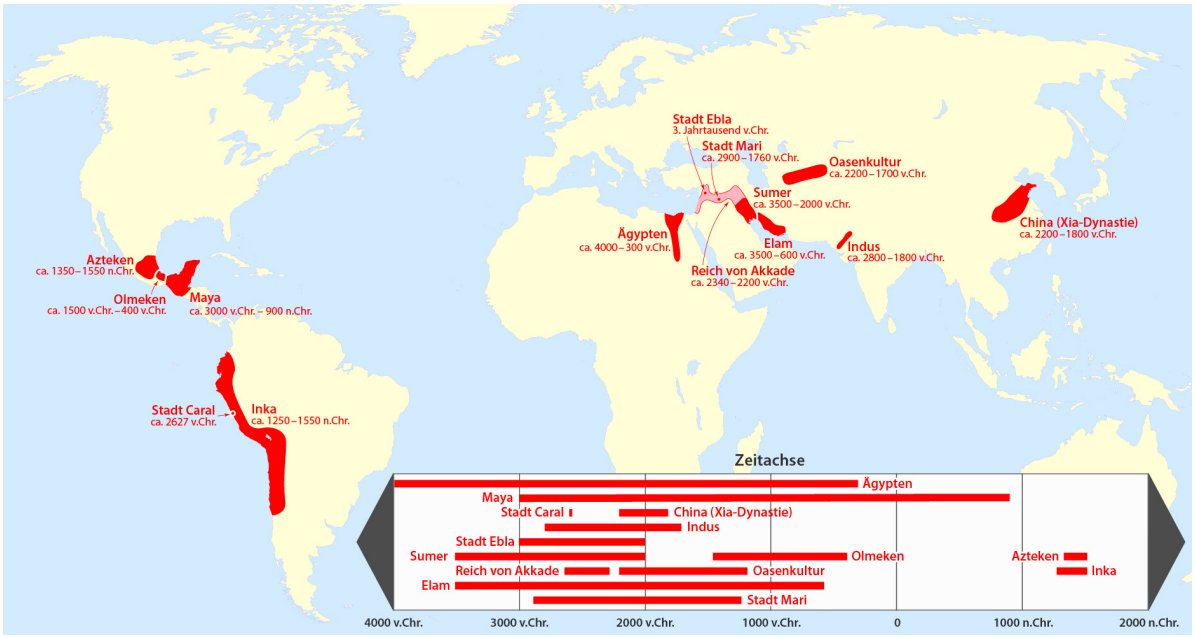


Abb. 21.35: Karte der frühen Hochkulturen [**?**].

stimulating the first major innovations in prehistoric medical practices. Such changes included the development of more advanced surgical procedures, with the oldest known indication of an 'operation' formerly thought to have consisted of the skeletal remains of a European Neolithic farmer (found in Buthiers-Boulancourt, France) whose left forearm had been surgically removed and then partially healed. Dating to around 7,000 years ago, this accepted case of amputation would have required comprehensive knowledge of human anatomy and considerable technical skill, and has thus been viewed as the earliest evidence of a complex medical act3. Here, however, we report the discovery of skeletal remains of a young individual from Borneo who had the distal third of their left lower leg surgically amputated, probably as a child, at least 31,000 years ago. The individual survived the procedure and lived for another 6–9 years, before their remains were intentionally buried in Liang Tebo cave, which is located in East Kalimantan, Indonesian Borneo, in a limestone karst area that contains some of the world's earliest dated rock art. This unexpectedly early evidence of a successful limb amputation suggests that at least some modern human foraging groups in tropical Asia had developed sophisticated medical knowledge and skills long before the Neolithic farming transition.

Der Chemiker Libby entwickelte in den 1940er Jahre die Radiokarbon- oder C-14 Methode.[39] Als Resultat der kosmischen Strahlung treffen energiereiche Teilchen aus dem Weltall auf die Erdatmosphäre. Die Strahlung enthält auch hochenergetische Neutronen. In der oberen Atmosphäre stoßen diese Neutronen mit Stickstoffatomen, dessen Kern

[39] The Nobel Prize in Chemistry 1960 was awarded to Willard Frank Libby *for his method to use carbon-14 for age determination in archaeology, geology, geophysics, and other branches of science.*

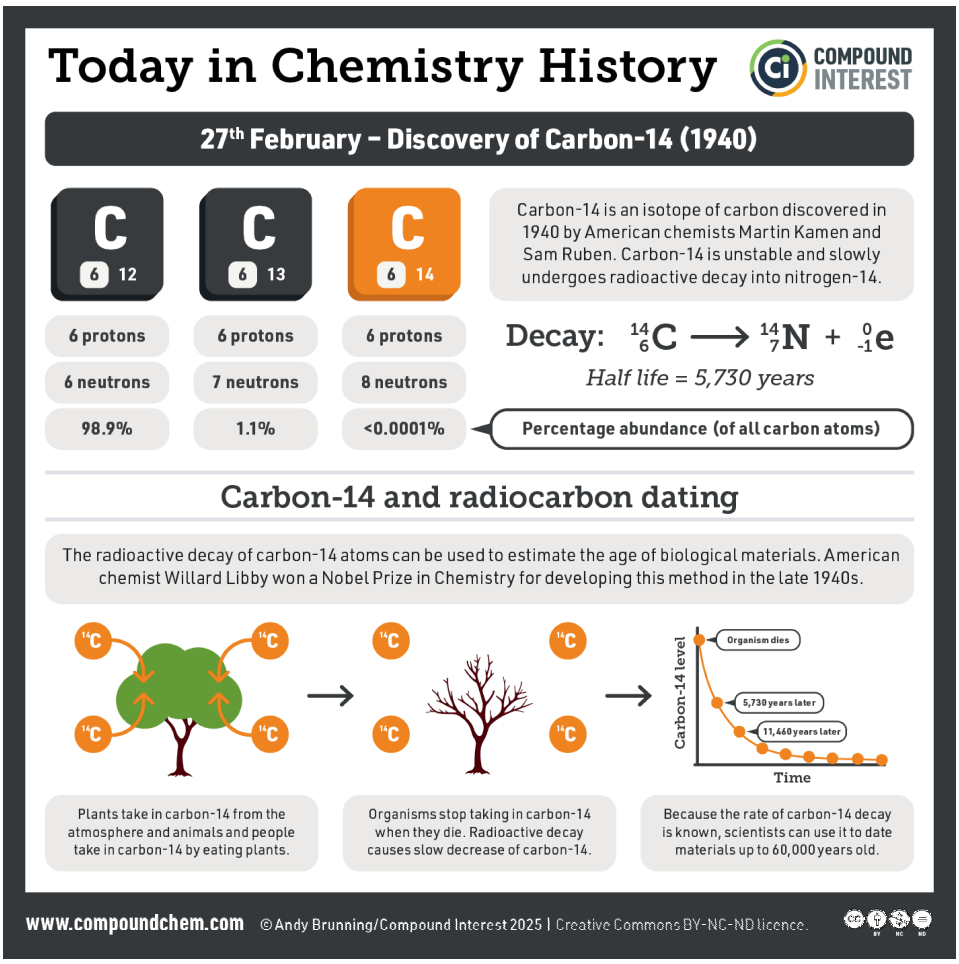


Abb. 21.36: Radiokarbon-Methode

($^{14}_{7}$N) aus 7 Neutronen und 7 Protonen besteht. Beim Stoß wandelt sich ein Proton des $^{14}_{7}$N in ein Neutron um. Es bildet sich $^{14}_{6}$C.[40]

$$n + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + p \tag{21.16}$$

Die Geschwindigkeit mit der C-14 Isotope generiert werden ist, etwa $17\,500\,\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. Das so entstandene C-14 reagiert mit Sauerstoff zu CO_2 und nimmt damit am biologischen Kohlenstoffkreislauf teil. C-14 ist radioaktiv mit einer Halbwertszeit von 5 730 Jahren und wandet sich unter Aussendung von β-Strahlung wieder in Stickstoff um (siehe Kapitel *Ionisierende Strahlung*).

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^{-} + \overline{\nu}_e \tag{21.17}$$

[40] Serge Korff gilt als Entdecker dieses Prozesses. Bei der Bombardierung der Atmosphäre durch kosmische Strahlung entstehen Neutronen. Korff vermutete, dass bei der Reaktion zwischen den Neutronen und Stickstoff-14 in der Atmosphäre, Kohlenstoff-14 erzeugt wird. Auf dieser Erkenntnis fußt Libbys Arbeit.

Das in der Natur vorkommende Kohlenstoff-14 wird ständig durch die auf die Atmosphäre einprasselnde kosmische Strahlung regeneriert. Die Geschwindigkeit, mit der diese Regeneration stattfindet, ändern sich nur auf extrem langen Zeitskalen. Dies liegt an dem nahezu konstanten Partikelfluss, der die Erde trifft und der Abschirmung durch das Magnetfeld der Erde. Mit C-14 gebildete Kohlenstoffgase sind chemisch nicht von Gasen mit den stabilen C-12 und C-13 Isotopen zu unterscheiden. Das radioaktive Isotop wird von Pflanzen und lebender Materie auf die gleiche Weise wie die nicht radioaktiven Isotope absorbiert (Abb. 21.37). In 10^{12} C-12 Atomen findet man durchschnittlich ein C-14 Atom. Dieses Verhältnis beobachtet man in allen Molekülen der lebenden Materie, die Kohlenstoffatome beinhalten. Aus diesem Grund ist C-14 neben K-40 fast für die gesamte natürliche Radioaktivität unseres Körpers verantwortlich. Wenn ein lebender Organismus allerdings stirbt, wird der radioaktive Kohlenstoff nicht mehr absorbiert und das Verhältnis des vorhandenen C-14 beginnt nach dem radioaktiven Zerfallsgesetz (Gl. 21.11) abzunehmen. Mit anderen Worten, ältere Proben beinhalten weniger 14-C als jüngere. Die Menge, die in einer Stichprobe eines toten Lebewesens vorhanden ist, kann somit zur Bestimmung seines Alters verwendet werden. Die dazu notwendige Kalibrierungskurve zeigt Abb. 21.38 [**?**]. Prinzipiell kann die ^{14}C4 Methode 50 000 Jahre in die Vergangenheit schauen. Die Dendrochronologie kommt dagegen nur auf etwa 12 500 Jahre. Die derzeit verwendete Kalibrierkurve geht beruht auf C-14 Vorkommen in Korallen und Karbonaten, die sich unter Verwendung anderer Methoden absolut datieren lassen. Es gibt also ein verlässliches Uhrwerk der Frühgeschichte. Mit der Radiokarbon-Methode wurde kürzlich nachgewiesen, wann die Frühmenschen den afrikanischen Kontinent verlassen haben. Die Analyse ergab, dass das 40 000 Jahre früher geschah, als bislang angenommen [**?** **?**]. Mit Hilfe der Radiokarbonmethode konnte ebenfalls nachgewiesen werden, dass radioaktiver *fallout* selbst in der Tiefsee in die Nahrungskette gelangt [**?**]. Weitere Anwendungen der Radiokohlenstoffmethode finden sich beispielsweise in der Archäologie [**?**], der Medizin [**?**] und der Umweltphysik [**?**].

Ages for Australia's oldest rock paintings [**?**]**:** Naturalistic depictions of animals are a common subject for the world's oldest dated rock art, including wild bovids in Indonesia and lions in France's Chauvet Cave. The oldest known Australian Aboriginal figurative rock paintings also commonly depict naturalistic animals but, until now, quantitative dating was lacking. Here, we present 27 radiocarbon dates on mud wasp nests that constrain the ages of 16 motifs from this earliest known phase of rock painting in the Australian Kimberley region. These initial results suggest that paintings in this style proliferated between 17 000 and 13 000 years ago. Notably, one painting of a kangaroo is securely dated to between 17 500 and 17 100 years on the basis of the ages of three overlying and three underlying wasp nests. This is the oldest radiometrically dated in situ rock painting so far reported in Australia.

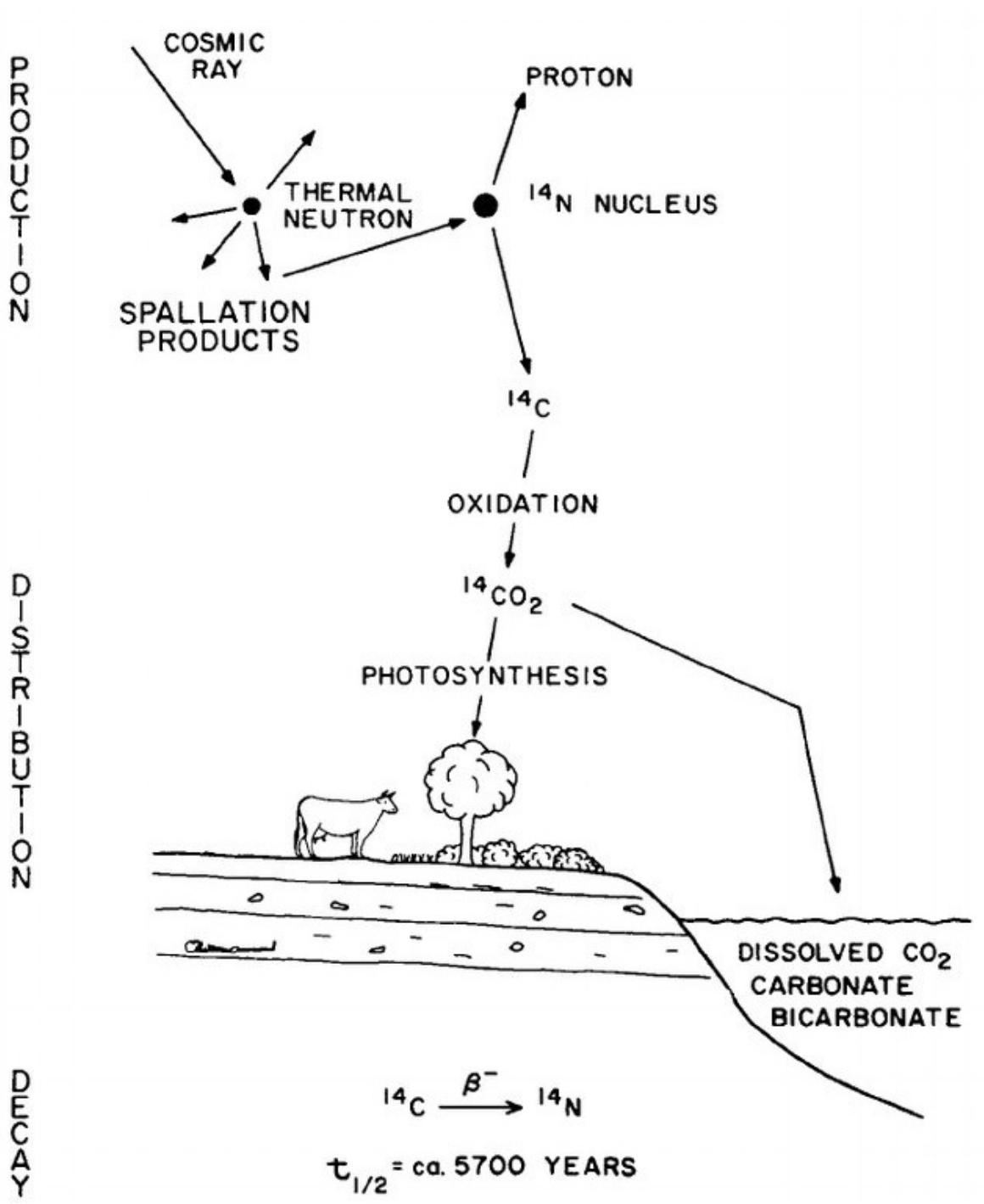


Abb. 21.37: Grundlage der Radiokohlenstoff-Methode: Produktion, Verteilung und Zerfall von ^{14}C [**?**].

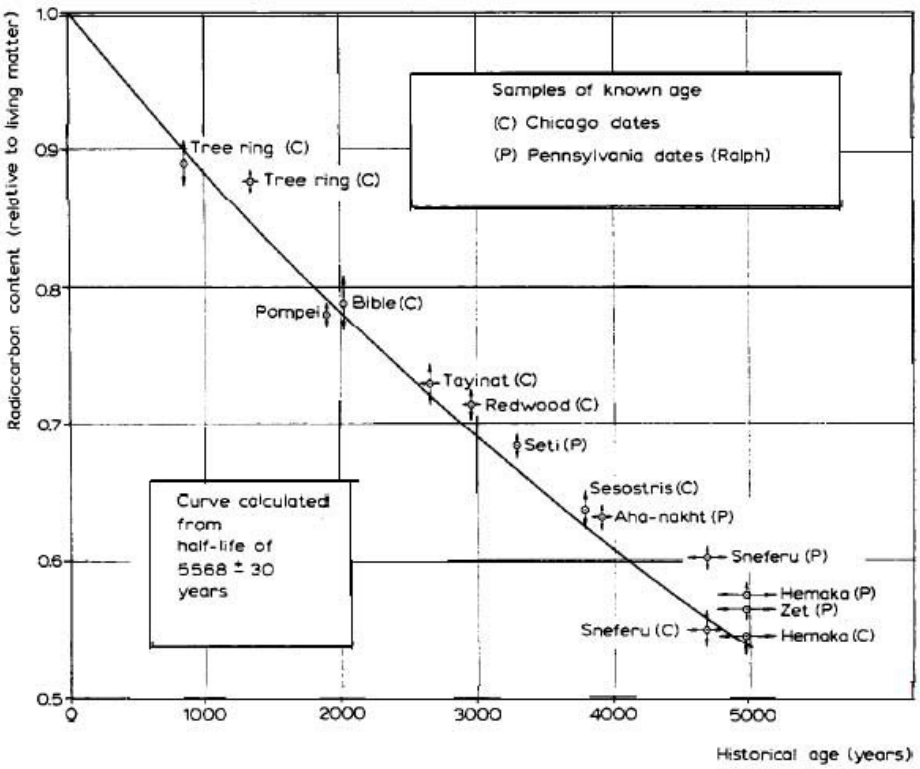


Fig. 3. Curve of Knowns.

Abb. 21.38: Kalibrierung der ^{14}C Methode an historischen Ereignissen [**?**].

Anwendungen[4LP]

Ein Beispiel aus der Genussmittelindustrie

Die Empfindlichkeit der Methode ist beeindruckend. Allerdings muss das Verfahren heutzutage nachjustiert werden. Dies sieht man beispielhaft an der Datierung von Whiskey:

Using carbon isotopes to fight the rise in fraudulent whisky [?]: A major threat to the Scotch whisky industry is the sale of counterfeit single malt whiskies with purported distillation years in the 19th and early- to mid-20th centuries. However, these are often much more recent spirits, distilled in the latter part of the 20th or first part of the 21st centuries. These sales impinge upon the reputation of auction houses, retailers, brand owners and distillers. The atmospheric testing of nuclear weapons in the 1950s and early 1960s has enabled a precise calibration curve to be created, however, there are several reasons why this may not be appropriate for establishing the year of whisky distillation. We have created a C-14 calibration curve derived from known-age, single malt whiskies for the period 1950-2015 that enables whisky distilled during the period from 1955 onwards to have the distillation year determined to within 1-3 years for certain periods. However, because of the shape of the curve, two possible age ranges are often possible. The correct range can often be determined

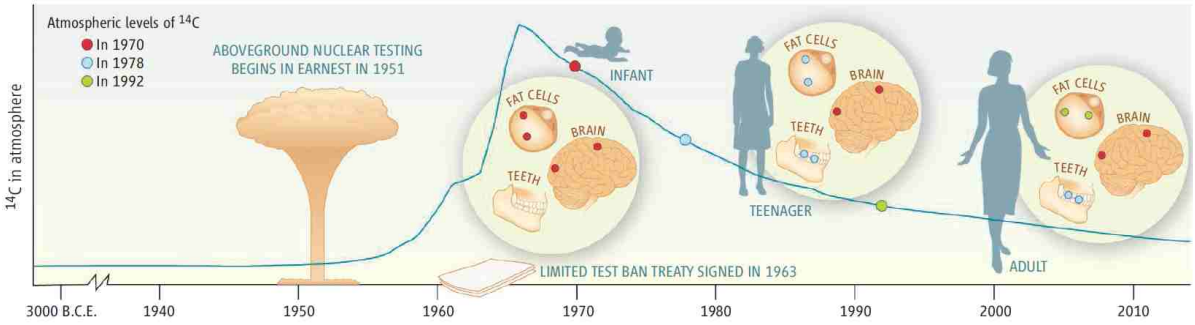


Abb. 21.39: Anteil an ^{14}C in der DNA von Seh- und Gedächtnisneuronen ändern sich im Laufe eines Lebens nicht. Das deutet darauf hin, dass in den Gehirnregionen keine Neurogenese stattfindet. Der Anteil an C-14 im Zahnschmelz bleibt konstant und man kann daraus des Geburtsdatums einer Person bestimmen. Im Gegensatz dazau verändern sich die ^{14}C-Werte in Fettzellen. Das deutet darauf hin, dass sich Fettzellen neu bilden [**?**].

from a further plot of $\delta^{13}C$ values against distillation year, which shows a trend of decreasing values through time.

The mushroom cloud's silver lining[41]

In den späten 1950er Jahren bemerkte man einen merklicher Anstieg von ^{14}C in der Atmosphäre und in der Biosphäre. Ursache waren die Atombombentests der 1950er und 1960er Jahre, die erhebliche Mengen an radioaktiven Materials in die Atmosphäre gebracht haben. Das Maximum wurde im Jahr 1963 erreicht [**?**], in dem Jahr in dem die Atomtests gestoppt wurden. Die Kernwaffenversuche sorgten für einen merklich und rapiden Anstieg von ^{14}C, der es erlaubt, Ereignisse in der Zeit mit einer Auflösung von wenigen Jahren zu datieren, siehe zur Illustration Abb. 21.39. Allerdings war es notwendig hier umfangreiche Messungen durchzuführen, um die Datierung verlässlich zu machen. C-14 Messungen durchgeführt nach den Bombentests, wurden durch Vergleichsmessungen an organischen Materialien unterstützt. Abb. 21.40 zeigt Messungen zum C-14 Gehalt von Gerste in Malt Whisky im Vergleich zum C-14 Gehalt der Atmosphäre.

Ein Beispiel aus der Meeresbiologie

Kann man den *fallout* immer noch nachweisen? Kohlenstoff-14, eines der Produkte der Tests breitet sich in den oberen Schichten des Ozeans aus. Dort nutzen es Meerestiere für ihren Stoffwechsel. Aber auch Flohkrebse, die in tiefen Meeressenken beheimatet sind betroffen. Wie Messungen nachgewiesen haben, enthält das Muskelgewebe der Krebse etwa 6% mehr C-14 als erwartet. Vermutlich wird Nahrung an der Oberfläche mit dem

[41] Aus Ref. [**?**]: Der Silberstreifen der Atompilzwolke am Horizont

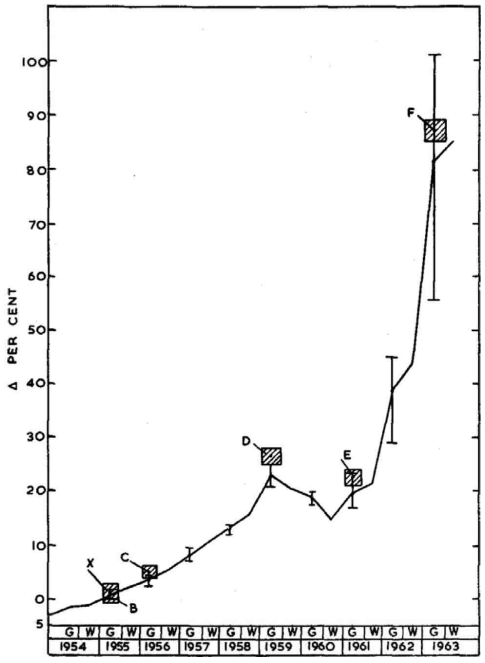


Abb. 21.40: Vergleich der C-14 Konzentration in der Atmosphäre und in *malt whiskey*[**?**].

Isotop angereichert und sinkt dann in die Tiefe. Schwer zugängliche Habitate sind also nicht vor radioaktiver Belastung sicher [**?**].

Bomb radiocarbon evidence for strong global carbon uptake and turnover in terrestrial vegetation [**?**]**:** Vegetation and soils are taking up approximately 30% of anthropogenic carbon dioxide emissions because of small imbalances in large gross carbon exchanges from productivity and turnover that are poorly constrained. We combined a new budget of radiocarbon produced by nuclear bomb testing in the 1960s with model simulations to evaluate carbon cycling in terrestrial vegetation. We found that most state-of-the-art vegetation models used in the Coupled Model Intercomparison Project underestimated the radiocarbon accumulation in vegetation biomass. Our findings, combined with constraints on vegetation carbon stocks and productivity trends, imply that net primary productivity is likely at least 80 petagrams of carbon per year presently, compared with the 43 to 76 petagrams per year predicted by current models. Storage of anthropogenic carbon in terrestrial vegetation is likely more short-lived and vulnerable than previously predicted. Net primary productivity (NPP), the storage of carbon within plant tissues resulting from photosynthesis, is a major carbon sink that we rely on for slowing climate change. Global NPP estimates are variable, leading to uncertainty in modeling current and future carbon cycling. Graven et al. updated NPP estimates using radiocarbon data from nuclear bomb testing in the 1960s. This analysis of radiocarbon uptake into vegetation suggested that current models underestimate NPP, likely by underestimating the carbon stored in short-lived, nonwoody tissues. This work suggests that plants store more carbon but for a shorter time frame than is currently recognized.

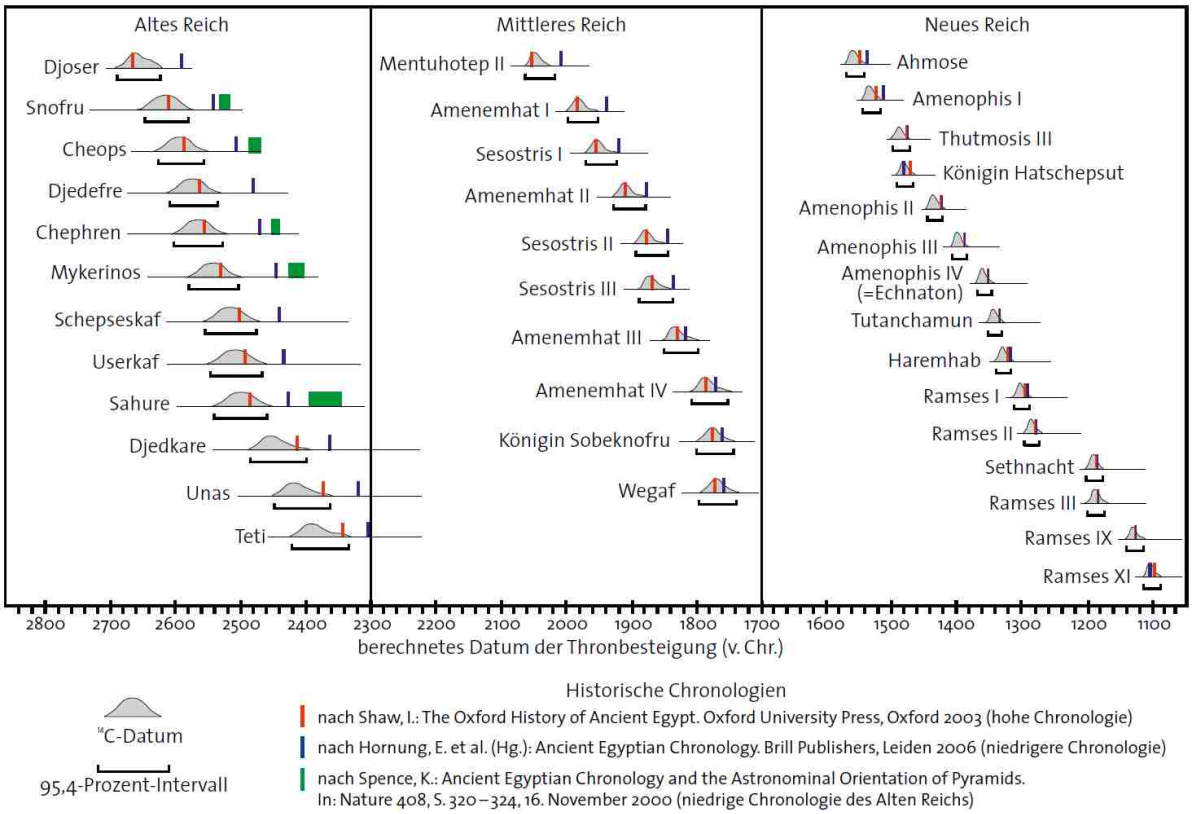


Abb. 21.41: Radiokarbon-Datierung der Herrschaft der Pharaonen in Ägypten im Vergleich zu anderen Arbeiten [**?**].

Beispiele aus der Geschichte

Im Jahr 1947 wurden in Höhlen nahe des Toten Meers antike Schriftrollen (Qumran-Handschriften)gefunden. Unter anderem enthielten die Aufzeichnungen Kopien des Buches Isaiah, die tausend Jahre älter waren als bislang bekannte Quellen, sowie Berichte über die hebräische Religionsgemeinschaft der Essenern, die möglicherweise den jungen Jesus kannten. Die Frage stellte sich, ob die gefundenen Schriften aus einer Zeit vor oder nach Christi Geburt stammen. Die Radiokarbonmethode konnte klären, das die Schriften zwischen 150 to 5 vor Christus entstanden [**?**]. In einer weiteren Studie wurde anhand von Grabbeilagen belegt, wann die Pharaonen im Alten Ägypten herrschten, siehe Abb. 21.41. In der Forschung gab es dazu weit voneinander abweichende Datierungen. Anhand der Proben konnten die Thronbesteigungen im Neuen Reich zum Beispiel mit einer mittleren Genauigkeit von 24 Jahren angegeben werden [**?**].

Einer der bekanntesten Fälle von Kohlenstoff-14 Datierungen betrifft das Grabtuch von Turin, siehe Abb. 21.42. Dieses Relikt wurde erstmals 1354 in Turin ausgestellt. Der negative Abdruck eines scheinbar gekreuzigten Körpers ähnelt dem damals akzeptierten Bild von Jesus. Eine C-14 Analyse wurde 1988 durchgeführt und das Grabtuch anhand der Messergebnisse datiert. Im Grabtuch wurde ein Prozentanteil von 92% C-14 verglichen mit dem heutigen C-14 Anteil festgestellt, also N/N_0=0.92. Aus der Halbwertszeit



Abb. 21.42: Das Grabtuch von Turin ist ein Stück Leinen mit dem Abbild eines Mannes. Das Bild wird als Darstellung von Jesus von Nazareth angesehen. Man glaubte, dass der Stoff das Leichentuch ist, in das Jesus nach der Kreuzigung eingehüllt wurde.

von C-14 ergibt sich eine Zerfallskonstante von

$$\begin{aligned} \lambda_{decay} &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \\ \lambda_{decay} &= \frac{0.692}{5730\,\mathrm{a}} \\ \lambda_{decay} &= \frac{1}{3970.89\,\mathrm{a}} \end{aligned} \tag{21.18}$$

Diesen Wert setzt man in das Zerfallsgesetz ein:

$$\begin{aligned} \frac{N}{N_0} &= \exp(-\lambda_{decay} \cdot t) \\ 0.92 &= \exp(-\lambda_{decay} \cdot t) \\ \ln(0.92) &= -\lambda_{decay} \cdot t \\ -0.0834 &= -\lambda_{decay} \cdot t \\ t &= \frac{0.0834}{\lambda_{decay}} \\ t &= \frac{0.0834}{3970.89}\mathrm{a} \\ t &= 690\,\mathrm{a} \end{aligned} \tag{21.19}$$

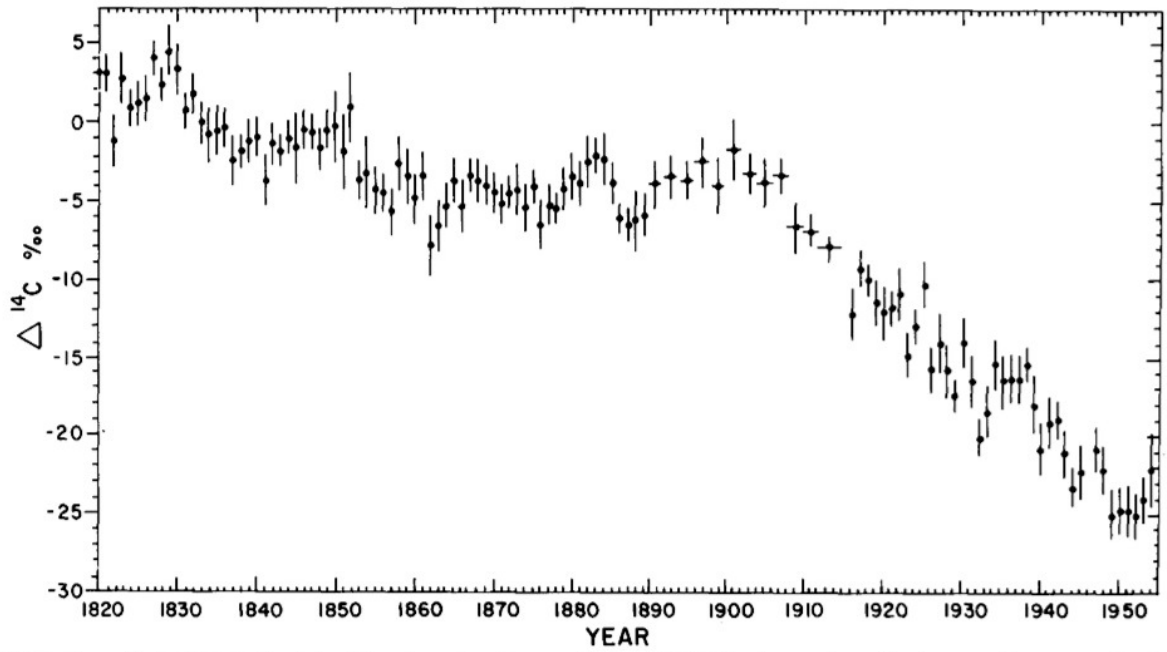


Fig. 2. Atmospheric $\Delta^{14}C$ levels, derived from tree rings, between 1820 and 1954. Single-year determinations are given, except for the 1890–1915 interval (Table 1). The vertical bar denotes one standard deviation. $\Delta^{14}C$ levels of the 1895–1915 interval probably give an upper limit only (see text).

Abb. 21.43: Zeitliche Abnahme des atmosphärischen Radiokohlenstoffs (Suess-Effekt) aufgrund fossiler Brennstoffquellen, die die Zusammensetzung der Atmosphäre verändern [**?**].

Das Alter des Grabtuchs von Turin konnte damit auf etwa das Jahr 1300 AD datiert werden [**?**]. Diese Angabe stimmt gut mit der ersten Erwähnung in historischen Quellen überein.

Impact of fossil fuel emissions on atmospheric radiocarbon and various applications of radiocarbon over this century [**?**]**:** A wide array of scientific disciplines and industries use radio-carbon analyses; for example, it is used in dating of archaeological specimens and in forensic identification of human and wildlife tissues, including traded ivory. Over the next century, fossil fuel emissions will produce a large amount of CO_2 with no ^{14}C because fossil fuels have lost all 14C over millions of years of radioactive decay. Atmospheric CO_2, and therefore newly produced organic material, will appear as though it has aged, or lost ^{14}C by decay. By 2050, fresh organic material could have the same $^{14}C/^{12}C$ ratio as samples from 1050, and thus be indistinguishable by radiocarbon dating. Some current applications for ^{14}C may cease to be viable, and other applications will be strongly affected.

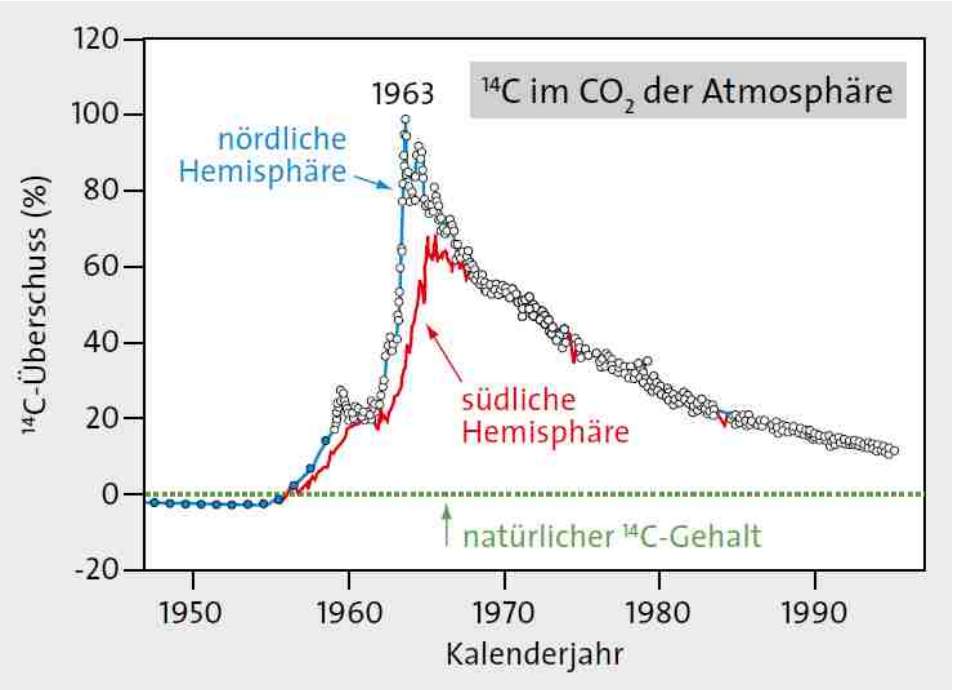


Abb. 21.44: Atmosphärisches ^{14}C, bestimmt in Neuseeland (Südhalbkugel) und Österreich (Nordhalbkugel). Atmosphärische Atomwaffentests verdoppelten fast die Konzentration von C-14 in der nördlichen Hemisphäre. Die Daten der Nord- und Südhalbkugel spiegeln den Luftaustausch zwischen beiden Hemisphären gut wieder. Das Maximum auf der Nordhalbkugel, wo die Tests durchgeführt wurden, wird ein Jahr früher erreicht [**?**].

Klimaforschung^{4LP}

Ein Beispiel aus der Paläontologie

Mittlerweile ist die Radiokarbonmethode so weit entwickelt (μ-molar ^{14}C metrology), dass mit der Technik Pollen in Gletschereis spektroskopiert und zeitlich eingeordnet werden können:

Separation and ^{14}C Dating of Pure Pollen from Lake Sediments [?]: We have developed and tested a practical device for manually separating pollen from pollen concentrates in sufficient quantity for AMS 14C dating. It is a combination of standard, commercially available equipment handled in a clean room by an individual trained to recognize pollen. A typical example requires about 15-20 h of hand-picking under the microscope. We show the usefulness of this procedure with results on a mid-Holocene segment from a core from Mono Lake. Sediments from this hardwater lake contain pollen and finely disseminated organic matter, but no macrofossils. The pollen dated ca. 1000 yr younger than the bulk sediment.

Bei der Analyse der Proben spielen Umwelteinflüsse eine entscheidende Rolle. So verfäl-

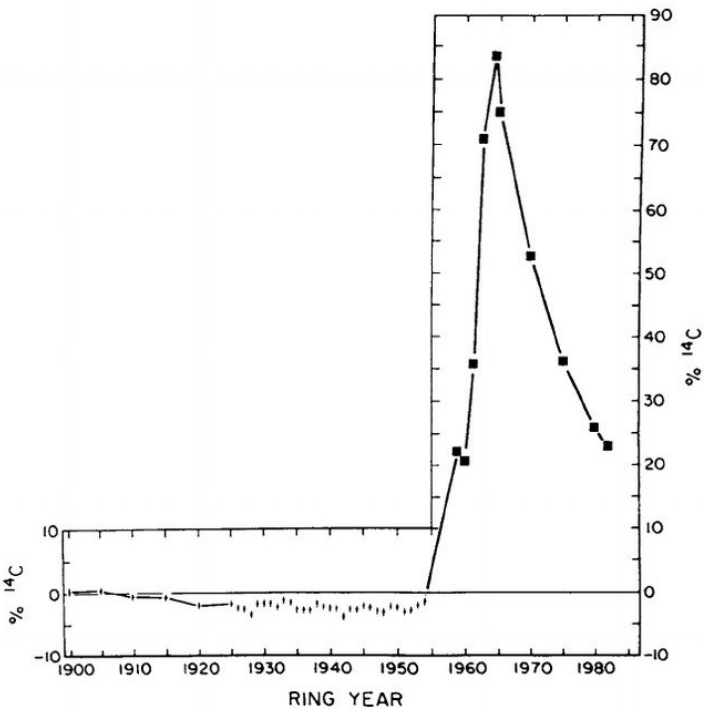


Abb. 21.45: Suess- und Atombombeneffekt: ^{14}C in Baumringen (1900-1955) und Troposphäre CO_2 (1955-1983), ausgedrückt als Prozentsatz des heutigen Standards [**?**].

scht die massive Verbrennung von fossilem Kohlenstoff (Kohle, Erdöl) nach 1850 (Beginn der Industriellen Revolution) die Daten, denn der aus der Verbrennung stammende Kohlenstoff enthält kaum ^{14}C Anteile. Abb. 21.43 zeigt, wie sich dieser Effekt auf die Kalibrierung der C-14 Methode auswirkt. Der Anteil von C-14 in der Atmosphäre wird dadurch unterschätzt [**?**]. Ein weiterer Beitrag stammt aus oberirdischen Kernwaffenversuchen, die im Zeitraum 1950 bis 1963 stattfanden (^{14}C-Bombenpeak(). Die dabei ausgestoßene radioaktiven Isotope haben den natürlichen C-14 Anteil in der Erdatmosphäre kurzzeitig verdoppelt. Abb. 21.44 zeigt die Auswirkungen [**?**]. Abb. 21.45 demonstriert den Effekt noch deutlicher anhand der Abweichung vom langjährigen Mittelwert. Bei der Analyse von Proben müssen diese Einflüsse berücksichtigt werden, um eine verlässliche Datierung zu gewährleisten [**?**]. Der ^{14}C-Anteil kann auch im Zusammenhang mit dem Washingtoner Artenschutzabkommens und im Zusammenhang mit Kunstfälschungen genutzt werden. Der Handel mit Elfenbein wurde zur Zeit des Bombenpeaks stark eingeschränkt. Durch eine ^{14}C-Analyse kann man den feststellen, ob das Elfenbein vor oder nach 1960 in den Handel kam [**?**]. Beim einem Gemälde aus der Reihe *Contraste de formes* von Fernard Léger stellte sich heraus, dass die Baumwolle der Leinwand, zwischen 1959 und 1962 geerntet worden war, mehrere Jahre nach dem Tod des Malers.

A global environmental crisis 42 000 years ago [**?**]: Geological archives record multiple reversals of Earth's magnetic poles, but the global impacts of these events, if

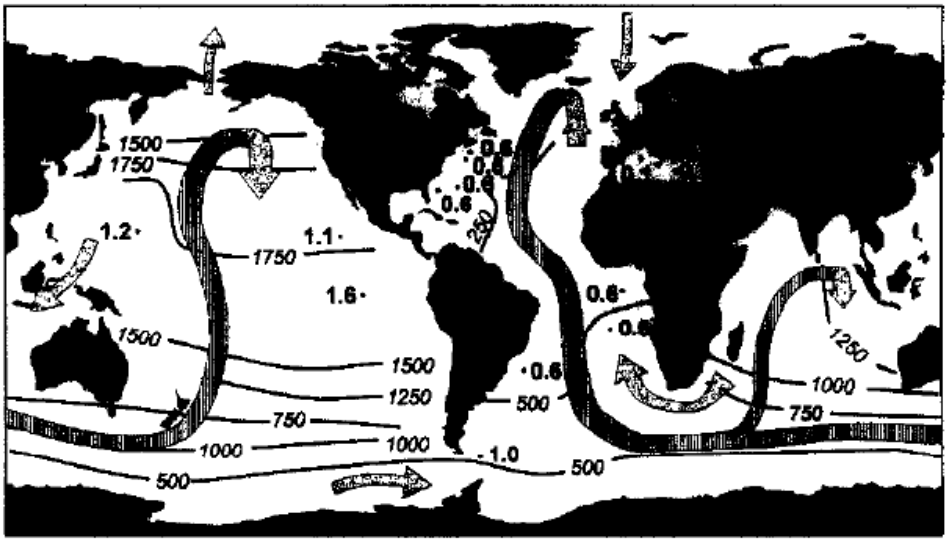


Abb. 21.46: Verhältnis $^{10}Be/^{9}Be$ im tiefen Meerwasser (fett), über $^{14}C/^{12}C$ bestimmte Tiefenwasseralter-Konturen (italic) und Tiefenwasserströmungen. Die Isotopenverhältnisse bestimmt aus der Analyse von Fe-Mn Gestein, stimmen gut mit den Meerwasser-Werten überein, obwohl ein anderes Verfahren angewendet wurde [**?**].

any, remain unclear. Uncertain radiocarbon calibration has limited investigation of the potential effects of the last major magnetic inversion, known as the Laschamps Excursion [41 to 42 thousand years ago (ka)]. We use ancient New Zealand kauri trees (Agathis australis) to develop a detailed record of atmospheric radiocarbon levels across the Laschamps Excursion. We precisely characterize the geomagnetic reversal and perform global chemistry-climate modeling and detailed radiocarbon dating of paleoenvironmental records to investigate impacts. We find that geomagnetic field minima 42 ka, in combination with Grand Solar Minima, caused substantial changes in atmospheric ozone concentration and circulation, driving synchronous global climate shifts that caused major environmental changes, extinction events, and transformations in the archaeological record.

Eye lens radiocarbon reveals centuries of longevity in the Greenland shark [?]: The Greenland shark (Somniosus microcephalus), an iconic species of the Arctic Seas, grows slowly and reaches >500 centimeters in total length, suggesting a life span well beyond those of other vertebrates. Radiocarbon dating of eye lens nuclei from 28 female Greenland sharks (81 to 502 cm in total length) revealed a life span of at least 272 years. Only the smallest sharks (220 cm or less) showed signs of the radiocarbon bomb pulse, a time marker of the early 1960s. The age ranges of prebomb sharks (reported as midpoint and extent of the 95.4% probability range) revealed the age at sexual maturity to be at least 156 ± 22 years, and the largest animal (502 cm) to be 392 ± 120 years old. Our results show that the Greenland shark is the longest-lived vertebrate known, and they

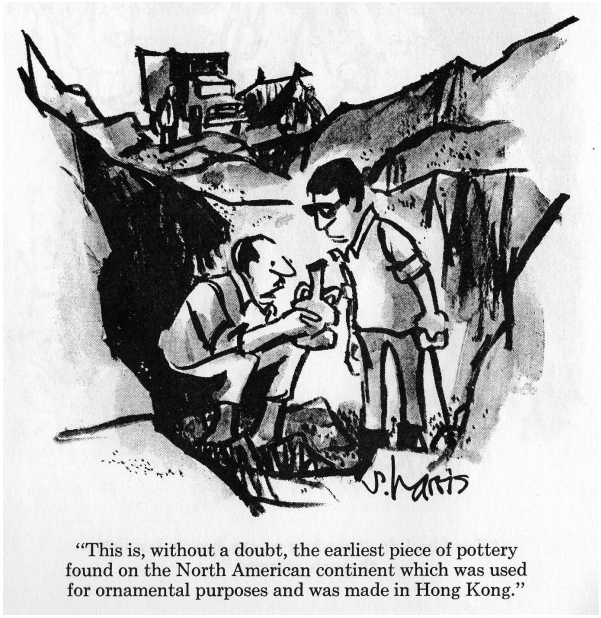


Abb. 21.47: Cartoon von Sidney Harris [**?**]

raise concerns about species conservation.

Seldom has a single discovery in chemistry had such an impact on the thinking in so many fields of human endeavor, siehe Abb. 21.47.

Nobel price committee (1960)

Erdgeschichtliche Datierung

Knowing the rate of disintegration of uranium, it would be possible to calculate the time required for the production of the proportions of lead found in the different minerals, or in other words the ages of the minerals [**?**].

Bertram Boltwood (1907)

Im Jahr 1654 addierte Erzischof Ussher das Erdalter, indem er sich streng an Aussagen der Bibel hielt. Nach seinen Berechnungen entstand die Welt am 23 Oktober im Jahr 4004 vor Christus. Neuere Erkenntnisse legten nahe, dass diese Zeitrechnung nicht stimmen konnte. Zum Einen die Erkenntnisse von James Hutton, das die Oberfläche Erde durch langsame vonstatten gehende Erosion geformt wurde (1792) und zum Anderen durch die Arbeiten von Charles Darwin zur Entwicklung der Arten (1859). Beide Vorgängen erfordern Zeitspannen die Millionen Jahren umfassen. Der Astronomen Edmund Halley schlug vor, das Alter der Erde über den Salzgehalt der Meere zu abzuschätzen. Dazu extrapolierte er auf die Zeit natriumfreier Ozeane. Mit teils fragwürdigen Annahmen (anfänglich reines Meerwasser, konstanter Natriumgehalt des Flusswassers, . . .) berechnete er ein Alter von etwa $9 \cdot 10^7$ Jahre.

Lässt sich das Konzept der C14-Methode erweitern, um damit beispielsweise Informationen zur Erdgeschichte erfahren? Die ältesten Gesteinsproben haben ein Alter von $1.5 \cdot 10^6$ a, wobei das Alter der Erde nach heutiger Kenntnis etwa $4.5 \cdot 10^6$ a beträgt. Dazu analysiert man Proben, die radioaktive Elemente mit längeren Halbwertszeiten enthalten [**?**]. Beispielweise kann man versuchen das Alter der Elemente in unserem Planetensystem zu bestimmen. Unter der Annahme, dass U-235 und U-238 anfänglich in etwa gleichen Mengen entstanden sind, findet man ein aktuelles Verhältnis dieser Elemente von

$$\frac{N_{235}(t_{now})}{N_{238}(t_{now})} = \exp(-t_{now}(1/\tau_{235} - 1/\tau_{238})) \tag{21.20}$$

Das heutige Verhältnis ist 1:140. Damit ergibt sich für den vergangenen Zeitraum t_{now}

$$t_{now} = \frac{\tau_{235} \cdot \tau_{238}}{\tau_{238} - \tau_{235}} \cdot \ln 140 \tag{21.21}$$

Setzt man die Zerfallszeiten (τ_{235}=$1.02 \cdot 10^9$ a; τ_{238}=$6.51 \cdot 10^9$ a) ein, findet man

$$t_{now} = \tau_{235} = 5.98 \cdot 10^9 \text{ a} \tag{21.22}$$

Der Wert ist in guter Übereinstimmung mit dem Alter, das man aus der Häufigkeit anderer Atomkerne bestimmt hat und entspricht in etwa dem Alter des Universums, wie man es aus der Expansionsrate des Universums abgeleitet hat. Das U-235/U-238 Verhältnis liefert also einen Beitrag zum Verständnis der Geschichte des Universums.

Hadean age for a post-magma-ocean zircon confirmed by atom-probe tomography [?]: The only physical evidence from the earliest phases of Earth's evolution comes from zircons, ancient mineral grains that can be dated using the U-Th-Pb geochronometer. Oxygen isotope ratios from such zircons have been used to infer when the hydrosphere and conditions habitable to life were established. Chemical homogenization of Earth's crust and the existence of a magma ocean have not been dated directly, but must have occurred earlier. However, the accuracy of the U-Pb zircon ages can plausibly be biased by poorly understood processes of intracrystalline Pb mobility. Here we use atom-probe tomography to identify and map individual atoms in the oldest concordant grain from Earth, a 4.4-Gyr-old Hadean zircon with a high-temperature overgrowth that formed about 1 Gyr after the mineral's core. Isolated nanoclusters, measuring about 10 nm and spaced 10-50 nm apart, are enriched in incompatible elements including radiogenic Pb with unusually high $^{207}Pb/^{206}Pb$ ratios. We demonstrate that the length scales of these clusters make U-Pb age biasing impossible, and that they formed during the later reheating event. Our tomography data thereby confirm that any mixing event of the silicate Earth must have occurred before 4.4 Gyr ago, consistent with magma ocean formation by an early moon-forming impact about 4.5 Gyr ago.

Ein wichtiger Indikator in diesem Zusammenhang ist Argon-40, welches als Reaktionsprodukt im β^+-Zerfall von Kalium-40 entsteht. Da Argon zu den Edelgasen gehört, kann man annehmen, dass bei der Abkühlung und Verfestigung von Gestein kein Argon eingeschlossen wurde. Jedes Argonatom, dass deshalb im radioaktiven Zerfall von

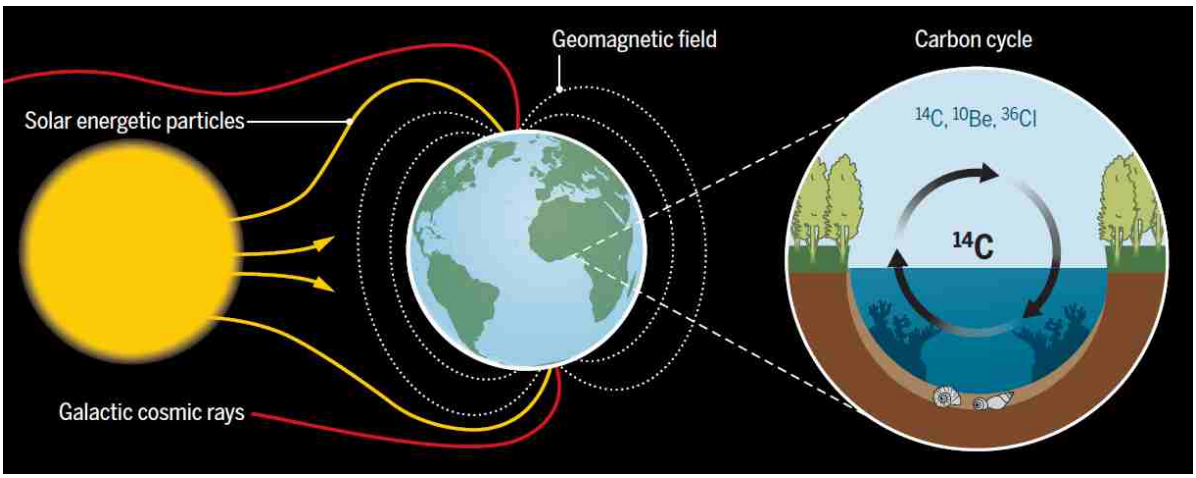


Abb. 21.48: Radioaktiver Kohlenstoff verbindet unterschiedlichste Forschungsbereiche. Die Kenntnis vergangener C-14 Konzentrationen eröffnet Einblicke in die Sonnenaktivität, den Geodynamo und den Kohlenstoffkreislauf. Es ermöglicht weiter die Synchronisierung von wichtigen Ereignissen in der Erdgeschichte und des Klimas [**?**].

Kalium-40 entstanden sein. Vergleicht man die Anteile von $^{4}0_{18}$Ar und $^{40}_{19}$K unter Kenntnis der Halbwertszeit von Kalium-40 ($1.28 \cdot 10^9$ Jahre) kann man das Alter der Gesteinsschicht bestimmen. Tab. 21.4 gibt einen Überblick über Radionuklide, die in der Geochronologie[42] ausgewertet werden. Be-10 beispielsweise hat eine Halbwertszeit von $1.5 \cdot 10^6$ a. Man findet dieses Element angereichert in Sedimentschichten. Die direkte Messung des Verhältnisses ^{10}Be/^{9}Be in Tiefseewasser oder marinen Ablagerungen kann verwendet werden, um die Bewegung von Wassermassen zu verfolgen und den Einbau von Spurenmetallen in die Tiefsee zu quantifizieren [**?**]. Abb. 21.46 zeigt Be-Ergebnisse im Vergleich zum Alter von Tiefenwasser, bestimmt nach der Radiokarbonmethode und über Tiefenwasserströmungen. Die Analysemethode gestattet es auch, an Informationen zu gelangen, die die Bildung des Sonnensystems betreffen [**?**]

Oldest cave art found in Sulawesi [**?**]**:** Indonesia harbors some of the oldest known surviving cave art. Previously, the earliest dated rock art from this region was a figurative painting of a Sulawesi warty pig (Sus celebensis). This image from Leang Bulu' Sipong in the limestone karsts of Maros-Pangkep, South Sulawesi, was created at least 43,900 years ago (43.9 ka) based on Uranium-series dating. Here, we report the Uranium-series dating of two figurative cave paintings of Sulawesi warty pigs recently discovered in the

[42] *Lexikon:* Die **Geochronologie** ist die zeitliche Einstufung von Gesteinen durch die in ihnen vorhandenen Zeitmarken aller Art, wie durch Fossilien oder radioaktive Elemente, zur Rekonstruktion der Erdgeschichte. Das stratigraphische Grundgesetz besagt, dass bei der Ablagerung von Schichtgesteinen jüngere Schichten die jeweils ältere ungestört überdecken. Aus der Erkenntnis, dass in bestimmten Schichten immer nur bestimmte Fossilien vorkommen, konnten erste Altersdatierungen gewonnen werden. Durch die Analyse des Zerfalls radioaktiver Substanzen erhält die Geochronologie ein absolutes Zeitmaß.

same karst area. The oldest, with a minimum age of 45.5 ka, is from Leang Tedongnge. The second image, from Leang Balangajia, dates to at least 32 ka. To our knowledge, the animal painting from Leang Tedongnge is the earliest known representational work of art in the world. There is no reason to suppose, however, that this early rock art is a unique example in Island Southeast Asia or the wider region.

Die Radiokarbonmethode lässt sich weiter ausbauen [**?**]. Die Erzeugung von radiokaktivem Kohlenstoff wird durch magnetische Eigenschaften des Sonnenwindes beeinflusst. Bei hoher Sonnenaktivität veringert sich die Rate, Damit wir atmosphärisches ^{14}C zu einem Sensor der Aktivität der Sonne. Umgekehrt konnten kurzzeitige C-14 Erzeugungsmaxima als Phasen der Sonnenemission mit hoher Teilchenemission in Zusammenhang gebracht werden, siehe Abb. 21.48. Durch den Abgleich mit anderen Isotopen wie ^{10}Be und ^{36}Cl in polaren Eisbohrkernen gelang es die Zeitentwicklung der Sonne besser zu verstehen. Diese astrophysikalischen Entdeckungen sind über die Wissenschaft hinaus relevant, da das Spitzen im Weltraumwetter Einfluss haben kann auf unsere Infrastruktur. Radioaktiver Kohlenstoff ermöglicht auch Einblicke in die Entwicklung des Erdmagnetfeld.

Single-year radiocarbon dating anchors Viking Age trade cycles in time [?]: Recent discoveries of rapid changes in the atmospheric ^{14}C concentration linked to solar particle events have spurred the construction of new radiocarbon annual calibration datasets. With these datasets, radiocarbon dating becomes relevant for urban sites, which require dates at higher resolution than previous calibration datasets could offer. Here we use a single-year radiocarbon calibration curve to anchor the archaeological stratigraphy of a Viking Age trade centre in time. We present absolutely dated evidence for artefact finds charting the expansion of long-distance trade from as far away as Arctic Norway and the Middle East, which we linked to the beginning of the Viking Age at AD 790 ± 10. The methods developed here enable human interactions and cultural, climatic and environmental changes to be compared in archaeological stratigraphies worldwide.

Ein Beispiel aus der Umweltphysik

Ein anderes Element, dass speziell für die Analyse der Wassertransports geeignet ist, da chemisch inert, ist Argon-39. Die Halbwertszeit von 269 Jahren passt gut zu den typischen Zeitskalen der Wasserdynamik in vielen Umweltsystemen. Beispielsweise benötigt vor Grönland absinkendes Wasser einige hundert Jahre, um zum Äquator zu gelangen. Einen Wermutstropfen gibt es. In der Atmosphäre kommen auf ein Argon-39 Atom etwa 10^{15} nicht radioaktive Argon-40 Atome. Experimentell ist das eine Herausforderung. Abb. 21.49 zeigt Messungen des Wasseralters aufgezeichnet vor den Kapverden.

A 35-million-year record of seawater stable Sr isotopes reveals a fluctuating global carbon cycle [?]: Changes in the concentration and isotopic composition of the major constituents in seawater reflect changes in their sources and sinks. Because many of the processes controlling these sources and sinks are tied to the cycling of carbon, such

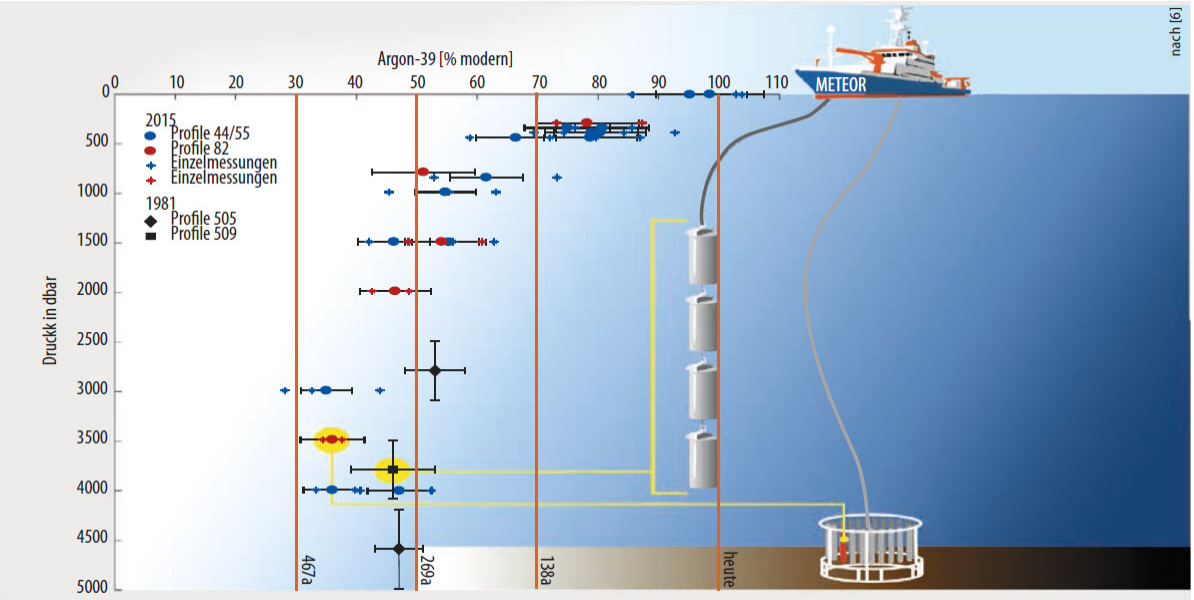


Abb. 21.49: Alter von Wasserproben bestimmt unter Verwendung von Argon-39. Das Wasseralter steigt mit zunehmender Wassertiefe steigt und beträgt in mehreren Kilometer etwa 400 Jahre [**?**].

records can provide insights into what drives past changes in atmospheric carbon dioxide and climate. Here, we present a stable strontium (Sr) isotope record derived from pelagic marine barite. Our $\delta^{88/86}$Sr record exhibits a complex pattern, first declining between 35 and 15 million years ago (Ma), then increasing from 15 to 5 Ma, before declining again from 5 Ma to the present. Numerical modeling reveals that the associated fluctuations in seawater Sr concentrations are about ±25% relative to present-day seawater. We interpret the $\delta^{88/86}$Sr data as reflecting changes in the mineralogy and burial location of biogenic carbonates.

Wie die Tab 21.4 zeigt, ist ^{204}Pb kein Endprodukt eines radioaktiven Zerfalls. Diesem Isotop kommt deshalb die Rolle zu, die C-12 in der Radiokohlenstoffmethode einnimmt. Proben, die kein Pb-204 enthalten, sind ausschließlich durch radioaktiven Zerfall erzeugt worden. Der Isotopenanteil von Pb-204 in einer Probe wird als Vergleich zur Datierung herangezogen. Alternativ kann man das Verhältnis ^{206}Pb/^{207}Pb nutzen, da diese Radionuklide unterschiedliche Zerfallsraten aufweisen [**?**]. Andere Isotopenverhältnisse wie ^{87}Rb/^{87}Sr oder ^{40}K/^{40}Ar werden ebenfalls für die Datierung ausgewertet (Abb. 21.50).

^{129}I and ^{247}Cm in meteorites constrain the last astrophysical source of solar r-process elements [**?**]**:** The composition of the early Solar System can be inferred from meteorites. Many elements heavier than iron were formed by the rapid neutron capture process (r-process), but the astrophysical sources where this occurred remain poorly understood. We demonstrate that the near-identical half-lives (15.6 million years) of the

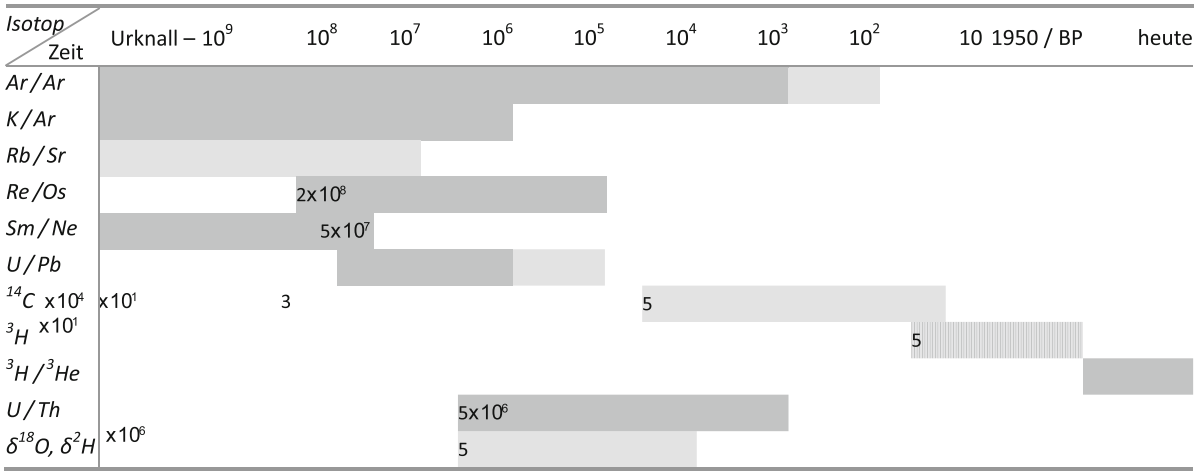


Abb. 21.50: Altersbereich von Datierungsmethoden in Jahren auf der Grundlage ausgewählter Isotope [**?**].

Radionuklid	Endnuklid	Halbwertszeit in 10^6 a
^{238}U	^{208}Pb	4.49
^{235}U	^{207}Pb	0.71
^{232}Th	^{208}Pb	14.10
^{87}Rb	^{87}Sr	50.00
^{40}K	^{40}K	1.30

Tab. 21.4: Radioisotope, die in der Geochronologie genutzt werden.

radioactive r-process nuclei iodine-129 and curium-247 preserve their ratio, irrespective of the time between production and incorporation into the Solar System. We constrain the last r-process source by comparing the measured meteoritic ratio ^{129}I/^{247}Cm=438 ± 184 with nucleosynthesis calculations based on neutron star merger and magneto-rotational supernova simulations. Moderately neutron-rich conditions, often found in merger disk ejecta simulations, are most consistent with the meteoritic value. Uncertain nuclear physics data limit our confidence in this conclusion.

Ein Beispiel aus der Raumfahrt

Der Nachweis des Argons für die Ar-40/Ar-39 Bestimmung erfolgt normalerweise über das Schmelzen der Gesteinsproben. Man kann auch anders vorgehen. Anstatt das gesamte Gas in einem Schritt freizusetzen, wird die Probe schrittweise erhitzt und der Argongehalt bei jeder Temperatur bestimmt. Jede Temperatureinstellung wird einzeln behandelt und das Alter berechnet. Wenn es keine Änderung im Argon- und Kaliumgehalt gäbe, wäre das Verhältnis von Ar-40 zu Art-39 bei allen Temperaturen gleich und für jede Temperatur würde man ein gleiches Alter berechnen. In realen Proben kommt es jedoch zu Umwandlungen. Beispielsweise kommt es bei starker Erhitzung zu einem

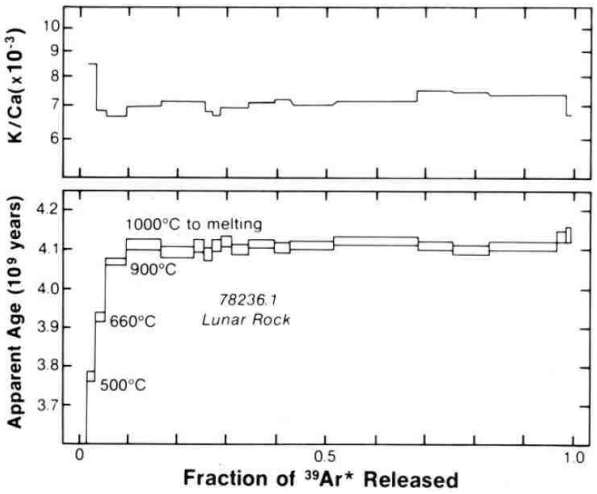


Abb. 21.51: Argon-40/Argon-39-Altersspektrum für die Mondgesteinprobe 78236.1 [**?**]

diffusiven Verlust an Argon und es ergibt sich ein komplexeres Altersspektrum. Das Altersspektrum flacht bei höheren Temperaturen ab und dieser Wert gibt das tatsächliche Alter des Gesteins wieder. Ein Beispiel sind Proben, die Astronauten vom Mond mit zurück brachten. Abbildung 21.51 zeigt die Entwicklung des Isotopenverhältnisses bei schrittweiser Änderung der Temperatur. Man beachte, dass das Plateau, das sich bei Temperaturen oberhalb von 1000 ^{o}C Gas ausbildet, auf ein Alter von $4.11 \cdot 10^9$ Jahren schließen lässt. Temperaturfreisetzungen unter 1000 ^{o}C deuten auf ein geringeres Alter hin. Dies könnte darauf hinweisen, dass das Gestein kurzzeitig erhitzt wurde, wodurch das weniger gut haftende Ar-40 freigesetzt wurde.

Xenon isotopic constraints on the history of volatile recycling into the mantle [?]: The long-term exchange of volatile species (such as water, carbon, nitrogen and the noble gases)between deep Earth and surface reservoirs controls the habitability of the Earth's surface. The present-day volatile budget of the mantle reflects the integrated history of outgassing and retention of primordial volatiles delivered to the planet during accretion, volatile species generated by radiogenic ingrowth and volatiles transported into the mantle from surface reservoirs over time. Variations in the distribution of volatiles between deep Earth and surface reservoirs affect the viscosity, cooling rate and convective stress state of the solid Earth. Accordingly, constraints on the flux of surface volatiles transported into the deep Earth improve our understanding of mantle convection and plate tectonics. However, the history of surface volatile regassing into the mantle is not known. Here we use mantle xenon isotope systematics to constrain the age of initiation of volatile regassing into the deep Earth. Given evidence of prolonged evolution of the xenon isotopic composition of the atmosphere, we find that substantial recycling of atmospheric xenon into the deep Earth could not have occurred before 2.5 billion years ago. Xenon concentrations in downwellings remained low relative to ambient convecting mantle concentrations throughout the Archaean era, and the mantle shifted from a net degassing to a net regassing regime after 2.5 billion years ago. Because xenon is carried into the Earth's interior in hydrous mineral phases, our results indicate that

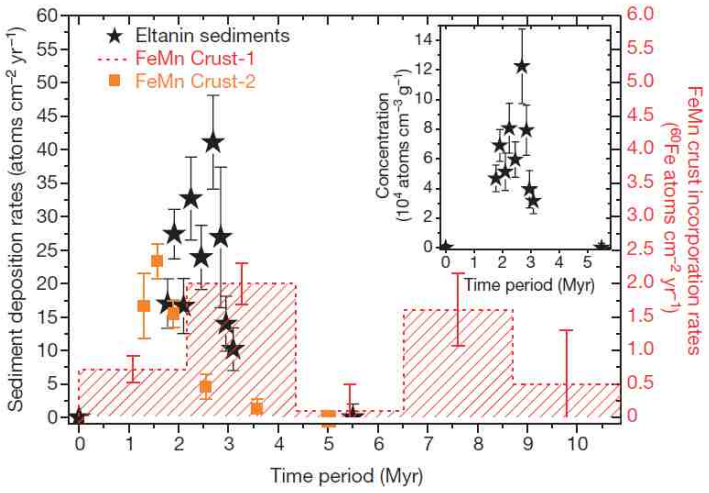


Abb. 21.52: Ablagerungsraten für Sedimente und Einlagerungsraten für zwei Sedimentproben. In dem untersuchten Proben ist der Fe-60 Anteil im Zeitraum zwischen $2-3\cdot10^6$ und auch vor $8\cdot10^6$ Jahren erhöht. Als Ursache identifizierten die Forscher Supernova-Explosionen in unserer unmittelbarer kosmischen Umgebung [**?**].

downwellings were drier in the Archaean era relative to the present. Progressive drying of the Archean mantle would allow slower convection and decreased heat transport out of the mantle, suggesting non-monotonic thermal evolution of the Earth's interior.

Ein Beispiel aus der Welt der Astrokriminalistik

Bei der Supernovaexplosion im Krebsnebel vor 7500 Jahren wurde innerhalb weniger Sekunden Energie freigesetzt, die vergleichbar mit der Energieabgabe der Sonne über viele Milliarden Jahre. Das Licht dieser Sternexplosion erreichte die Erde im Jahre 1054. Bei der Explosion iwrd Schwefel und Eisen mit Geschwindigkeiten von 500 m/s heraus geschleudert. Mit Hilfe der Massenspektroskopie und der Analyse langlebiger Isotope kann man herausfinden, ob Gestein bei der Bildung der Erde vorhanden war oder erst später auf dem Planeten ankam. Das Eisenradioisotop Fe-60 mit einer Halbwertszeit von $2.6\cdot10^6$ Jahren ist ein idealer Kandidat, um nach Material einer Supernova Material zu fahnden. Findet man Fe-60 Atome können sie nicht so alt wie Erde, sondern in einem deutlich späteren Vorgang erzeugt worden sein. Quantitative Aussagen erhält man, wenn man die Häufigkeit mit der von Mn-53 vergleicht. Ferromangankrusten in der Tiefsee lassen sich gut datieren und sind deshalb für die Untersuchungen gut geeignet. Diese Krusten entstehen durch Sedimentation und wachsen mit Raten $1\,\mathrm{mm}/10^6$ Jahre. Die Wachstumsrate lässt sich durch eine Analyse des Radioisotops Be-10 (Halbwertszeit $1.4\cdot10^6$ Jahren) bestimmen, da es durch kosmische Strahlung kontinuierlich in der Atmosphäre entsteht und so einen Fingerabdruck in den Sedimenten hinterlässt, siehe Abb. 21.52. Diese Studie und eine Untersuchung von Mondgestein [**?**] ergaben, dass vor

etwa $5 \cdot 10^6$ Jahren in einer Entfernung von nur 100 Lichtjahren Supernovaexplosionen stattgefunden haben müssen [**?**].

Age and composition of young basalts on the Moon, measured from samples returned by Chang'e-5 [**?**]**:** Measuring physical samples of Solar System bodies in the laboratory provides more information than is possible from remote sensing alone. In December 2020, the Chang'e-5 mission landed on the Moon, collected samples, and returned them to Earth. Che et al. analyze two fragments of volcanic lunar basalt collected by Chang'e-5. Radiometric dating using lead isotopes indicated that the rocks formed from magma that erupted about 2 billion years ago, later than other volcanic lunar samples. The abundance of extinct radioactive elements in the rock is too low for radioactive heating to have produced the magma. Another, thus far unknown, source must be responsible for the late lunar volcanism.

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Polonium-210 hat eine Halbwertszeit von 138 Tagen. Wie stark ist die Aktivität eines Mols Po-210 nach 100 Tagen abgesunken?

Betrachtet man eine Probenmengen von einem Mol, ergibt sich eine Masse von 210 g. Ein Gramm der Probe beinhaltet ($N_A/210$) Po-210 Atome) und es ergibt sich eine anfängliche Aktivität (t=0, $N(t=0)$) von

$$\begin{aligned} A_{decay}(t) &= \lambda \cdot N(t) \\ A_{decay}(t) &= \lambda \cdot N_0 \cdot \exp(-\lambda_{decay} \cdot t) \\ A_{decay}(t=0) &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{N_A}{210} \cdot \exp(-\lambda_{decay} \cdot 0) \\ A_{decay}(t=0) &= \frac{0.693}{138 \cdot 86\,400\,\mathrm{s}} \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{210} \cdot \exp(0) \\ A_{decay}(t=0) &= 1.67 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Bq} \end{aligned}$$

Nach 100 Tagen ist die Aktivität auf $1.01 \cdot 10^{14}$ Bq und nach 1000 Tagen auf $1.1 \cdot 10^{12}$ Bq abgesunken, wie man leicht nachprüfen kann.

Aufgabe 3.2: Betrachten wir eine Probe, die je 10^6 Atome der Isotope Eisen-59 (Halbwertszeit 44.51 Tage, Zerfallskonstante $1.80 \cdot 10^7\,\mathrm{s}^{-1}$), Mangan-54 (312.2 Tage, $2.57 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}^{-1}$) und Kobalt-60 (1925 Tagen, $4.17 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-1}$) enthält. Skizzieren Sie, wie sich die Aktivität der Elemente und die Gesamtaktivität der Probe mit der Zeit entwickelt!

Die anfängliche Aktivität der Nuklide ergibt sich aus der Anzahl der Atome und der zugehörigen Zerfallskonstante. Abb. 21.53 zeigt, wie die Aktivität der drei Nuklide über die Zeit abfallen. Zunächst dominiert der Zerfall des kurzlebigen Eisen-59, dann übernimmt Mangan-54. Erst nachdem nahezu alle Eisen und Manganatome zerfallen sind, kommt der Beitrag von Kobalt-60 zur Radioaktivität der Probe zum Tragen.

Aufgabe 3.3: Eine Uranprobe hat eine Aktivität von $9.3 \cdot 10^5$ Bq ($T_{1/2}^{U235} = 7.04 \cdot 10^8$ a). Der Isotopenanteil von U-235 in Uran beträgt 0.72%. Wie schwer ist die Probe?

Zum Lösen der Aufgabe verwenden wir Gl. 21.10:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{\lambda_{decay}} \frac{d}{dt} N \\ N &= -\frac{T_{1/2}^{U235}}{\ln 2} \frac{d}{dt} N \\ N &= -\frac{(7.04 \cdot 10^8\,\mathrm{a}) \cdot (3.16 \cdot 10^7\,\mathrm{s/a})}{\ln 2} \cdot (-9.3 \cdot 10^5\,\mathrm{s}^{-1}) \\ N &= 2.98 \cdot 10^{22} \end{aligned}$$

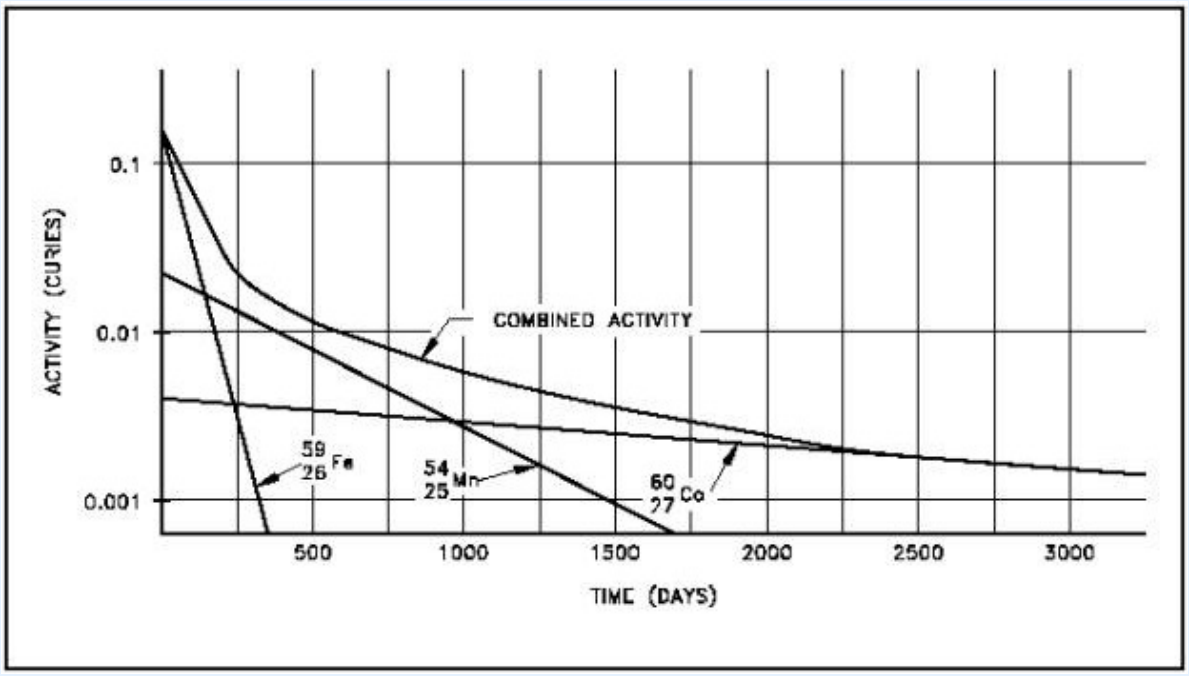


Abb. 21.53:

Wieder nutzen wir die Avogadrozahl, um diesmal die Masse an U-235 zu bestimmen:

$$\begin{aligned} m_{U235} &= (2.98 \cdot 10^{22}\,\text{Atome}) \cdot \left(\frac{1.0\,\text{mol}}{6.022 \cdot 10^{23}\,\text{Atome}} \cdot \left(\frac{235\,\text{g}}{\text{mol}} \right) \right) \\ m_{U235} &= 0.0116\,\text{kg} \end{aligned} \tag{21.23}$$

$$\begin{aligned} m_{Uran} &= \frac{11.6\,\text{g}}{0.0072} \\ m_{Uran} &= 1615\,\text{g} = 1.615\,\text{kg} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4: Das Radioisotop welchen Elements nutzt man, um das Alter von Bäumen zu bestimmen?[43]

(a) Kobalt

(b) Jod

(c) Phosphor

(d) Kohlenstoff

Aufgabe 3.5: Die Halbwertszeit für von C-14 beträgt 5 760 Jahre. In wie vielen Jahren reduziert eine Probe mit 200 mg C-14 auf 25 mg?[44]

[43] Antwort: (d)
[44] Antwort: (d)

(a) 11520 Jahre

(b) 23040 Jahre

(c) 5760 Jahre

(d) 17280 Jahre

Aufgabe 3.6: Die Halbwertszeit einer radioaktiven Substanz ist 10 Stunden. Wie lang ist die mittlere Zerfallszeit des Elements?[45]

(a) 14.4 Stunden

(b) 7.2 Stunden

(c) 20 Stunden

(d) 6.93 Stunden

(e) 10 Stunden

Aufgabe 3.7: Ein radioaktives Element emittiert 200 α-Teilchen pro Sekunde. Nach drei Stunden sinkt die Rate auf $25\,\mathrm{s}^{-1}$. Wie hoch ist die Halbwertszeit?[46]

(a) 50 Minuten

(b) 60 Minuten

(c) 70 Minuten

(d) 80 Minuten

(e) 90 Minuten

Aufgabe 3.8: Die Zerfallsrate eines radioaktiven Elements hängt ab von[47]

(a) der Masse der Substanz.

(b) der Temperatur.

(c) dem Umgebungsdruck.

(d) der Natur des Elements

(e) der Dichte der Substanz.

[45] Antwort: (a)
[46] Antwort: (b)
[47] Antwort: (d)

Aufgabe 3.9: Stellen Sie sich zwei Kerne desselben radioaktiven Nuklids vor. Einer der Kerne entstand vor 5 Milliarden Jahren bei einer Supernova-Explosion. Der andere wurde vor 5 Minuten in einem Atomreaktor erzeugt. Die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls während der nächsten Zeit ist[48]

(a) für beide Kerne unterschiedlich.

(b) Kerne, die bei der Supernovaexplosion entstehen, zerfallen zuerst

(c) Kerne, die im Reaktor erzeugt wurden, zerfallen zuerst

(d) für beide Kerne gleich hoch.

(e) abhängig vom Entstehungszeitpunkt.

Aufgabe 3.10: das Phänomen Radioaktivität ist[49]

(a) ein temperaturabhängiger exothermer Prozess.

(b) eine Erhöhungen des herrschenden Drucks.

(c) ein nuklearer Prozess, der nicht von externen Faktoren abhängt.

(d) Nichts von dem gesagten stimmt.

(e) ein Prozess, der aktiv gesteuert werden.

Aufgabe 3.11: Das Alter von Bäumen wird anhand folgenden Radioisotops bestimmt[50]

(a) Helium

(b) Kohlenstoff

(c) Stickstoff

(d) Sauerstoff

(e) Jod

[48] Antwort: (d)
[49] Antwort: (c)
[50] Antwort: (b)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Warum sind die Halbwertszeiten radioaktiver Kerne nicht von der Temperatur abhängig.

2. Eine radioaktive Probe zerfällt innerhalb einer bestimmten Zeitspanne zu 50%. Wie stark ändert sich in dieser Zeit die Zerfallsrate?

3. Eine Probe radioaktiven Materials hat eine Zerfallskonstante von $0.05\,\mathrm{s}^{-1}$. Ist die Probe nach 20 Sekunden vollständig zerfallen?

4. Es ist geplant, eine radioaktive Datierung einer Probe durchführen, deren Alter wir auf t_{Probe} schätzen. Sollte manein radioaktives Isotop wählen, dessen Halbwertszeit $t_{1/2}$ (a) $t_{1/2} \gg t_{Probe}$ (a) $t_{1/2} \approx t_{Probe}$ (a) $t_{1/2} \ll t_{Probe}$ ist?

5. Es gibt zwei gleich große Proben (A,B) desselben radioaktiven Nuklids. Im Vergleich zu Probe A hat Probe B die doppelte Anfangsaktivität.
   - Wie ist die Halbwertszeit von A im Vergleich zur Halbwertszeit von B?
   - Wie ist das Verhältnis der Aktivitäten nach fünf Halbwertszeiten?

- Das Verhältnis $^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C}$ hat sich im Laufe der Zeit geändert. Was sind die Gründe?

6. Man nutzt C-14 zur Datierung von Ereignissen der Menschheitsgeschichte. Warum nicht ein anderes Isotop wie O-16 oder Pb-208?

7. Warum kann die Radiokarbon-Methode keine genaue Schätzung sehr altem Materials liefern?

8. Welche wichtige Annahme wird bei der Kohlenstoffdatierung über die zeitliche Variation der Intensität kosmischen Strahlung gemacht?

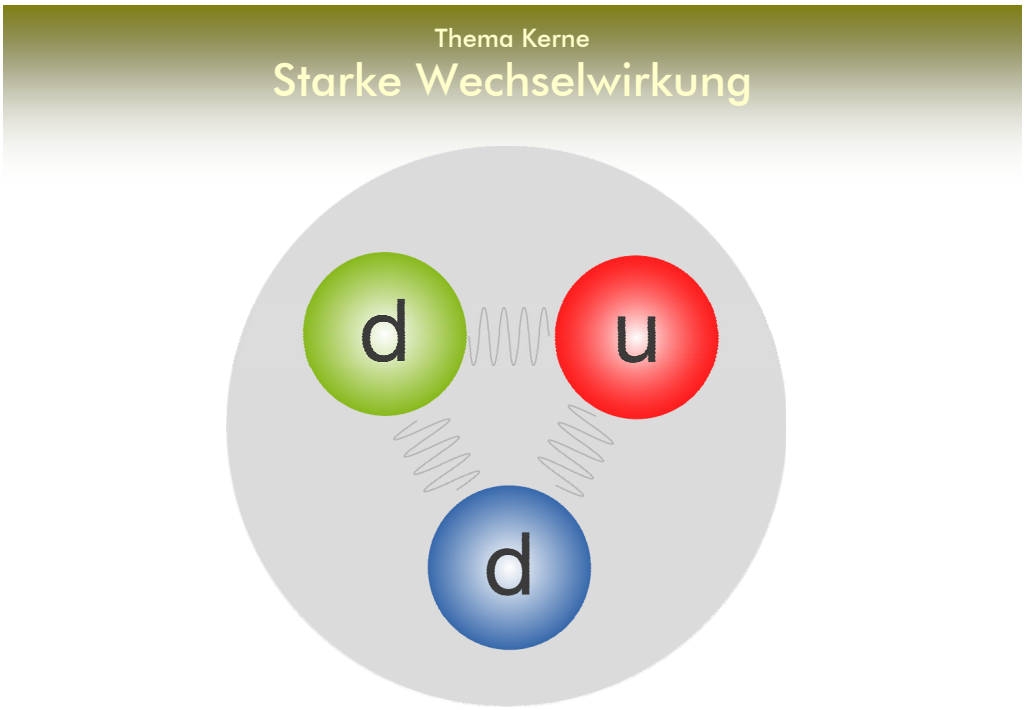
9. Warum erhöhen oberirdische Kernbombenexplosionen den relativen Anteil an C-14 in der Atmosphäre?

10. Warum verringert die Verbrennung fossiler Brennstoffe den relativen Anteil an C-14 in der Atmosphäre?

11. Wie bestimmt man das Alter nicht fossiler Objekte?

12. Der *fallout* von atmosphärischen Atomwaffentests sind die radioaktiven Isotope $^{90}\mathrm{Sr}$ und $^{137}\mathrm{Cs}$ mit Halbwertszeiten von 28.6 und 32.2 Jahren. Atmosphärische Kernwaffentests wurden in allen Ländern, mit Ausnahme von China (1980), im Jahr 1963 beendet. Überraschenderweise stellte man fest, dass die Konzentration dieser beiden Isotope schneller abnahm, als man anhand der Halbwertszeiten vermutete. Woran liegt das?

Starke Wechselwirkung



Man fühlt den Glanz von einer neuen Seite,
auf der noch Alles werden kann.
Die stillen Kräfte prüfen ihre Breite
und sehn einander dunkel an.

Rainer Maria Rilke - Das Buch vom Mönchischen Leben (1899)

Die Kräfte, die Gravitation und Elektrostatik bereitstellen, reichen nicht aus, um die Protonen im Atomkern zusammen zu halten. Es ist deshalb notwendig, eine neue fundamentale Kraft einzuführen. Die starke Kraft ist eine der vier grundlegenden Wechselwirkungen in der Natur (Abb. 21.54).[51] Abb. 21.55 zeigt die Stärke der vier fundamentalen

[51] *Lexikon:* Als **Grand Unified Theory, GUT** bezeichnet man eine Theorie, die die drei der vier Grundkräfte vereinigt (starke Wechselwirkung, schwache Wechselwirkung elektromagnetische Kraft). Man geht davon aus, dass diese Grundkräfte beim Urknall, als der Kosmos heiß und dicht war, eine einzige Kraft waren, die in der Abkühlung des Universums separierten. Zur vollständigen Beschreibung aller bekannten physikalischen Phänomene müsste man noch die Gravitation mit einbeziehen, siehe Abb. 21.56

Fundamental Force Particles

Force	Particles Experiencing	Force Carrier Particle	Range	Relative Strength*
Gravity acts between objects with mass	all particles with mass	graviton (not yet observed)	infinity	much weaker
Weak Force governs particle decay	quarks and leptons	W^+, W^-, Z^0 (W and Z)	short range	
Electromagnetism acts between electrically charged particles	electrically charged	γ (photon)	infinity	
Strong Force** binds quarks together	quarks and gluons	g (gluon)	short range	much stronger

Abb. 21.54: In der Grand Unified Theory wird versucht, drei (starke Wechselwirkung, schwache Wechselwirkung, elektromagnetische Kraft) der vier bekannten physikalischen Grundkräfte zu vereinigen.

Kräfte als Funktion des Abstands. Alle Teilchen, die Quarks enthalten, unterliegen der starken Wechselwirkung. Die starke Wechselwirkung wirkt NUR zwischen subatomaren Teilchen. Unabhängig davon, ob es sich um Neutronen oder Protonen handelt gibt es immer eine anziehende Wechselwirkung mit gleicher Stärke.[52] Die Starke Wechselwirkung bindet Quarks, um Teilchen wie Protonen[53] und Neutronen zu erzeugen und stabilisiert

[52] Die Beobachtung, dass Proton und Neutron in etwa dieselbe Masse haben gab den Hinweis, dass alle Hadronen aus sie gleichen Subelementen aufgebaut sind. Gell-Mann nannte sie Quarks. Three quarks for muster Mark

James Joyce - Finnegans Wake

Jedes Hadron beinhaltet drei Quarks. Im Jahr 1969 entschlüsselten Friedman, Kendall und Taylor die Substruktur des Protons [**?**].

[53] The Nobel Prize in Physics 1990 was awarded jointly to Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall and Richard E. Taylor *for their pioneering investigations concerning deep inelastic scattering of electrons on protons and bound neutrons, which have been of essential importance for the development of the quark model in particle physics*

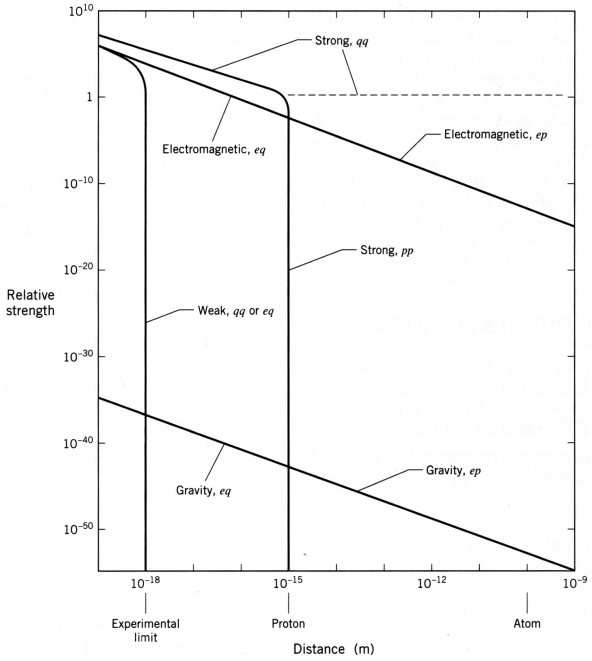


Abb. 21.55: Bei atomaren Abständen gibt es nur zwei Kräfte die wirken, Gravitation und elektromagnetische Kraft. Die elektromagnetische Kraft ist dabei 40 Größenordnungen größer als die Gravitation. Die Kräfte zwischen zwei freien Quarks, wenn man sie separieren könnte, wären gigantisch hoch. Dies deutet die gestrichelte Linie an. Bei Kernabständen kommt plötzlich die Starke Wechselwirkung ins Spiel. Sie ist 100-mal größer als die elektromagnetische Kraft. Bei etwa 1/1000 der Protondurchmessers kommt die Schwache Wechselwirkung ins Spiel [**?**].

den Atomkern. Die starke Kraft zwischen den Nukleonen und den Elektronen ist NULL. Genauso wie die elektromagnetische Kraft die Größe des Atoms bestimmt, bestimmt die Starke Wechselwirkung die Größe des Kerns. Es ist anschaulich, sich die Stärke der Starken Wechselwirkung in der Parametrisierung Energie pro Nukleon anzuschauen. Wie im Kapitel *Wellenfunktion* vorgeführt, betrachten wir das Nukleon als Teilchen in einem Kasten. Als Größe des Box wählen wir einen Aluminiumkern. Dieser hat eine Größe von a=6 fm. Die minimale Kinetische Energie eines Nukleons beträgt

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{3\,\pi^2}{2}\frac{\hbar^2}{m\cdot a^2} \\ E_{kin} &= \frac{3\,\pi^2}{2}\frac{(1.054\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})^2}{(1.673\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg})\cdot(6\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m})^2} \\ E_{kin} &= 2.7\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 17\,\mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{21.24}$$

Das ist in etwa die minimale Kinetische Energie jedes Nukleons im Kern. Um den Atomkern zu stabilisieren, muss die Gesamtenergie negativ sein. Die Kernkraft, hervorgerufen durch die restlichen A-1 Nukleonen muss deshalb ein bindendes Potenzial in Höhe dieses abgeschätzten Wertes hervorrufen.

Kernmaterie

However, if then the phenomenon of alpha decay occurs predominantly in the region outside the nucleus because of quantum mechanics, it is obvious that we cannot learn a great deal about nuclear structure from it.

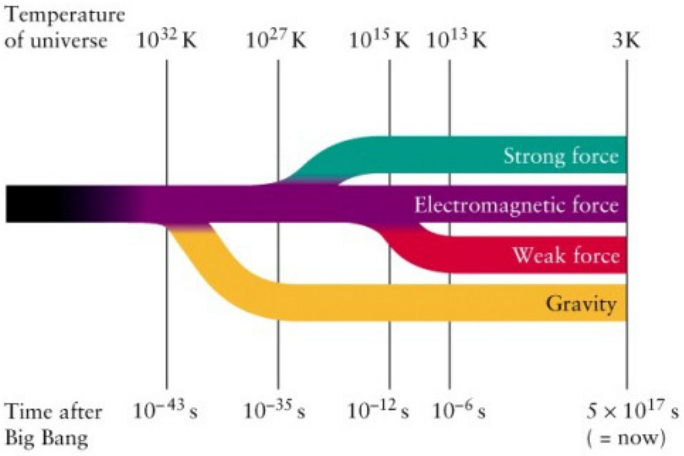


Abb. 21.56: Wenn eine Vereinigung der drei Wechselwirkungen möglich ist, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass es im frühen Universum eine Epoche gab, in der diese drei grundlegenden Wechselwirkungen noch nicht separierten.

Max von Laue an George Gamow (1926)

Was passiert wenn man Atome auf die Größe von Kernen kollabieren lässt?

Es kommt zu einem erheblichen Anstieg in der Dichte. Aus Streuexperimenten kann die Abmessungen eines Kerns empirisch abgeleitet werden und man erhält für den Radius $r_{nucleus}$ (Abb. 21.57), Volumen $V_{nucleus}$ und Massendichte $\rho_{nucleus}$:

$$r_{nucleus} = r_0 \sqrt{A_{nucleus}} \tag{21.25}$$

$$V_{nucleus} = \frac{4}{3}\pi\, r_{nucleus}^3 \tag{21.26}$$

$$\rho_{nucleus} = \frac{m_{nucleus}}{V_{nucleus}}$$

$$\rho_{nucleus} = \frac{4}{3\,\pi}\frac{m_{nucleus}}{R_{nucleus}^3} \tag{21.27}$$

wobei der Wert für die Konstante r_0=1.4 · 10^{-15} m beträgt. Ein Femtometer ist somit eine charakteristische Längenskala für Kerne. Das Experimente weisen nach, dass das Kernvolumen proportional zur Nukleonenzahl anwächst. Das bedeutet, dass das Volumen pro Nukleon für alle Kerne konstant ist. Damit ist auch die Dichte der Kernmaterie konstant. Allgemein berechnet sich der Radius eines Atomatomkerns $r_{nucleus}$ mit

$$r_{nucleus} = r_0 \cdot A_{nucleus}^{1/3} \tag{21.28}$$

Die Gleichung lässt vermuten, dass die Nukleonen im Innern des Kerns homogen verteilt sind. Diesen Nachweis erbrachte Hofstadter[54] im Jahr 1956 [**?**]. Die Ladungsdichte ist

[54] The Nobel Prize in Physics 1961 was divided equally between Robert Hofstadter *for his pioneering*

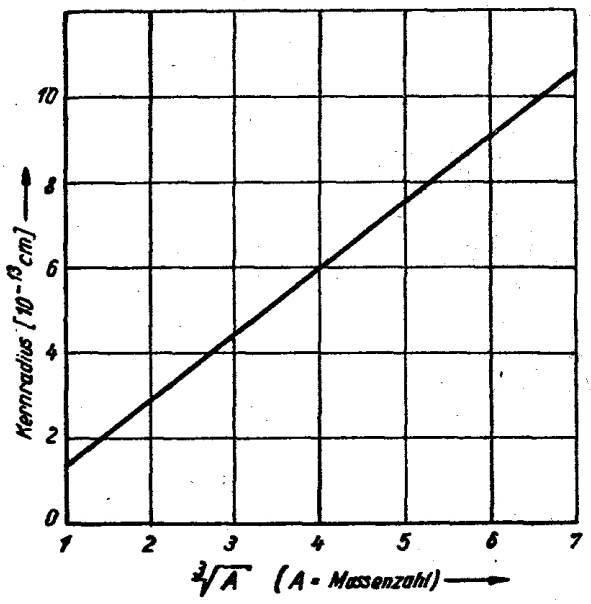


Abb. 21.57: Darstellung des Zusammenhangs zwischen Massenzahl und Kernradius [**?**].

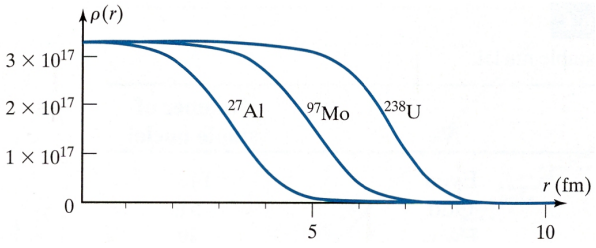


Abb. 21.58: Dichte der Kernmaterie in kg/m^3 als Funktion des Radius r für Aluminium-, Molybdän- und Urankerne [**?**].

im Innern der Kerne nahezu konstant und nimmt am Rand kontinuierlich ab. Man kann den Kern daher mit einem Flüssigkeitstropfen vergleichen, siehe Kapitel *Kernmodell*.

Als Kerndichte ergibt sich für Deuterium $1.51 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$ und für Uran-238 ein Wert von $7.44 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$. Wie man sieht, ist Gl. 21.27 unabhängig von $A_{nucleus}$ und damit unabhängig vom betrachteten Atomkern. Setzt man die Werte ein, ergibt sich eine Dichte der Kernmaterie von etwa (Abb. 21.59):

$$\begin{aligned} \rho_{nucleus} &= \frac{4}{3\,\pi}\frac{A_{nucleus}\cdot m_p}{A_{nucleus}\cdot r_0^3} \\ \rho_{nucleus} &= \frac{4}{3\,\pi}\frac{(1.67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg})}{(1.2\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m})^3} \\ \rho_{nucleus} &= 1.38\cdot 10^{17}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \end{aligned} \tag{21.29}$$

studies of electron scattering in atomic nuclei and for his thereby achieved discoveries concerning the structure of the nucleons and Rudolf Ludwig Mössbauer *for his researches concerning the resonance absorption of gamma radiation and his discovery in this connection of the effect which bears his name*

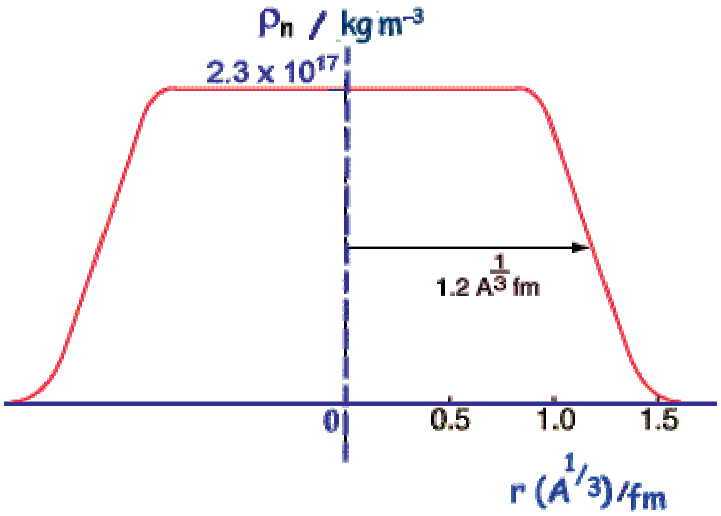


Abb. 21.59: Wichtige Detailinformationen über Kerngrößen stammen aus Streuexperimenten mit Elektronen. Beispielsweise beobachtet man, dass es am Rand des Kerns einen Bereich gibt, in dem die Dichte der Kernmaterie gegen NULL abnimmt. Der zentrale Teil hat dagegen eine nahezu konstante Dichte. Der Kern kann also nicht vereinfachend als harte Kugel betrachtet werden.

Die Dichte der Kernmaterie ist um 14 Größenordnungen höher als im Festkörper oder in Flüssigkeiten. Die Ursache ist, dass die Masse im Kern konzentriert ist und zwar auf einem Volumen, dass 14 Größenordnungen geringer ist als das Volumen des Atoms. Wie fällt die Dichte der Kernmaterie ab, wenn man sich dem Rand nähert? Abb. 21.58 zeigt die Dichteprofile von ausgewählten Kernen. Man erkennt, dass die Dichte in allen Fällen in ähnlicher Weise abfällt. Der Bereich der Oberflächen gestaltet sich also in allen Fällen gleich. Der Ladungsverteilung kann folgendermaßen wiedergegeben werden:

$$\varrho_{nucleus}(r) = \frac{\varrho_0}{1 + \exp(-(r - R)/a)} \tag{21.30}$$

wobei a ein Parameter ist, den man an die exporimentellen Daten anpasst. Der Wert von ϱ_0 wird so gewählt, dass sich als Integral über den Radius die Anzahl an Ladungen ergibt.

Die Kerndichte ist vergleichbar zu den Verhältnissen in Neutronensternen, wo die Dichte etwa $10^{18}\,\mathrm{kg/m^3}$ beträgt, siehe Abb. 21.60. Der Wert für die Konstante r_0 kann aus Messungen mit Elektronen und Neutronen ermittelt werden. Man findet, dass die Werte leicht differieren. Da Elektronen die Ladungsverteilung und die Neutronen die Kernstruktur proben [**?**], kann man den Schluss ziehen, dass Ladungs- und Materieverteilung im Kern unterschiedlich sind. Kann die Annahme, dass Kerne kleine Kugeln sind experimentell überprüft werden? JA! Eine nichtsphärische Ladungsverteilung ergibt ein so genanntes elektrisches Quadrupolmoment, was mit den Elektronen in der Atomhülle wechselwirkt. Eine solche Wechselwirkung führt zu einer so genannten Hyperfeinstrukturaufspaltung der Spektrallinien, die man tatsächlich beobachten kann. Der Effekt ist

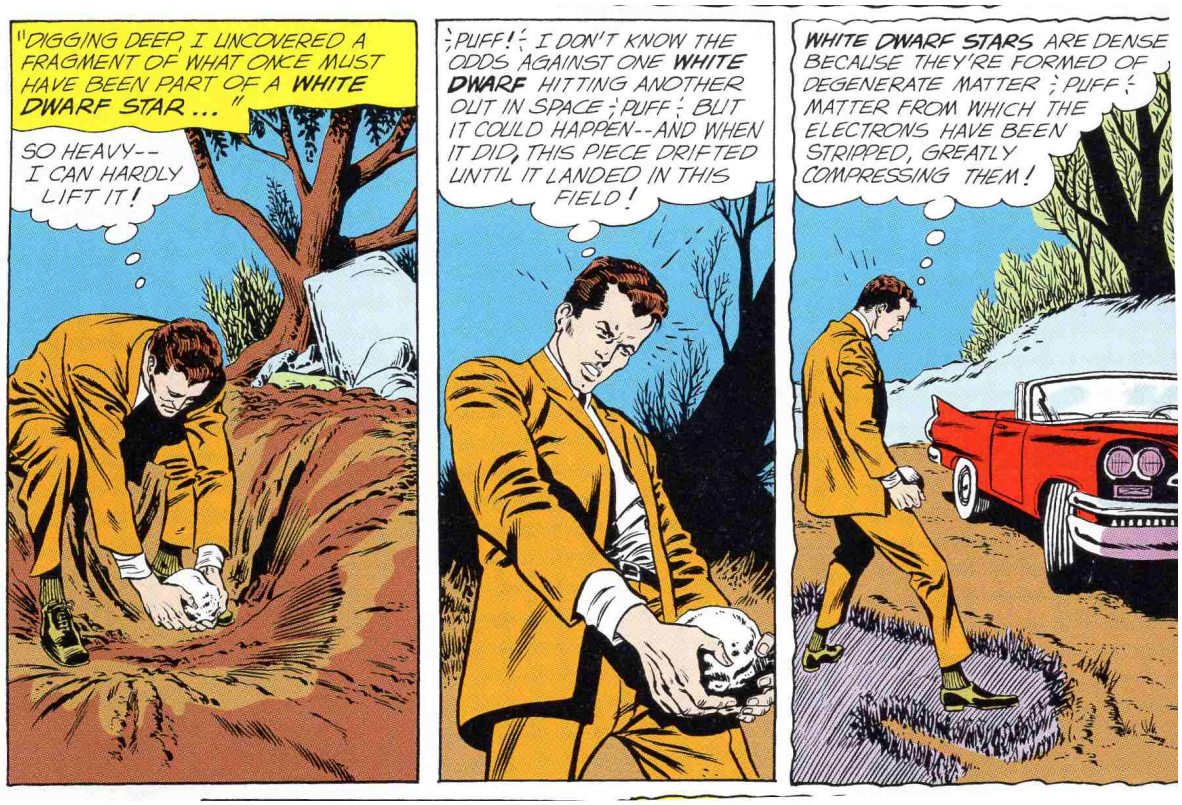


Abb. 21.60: Aus der Comic-Serie *The Atom*.

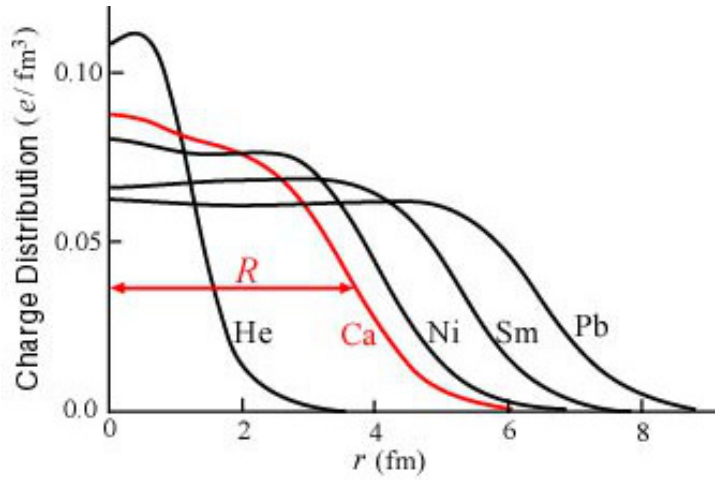


Abb. 21.61: Protonendichte ausgewählter Kerne.

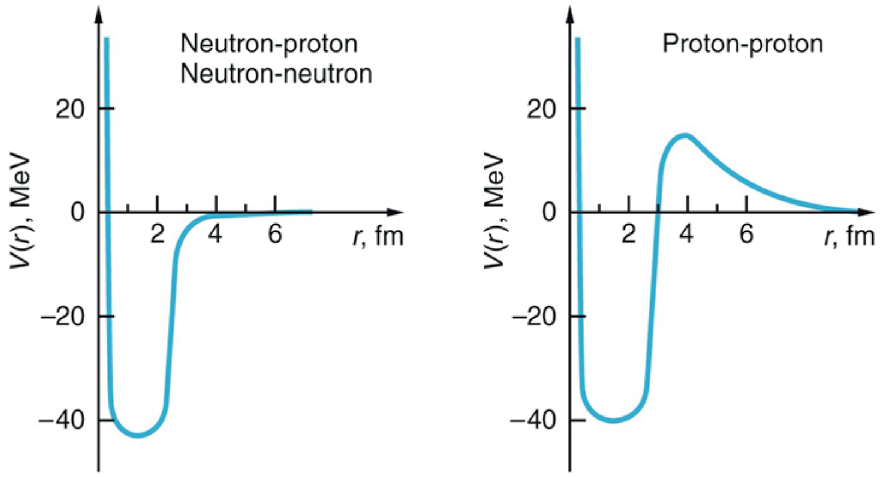


Abb. 21.62: links: Proton-Neutron und Neutron-Neutron Wechselwirkungspotenzial. rechts: Proton-Proton Wechselwirkungspotenzial.

allerdings äußerst gering und beträgt etwa 1/1000 der Feinstrukturaufspaltung.

Ein ähnlich hoher Wert wie die Kerndichte ergibt sich, wenn man die Konzentration der positiven Ladungen betrachtet (Abb. 21.61). Die Werte von $10^{25}\,\mathrm{C/m^3}$ ergeben in dem eng begrenztem Kern enorme Ladungsdichten. Die daraus resultierende abstoßenden Coulombkraft muss in irgendeiner Weise kompensiert werden. An dieser Stelle kommt die starke Wechselwirkung ins Spiel, die über Austauschteilchen (siehe Kapitel *Heisenbergsche Unschärferelation*) vermittelt werden.[55] Abb. 21.62 zeigt die zugehörigen Potenziale, die die Wechselwirkung zwischen Neutronen und Protonen regeln. Eigenschaften sind:

- Die im Kern wirkende starke Kraft ist keine Zentralkraft. Damit unterscheidet sie sich von Gravitation und Coulombkraft.
- Die starke Wechselwirkung bestimmt die Bindung zwischen den Kernbausteinen Protonen und Neutronen (*pp*, *pn*, *nn*)
- Die Stärke der Wechselwirkung ist unabhängig vom Ladungszustand der Kernbausteine. Interessant ist, dass sich für die Wechselwirkung zwischen den Protonen ein Coulombwall ausbildet, siehe Abb. 21.62, rechts. Für Abstände rechts vom Maximum stoßen sich die Protonen ab. Für geringere Abstände fallen die Protonen in die Potenzialmulde. Wie hoch ist diese Barriere in etwa? Der Abstand zwischen

[55] Die Coulombkraft wird durch den Austausch von Photonen vermittelt. Eine Ladung emittiert Photonen, die von einer entfernten Ladung bei der Absorption vernichtet wird, ohne dass die Massenerhaltung verletzt wird (so genannte virtuelle Photonen). Durch diese Prozesse über die Ladungen Kräfte aufeinander aus, die der Coulombwechselwirkung entsprechen. Im Kern erfolgt die Austauschwechselwirkung über virtuelle Mesonen. Im Gegensatz zu Photonen sind die Austauschteilchen allerdings nicht masselos, wodurch ihre Reichweite stark eingeschränkt wird.

zwei Deuteronen muss geringer sein als $2\,r_D = 3 \cdot 10^{-15}$m, dann überwiegt die starke Wechselwirkung und Proton/Neutron binden aneinander. Nehmen wir diesen Wert als Ausgangspunkt. Die entsprechende potenzielle Energie liefert einen Schätzwert von

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} \\ E_{pot} &= \frac{(8.99 \cdot 10^9\,\mathrm{V \cdot m \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}}) \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}} \\ E_{pot} &= 2.3 \cdot 10^{-16} \\ E_{pot} &= 0.48\,\mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{21.31}$$

- Es gibt keine Wechselwirkung mit anderen Teilchen, wie zum Beispiel Elektronen
- Die Reichweite der Wechselwirkung ist mit $2 \cdot 10^{-15}$ m äußerst gering. Das hat zur Folge, dass sich die Bindungsenergie als Funktion der Nukleonenzahl ($30< A <170$) kaum ändert, da sich die Wechselwirkung auf die nächstliegenden Nukleonen beschränkt. In Kapitel *Unschärferelation* wurde die Ursache auf die kurze Lebensdauer des Pions (m_π=$273 \cdot m_e$) als Vermittler der Kraft zurückgeführt.[56] Pionen können neutral, als auch positiv oder negativ geladen sein. In der Wechselwirkung mit den Kernbausteinen können folgende Prozesse auftreten:
  - Die π^0 sind die virtuellen Austauschteilchen bei der Wechselwirkung zwischen Neutronen. Man beachte, dass bei allen Prozessen der Ladungserhaltungssatz erfüllt ist.
$$n + \pi^0 \rightarrow n \tag{21.32}$$
  - Wird ein π^+ von einem Neutron emittiert und von einem Proton absorbiert, wird aus dem Neutron ein Proton und aus dem Proton ein Neutron
$$\begin{aligned} n + \pi^+ &\rightarrow p & (21.33)\\ n &\rightarrow \pi^- + p & (21.34) \end{aligned}$$
  - Wird π^+ wird von einem Proton emittiert und von einem Neutron absorbiert, wird aus dem Proton ein Neutron und aus dem Neutron ein Proton.
$$\begin{aligned} p + \pi^- &\rightarrow n & (21.35)\\ p + \pi^0 &\rightarrow p & (21.36)\\ p &\rightarrow \pi^+ + n & (21.37) \end{aligned}$$
- Die Wechselwirkung der Kernbausteine untereinander sättigt, d.h., dass es nur eine limitierte Anzahl an Wechselwirkungen mit benachbarten Kernbausteinen gibt. Die Bindungsenergie im Kern steigt daher nicht mit der Anzahl der Kernbausteine.

[56] The Nobel Prize in Physics 1950 was awarded to Cecil Frank Powell *for his development of the photographic method of studying nuclear processes and his discoveries regarding mesons made with this method.*

- Die Kernkraft ist spinabhängig und erreicht hohe Werte für einen parallele Einstellung der Spins. Die Kräfte sind beträchtlich schwächer, wenn die Spins antiparallel ausgerichtet sind.

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Ein Neutronenstern (NS) ist ein astrophysikalisches Objekt mit einer Dichte, die in etwa der Dichte der Nukleonen im Kern entspricht. Die typische Masse solcher Objekte ist in der Größenordnung einer Sonnenmasse ($M_{sun} = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$). Berechnen Sie den Radius R_{NS} des Neutronenstern!

Die Dichte der Nukleonen im Kern beträgt etwa $\rho_{nucleus} = 2.3 \cdot 10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$.

$$\begin{aligned} M_{sun} &= \frac{4\,\pi}{3} \cdot R_{NS}^3 \cdot \rho_{nucleus} \\ R_{NS} &\approx \left(\frac{3}{4\,\pi} \frac{2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{2.3 \cdot 10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}} \right)^{1/3} \\ R_{NS} &\approx 12.8 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Sonne wird sich in ihrer Entwicklung in einen Neutronenstern mit etwa 20 km Durchmesser verwandeln.

Aufgabe 4.2: Ein Gas aus Deuteronen (D oder ${}^2_1\mathrm{H}$) wird auf die Temperatur T_K aufgeheizt. Kernphysikalische Prozesse im Kernbereich der Sonne können stattfinden, wenn die Deuteronen untereinander einen Abstand von 1 fm unterschreiten. Berechnen Sie die Größenordnung der zugehörigen Temperatur, die im Kern der Sonne herrschen müssen, um solche Prozesse zu erlauben?

Auch bei hohen Temperaturen (Abschätzung: $E_{kin} \approx k_B \cdot T_K$) ist die Bewegung der Atome nichtrelativistisch und die kinetische Energie berechnet sich nach Newton:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_D \cdot v_D^2$$

Unter diesen Bedingungen finden Stöße der Deuteronen untereinander statt. Die Atome entfernen sich mit der Geschwindigkeit v_D voneinander. Im Ruhesystem des einen Deuterons hat das andere Atom eine Geschwindigkeit $2\,v_D$. Das ist die Geschwindigkeit im weiten Abstand. Die zugehörige Kinetische Energie ist aus dieser Position betrachtet $4\,E_{kin}$. Diese Energie ergibt sich aus der Potenziellen Energie der Teilchen im Abstand $r_{\min}$. Der Energieerhaltungssatz liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_D \cdot (2\,v_D)^2 &= 4\,E_{kin} = 4\,k_B \cdot T_K \\ 4\,k_B \cdot T_K &= \frac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_{\min}} \end{aligned}$$

Mit diesen Informationen lässt sich die notwendige Temperatur abschätzen.

$$\begin{aligned} T_{\min} &= \frac{e^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{4\,k_B \cdot r_{\min}} \\ T_{\min} &= \frac{(1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2 \cdot (8.99 \cdot 10^{9}\,\mathrm{V \cdot m \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}})}{4\,(1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}) \cdot (10^{-15}\,\mathrm{m})} \\ T_{\min} &= 4 \cdot 10^{9}\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Diese Abschätzung stimmt gut mit den Daten der Sonne überein. Die Kerntemperatur der Sonne beträgt $15.6 \cdot 10^9$ K. Tatsächlich ist der höherenergetische Bereich der Maxwell-Boltzmann Verteilung entscheidend dafür, dass Fusionsprozesse in ausreichender Menge stattfinden.

Aufgabe 4.3: Die Kraft zwischen den Protonen im Kern resultiert aus[57]

(a) Coulombwechselwirkung

(b) Starke Wechselwirkung

(c) Sowohl als auch!

(d) Keins von beiden!

Aufgabe 4.4: Welchen Einfluss hat die Starke Wechselwirkung auf die Elektronen in einem Atom?[58]

(a) Die Starke Wechselwirkung zieht die Elektronen in Richtung Kern.

(b) Die Starke Wechselwirkung stößt die Elektronen vom Kern ab.

(c) Die starke Kraft bewirkt, dass sich die Elektronen um den Kern bewegen.

(d) Gar keine!

Aufgabe 4.5: Man könnte vermuten, dass die Gravitationskraft die Protonen im Kern zusammenhält. Man vergleiche dazu die Gravitationswechselwirkung zwischen zwei Protonen mit ihrer elektrostatischen Abstoßung!

[57] Antwort: (c)
[58] Antwort: (d)

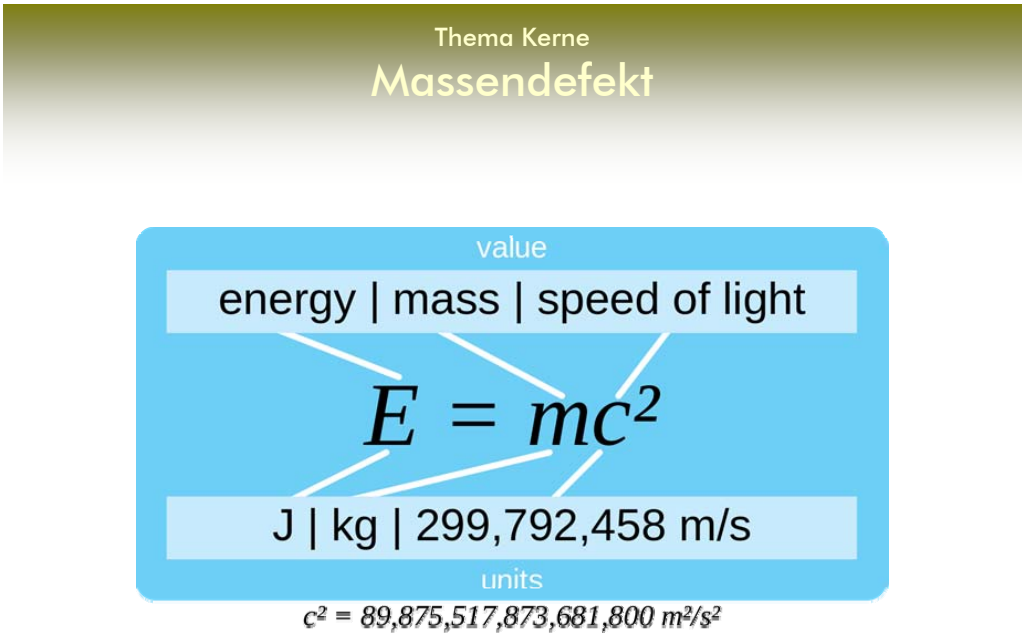
$$
\begin{aligned}
F_G &= G_N \frac{m_p^2}{r^2} \\
F_e &= k_C \frac{e^2}{r^2} \\
\frac{F_G}{F_e} &= \frac{G_N \cdot m_p^2}{k_C \cdot e^2} \\
\frac{F_G}{F_e} &= \frac{(6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}) \cdot (1.673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg})^2}{(8.99 \cdot 10^{9}\,\mathrm{V \cdot m \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}}) \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2} \\
\frac{F_G}{F_e} &\approx 10^{-36}
\end{aligned}
$$

Die Gravitationswechselwirkung ist nicht in der Lage, im Kern etwas auszurichten. Es muss also eine weitere Wechselwirkung geben, die die Kerne zusammenhält.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Angenommen, Sie bauen ein Modell eines Atoms, das etwa so groß ist wie ihr Studentenzimmer. Welche Größe hätte der Kern?
2. Warum gibt es Neutronen im Kern?
3. Warum kann man nicht größere Kerne erzeugen, indem man immer mehr Neutronen zugibt?
4. Warum destabilisiert die elektrostatische Abstoßung zwischen den Protonen nicht den Kern?
5. Gibt es eine Bauanleitung für Kerne?
6. Wie beeinflusst das Neutron-zu-Proton Verhältnis die Stabilität der Isotope?
7. Warum sind alle Isotope mit $Z > 83$ instabil?
8. Welche Kräfte halten den Kern zusammen, welche versuchen ihn zu destabilisieren?
9. Warum bestimmen allein die Protonen im Kern die chemischen Eigenschaften eines Elements?
10. Skizzieren Sie die Dichte- und Ladungsverteilung im Kern!
11. Die Schwache und die Starken Wechselwirkung sind grundlegend für die Struktur der Materie. Warum erfahren wir diese Kräfte nicht mit unseren Sinnen?

Massendefekt revisited



In Physik und Chemie bezieht sich der so genannte Massendefekt auf den Massenunterschied zwischen einem Atom und der Summe der Massen der Protonen, Neutronen und Elektronen eines Atoms, siehe Kapitel *Einsteingleichung*. Die fehlende Masse ist die Energie, die bei der Bildung des Atomkerns freigesetzt wird. Einsteins Formel

$$E = m_0 \cdot c^2 \tag{21.38}$$

kann angewendet werden, um die Bindungsenergie in einem Kern zu berechnen. Nach der Einsteinschen Gleichung nehmen Masse und Trägheit zu, wenn die Energie zunimmt. Die Umverteilung der Energie bei der Bildung von Kernen reduziert die Masse und führt zum Massendefekt. Ein Blick in das Periodensystem der Elemente zeigt (Abb. 21.63), dass die Massen der Atome keine Vielfache der Masse des Protons/Neutrons sind. Der Massenunterschied kann nicht, wie man vermuten könnte, auf die unterschiedlichen Isotope zurückgeführt werden. Aluminium (Al) zum Beispiel hat nur ein einziges Isotop (Z=13, N=14). Statt einer Masse von 27.16 amu als Summe aller Protonen, Neutronen hat Al eine Masse von nur 26.98 amu. Das Aluminiumatom ist also leichter als Summe der Kernbestandteile. Tatsächlich wird durch die Bindung der Kernbausteine untereinander dem Kern Energie in Form von Masse entzogen. Diese Energie muss im Übrigen

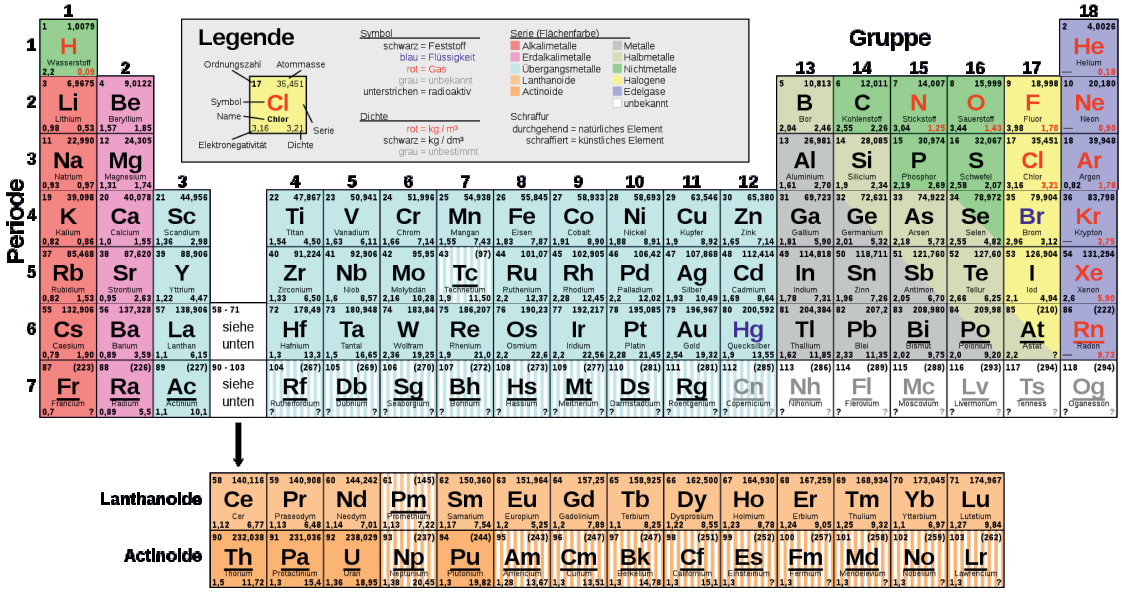


Abb. 21.63: Periodensystem der Elemente. Man beachte die eingetragenen Massen.

aufgewendet werden, um einen Kern in seine Bestandteile zu zerlegen.

$$\Delta m = m_{nucleus}(z_p, n_p) - z_p \cdot m_p + n_n \cdot m_n \tag{21.39}$$

Das Element ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$ hat eine positive Bindungsenergie von 56 MeV und wird deshalb nicht in einem spontanen Zerfall in einzelne Protonen und Neutronen zerfallen. Im Gegensatz dazu liefert die Reaktion

$${}^{8}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{21.40}$$

einen geringen Energieüberschuss aus dem Massendefekt. Über diesen Kanal zerfällt ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$ und kommt deshalb in der Natur nicht vor.

Aus dem Massendefekt kann die Bindungsenergie von Proton und Neutron im Deuterons mit 2.22 MeV berechnet werden. Aus dieser Information können wir die Tiefe des Bindungspotenzials abschätzen. Wie im Kapitel *Wellenfunktion* zelebriert, sollte der niedrigste Zustand des Systems eine deBroglie Wellenlänge von $\lambda_{dB}/2$ haben, der dem Durchmesser des Deuterons ($d_D = 2\,r_D$) entspricht. Also gilt

$$\lambda_{dB} = 4\,r_D \tag{21.41}$$

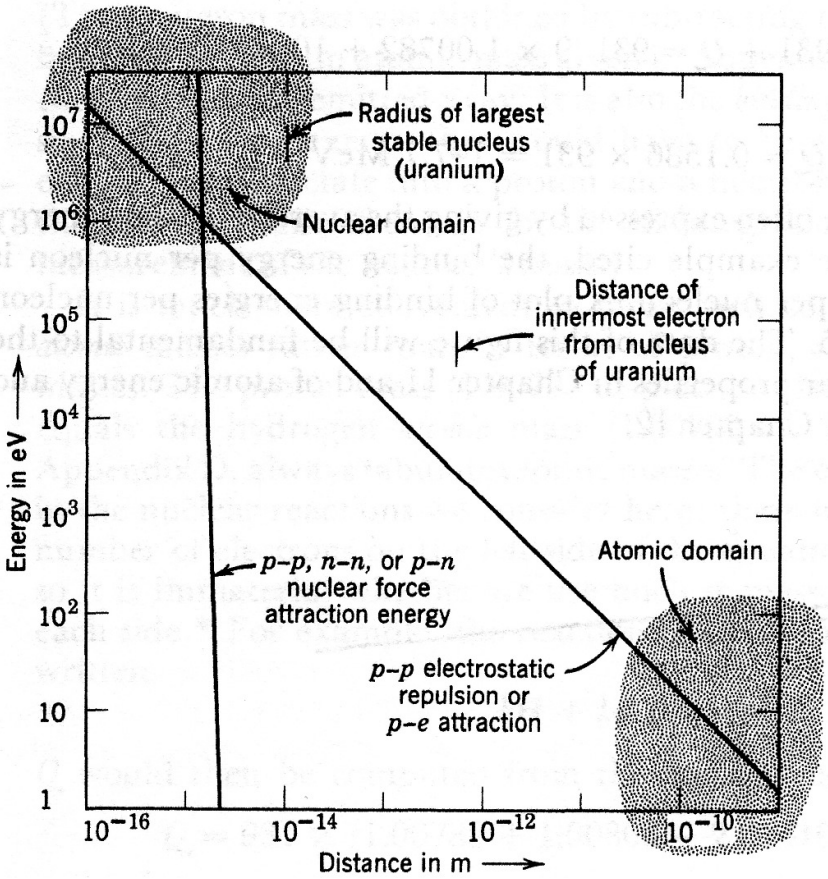


Abb. 21.64: Energieverhältnisse im Atom als Funktion des Radius demonstrieren die klare Separation von Kernnukleonen und Elektronensystem. Im Urankern ist das äußerste Nukleon mit 6 MeV in einem Abstand von 10^{-14} m gebunden. Das innerste Elektron im Uran ist mit 0.1 MeV gebunden und umkreist den Kern in einem mittleren Abstand von 10^{-12} m. Alle relevanten atomaren Prozesse im Elektronensystem finden bei deutlich geringeren Energien von etwa 100 eV statt[**?**].

Aus der deBroglie-Beziehung ergibt sich eine Kinetische Energie von

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{p^2}{2\,m} \\ E_{kin} &= \frac{1}{2\,m} \cdot \frac{h^2}{16\,r_D^2} \\ E_{kin} &= \frac{h^2}{32\,m \cdot r_D^2} \\ E_{kin} &= \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})^2}{32 \cdot (1.673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}) \cdot (2.3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m})^2} \\ E_{kin} &= 18.7\,\mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{21.42}$$

Insgesamt ergibt sich eine Bindungsenergie von $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot}$=20.9 MeV. Hat das Konsequenzen für die physikalische Betrachtung? JA! Die großen Bindungsenergien und die geringen Abmessungen in Kernen erlauben separate Studien an Kern und Atomhülle. Abb. 21.64 demonstriert das Phänomen.

Es ist üblich die Reaktionsenergien bei kernphysikalischen Reaktionen mit dem Q-Wert zu charakterisieren.[59]

$$Q = \sum_i m_i - \sum_f m_f \tag{21.43}$$

wobei m_i und m_f die Massen der Anfangs- bzw. Endteilchen sind. Da die Bindungsenergie pro Nukleon in den Kernen unterschiedlich ist, gibt es exotherme und endotherme Kernreaktionen. Der Q-Wert ist bei exothermer Reaktion positiv, bei endothermer negativ. Der Q-Wert ergibt sich aus der Differenz zwischen der gesamten kinetischen Energie vor und nach der Reaktion und lässt sich nach aus der aus der Differenz der Gesamtmassen vor nach dem Zerfall berechnen.

[59] Chemische Q-Werte werden über Kaliometrie bestimmt. In der Elementarteilchenphysik gibt es die Regel von Sargent, die besagt, dass Reaktionen unter Einfluss der Schwachen Wechselwirkung mit Q^5 skalieren.

Aufgaben

Aufgabe 5.1: Sind Elektronen und Neutronen geeignet, die innere Struktur der Kerne aufzulösen? Bestimmen sie notwendigen kinetischen Energien!

Elektronen wechselwirken allein aufgrund der elektrostatischen Wechselwirkung und Neutronen allein über die Kernkräfte mit dem Kern. Elektronen liefern damit Information über die Ladungsverteilung und Neutronen geben Auskunft die Struktur der Kernmaterie. Um aussagekräftige Daten zu liefern, muss die deBroglie Wellenlänge der Teilchen geringer sein als die Größer des Objekts, also grob $10^{-14}\,\mathrm{m}$. Der zugehörige Impuls ergibt sich mit:

$$\begin{aligned} p &= \frac{h}{\lambda_{dB}} \\ p &= \frac{6.63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{1 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}} \\ p &= 6.63 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J \cdot m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Für das leichte Elektron $E_{kin} \gg m_0 \cdot c^2$ ergibt sich eine kinetische Energie von:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= p \cdot c \\ E_{kin} &= (6.63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot m \cdot s^{-1}}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}) \\ E_{kin} &= 1.99 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J} \\ E_{kin} &= 1.24\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Für ein Neutron muss die Ruheenergie berücksichtigt werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= E_{ges} - m_0 \cdot c^2 \\ E_{kin} &= \sqrt{(m_0 \cdot c^2)^2 - p^2 \cdot c^2} - m_0 \cdot c^2 \end{aligned}$$

Wir machen folgende Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} m_0^2 \cdot c^4 &= (939\,\mathrm{MeV})^2 = 88.17 \cdot 10^4\,(\mathrm{MeV})^2 \\ p^2 \cdot c^4 &= (124\,\mathrm{MeV})^2 = 1.54 \cdot 10^4\,(\mathrm{MeV})^2 \end{aligned}$$

und erhalten folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \sqrt{(88.17 - 1.54) \cdot 10^4\,(\mathrm{MeV})^2} - 939\,\mathrm{MeV} \\ E_{kin} &= 947\,\mathrm{MeV} - 939\,\mathrm{MeV} \\ E_{kin} &= 8\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Elektronen und Neutronen mit kinetischen Energien von mindestens $1.24\,\mathrm{MeV}$ beziehungsweise $8\,\mathrm{MeV}$ sind also geeignet, die innere Struktur der Kerne aufzulösen.

Aufgabe 5.2: Mit dem Konzept Kernfusion und Kernspaltung werden wir uns im Kapitel *Kernmodelle* auseinandersetzen. Als Vorgriff kann man den Effekt des Massendefekts aber schon nutzen, um die Möglichkeit solcher Reaktionen abzutasten. Nehmen wir mal an, die nukleare Bindungsenergien pro Nukleon (B_E/A) der Elemente wären:

$$\begin{aligned} 2\,\text{MeV} \quad &\text{für} \quad 1 < A < 100 \\ 8\,\text{MeV} \quad &\text{für} \quad 101 < A < 200 \\ 5\,\text{MeV} \quad &\text{für} \quad 200 < A < 260 \end{aligned}$$

Diskutieren Sie folgende Fälle:

(a) Fusion zweier Kerne mit Massenzahlen von $1 < A < 50$!

(b) Fusion zweier Kerne im Bereich $51 < A < 100$!

(c) Spaltung eines Kerns im Massenbereich $100 < A < 200$ in zwei gleich schwere Kerne !

(d) Spaltung eines Kerns ($200 < A < 260$) in zwei gleich schwere Kerne!

(a) Wenn die B_E/E des Produkts größer ist als die der Edukte, wird in der Reaktion Energie freigesetzt. Fusion zweier Kerne mit Massenzahlen geringer als A=50 generiert einen Kern im Massenbereich $1 < A < 100$. Der Wert von B_E/A ändert sich nicht. Also wird keine Energie freigesetzt und es kommt nicht zur Fusion.

(b) Im Massenbereich $51 < A < 100$ erzeugt die Verschmelzung einen Kern mit höherer Bindungsenergie pro Atom. Die Fusion setzt also Energie frei.

(c) Zwischen $100 < A < 200$ erzeugt die Spaltung Kerne, deren B_E/A gleich oder geringer ist als die des Ausgangskerns. Es wird also keine Energie freigesetzt und Kernspaltung ist nicht sehr wahrscheinlich.

(d) Für Kerne im Massenbereich $200 < A < 260$ bilden sich durch die Spaltung Kern im Massenbereich $100 < A < 200$. Die Bindungsenergie pro Atom der Produkte ist größer als die des Reaktanden. Daher wird Energie freigesetzt.

Aufgabe 5.3: Betrachten wir den nuklearen Photoeffekt an Deuterium (Kapitel *Photelektrischer Effekt*). Reicht die Einstrahlung eines Photons der Energie $\hbar\omega_\gamma$=2.226 MeV aus, um den Kern zu spalten?

$$^2_1\text{D} + \gamma \rightarrow ^1_1\text{H} + ^1_0 n$$

Die spezifischen Massen von Deuteron, Wasserstoff und Neutron sind:

$$\begin{aligned} m_D &= 2.013553\,\text{amu} \\ m_H &= 1.007276\,\text{amu} \\ m_n &= 1.008665\,\text{amu} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Massendefekt von

$$\begin{aligned} m_H + m_n &= 1.007276\,\text{amu} + 1.008665\,\text{amu} \\ m_H + m_n &= 2.015941\,\text{amu} \\ \Delta m &= m_D - (m_H + m_n) \\ \Delta m &= 0.023880\,\text{amu} \\ \Delta m &= 2.4 \cdot 10^6\,\text{J} \\ \Delta m &= 2.4\,\text{MeV} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass ein hochenergetisches Photon einer Energie größer als 2.4 MeV in der Lage ist, einen Deuteriumkern in Proton und Neutron aufzuspalten, siehe [**?**]. Eine Photonenenergie von 2.226 MeV reicht nicht aus.

Aufgabe 5.4: Welche Energie ergibt sich aus dem Massendefekt von 1 Mol Helium?

Beim Element Helium berechnet sich derr Massendefekt zu:

$$\begin{aligned} \Delta m_{He} &= 4.0290\,\text{amu} - 4.0015\,\text{amu} \\ \Delta m_{He} &= 0.0276\,\text{amu} \\ \Delta m_{He} &= 4.58 \cdot 10^{-29}\,\text{kg} \\ \Delta E_{He} &= 4.12 \cdot 10^{-12}\,\text{J} \end{aligned}$$

Wir geben den Wert in der in der Chemie üblichen Einheit kJ/mol an:

$$\begin{aligned} N_A \cdot \Delta E_{He} &= \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{\text{mol}} \cdot 4.12 \cdot 10^{-12}\,\text{J} \\ N_A \cdot \Delta E_{He} &= 2.5 \cdot 10^{23} \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \end{aligned}$$

Vergleicht man diesen Wert mit typischen Energien bei chemischen Reaktionen (100 kJ/mol) erkennt man, dass die Bindungsenergien in Kernen deutlich erhöht sind.

Aufgabe 5.5: Bei der Bildung eines Kerns aus Nukleonen kommt es zu[60]

(a) einer Abnahme der Masse.

(b) einer Zunahme der Masse.

(c) keiner Massenänderung.

(d) nichts von alledem.

[60] Antwort: (a)

Aufgabe 5.6: Wie hoch ist die Bindungsenergie pro Nukleon BE/A des α-Teilchens?

Die Masse von ^{4}He (Z=2, A=4)ist 4.002602 amu, m_p=1.007825, m_n=1.008665. Ein amu entspricht 931.5 MeV/c^2.

$$\begin{aligned} BE &= ((Z \cdot m_p + N \cdot m_n) - m({}^A_Z X)) \cdot c^2 \\ BE &= ((2 \cdot 1.673 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} + 2 \cdot 1.675 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}) - m({}^4_2\text{He})) \cdot c^2 \\ BE &= (0.030378\,\text{amu}) \cdot c^2 \\ BE &= (0.030378\,\text{amu} \cdot 931.5\,\text{MeV}/c^2) \cdot c^2 \\ BE &= 28.3\,\text{MeV} \\ BE/A &= BE/4 = 7.07\,\text{MeV} \end{aligned}$$

Dies ist eine erhebliche Bindungsenergie pro Nukleon, verglichen mit anderen leichten Kernen.

Aufgabe 5.7: Die Energiemenge, die man benötigt, um den Kern in seine Bestandteile (Nukleonen) zu zerlegen, nennt man[61]

(a) Gitterenergie.

(b) Kinetische Energie.

(c) Bindungsenergie.

(d) Rumpfenergie.

(e) Stimmt alles nicht.

Aufgabe 5.8: bei der Bildung eines Kerns aus Nukleonen[62]

(a) kommt es zu einer Zunahme der Masse.

(b) nimmt die Masse des Kerns ab.

(c) kommt es zu keiner Massenänderung

(d) Das stimmt alles nicht.

Aufgabe 5.9: Im Spielfilm *Zurück in die Zukunft* tanken die Protagonisten Auto mit Müll. Welcher Anteil an Kraftstoff könnte eingespart werden, wenn unsere Autos tatsächlich Müll als chemischen/nuklearen Kraftstoff nutzen könnten?

Das ist eine so genannte Fermi-Frage, bei man der eine grobe Abschätzung durchführt. Was ist bekannt? In Deutschland gibt es zur Zeit etwa 60 Millionen Fahrzeuge und

[61] Antwort: (c)
[62] Antwort: (b)

die mittlere Strecke, die ein Halter pro Jahr zurücklegt beträgt 11 000 km. Der mittlere Kraftstoffverbrauch liegt bei 7.7 ℓ pro 100 km. Mit der Angabe, dass die Dichte von Benzin 0.75 kg/ℓ beträgt, ergibt sich die Masse an Benzin, die jeder Halter pro Jahr tankt:

$$\begin{aligned} m_{\text{Benzin}} &= 11 \cdot 10^3\,\text{km} \cdot 7.7 \frac{\ell}{100\,\text{km}} \cdot 750 \frac{\text{kg}}{\ell} \\ m_{\text{Benzin}} &= 847\,\ell \cdot 0.75 \frac{\text{kg}}{\ell} \\ m_{\text{Benzin}} &= 635\,\text{kg} \end{aligned}$$

Das entspricht fast exakt der jährlichen mittleren Müllmenge pro Person, nämlich 646 kg. Schätzungsweise beträgt die Energieeffizienz von Müll im Vergleich zu Benzin 30%. Wir könnten also etwa 30% unseres Kraftstoffverbrauchs einsparen. Diese Ergebnis bezieht sich auf die Verwendung von Müll als chemischem Energielieferanten. Was ergibt sich, wenn man die Einsteinsche Gleichung nutzt? Müll enthält in etwa 10% Wasserstoff, das H praktisch an allen Molekülen dranhängt. Bei der Fusion von Wasserstoff zu Helium ist die Effizienz 0.1%. Das liefert einen Energiemenge von

$$\begin{aligned} E &= (635\,\text{kg}) \cdot (0.1) \cdot (10^{-3}) \cdot (2.998 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 \\ E &= 5.7 \cdot 10^7\,\text{J} \end{aligned}$$

Bei einer Chemischen Energiedichte von Benzin in Höhe von $3 \cdot 10^7$ J/ℓ ergibt sich eine äquivalente Kraftstoffmenge von:

$$V_{\text{Benzin}} = \frac{5.7 \cdot 10^7\,\text{J}}{3 \cdot 10^7\,\text{J}/\ell} = 1.9 \cdot 10^8\,\ell$$

Aufgabe 5.9: Wie hoch ist der Massenzuwachs eines Fussballs (Masse 500 g), wenn er durch einem Schuss auf 10 m/s beschleunigt wird?

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ m &= \frac{0.5\,\text{kg}}{\sqrt{1 - \dfrac{(10\,\text{m/s})^2}{(2.998 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2}}} \\ m &= 1.000\,000\,000\,000\,000\,55 \cdot m_0 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.10: Wie hoch ist der Massenzuwachs eines Fussballs (Masse 500 g), wenn er durch einem Schuss auf 10 m/s beschleunigt wird, die Lichtgeschwindigkeit aber nur 12 m/s beträgt?

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
m &= \frac{0.5\,\mathrm{kg}}{\sqrt{1-\frac{(10\,\mathrm{m/s})^2}{(12\,\mathrm{m/s})^2}}} \\
m &= 1.81 \cdot m_0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5.11: Welche Energie wird beim α-Zerfall von Uran-238 freigesetzt?

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{234}_{90}\mathrm{Th} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$$

Die Atommassen findet man in der Literatur: $^{238}_{92}$U (238.05082) amu, $^{234}_{90}$Th (234.04364) amu, $^{4}_{2}$He (4.00260) amu.

$$\Delta m = 238.05082\,\mathrm{amu} - 234.04364\,\mathrm{amu} - 4.00260\,\mathrm{amu} = 0.00458\,\mathrm{amu}$$

Das ergibt eine äquivalente Energiemenge von

$$(0.00458\,07\,825 + 126)\,\mathrm{amu} \cdot (931.5\,\mathrm{MeV/amu}) = 4.3\ \mathrm{MeV}$$

Aufgrund der Impulserhaltung erhält das α-Teilchen ein Anteil von 234/238 der Kinetischen Energie.

Aufgabe 5.12: Berechnen Sie die Bindungsenergie von $^{208}_{8}$2Pb (207.976 641 amu).
Der Kern hat 82 Protonen und 126 Neutronen. Die Gesamtmasse der freien Protonen und Neutronen ist:

$$82 \cdot 1.007\,825\,\mathrm{amu} + 126 \cdot 1.008\,665\,\mathrm{amu} = 209.733\,44\,\mathrm{amu}$$

Das ergibt einen Massendefekt von

$$\Delta m = 209.733\,44\,\mathrm{amu} - 207.976\,641\,\mathrm{amu} = 1.7568\,\mathrm{amu}$$

Da 1 amu=931 MeV/c^2, ergibt sich eine Bindungsenergie von

$$E_b = m \cdot c^2 = 1.7568\,\mathrm{amu} \cdot 931\,\frac{MeV \cdot c^2}{c^2 \cdot\ \mathrm{amu}} = 1636.5\,\mathrm{MeV}$$

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie viele Protonen sind notwendig, um Sie 10 Meter in die Luft zu heben?
2. Die Isotope N-16 und O-16 haben beide die gleiche Nukleonenzahl. Haben sie auch die gleiche Masse?
3. Stimmt die Aussage, dass die Masse eines Eiswürfels exakt der Masse des Wassers entspricht aus dem es erzeugt wurde?
4. Die Sonne hat eine Masse von $2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ und gibt pro Sekunde eine Energie von $4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{J}$ ab. Wie lange dauert es, bis 0.7% der Masse der Sonne in Energie umgewandelt sind. Warum entspricht dieser Zeitraum in etwa der Lebensdauer der Sonne?
5. Wäre C-14 ein stabiles Isotop, wenn die Massendifferenz zwischen C-14 und N-14 je Kern 0.4 MeV betragen würde?
6. Welcher der beiden folgenden Prozesse setzt mehr Energie frei. Aus 20 Protonen und 20 Neutronen bilden sie einem ^{40}Ca-Kern oder zu zwei ^{Ne}Ne-Kerne?
7. Kann Li-7 über einen β-Zerfall in Be-7 zerfallen?
8. Kann ein Proton in ein Neutron zerfallen?
9. Wie hoch ist die äquivalente Energie für 1 amu?
10. Warum kann ein K-Meson NICHT in vier π-Mesonen zerfallen?
11. Vergleichen Sie die $E = m \cdot c^2$ eines Moskitos mit der Kinetischen Energie eines Jumbojets bei Höchstgeschwindigkeit.Was sagt ihnen ihre Intuition.
12. Wenn zwei Billardkugeln zusammenstoßen scheint es so, als würde erst eine Kraft wirken, wenn sie sich berühren. Welche Kraft wirkt?

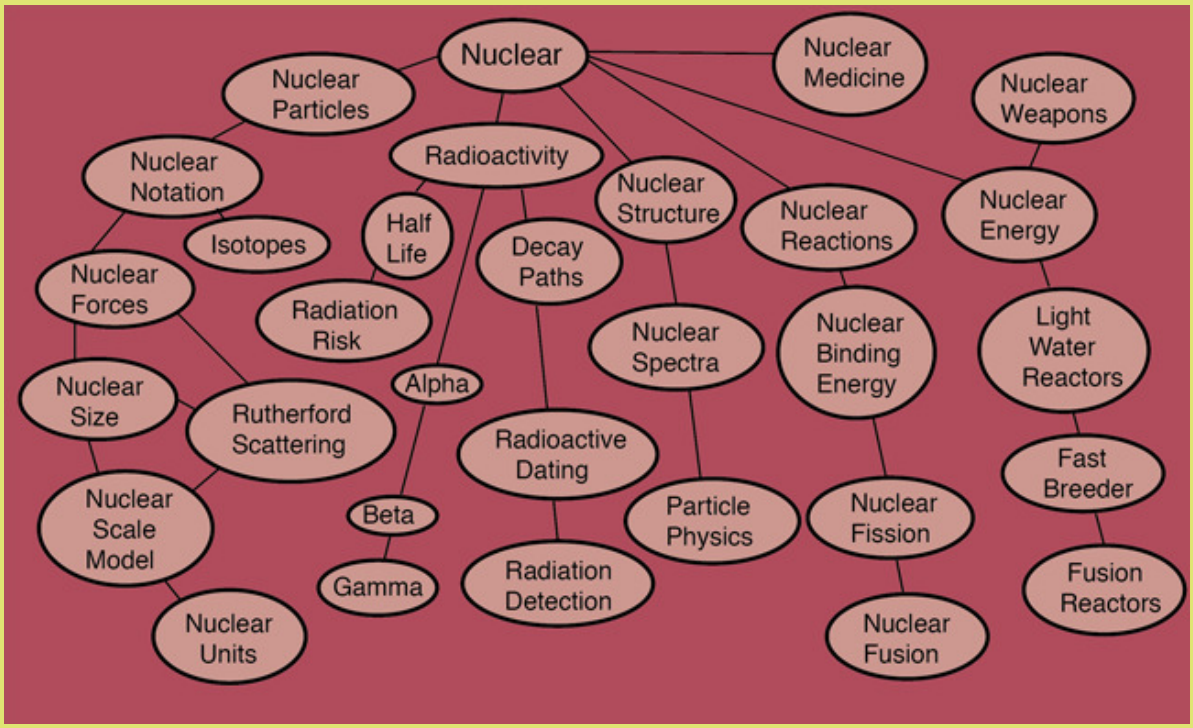


Abb. 21.65: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

- Nuklide und Kernnotation
- Isotope
- Zerfallskonstante, Aktivität A_{decay} (Gl. 21.9) und Radioaktives Zerfallsgesetz (Gl. 21.11)

$$A_{decay} = \frac{d}{dt} N_{decay}(t)$$

$$N_{decay}(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda_{decay} \cdot t)$$

- Zerfallszeit (Gl. 21.13) und Halbwertszeit (Gl. 21.14)

$$\begin{aligned} T_{1/e} &= \frac{1}{\lambda_{decay}} \\ T_{1/2} &= \frac{\ln 2}{\lambda_{decay}} \end{aligned}$$

- Radiokohlenstoff-Methode,

- Dichte der Kernmaterie und Kernradius (Gl. 21.28)

$$r_{nucleus} = r_0 \cdot A_{nucleus}^{1/3}$$

- Massendefekt

23 Ionisierende Strahlung



Ionisierende Strahlung

Liebe Radioaktive Damen und Herren ...

Wolfgang Pauli am 4. Dezember 1930

[1]Strahlung[2] verschiebt Energie entweder in Form elektromagnetischer Wellen (z.B. Röntgenstrahlung) oder als Teilchenstrom (z.B. α- oder β-Strahlung). Bei ionisierender Strahlung erfolgt pro Photon ein größerer Energietransport als bei sichtbarem Licht. Materie kann durch das Eindringen ionisierender Strahlung verändert werden (chemische Reaktionen, Ionisation). Wenn ionisierende Strahlung auf lebende Zellen oder Organismen

[1]Abschnitte mit ^{4LP} markiert, sind für die Klausur nicht relevant.

[2]Zum Titelbild: Die Gilbert Company brachte in den 1950er Jahren Baukästen für Kinder heraus, um Experimente zur Radioaktivität durchführen. Developed at the Gilbert Hall of Science with country's leading atomic energy scientists. Counter clicks rapidly when radioactive material is near; clicks are heard through earphone. Neon light indicator recessed in Geiger counter top also indicates radioactivity by means of flashes.

trifft, können dadurch Schäden in Zellen und Organismen hervorrufen werden. Generell und in Bezug auf ihre schädigende Wirkung auf Organismen (biologische Wirksamkeit) unterscheidet man drei verschiedene Arten ionisierender Strahlung:

- Unter **α-Strahlung** versteht man Teilchenemission in Form eines Heliumkerns He^{2+}. Diese Strahlung wird von Materie wie Luft oder Wasser effektiv absorbiert und führt zu einer geringen Reichweite.

- Unter **β-Strahlung** versteht man eine Teilchenemission, die beim radioaktiven Zerfall Elektronen oder Positronen [**?**] freisetzt. Diese Strahlung hat eine größere Reichweite, da sie von Materie weniger stark absorbiert wird. β-Strahlung, die in den Körper eindringt, kann Gewebe schädigen. Wie sich herausstellt, hat diese Strahlung im Vergleich zu α-Strahlung eine geringere biologische Wirksamkeit als α-Strahlung.

- **Neutronenstrahlung** wird insbesondere beim Prozess der Kernspaltung freigesetzt und ist deshalb charakteristisch für schwere Radionuklide. Neutronen werden an Luft kaum absorbiert, so dass eine Abschirmung aufwendig ist. Aufgrund der starken Wechselwirkung mit biologischem Gewebe (insbesondere H_2O) hat Neutronenstrahlung eine hohe biologische Wirksamkeit.

- Bei **γ-Strahlung** wird Energie in Form elektromagnetischer Wellen mit kurzer Wellenlänge (pm) abgestrahlt. Die Strahlung entsteht beim Zerfall radioaktiver Atome zusätzlich zu α- oder β-Strahlung und ist in der Lage, Materie leicht zu durchdringen. Eine effektive Abschirmung ist daher aufwendig. γ-Strahlung kann tief ins Gewebe eindringen. Allerdings ist die biologische Wirksamkeit im Vergleich zu beispielsweise α-Strahlung geringer.

Beim β-Zerfall stellt sich die Frage, ob die Emission im Kern vorhandene Elektronen freisetzt. Dazu analysieren wir das Szenario unter Verwendung der Heisenbergschen Unschärferelation, wobei wir als Ortsunschärfe für das Elektron einen Kernradius von $10^{-14}\,\mathrm{m}$ annehmen. Das Elektron muss mindestens den über die Unschärferelation berechneten Impuls Δp aufweisen!

$$\begin{aligned} \Delta p &\geq \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\Delta x} \\ \Delta p &\geq \frac{1}{2}\frac{1.054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{10^{-14}\,\mathrm{m}} \\ \Delta p &\geq 5.27 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \end{aligned} \tag{23.1}$$

Da ein Elektron mit einem solch hohen Impuls eine kinetische Energie hat die deutlich größer ist als die Ruheenergie können wir E_{kin} mit $\Delta p \cdot c$ abschätzen

$$\begin{aligned} E_{kin} &= (5.27 \cdot 10^{-21} \cdot \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^{-1}}}) \cdot (2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}) \\ E_{kin} &= 1.58 \cdot 10^{-12} \cdot \mathrm{J} \\ E_{kin} &= 9.87 \cdot 10^{6} \cdot \mathrm{eV} \end{aligned} \tag{23.2}$$

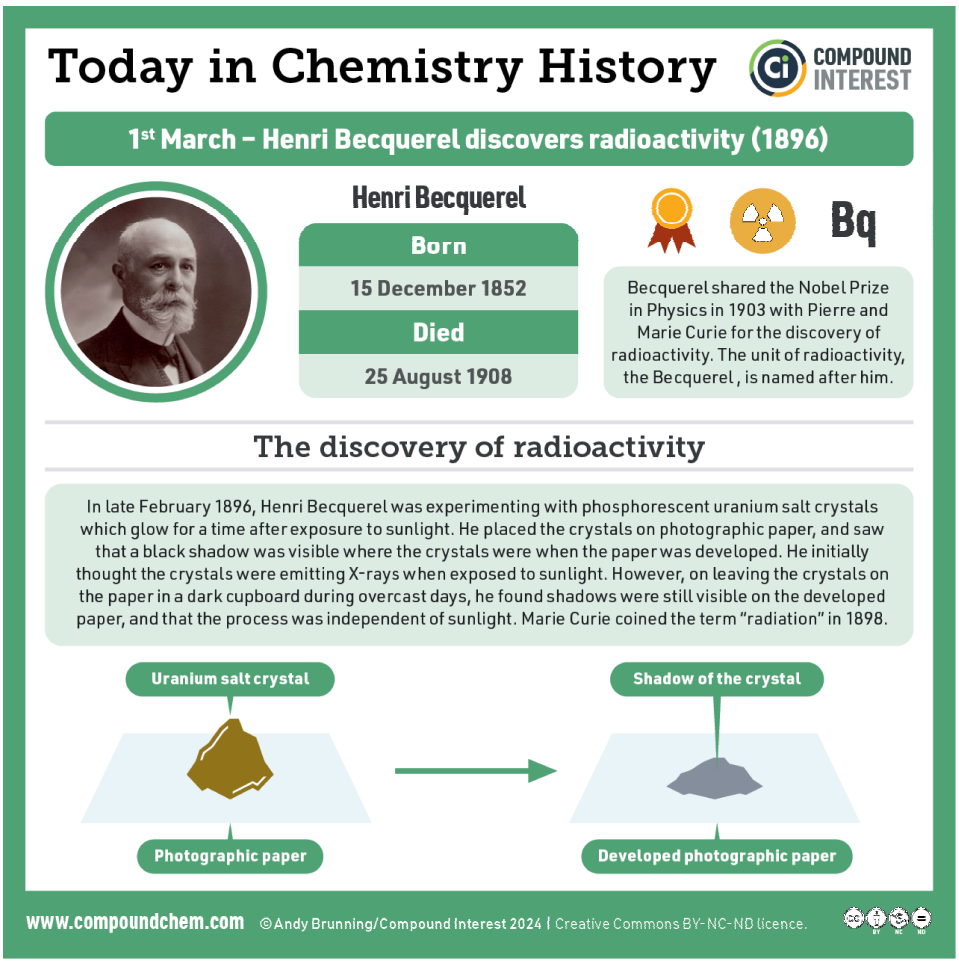


Abb. 23.1: Henri Becquerel (1852-1908)

Die sich ergebenden Energien von 10 MeV lassen es unwahrscheinlich erscheinen, dass sich freie Elektronen im Kern aufhalten. Anders sieht es im Fall des Protons aus. Hier kann man nicht-relativistisch rechnen. Mit der Angabe des oben berechneten Impulses ergibt sich für das Proton ein Wert von

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{p^2}{2\,m_p} \\ E_{kin} &= \frac{(5.27 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}})^2}{2 \cdot (1.673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg})} \\ E_{kin} &= 8.3 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J} \\ E_{kin} &= 0.052\,\mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{23.3}$$

Die Annahme, dass sich Protonen im Kern aufhalten erscheint plausibler. Ein weiteres Argument ergibt sich aus der Tatsache, dass sowohl Elektronen als auch Protonen Fermionen sind, also Spin 1/2-Teilchen (Kapitel *Beyond Bohr*). Das bedeutet, dass Kerne mit einer geraden Anzahl an Protonen und Elektronen einen gradzahligen Gesamtspin

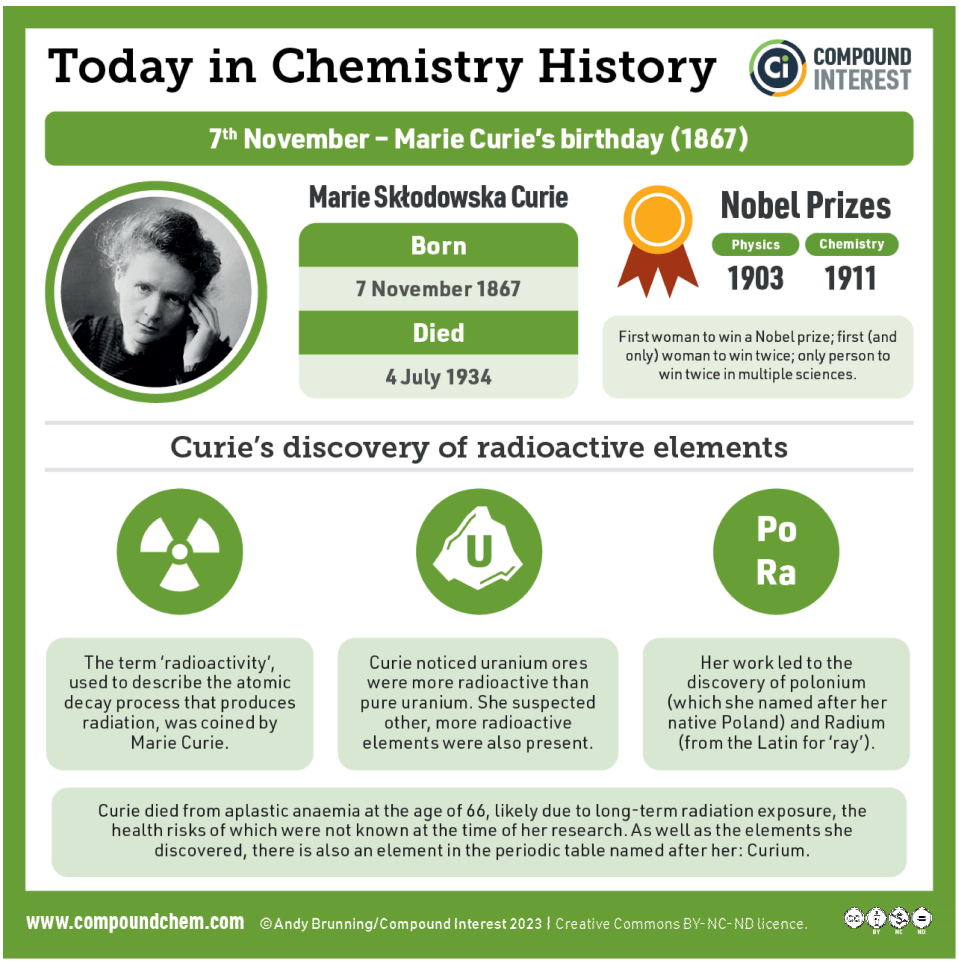


Abb. 23.2: Marie Curie (1867-1934)

als Summe der Einzelspins haben sollten. Kerne mit einer ungradzahligen Anzahl sollten einen halbzahligen Spin aufweisen. Das Deuteron, ein Isotop des Wasserstoff hat einen Masse von 2 amu, was darauf hindeutet, dass es zwei Protonen und ein Elektron hat. Die Gesamtladung des Kerns wäre +1, wie gefordert. Der resultiere Spin sollte entweder -3/2, -1/2, 1/2, oder 3/2 betragen. Tatsächlich ist der Spin des Deuterons gradzahlig und beträgt EINS. Schließlich kann man das magnetische Moment des Kern betrachten. Hier ergibt sich für das Proton ein Wert von 0.15% des Wertes des Elektrons. Das magnetische Moment des Kerns sollte also durch das magnetische Moment des Elektrons bestimmt sein. Die Werte für alle Kernen liegen dagegen in einer Größenordnung, die vergleichbar ist mit dem des Protons, was ebenfalls nicht mit der Hypothese vereinbar ist, dass sich Elektronen im Kern aufhalten.

With the double sulfate of uranium and potassium, of which I possess crystals in the form of thin transparent crust, I have made the following experiment: I wrapped a Lnmiere photographic plate with bromized emulsion with two sheets of thick black paper, so

1908

thick that the plate did not become clouded by exposure to the sun for a whole day. I placed on the paper a plate of phosphorescent substance, and exposed the whole thing to the sun for several hours. When I developed the photographic plate I saw the silhouette of the phosphorescent substance in hlack on the negative. If I placed between the phosphorescent substance and the paper a coin or a metallic screen pierced with an open work design, the image of these objects appeared on the negative.... It is important that this phenomenon seems not attributable to luminous radiation emitted by phosphorescence, since at the end of one hundredth of a second these radiations become so feeble that they are scarecely perceptible [**?**].

Henri Becquerel, 1896

Die folgende Zeittafel illustriert die Bedeutung der Kernphysik für die Entwicklung der Medizin.

1896 Antoine Henri Becquerel(Abb. 23.1) entdeckt das Phänomen Radioaktivität.[3]

1898 Marie Curie (Abb. 23.2 veröffentlicht ein Papier mit dem Titel *Rays emitted by uranium and thorium compounds.*

1900 Giesel und Walkhoff entdecken, das Radium gefährlich für die Haut ist.

1913 Hevesy und Paneth entwickeln die Tracermethode.

1929 Einführung Thorotrast (radioaktives Thorium) als Röntgenkontrastmittel.

1934 Marie Curie stirbt an aplastischer Anämie.

1934 Frederic und Irene Joliot-Curie erzeugen künstliche Radioisotope.

1936 John Lawrence verwendet das Radionuklid Phosphor-32 um Leukämie zu behandeln.

1936 Gordon Locher schlägt die Bor-Neutroneneinfang-Therapie vor.

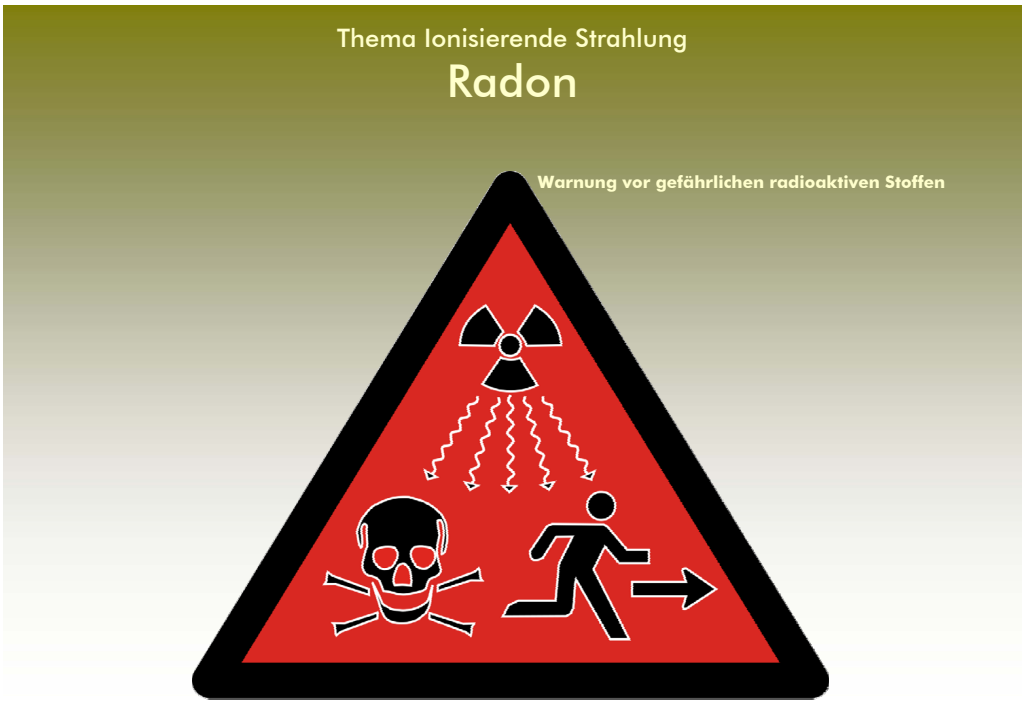
1950 David Kuhl entwickelt die Positron-Emissions-Tomographie (PET).

1958 Anger entwickelt die γ-Kamera.

[3] *Lexikon:* Das Becquerel (Bq), ist die SI-Einheit der radioaktiven Aktivität (A). Das Becquerel gibt die Anzahl der Atome an, die pro Sekunde zerfallen ($1\,\mathrm{Bq}{=}1\,\mathrm{s}^{-1}$).


Inhalt
Ionisierende Strahlung
- Zerfallsketten: Regeln beim radioaktiven Zerfall
- Auswirkung radioaktiver Stoffe auf die Gesundheit
- Tunneleffekt erklärt den α-Zerfall
- β⁺-Zerfall und die Entdeckung der Neutrinos
- γ-Lichtemission aus Kernen als Fingerabdruck der Elemente
- Nachweis ionisierender Strahlung durch Wilsonkammer und Zählrohr
Kapitel 1
Radon
hydro
medicine
daily life
Kapitel 2
Zerfallskanäle
mechanics
electro
relativity
medicine
daily life
Kapitel 3
Aktivierung
oscillations
astro
Kapitel 4
Nachweis ionisierender Strahlung
hydro
electro

Radon^{4LP}



Im frühen 16. Jahrhundert berichteten Agricola und Paracelsus von einer merkwürdigen Lungenkrankheit, an der Bergarbeiter im Uranrevier Schneeberg-Joachimsthal erkrankten. Die Schneeberger Krankheit wurde von Haerting und Hesse 1879 als Lungenkrebs diagnostiziert. Ursache war, wie spätere Untersuchungen Anfang des 20. Jahrhunderts nachwiesen, die Inhalation radioaktivem Poloniums. Wie sich gezeigt hat, weist die Lunge eine hohe Strahlungsempfindlichkeit auf, wie man an Überlebenden der Atombombenexplosionen in Hiroshima und Nagasaki nachgewiesen hat. Welchen Einfluss haben radioaktive Stoffe auf unsere Gesundheit? Dies soll am Beispiel des Elements Radon erläutert werden.

Radium-226 and Radon-222: Concentration in atlantic and pacific oceans [?]: Measurements of radon-222 in seawater suggest the following. The radium-226 content of surface water in both the Atlantic and Pacific oceans is uniformly close to about $4 \cdot 10^{-14}$ gram per liter. The deep Pacific has a concentration of radium-226 that is four times higher and the deep Atlantic a concentration twice as high as that of the surface. These distribution profiles can be explained by the same particle-settling rate for radium-226 from surface to depth for the two oceans and by a threefold longer residence time of water in the deep Pacific than in the deep Atlantic. The vertical distribution of

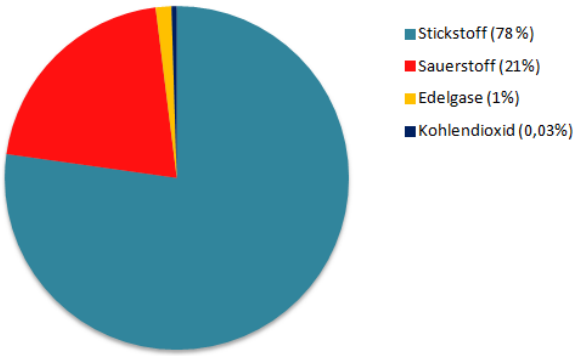


Abb. 23.3: Zusammensetzung der Luft.

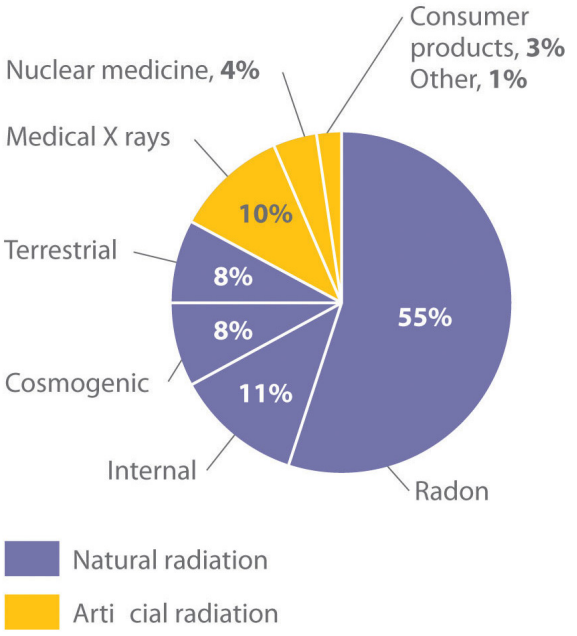


Abb. 23.4: Tortendiagramm, das zeigt welche radioaktive Belastung der Mensch ausgesetzt ist. Man erkennt, dass Radon mit einem erheblichen Anteil beiträgt[**?**].

the deficiency of radon-222 in the surface water of the northwest Pacific Ocean suggests a coefficient of vertical eddy diffusion as high as 120 square centimeters per second and a gas-exchange rate for carbon dioxide in surface water between 14 and 60 moles per square meter per year. Vertical profiles of the excess of radon-222 in near-bottom water of the South Atlantic give coefficients of vertical eddy diffusion ranging from 1.5 to more than 50 square centimeters per second.

Analysiert man die Bestandteile der Luft mit einem Massenspektrometer (Kapitel *Kerne*), stellt man fest, dass sie im Wesentlichen aus Stickstoff (N) Sauerstoff (O) und zu einem geringen Anteil aus Edelgasen (Ar) und Kohlendioxid (CO_2) besteht (Abb. 23.3). Andere Gase spielen aufgrund ihres geringen Vorkommens keine Rolle. Betrachtet man dagegen die Belastung des Menschen durch Ionisierende Strahlung stellt man fest, dass weder die kosmische Strahlung (8%) noch medizinische Untersuchungen (14%) den Hauptbetrag liefern, sondern mit 55% Radon (Abb. 23.4).

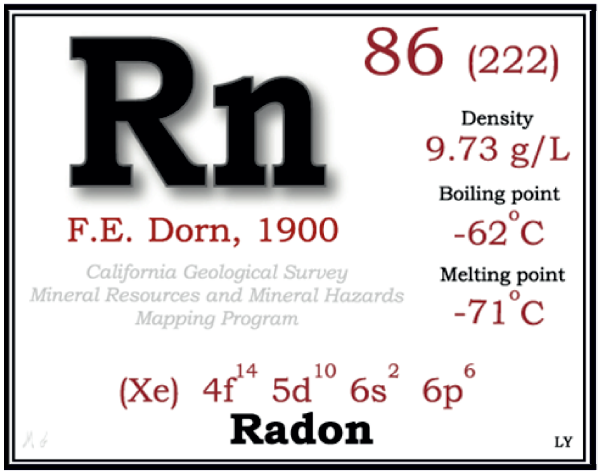


Abb. 23.5: Eintrag des Elements Radon im Periodensystem der Elemente [**?**].

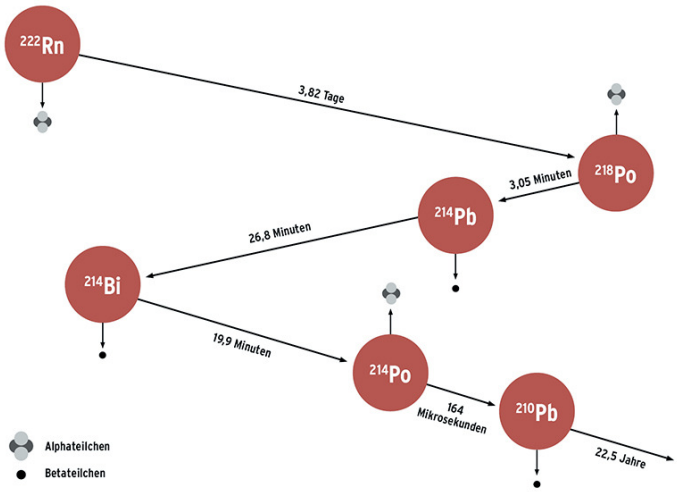


Abb. 23.6: Zerfallreihe von Rn-222 [**?**].

Radon (Abb. 23.5) wurde im Jahr 1900 von Friedrich Ernst Dorn entdeckt. Der ursprünglicher Name lautete Radium-Emanation[4] und aufgrund der Lichtemission auch Niton.[5] Seid 1923 heißt das Element Radon. 1908 konnte es durch Ramsay[6] und Whytlaw-Gray chemisch isoliert werden. Ein Blick in das Periodensystem der Elemente (Abb. 23.8) lässt erkennen, dass es sich bei Radon (Rn) um ein Edelgas handelt. Radon ist das schwerstes Edelgas,[7] gasförmig und chemisch nicht reaktiv. Mit unseren Sinnen kann man Radon nicht wahrnehmen, weil es farb-, geruch- und geschmacksneutral ist. Als

[4] *aus Radium Herausgehendes*

[5] lateinisch: nitens (leuchtend)

[6] The Nobel Prize in Chemistry 1904 was awarded to Sir William Ramsay *in recognition of his services in the discovery of the inert gaseous elements in air, and his determination of their place in the periodic system*

[7] Das 2006 entdeckte Oganesson (Og-118) [**?**] ist möglicherweise auch ein Edelgas. Die damit verbundenen Eigenschaften konnten aber bislang nicht überprüft werden.

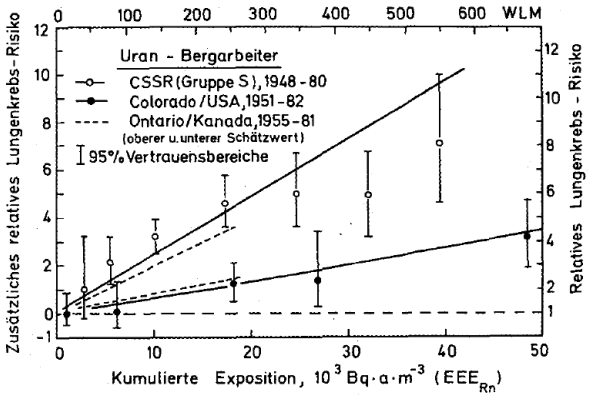


Abb. 23.7: Relatives Lungenkrebsrisiko bei Uranbergarbeitern in Abhängigkeit der kumulierten Exposition durch Radon-Zerfallsprodukte [**?**].

Bestandteil der Luft spielt das Gas keine wesentliche Rolle wie Abb. 23.3 gezeigt hat. Darüber hinaus stellt man fest, dass Radon nur in bestimmten Regionen als Bestandteil der Luft nachgewiesen wird, wie Abb. 23.9 anhand einer Übersichtsichtkarte von Deutschland demonstriert. Die Auflösung dieser scheinbar widersprüchlichen Angaben ergibt sich, wenn man die kritischen Landesteile mit den Lagerstätten von Uran in Thüringen und im Schwarzwald vergleicht.

Gesundheitsbelastung durch Radon

Wie die Weltgesundheitsorganisation (WHO) festgestellt hat, ist Radon verantwortlich für etwa 10% aller Fälle von Lungenkrebs. Abb. 23.7 verdeutlicht die Problematik am Beispiel von Grubenarbeitern. Das durch den radioaktiven Zerfall von Uran erzeugte Edelgas Radon diffundiert durch die unteren Gesteinsschichten in tiefliegende Kellerräume. Radon im Haushalt ist hauptsächlich Radon-222. Dieses Isotop wird in der U-238 Zerfallsreihe als sechstes Zerfallsprodukt erzeugt:

$$^{238}\mathrm{U} \rightarrow 8\,\alpha + 6\,\beta \rightarrow ^{206}\,\mathrm{Pb} \tag{23.4}$$

Radon ist das einzige Gas in der Zerfallsreihe. Radon-222 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3.8 Tagen in Polonium

$$^{222}_{86}\mathrm{Rn} \rightarrow ^{218}_{84}\,\mathrm{Po} + \alpha \tag{23.5}$$

und dann innerhalb kurzer Zeit in weiter radioaktive Kerne (Abb. 23.6). Ein anderes Radon-Isotop Rn-220 entsteht als Zerfallsprodukt der Thoriumreihe, hat eine deutlich geringere Konzentration und zerfällt innerhalb von 55 s über einen α-Zerfall.

Wie kommt es, dass sich innerhalb von kurzer Zeit eine hohe Radonbelastung im Haus ausbildet? Die Reaktionsgleichung kann wie folgt zusammengefasst werden. Es gibt eine radioaktive Quelle A, die außerhalb des Hauses Radon (Rn_a) mit einer Rate k_1 erzeugt. Ein Teil des Gases zerfällt mit einer gewissen Rate k_2 in andere nicht gasförmige radioaktive Elemente C_a. Radon diffundiert mit einer Rate k_D ins Gebäude ein und zerfällt

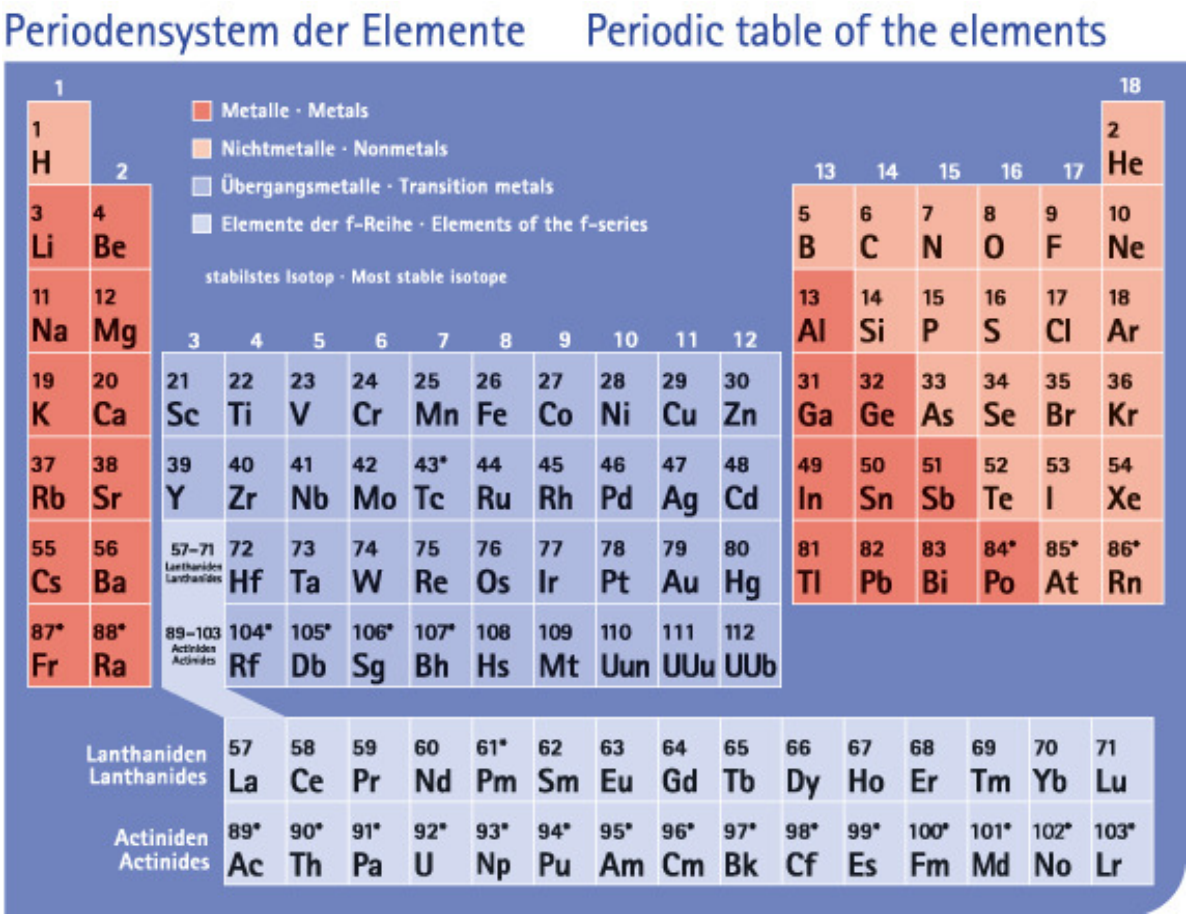


Abb. 23.8: Periodensystem der Elemente. Das Element Radon mit der Ordnungszahl 86 findet man in der Gruppe der Edelgase.

da mit einer Rate von ebenfalls k_2 in C_i.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \overset{k_1}{\rightarrow} & \mathrm{Rn}_a & \overset{k_D}{\rightarrow} & \mathrm{Rn}_i & \overset{k_2}{\rightarrow} & C_i \\ & & \downarrow k_2 & & & & \\ & & C_a & & & & \end{array} \tag{23.6}$$

Außerhalb des Gebäudes stellt sich ein Gleichgewicht von Erzeugung und Zerfall von Radon ein. Das liegt im wesentlichen an der enorm langen Halbwertszeit von Uran-238 Der Wert: k_2=0.181/Tag. Kombiniert man die Zerfallskonstanten, ergibt sich für die Radioaktivität von Radon im Gebäude

$$\frac{d}{dt}[C_i] = \frac{k_D \cdot k_1}{k_D + k_2} \cdot (1 - \exp(-k_2 \cdot t)) \tag{23.7}$$

Der Exponentialterm steigt zu Anfang schnell an und nivelliert dann aus. Tab. 23.1 demonstriert was passiert. Schon nach einer Halbwertszeit ist die Radioaktivität auf 50%

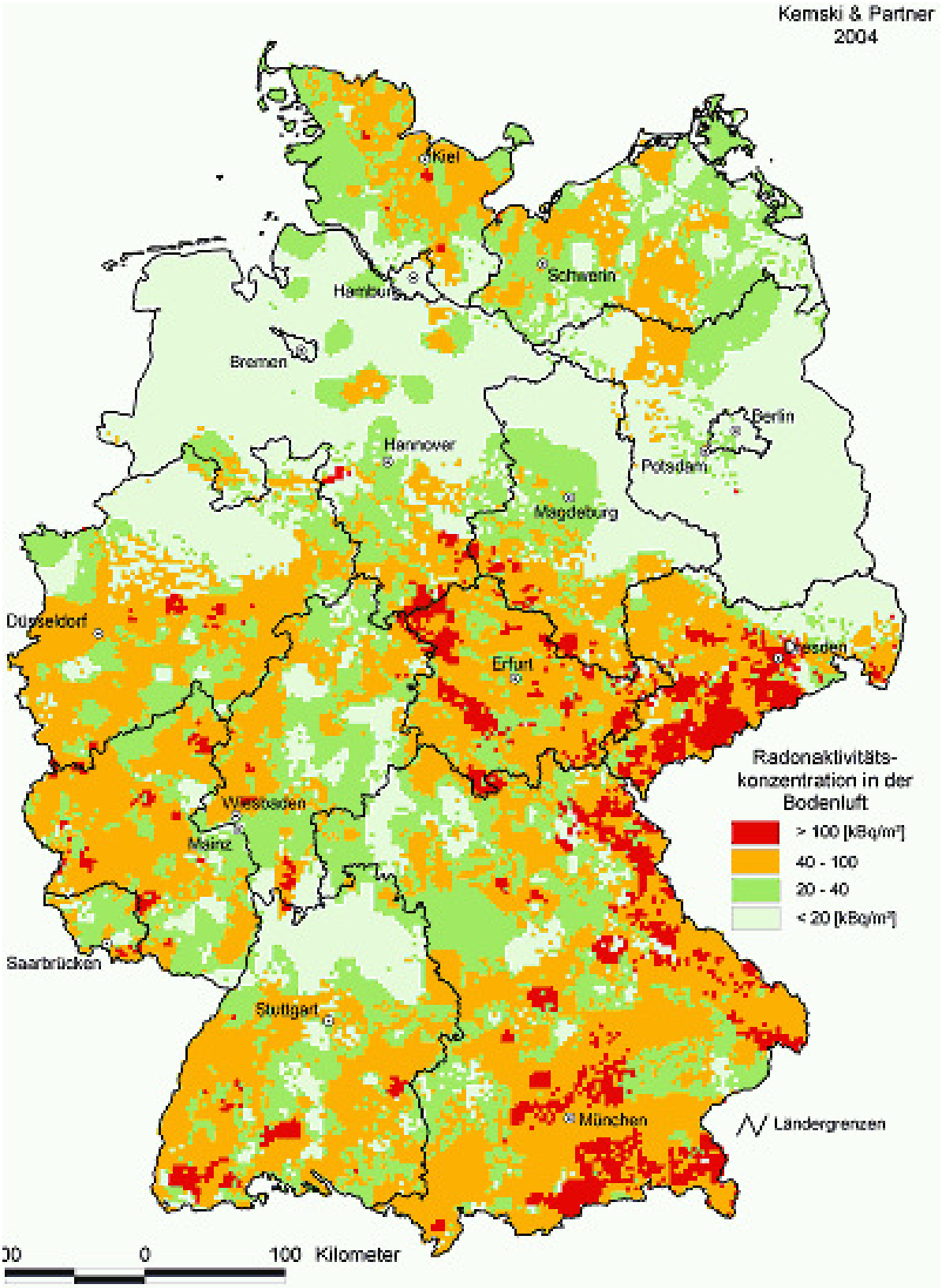


Abb. 23.9: Radioaktive Belastung der Bundesrepublik durch Radon [**?**].

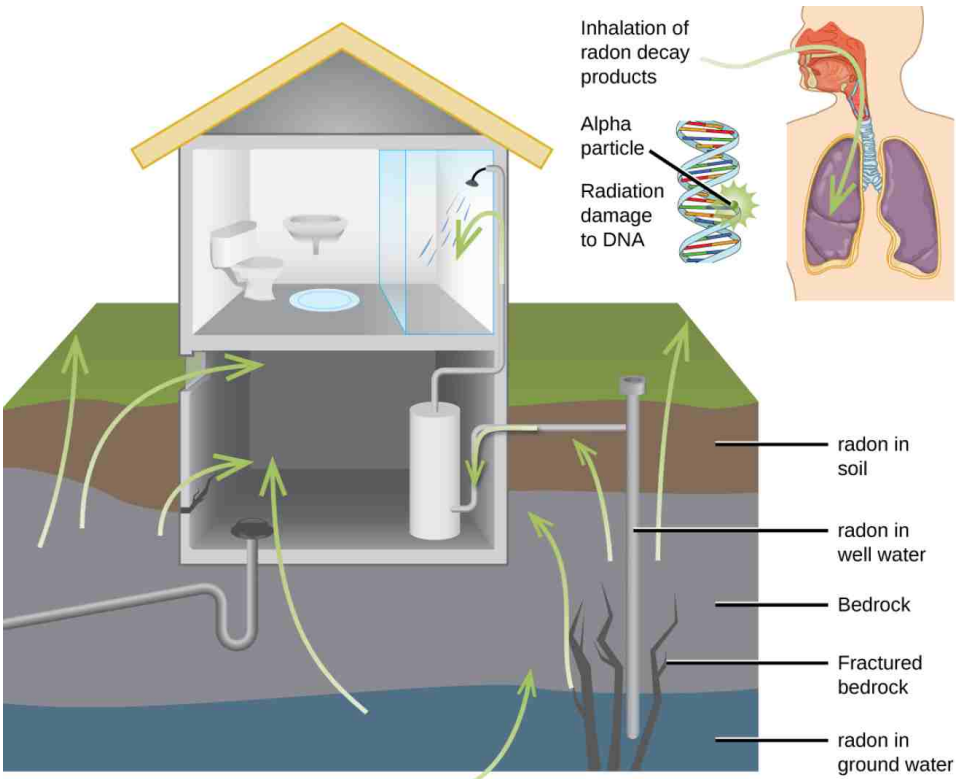


Abb. 23.10: Wege, auf denen radioaktives Radon in Gebäude eindringt [**?**].

des Endwerts angestiegen. Das bedeutet: Selbst wenn man alle paar Tage das Gebäude gut durchlüftet, stellt sich eine erhebliche Radonkonzentration ein. Die Strategie zur Vermeidung einer Radonbelastung kann also nur sein, das Eindringen in das Gebäude möglichst zu verhindern, also die Rate k_D klein zu halten. Wenn k_D gering gehalten werden kann, reduziert sich der Bruch auf $k_D \cdot k_1/k_2$. Ohne Schutzmaßnahmen ist $k_D \gg k_2$ und der Bruch reduziert sich auf die Rate k_1. Die Belastung hängt also wesentlich von der Konzentration von U-238 im Boden ab.

Abb. 23.10 zeigt, wie sich die Radonbelastung in einem Haus ausbreitet. Da es schwerer ist als alle anderen Luftbestandteile, verbleibt es dort und kann von Menschen eingeatmet werden. Aus demselben Grund sammelt es sich in der Lunge an. Die Zerfallszeit stellt sich also als das eigentliche Problem da. Würde der Zerfall innerhalb von Minuten stattfinden, würde sich Radon außerhalb der Häuser in das Metall Polonium umgewandelt und könnte nicht mehr eindringen. Eine erhöhte Belastung durch Radon könnte

Tage	0.96	1.9	3.8	7.6	15.3	30.6
Anzahl Halbwertszeiten	1/4	1/2	1	2	4	8
$1 - \exp(-k_2 \cdot t)$	0.16	0.29	0.5	0.75	0.94	0.996

Tab. 23.1: Zeitentwicklung der Radonbelastung im Gebäude.

möglicherweise durch den Bau von Niedrigenergiehäusern auftreten, wie der folgende Artikel belegt:

Radon concentration in conventional and new energy efficient multi-storey apartment houses: Results of survey in four Russian cities: During last decades, energy saving in new buildings became relevant within the energy efficiency strategies in various countries. Such energy efficient building characteristics as air tightening and low ventilation can compromise indoor air quality, in particular, increase radon concentration. In Russia, a significant part of the new buildings is the energy efficient multi storey apartment houses. The aim of this study is to assess the significance of possible radon concentration increase in new energy efficient buildings in comparison with typical conventional multi-storey houses of previous periods. Radon surveys were conducted in Russian cities Ekaterinburg, Chelyabinsk, Saint-Petersburg and Krasnodar. The radon measurements were carried out in 478 flats using CR-39 nuclear track detectors. Energy efficiency index (EEI) was assigned to each house. All buildings were divided into six main categories. The smallest average radon concentration was observed in panel and brick houses built according to standard projects of 1970-1990 (four-city average 21 Bq/m^3). The highest average radon concentration and EEI were observed in new energy efficient buildings (49 Bq/m^3). The trend of radon increase in buildings ranked with high EEI index is observed in all cities. The potential increase of radiation exposure in energy-efficient buildings should be analyzed taking into account the principles of radiological protection [**?**].

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
☐ geraten; ☐ unsicher; ☐ unentschieden; ☐ sicherlich richtig; ☐ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 1.1: Das Becquerel hat die Einheit[8]

(a) s

(b) W

(c) count

(d) 1/s

(e) J

Aufgabe 1.2: Ordnen Sie absteigend die Anteile der Luftbestandteile nach ihrer Häufigkeit![9]

(a) Argon, Stickstoff, Sauerstoff, Kohlendioxid

(b) Stickstoff, Sauerstoff, Argon, Kohlendioxid

(c) Sauerstoff, Stickstoff, Kohlendioxid, Argon

(d) Stickstoff, Sauerstoff, Kohlendioxid, Argon

(e) Kohlendioxid, Stickstoff, Argon, Sauerstoff

Aufgabe 1.3: Radon ist ein[10]

(a) Element.

(b) Molekül.

(c) radioaktives Zerfallsprodukt.

(d) Edelgas.

(e) radioaktiv.

Aufgabe 1.4: Welche Gebiete zeichnen sich durch eine hohe Radonbelastung aus?[11]

(a) Küsten

[8] Antwort: (d)
[9] Antwort: (b)
[10] Antwort: (a, c, d, e)
[11] Antwort: (d)

(b) Berge

(c) Braunkohlevorkommen

(d) Uranvorkommen

(e) Thermalheilbäder

Aufgabe 1.5: Auf welchem Weg dringt Radon vornehmlich in Gebäude ein?[12]

(a) Dach

(b) Fenster

(c) Keller

(d) Eingangstür

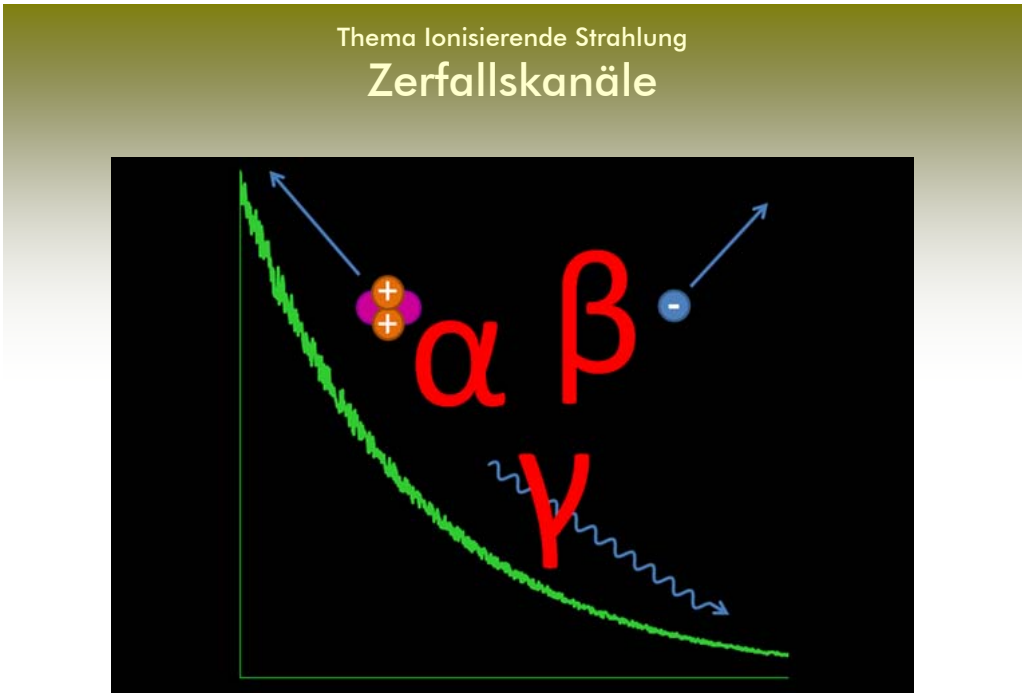
(e) Garten

[12] Antwort: (c)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welche Bedeutung hat das Element Radon für das Auftreten von Lungenkrebs?
2. Warum gibt es im Universum überhaupt noch Radon?
3. Angenommen die Halbwertszeit von Radon wäre mit einigen Sekunden deutlich geringer als normal (3.8 Tage). Was würde sich in Bezug auf die toxischen Eigenschaften ändern?

Zerfallskanäle



Radioactivity is shown to be accompanied by chemical changes in which new types of matter are being continually produced . . . The conclusion is drawn that these chemical changes must be subatomic in character.

Ernest Rutherford

Das sich im radioaktivem Zerfall Atome umwandeln, stellte das über mehr als ein Jahrhundert einwickelte Weltbild auf den Kopf. Man bedenke: Das altgriechische Wort Atom bedeutet UNTEILBAR. Heute wissen wir, dass Radioaktivität eine Eigenschaft der Atomkerne ist, wobei Energie und Teilchen in spontaner Weise zu emittieren. Die Zerfallsreaktionen, die in charakteristischer Weise erfolgen, erfordern es, sich mit dem Konzept der Isotope näher auseinander zu setzten. Es ist im Wesentlichen ein Attribut von Atomkernen mit bestimmter Anzahl an Protonen und Neutronen. Ein instabiler Kern zerfällt dabei über wenige Reaktionsschritte in eine stabilere Kernkonfiguration. Das Produkt eines radioaktiven Zerfallsprozesses kann selbst wieder instabil sein und der Zerfallsprozess setzt sich fort, bis ein stabiles Nuklid gebildet wird. Abb. 23.11 zeigt die Isotope der chemischen Elemente anhand ihrer Zerfallscharakteristik. Wie man erkennt, ist der überwiegende Teil der Isotope radioaktiv und zerfällt über bestimmte Zerfallswege, siehe auch Abb. 23.12.

1922

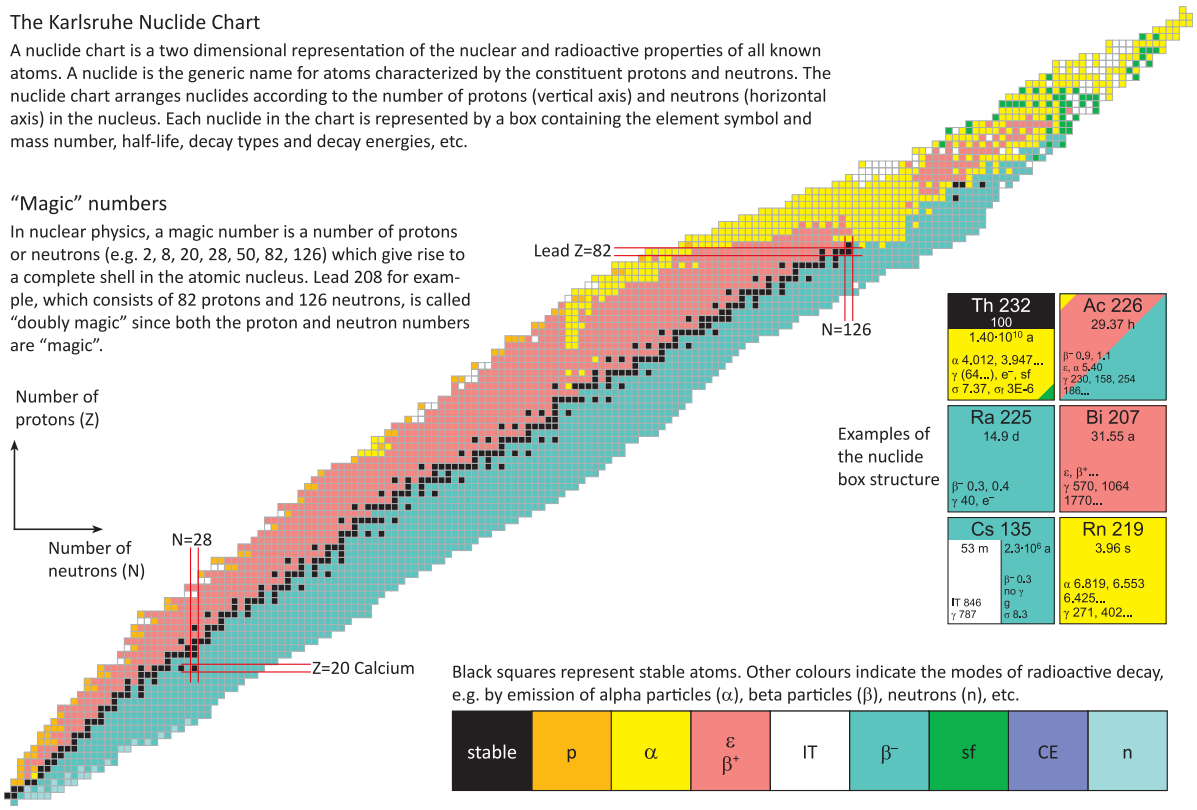


Abb. 23.11: Karlsruher Nuklidkarte [**?**]

Der radioaktiver Zerfall ist ein statistischer Prozess. Daher kann der genauer Zeitpunkt des Zerfallsereignis nicht vorhergesagt werden. Erst bei einer erheblichen Anzahl radioaktiver Kerne, in der Größenordnung eines Mols (n_{Avo}), können verlässliche Aussagen über die mittlere Lebensdauer der Kernen gemacht werden. Bei der Kernumwandlung freiwerdenden Kernbindungsenergien (siehe Kapitel *Einsteingleichung*) werden MeV freigesetzt. Bei der damit verbundenen charakteristische Strahlung radioaktiver Kerne unterscheidet man vier Zerfallsprozesse (Abb. 23.13):

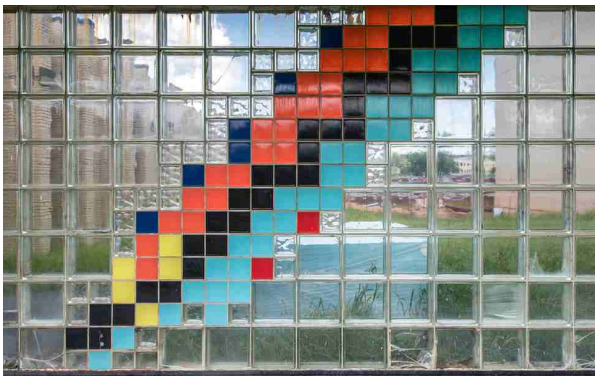


Abb. 23.12: Glasfront im Gebäude Strahlungsphysik von NIST.[a]

[a]NIST: National Institute of Standards and Technology

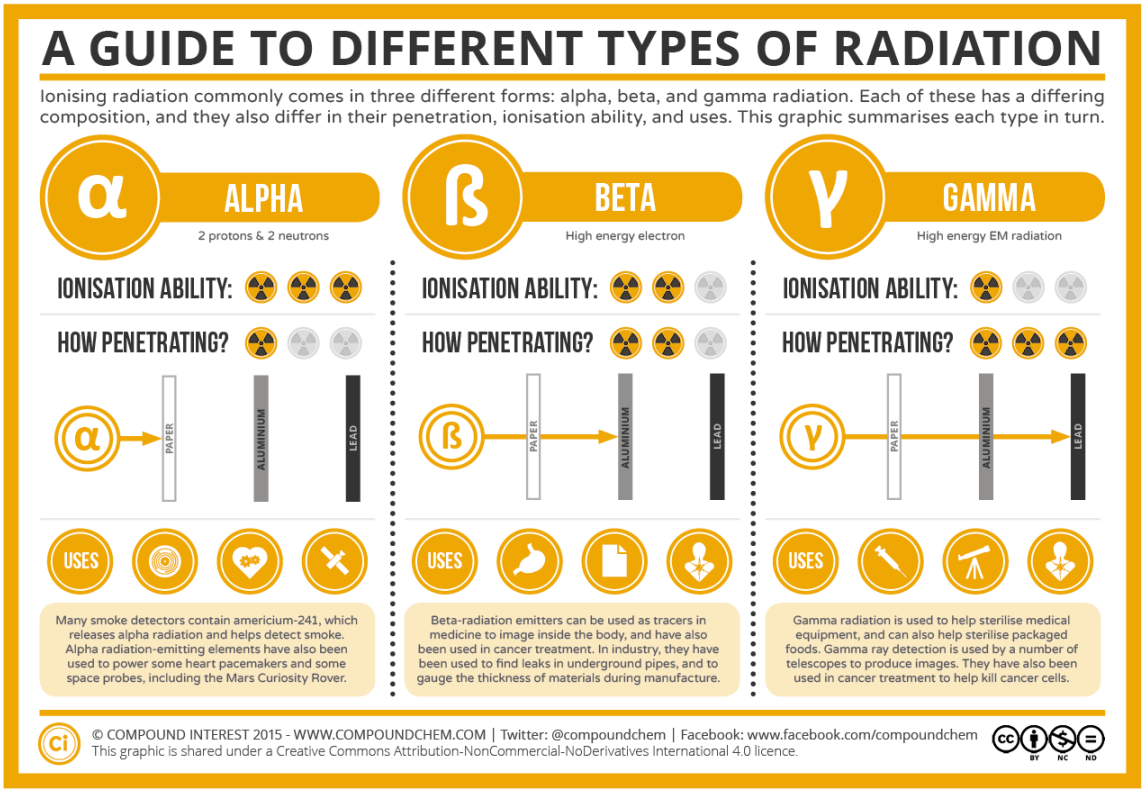


Abb. 23.13: Zusammenstellung der radioaktiven Zerfallsmechanismen und ihre speziellen Eigenschaften auch im Hinblick auf ihre Wechselwirkung mit Materie und ihre Anwendung.

Zerfallsart	Eimssionsprodukt	Ordnungszahl ΔZ	Neutronenzahl ΔN	Nulkeonenzahl ΔA
α	${}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}$	-2	-2	-4
β^-	Elektron e^-	+1	-1	0
β^-	Positron e^+	-1	+1	0
K-Einfang		-1	+1	0
n-Einfang		0	+1	+1
γ	Photon	0	0	0

Tab. 23.2: Übersicht über die radioaktiven Zerfallskanäle.

- α-Zerfall, wobei es sich bei α-Teilchen um positiv geladene Heliumkerne sind.

$$ {}^{A}_{Z}X \;\overset{\alpha}{\rightarrow}\; {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+} \tag{23.8} $$

- β^--Zerfall, wobei es sich bei β^--Teilchen um Elektronen handelt.

$$ {}^{A}_{Z}X \;\overset{\beta^-}{\rightarrow}\; {}^{A}_{Z+1}Y + e^- + \overline{\nu} \tag{23.9} $$

- β^+-Zerfall, wobei es sich bei β^+-Teilchen um Positronen handelt.

$$ {}^{A}_{Z}X \;\overset{\beta^+}{\rightarrow}\; {}^{A}_{Z-1}Y + e^+ + \nu \tag{23.10} $$

- γ-Zerfall, wobei es durch elektronische Relaxation zur Emission hochenergetischer Strahlung kommt.

$$ {}^{A}_{Z}X^* \;\overset{\gamma}{\rightarrow}\; {}^{A}_{Z}X + h \cdot \nu_\gamma \tag{23.11} $$

Die Tabelle 23.2 zeigt, wie sich die die verschiedenen Zerfallsprozesse auf die Nukleonenzahl A, die Ordnungszahl Z und die Anzahl der Neutronen N auswirkt. Abb. 23.14 fasst die unterschiedlichen radioaktiven Zerfallsprozesse zusammen.

Ein Charakteristikum radioaktiver Kerne ist ihrer Zerfallszeit. Für eine radioaktive Markierung von Gewebe (siehe Kapitel *Bildgebende Verfahren*) sind körpereigene Substanzen wie C, N, O am geeignetsten. Leider haben diese γ-Strahler so kurze Halbwertszeiten, dass man sie nur mit erheblichem technischen Aufwand (Ionenbeschleuniger) erzeugen kann. Bestimmte Nuklide können sich aufgrund ihrer chemischen Ähnlichkeit im Körper in bestimmten Organen anreichern. Beispiele sind:

- Jod-131 ($T_{1/2} \approx 8$ Tage) sammelt sich in der Schilddrüse.
- Caesium-137 ($T_{1/2} \approx 30$ Jahre) akkumuliert sich, da ähnlich zu Kalzium, in den Knochen
- Strontium-90 ($T_{1/2} \approx 29$ Jahre) akkumuliert sich, wie Caesium, ebenfalls in den Knochen.
- Plutonium-240 ($T_{1/2} \approx 6550$ Jahre) lagert sich in den Lungen an.

Erhaltungssätze gelten auch für den radioaktiven Zerfall. Dies sich daraus ergebenden Erkenntnisse gestatten es, Aussagen über Verlauf der Reaktion zu gewinnen:

- Energieerhaltung: Die Gesamtenergie der Nukleonen, die an der Reaktion beteiligt sind, ist gleich der Gesamtenergie der Reaktionsprodukte. Das bedeutet, dass die Ruheenergie vor dem Zerfall höher ist, als nach der Reaktion. Aus der Differenz kann die freigesetzte Energie berechnet werden.
- Impulserhaltung: Im Ruhesystem des radioaktiven Kerns ist der Gesamtimpuls nach dem Zerfall NULL.

- Ladungserhaltung: Im radioaktiven Zerfall ändert sich sich die Gesamtladung nicht.
- Baryonenerhaltung:[13] In einem radioaktiven Zerfall, in dem nur Protonen und Neutronen beteiligt sind, ändert sich die Anzahl der Nukleonen nicht.

Das Zerfallen des Atoms war in meiner Seele dem Zerfall der ganzen Welt gleich. Plötzlich fielen die dicksten Mauern. Alles wurde unsicher, wackelig und weich.

Wassily Kandinsky (1913)

Anwendungen^{4LP}

Praktisch betrachtet sind Kernreaktionen von erheblichem Nutzen in der Industrie, der Medizin, und andern Bereichen: Radioaktive Isotope, die dieselben chemischen Eigenschaften wie ein bestimmtes Element haben, aber unter Aussendung von γ-Photonen zerfallen, nutzt man als Tracer. Diese Solche Isotope lassen sich anhand ihrer charakteristischen Strahlung und ihrer Halbwertszeit erkennen. Beispielsweise zerfällt das Phosphor-Isotop ^{32}P mit einer Halbwertszeit von 14 Tagen über einen β-Zerfall. Man kann dies nutzen, um den Eintrag von Düngemitteln auf das Pflanzenwachstum zu bestimmen. Weiter werden Tracer zur Analyse der Blutzirkulation oder Flüssigkeits-Durchflussraten verwendet. Anstelle von Röntgenstrahlen können die energiereicheren γ-Strahlen radioaktiver Isotope genutzt werden, um Defekten in Metallen zu entdecken, oder zur Behandlung von Erkrankungen, zur Konservierung von Lebensmitteln oder um eine Mutation bei Nutzpflanzen zu erreichen.

Ein Beispiel aus der Geologie

Radioaktive Zerfälle können erklären, warum die Erde und andere Planeten bislang noch nicht vollständig abgekühlt ist und deswegen teils auch magnetische Felder aufweisen [**? ?**]. Radioaktive Datierung (Kapitel *Kerne*) spielt dabei eine wichtige Rolle in der Analyse. In ihrer Entwicklung durchlief die Erde eine Phase in der die Oberflächentemperatur die Schmelztemperatur von Gestein unterschritt und dann erstarrte. Aufgrund einer U-238 Datierung geschah dies vor $3.5 \cdot 10^9$ Jahren. Die Temperatur der Erde bei ihrer Formung kann aus der Gravitationsenergie abgeschätzt werden. Eine Analyse des Wärmetransports ergibt, dass Gestein sich nach 10^9 Jahren verfestigt. Damit ergibt sich ein Alter der Erde von $4.5 \cdot 10^9$ Jahren. Allerdings stellt man fest, dass die heutige Kerntemperatur der Erde höher ist als über thermodynamische Überlegungen berechnet. Die momentane Temperatur hätte sich schon nach 10^9 Jahren einstellen müssen. Weiter zeigen seismologische Untersuchungen, dass der Erdkern in einer flüssigen Phase

[13] *Lexikon:* Die Baryonenzahl B_q bezeichnet eine Erhaltungsgröße aus der Welt der Elementarteilchen. B_q ist die Differenz der Anzahl an Quarks n_q und Antiquarks $n_{\bar{q}}$: $B_q = (n_q - n_{\bar{q}})/3$.[14] Der Baryonen-Erhaltungssatz erklärt, warum Materie stabil ist: Spontane Zerfall führen aufgrund der Energieerhaltung stets zu leichteren Teilchen. Das leichteste Baryon ist das Proton, von dem man annimmt, dass es stabil ist. Eine untere Schätzung für die Lebensdauer ist 10^{32} Jahre.

Isotop	Halbwertszeit
$^{232}_{90}$Th	$14 \cdot 10^9$ a
$^{235}_{92}$U	$0.7 \cdot 10^9$ a
$^{238}_{92}$U	$4.5 \cdot 10^9$ a
$^{237}_{93}$Np	$21 \cdot 10^6$ a

Tab. 23.3: Beispiele für Halbwertszeiten langlebiger Nuklide.

vorliegt. Scherwellen und transversale Wellen, die den flüssigen Erdkern nicht durchdringen können, werden nicht beobachtet, während Kompressions- und longitudinale Wellen den Erdkern durchqueren. Dies ist ein Indiz für darauf, dass der Erdkern in einer flüssigen Phase vorliegt. Anhand von Messergebnissen kann man die Kerntemperatur der Erde mit etwa 6000 K abschätzen. Die Ursache für die Aufheizung des Erdkerns sind Kernzerfälle von U-238 und K-40. Die Halbwertszeiten dieser Isotope sind

- Isotop U-238: $T_{1/2}^{U238} = 4.47 \cdot 10^9$ a
- Isotop K-40: $T_{1/2}^{K40} = 1.28 \cdot 10^9$ a

Die Halbwertszeiten liegen in der Größenordnung des Erdalter und die Nuklide und radioaktive Tochterkerne tragen deshalb immer noch zum Energiehaushalt des Erdkerns bei. Die Energieabgabe beim Zerfall der Nuklide ist gering, aber die Menge an radioaktivem Material und der ineffiziente Abtransport der freigesetzten Wärme über Konvektion (flüssiger Bereich des Erdkerns) und Wärmeleitung (fester Bereich des Erdkruste) (Abb. 23.15) sorgt für eine hohe Temperatur im Zentrum der Erde. Es sei noch angemerkt, dass unsere Reserven an Helium aus dem α-Zerfall der Radionuklide im Erdkern stammen. Helium in der Atmosphäre entweicht aufgrund seiner hohen thermischen Geschwindigkeit in einer für die Geologie kurzen Zeitspanne in den Weltraum.

Zerfallsreihen

Bei der Entstehung des Sonnensystems formten sich langlebige radioaktive Nuklide durch eine Supernova Explosion in unmittelbarer Nähe [**?**]. Die meisten der so entstandenen Nukleide haben nur geringe Halbwertszeiten und im Laufe der Zeit zerfallen. Drei Isotope, siehe Tabelle 23.3 zeichnen sich durch Halbwertszeiten aus, die vergleichbar sind zum Alter des Sonnensystems von $4.6 \cdot 10^9$ Jahre. Aus diesem Grund gibt drei unterschiedliche Zerfallspfade für die Umwandlung radioaktiver Elemente. Hinzu kommt eine künstliche erzeugte Zerfallskette, die mit dem Isotop Neptunium-327 beginnt. Das bei der Entstehung der Erde vorhandene $^{237}_{93}$Np ist inzwischen zerfallen ($2.14 \cdot 10^6$ Jahre). Anfangsnuklide wie $^{241}_{94}$Pu, $^{237}_{93}$Np und $^{237}_{92}$U entstehen beim Betrieb von Kernreaktoren. Das es nur vier Zerfallsreihen gibt, kann auf den α-Zerfall zurückgeführt werden, da bei dieser Reaktion die Anzahl der Kernbausteine um VIER abnimmt. Jede der Zerfallsreihen erzeugt dadurch einen charakteristischen Fingerabdruck. Der schließlich erreichte stabile Kern ist entweder Wismut-209 oder ein Bleiisotop (Abb. 23.16)

- Thorium-Reihe $^{232}_{90}\mathrm{Th} \Longrightarrow ^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ (Abb. 23.17a)
- Actinium-Reihe $^{235}_{92}\mathrm{U} \Longrightarrow ^{207}_{82}\mathrm{Pb}$ (Abb. 23.17b)
- Neptunium-Reihe $^{237}_{93}\mathrm{Np} \Longrightarrow ^{209}_{83}\mathrm{Bi}$ (Abb. 23.17c)
- Uran-Radium-Reihe $^{238}_{92}\mathrm{U} \Longrightarrow ^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ (Abb. 23.17d)

Es ist interessant, sich die Uran-238 Zerfallsreihe (Abb. 23.17d) einmal genauer anzuschauen. Sie gibt beispielhaft Auskunft darüber, wie vielfältig dieser radioaktive Zerfall in unser Leben eingreift! Einige der Zerfallsprodukte sich medizinisch höchst relevant:

- Radium: Frauen verwendeten mit Radium verseuchte Pinselspitzen, um Zifferblätter und andere Gegenstände, die im Dunklen leuchten sollten, herzustellen. Als die USA 1917 in den Ersten Weltkrieg eintraten, wurde die Produktion deutlich erhöht. Die Armee benötigte leuchtende Instrumententafeln für die Armaturen der Flugzeuge und Panzer (siehe auch Kapitel *Kerne*).
- Radon: Das Element Radon (siehe Abschnitt *Radon*) ist die Hauptquelle der Belastung des Menschen durch natürliche Radioaktivität. Radon ist ein Zerfallsprodukt des Uran, dass in gasförmigem Zustand vorkommt. Dadurch kann es uranhaltiges Gestein verlassen und in die Atmosphäre gelangen. Seine Fähigkeit, aus unterirdischen vulkanischen und granitbasierten Gesteinen in die uns umgebende Luft einzudringen, führt zu einer hohen Radonbelastung insbesondere in Gebieten mit Uranvorkommen. Rutherford[15] (Kapitel *Der Weg zum Atom*) hat die Zerfälle von Radium und Radon untersucht. Das Ergebnis seiner Messungen zeigt Abb. 23.18. Die beiden sich kreuzenden Kurven auf dem Familienwappen stammen aus seiner Abhandlung über Radioaktivität [**?**].
- Radioaktives Polonium Po-210 hat eine Halbwertszeit von 138 Tagen, so dass ein Teil der Ereignisse auf die Radioaktivität von Polonium zurückgeführt werden kann. Ein erheblicher Anteil des aufgenommenen Poloniums wird unmittelbar wieder ausgeschieden. Doch über den Blutstrom erreicht ein Teil der Substanz Gewebe und Organe. Nach Angaben des Bundesamts für Strahlenschutz reicht weniger als $0.1\,\mu$g für einen tödlichen Giftanschlag aus. Hinzu kommt, dass es sich beim Element Polonium um ein giftiges Schwermetall handelt.

Use of polonium 210 would pose risk to spys killer: If substantial amounts of polonium 210 were used to poison Alexander Litvinenko, whoever did it presumably had access to a high-level nuclear laboratory and put himself at risk in carrying out the assassination, experts said Friday. Polonium 210 is highly radioactive and toxic. By weight, it is about 250 million times as toxic as cyanide, so a particle smaller than a dust mite - too small to see - could be fatal. Handling it is dangerous and requires special equipment. It is also extremely rare in nature, although it occurs in uranium ores and has been found in minute quantities in

[15] The Nobel Prize in Chemistry 1908 was awarded to Ernest Rutherford *for his investigations into the disintegration of the elements, and the chemistry of radioactive substances.*

tobacco and other plants. But making the *significant quantities* described by the British Health Protection Agency would require a nuclear laboratory that could bombard bismuth with neutrons. *To most chemists, this is astonishing,* said Andrea Sella, a lecturer in inorganic chemistry at London University College. *This is not available commercially. This is not the kind of weapon that any kind of amateur could construct,* he added. *It would require real resources to do it.* Polonium 210 does its damage by emitting alpha particles, which have enough energy to tear apart the genetic machinery of cells. It gives off 5 000 times as many such particles as the same amount of radium. Because it is so radioactive, it creates its own heat, and tiny amounts have been implanted in satellites as a source of heat and electricity. It was also used in the Soviet Union Lunokhod moon rovers. It presumably entered Litvinenkos body through food or drink, or by being inhaled, or through a wound.

Educated guess

Für die Zerfallskanäle radioaktiver Kerne kann man sich folgende Faustregeln merken:

- Der radioaktiver Zerfall schwerer Kerne erfolgt über einen α-Zerfall und führt zu einem energetisch stabilerem Nukleon.

- Der radioaktiver Zerfall leichter Kerne kann in zweierlei Weise erfolgen:
  1. Bei einer erhöhten Anzahl an Neutronen wandelt sich ein Neutron in einem β^--Zerfall in ein Proton um.
  2. Bei einer geringeren Anzahl an Neutronen wandelt sich Proton in einem β^+-Zerfall in ein Neutron um.

Bei der Betrachtung der Zerfallsreihen (Abb. 23.17) fällt auf, dass einige Kerne sowohl über α- als auch über einen β-Zerfall relaxieren. Beispielsweise ergibt sich für ${}^{212}_{81}\mathrm{Bi}$, dass diese Kern zu 66.3% in einem β-Zerfall in ${}^{84}_{212}\mathrm{Po}$ und zu 33.7% über einen α-Zerfall in ${}^{208}_{81}\mathrm{Tl}$ zerfällt.

Damit stellt sich die Frage: Ist das Proton stabil? NEIN! Die Theorie sagt voraus, dass das Proton mit einer Halbwertszeit von 10^{31} Jahren zerfällt:

$$p^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ \tag{23.12}$$
$$p^+ \rightarrow K^0 + \mu^+ \tag{23.13}$$

Welche Folgen hätte der experimentelle Nachweis? Materie könnte vollständig aus dem Universum verschwinden.

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu_e} \tag{23.14}$$
$$p^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ \tag{23.15}$$
$$\pi^0 \rightarrow 2\,\gamma \tag{23.16}$$
$$e^+ + e^+ \rightarrow \gamma \tag{23.17}$$

Der Protonzerfall ist eine Vorhersage der Großen Vereinheitlichten Theorie (GUT). Derzeit existieren keine experimentellen Hinweise, die die Hypothese des Protonenzerfalls stützen.

α-, β- and γ-activities in bottled natural mineral water from Romania [?]: The activity concentrations of ^{238}U, ^{226}Ra and ^{232}Th were analysed in eleven natural mineral waters sources, non-carbonated ones from Northern Romania. The samples were collected for a period of three years. The waters originate from a volcanic aquifer containing carbonate rocks. It was found that the concentration of uranium isotope ^{238}U varied in the ranges 0.07-0.48 Bq/ℓ. The activity ratio between uranium isotope ^{238}U and radium isotope ^{226}Ra was between 0.03-1.05. The calculated doses for the analysed samples are in the range 8.84-40.75 μSv/year, with an average value of 20.08 μSv/year,[16] where the reference level of 100 μSv/year is the committed effective dose recommended by WHO and the EU Council.

[16] Sv: In der Einheit Sievert messen Mediziner und Biologen, welcher radioaktive Belastung ein Organismus ausgesetzt ist. Dabei muss man die unterschiedlichen Strahlungsarten und ihrer Wechselwirkung mit Gewebe berücksichtigen. Nach Messung der Energiedosis (Einheit Gray) wird der Wert mit einer Zahl multipliziert, die die Wirkung der betrachteten Strahlung wichtet. Der Wichtungsfaktor beträgt für γ- und β-Strahlung EINS, für α- und Neutronenstrahlung kann der Faktor bis zu 20 betragen.

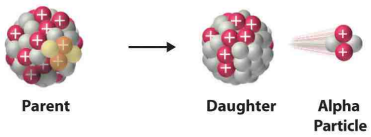
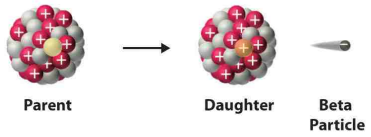
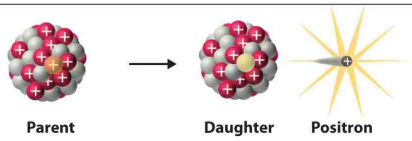
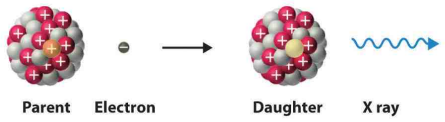
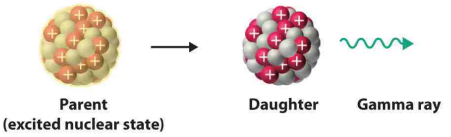
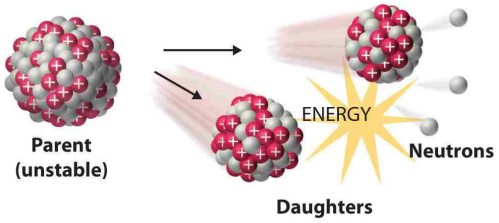
Decay Type	Radiation Emitted	Generic Equation	Model
Alpha decay	${}^{4}_{2}\alpha$	${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X' + {}^{4}_{2}\alpha$	
Beta decay	${}^{0}_{-1}\beta$	${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}X' + {}^{0}_{-1}\beta$	
Positron emission	${}^{0}_{+1}\beta$	${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}X' + {}^{0}_{+1}\beta$	
Electron capture	X rays	${}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}X' + X\ ray$	
Gamma emission	${}^{0}_{0}\gamma$	${}^{A}_{Z}X^{*} \xrightarrow{Relaxation} {}^{A}_{Z}X' + {}^{0}_{0}\gamma$	
Spontaneous fission	Neutrons	${}^{A+B+C}_{Z+Y}X \longrightarrow {}^{A}_{Z}X' + {}^{B}_{Y}X' + C\,{}^{1}_{0}n$	

Abb. 23.14: Nukleare Zerfallskanäle [**?**].

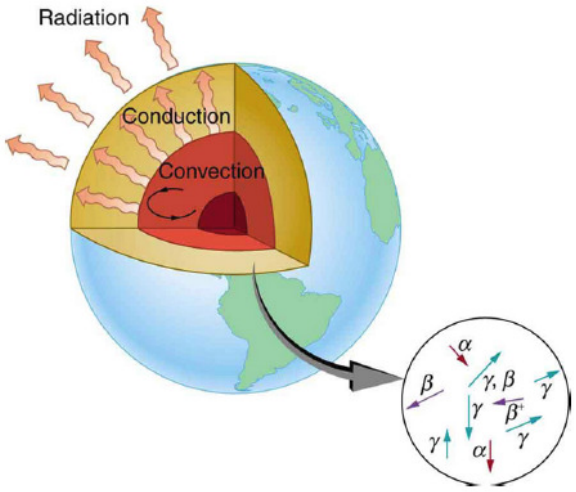


Abb. 23.15: Das Erdzentrum kühlt in infolge von Wärmetransport ab. Die Prozesse sind Konvektion in den flüssigen Bereichen und Wärmeleitung im festen Gestein. An der Oberfläche wird die Wärmeenergie in den kälteren Weltraum abstrahlt. Angesichts des Alters und ihrer Anfangstemperatur sollte die Erde inzwischen auf eine niedrigere Temperatur abgekühlt sein. Der Kernzerfall im Erdinneren setzt Energie frei und verlangsamt dadurch den Abkühlungsprozess. Dies sorgt dafür, dass das Innere immer noch flüssig ist [**?**].

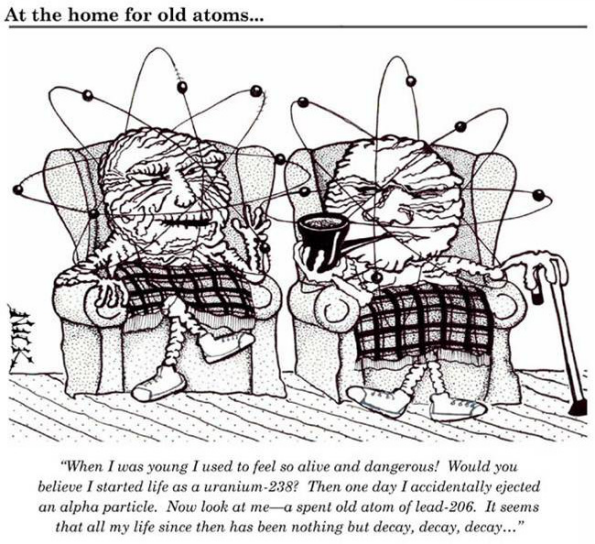


Abb. 23.16: Cartoon by Nick Downes: Als ich noch jung war... [**?**].

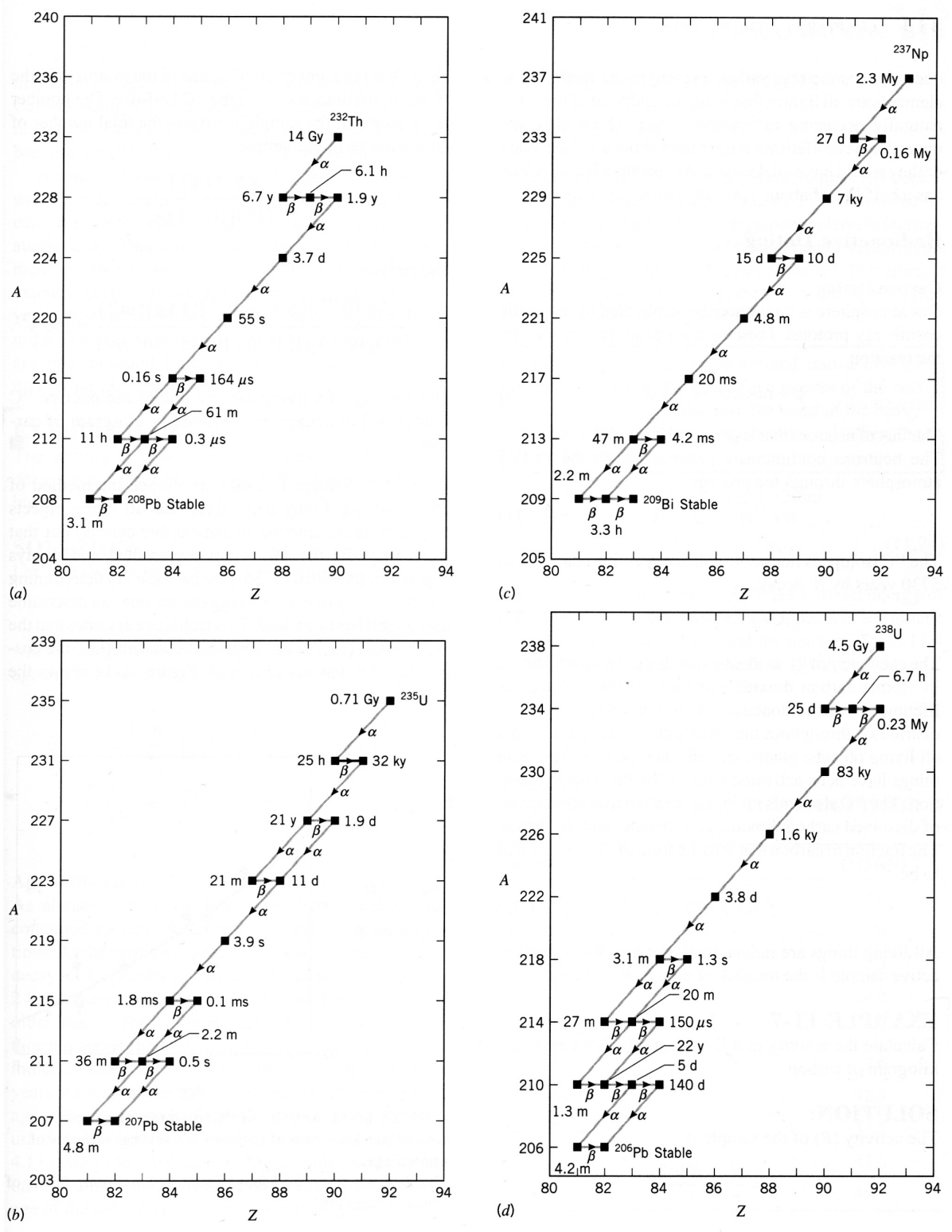


Abb. 23.17: a: Thorium Zerfallsreihe (Th-232→Pb-208); b: Uran-Actinium Zerfallsreihe (U-235→Pb-207); c: Neptunium Zerfallsreihe (Np-237→Bi-209); d: Uran-Radium Zerfallsreihe (U-238→Pb-206) [**?**]

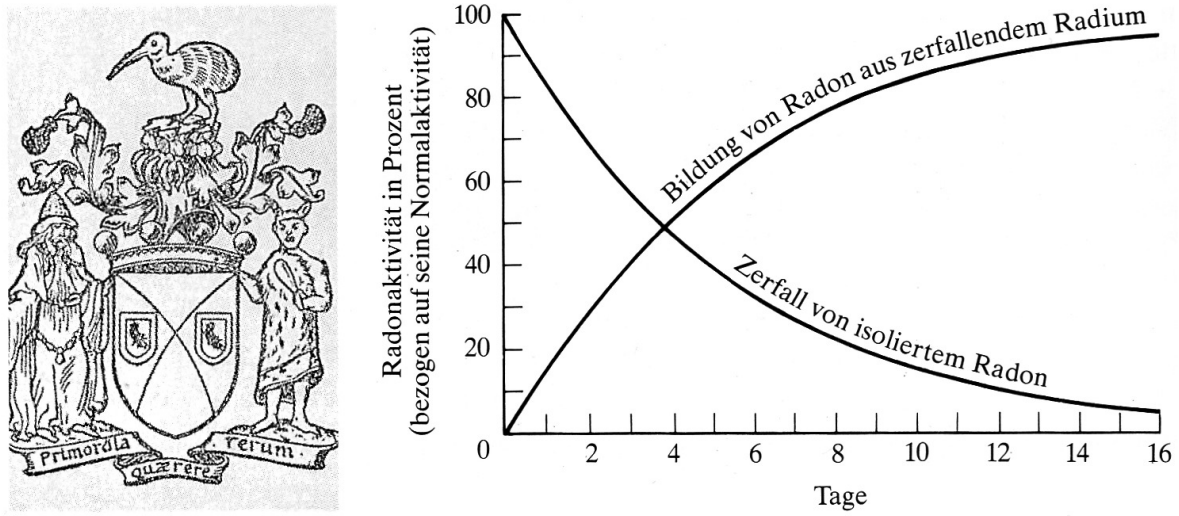


Abb. 23.18: Die Zerfallsdynamik von Radon wird im Wappen von Lord Rutherford wiedergegeben [**?**].



Abb. 23.19: Bericht in der Tagesschau über die Reaktorkatastrophe von Tschernobyl.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
☐ geraten; ☐ unsicher; ☐ unentschieden; ☐ sicherlich richtig; ☐ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 2.1: Am 26. April 1986 ereignete sich der Reaktorunfall von Tschernobyl (Abb. 23.19), bei dem erhebliche Mengen an radioaktiven Stoffen freigesetzt wurden. Das Photo in Abb. 23.20 zeigt den Reaktorbereich wenige Tage nach der Katastrophe. Unter anderem gelangte das radioaktive Isotop Jod-131 über die Milch von verseuchten Kühen in die Nahrungskette. Milchprodukte stellten damals eine potenziell radioaktive Belastung dar. Wie lange dauerte es, bis der Anteil von J-131 in der Nahrung auf einen Wert von 1% absank?

Die Halbwertszeit von Jod-131 beträgt $T_{1/2}$=8 Tage. Das ergibt eine Zerfallskonstante von

$$\lambda = \frac{\ln 2}{8\,\mathrm{d}} = \frac{0.693}{8\,\mathrm{d}} = 0.087\,\mathrm{d}^{-1}$$

Eine Absenkung der Belastung auf 1% bedeutet

$$\begin{aligned}
\frac{N(t)}{N_0} &= \frac{1}{100} = \exp(-\lambda \cdot t) \\
100 &= \exp(\lambda \cdot t) \\
t &= \frac{\ln 100}{\lambda} \\
t &= \frac{\ln 100}{0.087\,\mathrm{d}^{-1}} \\
t &= \frac{4.6}{0.087\,\mathrm{d}^{-1}} \\
t &= 52.9\,\mathrm{d}
\end{aligned}$$

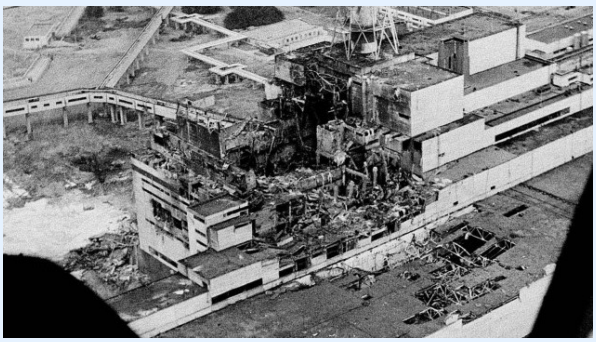


Abb. 23.20: Photo des Reaktors in Tschernobyl kurz nach der Reaktorkatastrophe am 26.4.1986.

Es dauert also etwa 2 Monate, bis die Radioaktivität der Milch auf einen vielleicht akzeptablen Wert absinkt.

Aufgabe 2.2: Welches Teilchen ist notwendig, um $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ in $^{30}_{15}\mathrm{P}$ umzuwandeln?[17]

(a) Ein Neutron.

(b) Ein Proton

(c) Ein Deuteron

(d) Ein α-Teilchen

Aufgabe 2.3: Ausgehend von Radium endet der radioaktive Zerfallsprozess beim Element[18]

(a) Radium A

(b) Radon

(c) Blei

(d) Radium B

Aufgabe 2.4: Radioaktivität ist ein Phänomen aufgrund[19]

(a) einer stabilen Elektronensystems.

(b) einer instabilen Elektronensystems.

(c) eines stabilen Kerns.

(d) eines instabilen Kerns.

Aufgabe 2.5: In einem radioaktiven Zerfall wir ein Elektron emittiert. Das Elektron stammt[20]

[17] Antwort: (d)
[18] Antwort (c)
[19] Antwort: (d)
[20] Antwort: (a)

(a) aus dem Kern.

(b) aus der innersten Schale der Elektronenhülle.

(c) aus dem Valenzorbital.

(d) einem Elektronenzustand mit Hauptquantenzahl n=1.

Aufgabe 2.6: Jedes Atom, das in einem radioaktiven Zerfall ein α- oder β-Teilchen emittiert,[21]

(a) wird zu einem Atom eines anderen Elements.

(b) kann zu einem Atom eines anderen Elements werden.

(c) wird zu einem anderen Isotop desselben Elements.

(d) erhöht seine Masse.

Aufgabe 2.7: Radioaktive Stoffe emittieren keine[22]

(a) Elektronen

(b) Heliumkerne

(c) Positronen

(d) Protonen

(e) Heliumatome

Aufgabe 2.8: Das beim β-Zerfall emittierte Elektron[23]

(a) stammt aus den inneren Schalen der Atome.

(b) sind freie Elektronen im Kern.

(c) stammt aus dem Zerfall eines Neutrons im Kern.

(d) aufgrund der Emission eines Photon durch den Kern.

(e) entsteht bei einem α-Zerfalls eines Kerns.

Aufgabe 2.9: Welche der folgenden Aussagen ist richtig?[24]

(a) β-Strahlen sind eigentlich Kathodenstrahlen.

(b) γ-Strahlen sind hochenergetische Neutronen

[21] Antwort: (a)
[22] Antwort: (e)
[23] Antwort: (c)
[24] Antwort: (a)

(c) α-Teilchen sind einfach ionisierte Heliumatome

(d) Protonen und Neutronen haben die gleiche Masse

(e) Stimmt alles nicht!

Aufgabe 2.10: Welche der folgenden Aussagen treffen auf ionisierende Strahlung zu?[25]

(a) Ionisierende Strahlung ist Energie, die von einem instabilen Atom abgegeben wird, um sich zu stabilisieren.

(b) Ionisierende Strahlung wird in vielen beruflichen Umgebungen, wie Arztpraxen oder Produktionsstätten verwendet.

(c) Ionisierende Strahlung hat genügend Energie, um Elektronen von Atomen abzulösen.

(d) Stimmt alles!

(e) Stimmt alles nicht!

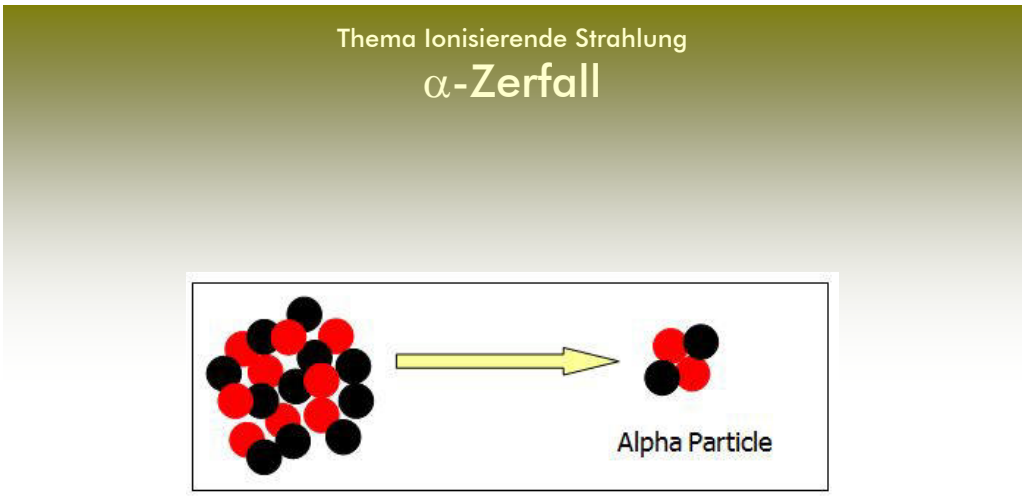
Aufgabe 2.11: Erfüllt die Reaktion ${}^{222}_{8}8\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{221}_{87}\mathrm{Fr} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$ den Ladungserhaltungssatz und ist die Anzahl der Nukleonen erhalten?[26]

[25] Antwort: (d)
[26] Antwort: Sowohl als auch

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was bedeutet es, wenn man sagt, eine Substanz sei radioaktiv?
2. Warum gibt es radioaktive Kerne?
3. Welchen Ausschnitt des Periodensystems zeigt Abb. 23.12?
4. Wie viele Zerfallsreihen gibt es?
5. Welche der Zerfallsreihen nennt man prähistorisch und warum?
6. Der radioaktive Kern $^{226}_{88}$Ra hat eine Halbwertszeit von etwa $1.6 \cdot 10^3$ Jahren. Das Sonnensystem ist etwa 5 Milliarden Jahre alt. Warum gibt es dann noch solche Kerne?
7. Können Elektronen aus der Atomhülle radioaktive Reaktionen auslösen?
8. Welche Charakteristika weisen darauf hin, dass es sich bei der Radioaktivität um ein kernphysikalisches Phänomen handelt?
9. Warum ist Helium ein Teil der Erdatmosphäre?
10. Warum ist der Erdkern flüssig?
11. Ist die Ordnungszahl des Tochterkerns bei β^--Zerfall kleiner oder größer als die des Ausgangsisotops?
12. Die Brennelemente eines Kernreaktors müssen nach einem längeren Betrieb getauscht werden. Wie verhält sich die Masse der abgebrannten mit der der damals neu eingebauten Brennstäbe?

Alpha-Zerfall



The dilemma that Rutherford confronted was stark: Scattering experiments with alpha particles from radioactive thorium C (nowadays known as polonium-212) confirmed the validity of the repulsive Coulomb potential in uranium up to a height of at least 8.57 MeV. On the other hand, uranium-238 was known to emit alpha particles of less than half that energy (4.2 MeV), which posed a conundrum if the particles had to pass over the top of the Coulomb barrier to emerge from the nuclear interior. The tortured theories that had been proposed to account for this paradox vanished almost overnight when Gamow, on 29 July 1928, and, independently, Ronald Gurney and Edward Condon, on the next day, submitted their quantum mechanical explanations based on the tunnel effect [**?**].

Nachweis des α-Teilchens

Die Bindungskräfte im Kern sind kurzreichweitig und die Gesamtbindungsenergie ist in etwa proportional der Anzahl der Nukleonen. Die abstoßende Coulombkraft zwischen den Protonen ist dagegen nicht räumlich begrenzt und skaliert mit Z^2. Was hat das zur Folge? Kerne, die mehr als 210 Nukleonen haben sind so groß, dass die Starke Wechselwirkung die repulsiven Kräfte nicht mehr kompensieren können. Der Kern relaxiert und

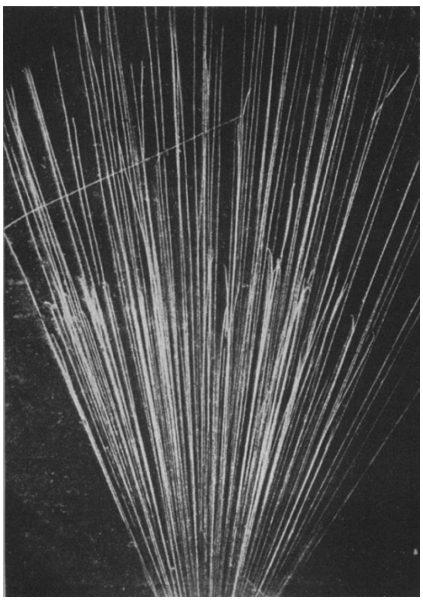


Abb. 23.21: Kernumwandlung von Stickstoff. Im Augenblick des Zusammenstoßes ist die Reichweite des α-Teilchens nur noch 2.4 cm. Die Reichweite des herausgeschleuderten Protons betragt nur ungefähr 3.5 cm (Bahn des Protons nach links und leicht rückwärts gerichtet). Die Enden der 4.8 cm-Bahnen der Alphateilchen des Thorium B und C sind in der Mitte des Bildes erkennbar [**?**].[a]

[a]The Nobel Prize in Physics 1948 was awarded to Patrick Maynard Stuart Blackett *for his development of the Wilson cloud chamber method, and his discoveries therewith in the fields of nuclear physics and cosmic radiation.*

erhöht seine Stabilität, indem er einen Zerfallsprozess durchläuft. Bei der Relaxation des Kerns in ein positiv geladenes Teilchen ausgestoßen. Aufgrund der Masse-zu-Ladung Verhältnisses könnte es sich um H_2^+ oder He^{2+} handeln. Bringt man eine geringe Menge Radium in eine evakuierte Glasbehälter, stellt man nach einiger Zeit fest, dass es bei Anlegen einer elektrischen Spannung zu einer Lichtemission kommt [**?**]. Das Spektrum kann dem Element Helium zugeordnet werden. Eine Signatur im Spektrum, die man auf H_2^+ zurückführen könnte, stellt man nicht fest. Damit ist klar, dass in dem radioaktiven Prozess ein zweifach geladener Heliumkern emittiert wird. Man nennt He^{2+} in der Kernphysik das α-Teilchen. Der α-Zerfall ist ein radioaktiver Zerfallsprozess, bei dem instabile Atomkerne überschüssige Energie abbauen, indem sie spontan ein α-Teilchen ausstoßen:

Masse des α-Teilchens: $m_{He} = 4.001\,506\,179\,127$ amu

Helium ($2p$, $2n$) ist nach Wasserstoff das am häufigsten vorkommende Element. Der Kern, das α-Teilchen ist im Vergleich zu anderen leichten Kernen ziemlich kompakt. Beispielsweise ist es etwa 20% kleiner als der Deuteriumkern ($1p$, $1n$). Die genaue Größe des α-Teilchens ist von besonderem Interesse, weil es Rückschlüsse erlaubt auf die Größe

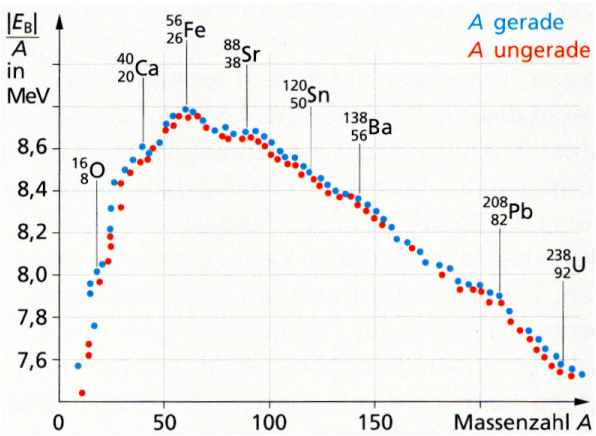


Abb. 23.22: Mittlere Bindungsenergie pro Nukleon der Elemente des Periodensystems [?]

des Protons (*proton radius puzzle* [?]). Kürzlich wurde die Größe des Heliumatoms mit hoher Genauigkeit gemessen. Für die Laserspektroskopie-Experimente ersetzte am eines der Elektronen durch das deutlich schwere Myon $M_\mu = 200 \cdot m_e$ (siehe Kapitel *Der Zerfall des Myons*). Die Forschen bestimmen den effektiven Radius der Ladung des α-Teilchens auf Bruchteile von Femtometern [?].

Der α-Zerfall erzeugt Tochterkerne mit einer Kernladung oder einer Ordnungszahl, die um ZWEI geringer und einer Masse, die 4 amu geringer ist. Der α-Zerfall tritt am häufigsten in massiven Kernen auf, die ein zu großes Verhältnis von Protonen zu Neutronen haben. Ein Poloniumkern hat 84 Protonen und 126 Neutronen. Das Verhältnis von Protonen zu Neutronen beträgt $Z/N = 84/126$. Polonium-210 (Ordnungszahl 84) zerfällt durch die Emission eines α-Teilchens in Blei-206 (Ordnungszahl 82). Der Pb-206 -Kern hat 82 Protonen und 124 Neutronen, was ein Verhältnis von 82/124 ergibt. Diese kleine Änderung des Z/N-Verhältnisses reicht aus, um den Kern in einen stabileren Zustand zu versetzen, und bringt den Tochterkern in den Bereich stabiler Kerne. α-Strahler findet man bei Elementen, die schwerer sind als Wismut (Ordnungszahl 83), sowie bei den seltenen Erden von Neodym (Ordnungszahl 60) bis Lutetium (Ordnungszahl 71). Die Halbwertszeiten reichen von einer 10^{-6} s bis etwa 10^{17} s (3 Milliarden Jahre). Die Energie der α-Teilchens ist spezifisch für den Mutterkern. Typische Geschwindigkeiten sind $0.1 \cdot c$.

Die allgemeine Reaktionsgleichung für einen α-Zerfall lautet:

$$ {}^{A}_{Z}X \quad \xrightarrow{\alpha} \quad {}^{A-4}_{Z-2}Y \; + \; {}^{4}_{2}He \tag{23.18} $$

Durch die hohe kinetische Energie werden die α-Teilchen in Materie kaum abgelenkt. Abb. 23.21 zeigt den α-Zerfall aus Stickstoff. Allerdings kommt es zu einer erheblichen Ionisation beim Durchtritt durch Materie. Typisch sind $7 \cdot 10^3$ Ereignisse pro Millimeter Gewebe. α-Strahlung hat deshalb eine hohe biologische Wirksamkeit (siehe Kapitel *Strahlentherapie*).

Tunneln durch die Coulombbarriere

Die Ursache des α-Zerfalls kann auf das quantenphysikalische Tunneln zurückgeführt werden (siehe Kapitel *Tunnelprozess*), der scheinbar eine Verletzung des Energieerhaltungssatzes darstellt [**?**]. Das α-Teilchen befindet sich in der Situation eines Bergsteigers, der in einem Krater gefangen ist und keine Kraft mehr hat, auf den Berggipfel zu gelangen, um sich dann auf der anderen Seite ins Tal abrutschen zu lassen. Die im Kern befindliche Barriere resultiert aus der anziehenden Kernkraft und der elektrostatischen Abstoßung (Abb. 23.23). Die Höhe der Barriere beträgt in Kohlenstoff 3 MeV, in Silber 13 MeV und 20 MeV in Fall von Bleikernen. Das α-Teilchen kann die Coulomb-Barriere nicht überwinden, weil es nicht die notwendige Energie hat. Aus Sicht der klassischen Physik kann es sich nur entweder innerhalb oder außerhalb des Kerns befinden. In der Quantenphysik ist die Situation aufgrund der Welleneigenschaften der Materie anders. Das α-Teilchen ist nicht streng lokalisiert (Kapitel *Unschärferelation*) und die Wellenfunktion hat eine nicht verschwindende Amplitude auf der andere Seite der Barriere, siehe Abb. 23.24. Es besteht damit eine gewisse Wahrscheinlichkeit, das Teilchen außerhalb des Kerns zu beobachten, wo die Kernkraft nicht mehr wirksam ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist gering, eröffnet aber einen Zerfallskanal (Tunnelausgang).

Wie kann man sich die Dynamik dieses Prozesses klarmachen? Wir gehen von folgenden vereinfachenden Voraussetzungen aus:

- Experimente zeigen, dass sich im Kern spontan und für kurze Zeit immer wieder Heliumkerne aus zwei Protonen und zwei Neutronen bilden. Im Mittel gibt es immer einen α-Teilchen im Atomkern.

- Das α-Teilchen ist in ständiger Bewegung und stößt aufgrund seiner Bewegung ständig mit dem Rand des Bindungspotenzials.

- Es gibt eine gewissen Wahrscheinlichkeit, dass bei einem dieser Stöße das α-Teilchen tunnelt und die Barriere durchdringt.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Sekunde ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit für das Tunneln und der Anzahl der Anklopfversuche. Diese kann man aus der Geschwindigkeit des α-Teilchens (typisch $v_\alpha = 2 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s}$) und dem Kerndurchmesser ($R = 10^{-14}\,\mathrm{m}$) mit $v_\alpha/2R$ abschätzen und ergibt einen Wert von $10^{21}\,\mathrm{s}^{-1}$. Man bedenke, das Kerne, die einen α-Zerfall teilweise eine mittlere Halbwertszeit von 10^{10} Jahren haben. Die sich daraus ergebende hohe Anklopfrate zeigt auf, dass die Tunnelwahrscheinlichkeit gering sein muss. Beim Zerfall von Polonium-212 (Halbwertszeit von $0.3\,\mu$s) beispielsweise, wird ein 8,78 MeV α-Teilchen emittiert. Die Höhe der Coulomb-Barriere beträgt etwa 26 MeV, so dass das α-Teilchen nach der klassischen Physik den Kern nicht verlassen kann. Im Bild des Bergsteigers besteht der Trick darin, auf die andere Seite des Berges zu gelangen, indem er einen Tunnel durch den Berg gräbt. Die Tunnelrate ist das Produkt aus Anzahl der Stöße mit der Tunnelbarriere und der Wahrscheinlichkeit des Tunnels. Da das α-Teilchen Energien von mehreren MeV hat, durchquert es den Kern innerhalb von

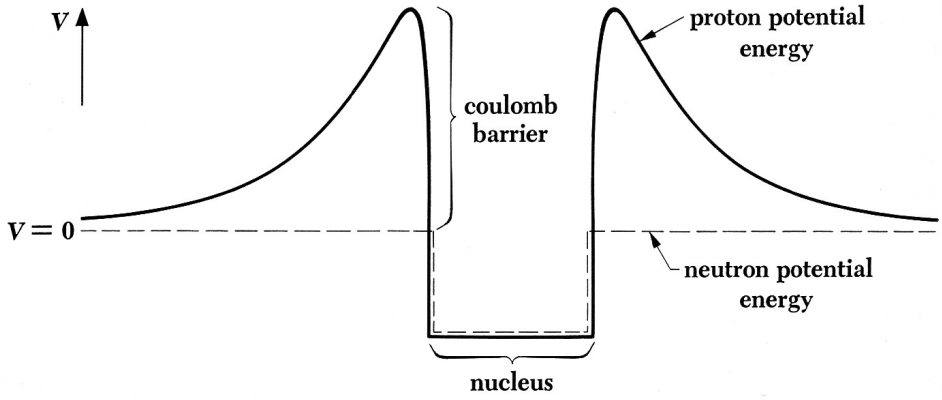


Abb. 23.23: Proton- (durchgezogene Linie) und Neutron-Potenzial (gestrichelte Linie). Man beachte die Coulombbarriere, die aus der elektrostatischen Abstoßung der Protonen resultiert [**?**].

10^{-21} s.

Man kann sich den α-Zerfall auch als eine stark asymmetrische Kernspaltung vorstellen. Eine solche Reaktion findet statt, wenn beim Zerfall die Elternmasse größer ist als die Summe der Massen aus Tochterkern und α-Teilchen (Kapitel *Einsteingleichung*). Ist diese Bedingung erfüllt, kann der Kern über einen α-Zerfall relaxieren. Diese Voraussetzungen gelten für alle Kerne, die im Periodensystem hinter Blei, also $Z > 82$, stehen. Für Elemente schwerer als Uran sind die zugehörigen Halbwertszeiten deutlich geringer als das Alter der Erde. Daher kommen diese Elemente in der Natur nicht vor.

Wie kommt es dazu, dass der Kern häufig unter Emission eines α-Teilchens zerfällt?
α-Teilchen zeichnen sich gegenüber allen anderen Kombinationen von p und n durch eine extrem hohe Bindungsenergie aus:

Bindungsenergie des α-Teilchens: B_E/A=28.3 MeV

Es ist sinnvoll, sich die Entwicklung der Kernbindungsenergie (B_E) als Funktion der Anzahl der Kernbausteine (A) anzuschauen, d.h. (B_E/A), siehe Abb. 23.22. Da B_E/A mit der Ordnungszahl bei schwereren Kernen langsam abnimmt, können sich durch Kernspaltung zwei Kerne mit insgesamt höherer Bindungsenergie bilden.
Das führt dazu, dass α-Zerfälle häufig beobachtet werden und es ist deshalb nicht wahrscheinlich, das ein Deuteron den Kern verlässt.
Im Allgemeinen sind alle langlebigen schweren Isotope extrem reich an Neutronen. Dieser Umstand begünstigt ebenfalls die Emission von α-Teilchen. Ein Protonzerfall ist nahezu unwahrscheinlich, da man dafür protonenreiche Kerne braucht. Ausnahmen sind Lutetium-151 und Thulium-147. Reine Neutronenemitter sind ebenfalls selten. Beispiele sind Beryllium-13 und Helium-5. Wie sich herausstellt, sind andere Reaktionspfade wie α-Teilchen Emission über quantenphysikalisches Tunneln oder spontane Spaltung

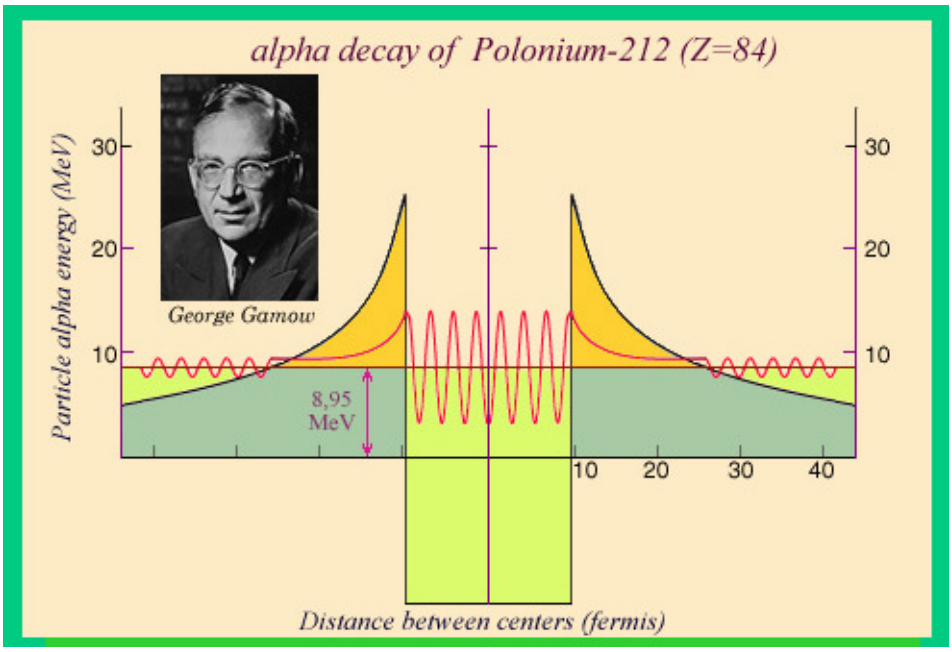


Abb. 23.24: Tunneln eines α-Teilchens durch den Potenzialwall von Polonium-212. Das α-Teilchen erreicht nach dem Prozess eine Kinetische Energie von 8.95 MeV.

gegenüber Protonen- oder Neutronenemission begünstigt. Betrachten wir abschließend noch die Energieverhältnisse (Kapitel *Kerne*). Für den α-Zerfall findet man aus der Betrachtung der Kernmassen:

$$\begin{aligned} {}^{238}_{92}\mathrm{U} &\rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{U} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \\ \Delta m &= 238.0507\,\mathrm{amu} - (234.043\,\mathrm{amu} - 4.0015\,\mathrm{amu}) \\ \Delta m &= 0.0062\,\mathrm{amu} \qquad (23.19) \\ (\Delta m)\cdot c^2 &= 9.33\cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} \\ (\Delta m)\cdot c^2 &= 5.83\,\mathrm{MeV} \qquad (23.20) \end{aligned}$$

Es wird beim Zerfall also Energie freigesetzt. Im Fall des Protonzerfalls findet man dagegen einen negativen Wert.

$$\begin{aligned} {}^{238}_{92}\mathrm{U} &\rightarrow {}^{237}_{91}\mathrm{Pa} + {}^{1}_{1}H \\ \Delta m &= 238.0507\,\mathrm{amu} - (237,051\,\mathrm{amu} - 1.00727\,\mathrm{amu}) \\ \Delta m &= -0.00757\,\mathrm{amu} \qquad (23.21) \\ (\Delta m)\cdot c^2 &= -1.14\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} \\ (\Delta m)\cdot c^2 &= -7.11\,\mathrm{MeV} \qquad (23.22) \end{aligned}$$

Energetisch ist dieser Reaktionskanal also nicht vorteilhaft. Eine ähnliche Energiebetrachtung zeigt, dass auch die Emission von ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ nicht vorteilhaft ist. Während beim Urankern U-232 das α-Teichen mit einer kinetischen Energie von 5.4 MeV den Kern

verlässt, muss beim Protonzerfall Energie in Höhe von 6.1 MeV und beim He-3 9.6 MeV durch eine äußere Energiequelle zugeführt werden.

Nanosecond-Scale Proton Emission from Strongly Oblate-Deformed ^{149}Lu [?]: Using the fusion-evaporation reaction ^{96}Ru(^{58}Ni, $p4n$) ^{149}Lu and the MARA vacuum-mode recoil separator, a new proton-emitting isotope ^{149}Lu has been identified. The measured decay Q value of 1920 (20) keV is the highest measured for a ground-state proton decay, and it naturally leads to the shortest directly measured half-life of 450^{+170}_{-100} ns for a ground-state proton emitter. The decay rate is consistent with l_p=5 emission, suggesting a dominant $\pi h_{11/2}$ component for the wave function of the proton-emitting state. Through nonadiabatic quasiparticle calculations it was concluded that ^{149}Lu is the most oblate deformed proton emitter observed to date.

Die Bindungsenergie, die im Zerfallsprozess freigesetzt wird, nennt man Q_{decay}-Faktor.[27] Für den α-Zerfall eines Kerns X_{parent} lautet die Gleichung:

$$Q_{decay} = m_{\text{parent}} \cdot c^2 - m_{\text{daugther}} \cdot c^2 - m_\alpha \cdot c^2 \tag{23.23}$$

Geiger-Nuttall-Regel

Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Halbwertszeit der radioaktiven Kerne, die dem α-Zerfall unterliegen und der kinetischen Energie der α-Kerne? Die Antwort ist JA und die Erklärung ergibt sich aus der Energetik des Tunnelprozesses, siehe Abb. 23.25. Abb. 23.26 demonstriert, dass eine solche Abhängigkeit tatsächlich existiert. Die Geiger-Nuttall-Regel ist die dazugehörige empirisch ermittelte Gleichung [**?** **?**]. [28] Geiger und Nuttall beobachteten, dass kurzlebigere Nuklide α-Teilchen höherer Energie emittieren. Tabelle 23.4 gibt Beispiele. Die in der Reaktion freigesetzte Überschussenergie Q_α, ist gleich der Summe aus α-Teilchen-Energie E_{kin} und der Rückstoßenergie E_r auf den Tochterkern (Masse M_d). Impulserhaltung liefert

$$E_r = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + M_d} \tag{23.24}$$

Aufgrund ihrer Beobachtungen (Abb. 23.27) schlugen die Forscher eine Gleichung für die Zerfallskonstante vor, die sich an der Reichweite x_α der α-Teilchen in Luft orientierte, wobei b eine Konstante und a an die untersuchten Zerfallsserien angepasst ist:

$$\log_{10}(\lambda_{decay}) = a + b \cdot \log_{10}(x_\alpha) \tag{23.25}$$

[27] *Lexikon:* Der Q_{decay}-Faktor ist die Energiemenge, die bei einer Kernreaktion aufgenommen oder freigesetzt wird, also chemisch betrachtet die Enthalpie. Der Q_{decay}-Faktor kann aus den Massen von der Reaktanden bestimmt werden. Reaktionsgeschwindigkeiten hängen vom Wert von Q_{decay} ab. Je größer der Q_{decay}-Wert ausfällt, desto schneller und umso wahrscheinlicher ist die Reaktion.

[28] In [**?**] wird die Problematik der Verwendung empirischer Formeln im Unterricht am Beispiel der Geiger-Nuttall Regel diskutiert.

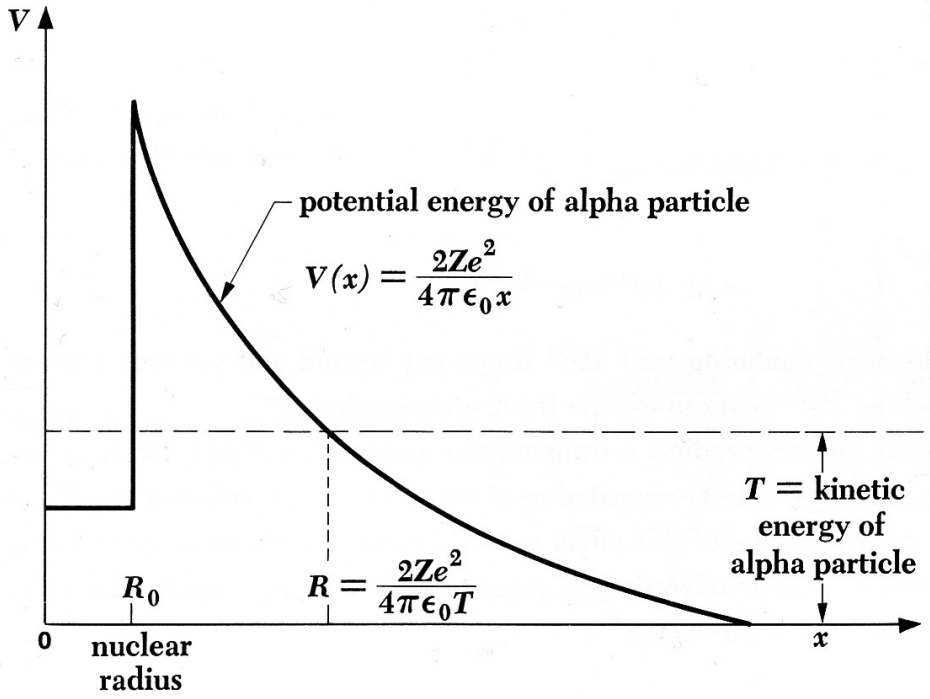


Abb. 23.25: Potenzielle Energie der α-Teilchen als Funktion des Abstands vom Mittelpunkt eines Kerns [**?**].

Die kinetische Energie der α-Teilchen Q_α ergibt sich mit

$$Q_\alpha = k_C \cdot \frac{2\,(Z-2)\cdot e^2}{r_\alpha} \tag{23.26}$$

Die Geiger-Nuttall Regel liefert eine gute Übereinstimmung für Kerne mit gerader Ordnungszahl und gerader Atommasse. Der Trend wird für gerade-ungerade, ungerade-gerade und ungerade-ungerade Kerne ebenfalls beobachtet, ist aber nicht so ausgeprägt.

	kinetische Energie E^α_{kin} [MeV]	Halbwertszeit $T_{1/2}$ [Jahre]
$^{238}_{92}$U	4.1	$4.5 \cdot 10^9$
$^{236}_{88}$Ra	4.7	$1.6 \cdot 10^3$
$^{210}_{84}$Po	5.3	$0.4 \cdot 10^0$
$^{214}_{84}$Po	7.7	$1.6 \cdot 10^{-4}$
$^{212}_{84}$Po	8.8	$3.0 \cdot 10^{-7}$

Tab. 23.4: Beispiele für Halbwertszeiten und den Rückstoßenergien der α-Teilchen ausgewählter radioaktiver Kerne. Eine hohe Rückstoßenergie geht einher mit einer geringen Halbwertszeit der radioaktiven Kerne, die über den α-Zerfall relaxieren.

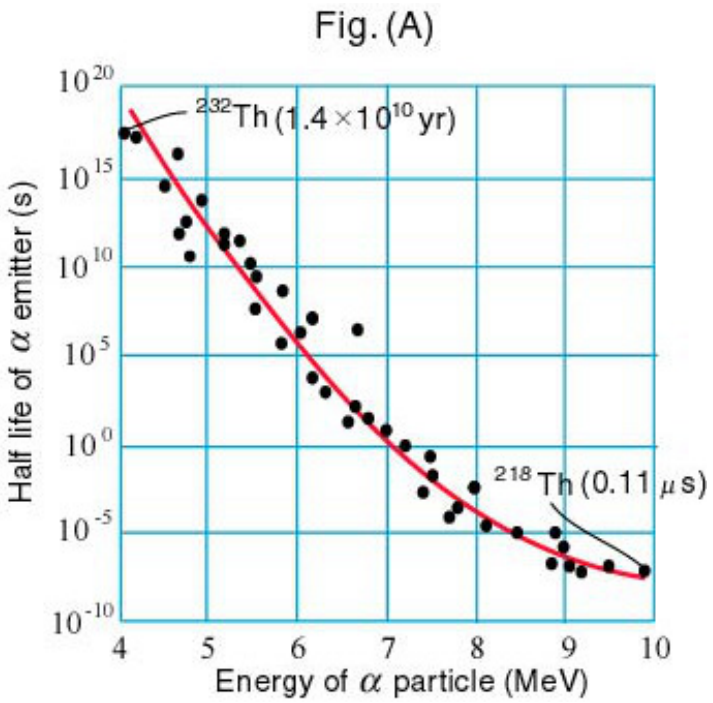


Abb. 23.26: Geiger und Nuttall beobachteten einen Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie der α-Teilchen und der Halbwertszeit eines radioaktiven Isotops.

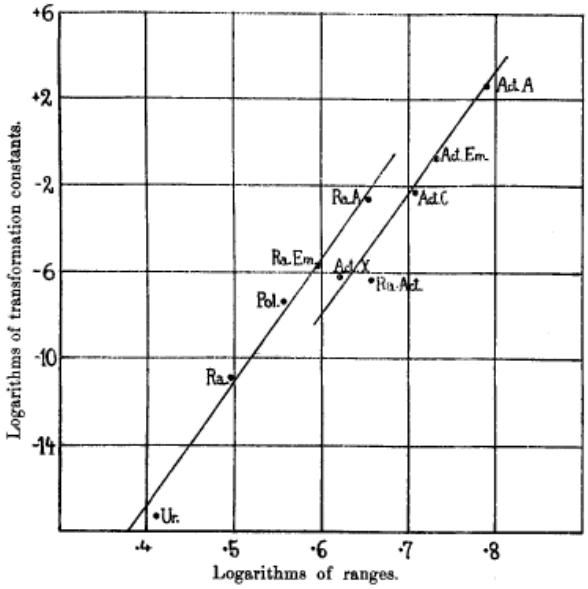


Abb. 23.27: Zusammenhang zwischen den Zerfallskonstanten und der Reichweite von α-Teilchen in Materie [?].

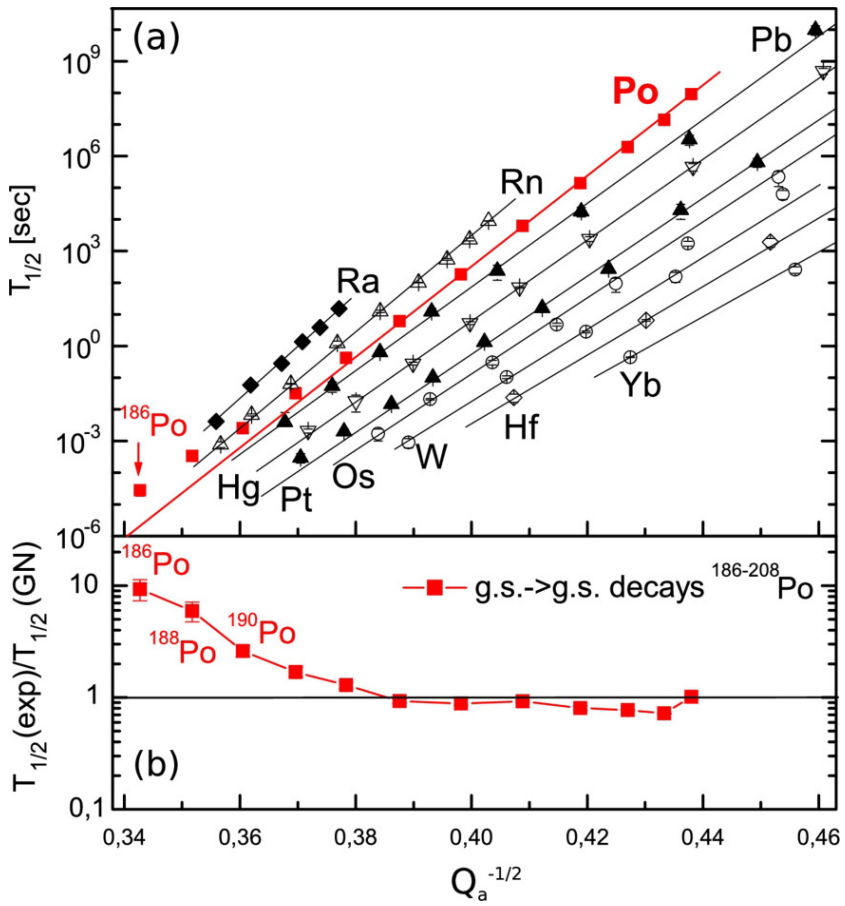


Abb. 23.28: (a) Die Logarithmen der experimentellen Halbwertszeiten ($T_{1/2}$) des α-Zerfalls für Kerne mit einer Neutronenzahl $N < 126$. Die Linien geben die Erwartungen nach der Geiger-Nuttall Regel wieder. (b) Zugehörige Abweichungen zwischen Experiment und Regel. Q_α ist die Energie, die beim α-Zerfall freigesetzt wird [**?**].

Als Funktion von Ordnungszahl Z und Überschussenergie Q_α lässt sich die Geiger-Nuttall Regel wie folgt schreiben:

$$\log_{10}(\lambda_{decay}) = a_2 - a_1 \frac{Z}{\sqrt{Q_\alpha}} \tag{23.27}$$

Abb. 23.28 zeigt, dass eine entsprechende Auftragung der Ergebnisse die Regel gut wieder gibt. Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist in Sekunden und Q_α in $1/\sqrt{\text{MeV}}$ angegeben. Das Geiger-Nuttall Gesetz erklärt, warum α-Strahlung geringer Energie kaum nachweisbar ist. Die Ursache liegt an der breiten Coulombbarriere und den damit verbundenen viel zu geringen Zerfallskonstanten der radioaktiven Kerne.

Anwendungen[4LP]

Ein Beispiel aus der Batterietechnik

Pellets, die Transurane[29] mit kurzer Halbwertszeit beinhalten, können sich aufgrund des α-Zerfalls stark erhitzen, da es aufgrund der geringen Reichweite einen hohen Impulsübertrag auf das Pelletmaterial gibt. Dies erhöht die Temperatur und die Energie der α-Strahlung kann genutzt werden, um elektrische Energie zu erzeugen (Alphavoltaik), wobei sich eine ganze Reihe an thermischen aber auch nicht-thermischen Methoden, wie thermoelektrisch, optoelektrisch oder der Sterling-Prozess, eignen. β- (Betavoltaik [**?**]) und γ-Strahler werden ebenfalls verwendet. Das Grundkonzept einer Radionuklidbatterien wurde zuerst von Moseley im Jahr 1913 realisiert [**?**]. Neuere Entwicklungen nutzen Nanotechnologie und Halbleiter mit großer Bandlücke [**?**]. Aus Aspekten der Strahlungssicherheit verwendet man radioaktive Stoffe, die wenig γ-Strahlung abgeben. Im Gegensatz zu Kernreaktoren erzeugen Radionuklidbatterien Strom nicht unter Ausnutzung einer Kettenreaktion. Radionuklidbatterien sind interessant für Weltraummissionen jenseits der Jupiterbahn, da dort die Strahlung der Sonne nicht mehr ausreicht, die Stromversorgung der Satelliten zu sichern. Beispiel sind die Voyager- und Pioneer-Missionen. Zur Vermeidung radioaktiver Belastung beispielsweise in Folge eines Fehlstarts wurden Sicherheitssysteme entwickelt, die eine unkontrollierte Freisetzung radioaktiven Materials verhindern sollen.

Radioisotope microbattery based on liquid semiconductor [?]: A liquid semi conductor-based radioisotope micropower source has been pioneerly developed. The semiconductor property of selenium was utilized along with a 166 MBq radioactive source of S-35 as elemental sulfur. Using a liquid semiconductor-based Schottky diode, electrical power was distinctively generated from the radioactive source. Energetic beta radiations in the liquid semiconductor can produce numerous electron hole pairs and create a potential drop. The measured power from the microbattery is 16.2 nW with an open-circuit voltage of 899 mV and a short-circuit of 107.4 nA.

Ein Ausflug in den Alltag

Das Radionuklid Americium-241 ist ein künstlich erzeugtes Element und hat kein stabiles Isotop. Americium zerfällt über einen α-Zerfall

$$^{241}_{95}\mathrm{Am} \rightarrow ^{237}_{93}\mathrm{Np} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{23.28}$$

und emittiert nahezu keine γ-Strahlung, so dass die radioaktive Belastung gering ist. Warum? α-Teilchen haben in Materie nur eine geringe Reichweite und können deshalb gut abgeschirmt werden. Die Halbwertszeit beträgt 458 Jahren. Am-241 wird in Rauchmeldern eingesetzt. Die Funktionsweise ist folgendermaßen, siehe Abb. 23.29. Durch die α-Teilchen Emission erfolgt eine andauernde Ionisation der Luft zwischen geladenen

[29] *Lexikon:* Transurane sind Elemente mit einer Ordnungszahl größer als Z=92, also Uran.

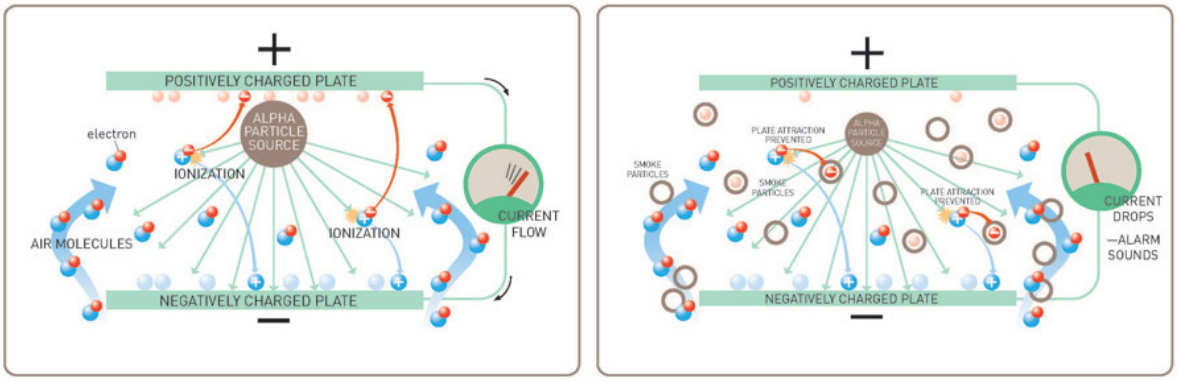


Abb. 23.29: Arbeitsweise eines Rauchmelders auf der Basis des radioaktiven Zerfalls von Am-241 [**?**].

Kondensatorplatten. Die Bewegung der Ionen im elektrisches Feld führt zu einem geringen elektrischer Strom. Rauchpartikel behindern die Bewegung der Ionen, der elektrische Strom nimmt ab und ein Alarmsignal wird ausgelöst.

Ein Beispiel aus der Raumfahrt

α-Strahlung kann genutzt werden, um Löcher in inneren Elektronenschalen zu erzeugen. In Folge kommt es zur Röntgenemission. Ein großer Vorteil von α-Strahlern, gegenüber Röntgenanlagen, sind die Abmessungen. Beispielsweise wurde unter Anwendung von α-Strahlung die Oberfläche des Mondes chemisch analysiert [**?**]:

Determination of the chemical composition of Martian soil and rocks: The alpha proton X ray spectrometer [**?**]**:** The alpha proton X ray spectrometer (APXS) for the Mars Pathfinder mission is designed to provide a complete and detailed analysis of chemical elements in Martian soil and rocks near the landing site. The APXS instrument is carried on the Pathfinder Microrover, which will provide transportation to places of interest on the Martian surface. It consists of a complex sensor head, mounted on a simple but sophisticated APXS deployment mechanism (ADM) outside the warm electronics box (WEB) of the Microrover, and the instrument electronics, mounted inside the WEB. The ADM permits the instrument sensor head to be placed against soil and rock samples in arbitrary positions, ranging from horizontal to vertical, in order to perform in situ analysis. The possibility to transport the APXS to an arbitrary location, preselected on Earth, and to perform in situ analysis there, constitutes one of the most exciting aspects of the Pathfinder mission. The principle of the APXS technique is based on three interactions of alpha particles from a radioisotope source with matter: simple Rutherford backscattering, production of protons from (α, p) reactions on light elements, and generation of characteristic X rays upon recombination of atomic shell vacancies created by a bombardment. Measurement of the intensities and energy distributions of these three components yields information on the abundance of chemical

elements in the sample. In terms of sensitivity and selectivity, data are partly redundant and partly complementary: alpha backscattering is superior for light elements (C, O), while proton emission is mainly sensitive to Na, Mg, Al, Si, S, and X ray emission is more sensitive to heavier elements (Na to Fe and beyond). A combination of all three measurements enables determination of all elements (with the exception of H and He) present at concentration levels above typically a fraction of 1%.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 3.1: Im α-Zerfall von Ra-226 entstehen Heliumkerne mit einer kinetischen Energie von 5.78 MeV. Wie weit sind die Ladungsschwerpunkte voneinander entfernt?

Aus den Informationen lässt sich die Reaktionsgleichung ableiten:

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow ^{222}_{86}\mathrm{Rn} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$$

Es entstehen zwei Kerne, die sich aufgrund ihres Ladungszustandes (2+) abstoßen. Wir nutzen Energieerhaltung (E_{kin}=E_C) und die Höhe der Rückstoßenergie zu berechnen. Dazu stellen wir uns vereinfacht vor, das es sich bei Ra-222 und dem α-Teilchen um Kugeln handelt. Man behandelt das Problem auf der Grundlage von zwei Punktmassen im Abstand $r_{Rn-\alpha}$.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{4\,\pi \cdot \epsilon_0} \frac{(Z_{Rn} \cdot e) \cdot (Z_\alpha \cdot e)}{r_{Rn-\alpha}} \\ r_{Rn-\alpha} &= \frac{1}{4\,\pi \cdot (8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}})} \frac{222 \cdot 2 \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{9.26 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}} \\ r_{Rn-\alpha} &= 1.13 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Da der Radiumkern einen Kernradius von nur $3.5 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$ hat, müsste das α-Teilchen eine deutlich höhere kinetische Energie aufweisen (18.3 MeV), wenn der α-Kern am Rand des Kerns entsteht. Der Tunneleffekt kann diese Diskrepanz auflösen.

Aufgabe 3.2: α-Teilchen aus einem radioaktiven Zerfall sind[30]

(a) negativ aufgeladene Teilchen.

(b) ungeladene Teilchen mit einer Masse vergleichbar dem Protons.

(c) ionisierte Wasserstoffatome

(d) doppelt ionisierte Heliumatome

Aufgabe 3.3: Das Isotop $^{235}_{92}$U gehört zur Gruppe III-B des Periodensystems. Wenn ein α-Zerfall erfolgt, gehört das neue Element zur Gruppe[31]

(a) I-B

(b) I-A

[30] Antwort: (d)
[31] Antwort: (c)

(c) III-B

(d) V-B

Aufgabe 3.4: Beim Zerfall eines Urankerns (Ordnungszahl Z=92) beobachtet man α-Teilchen mit einer Kinetischen Energie von E_α=6 MeV ($9.61 \cdot 10^{-13}$ J). Eine Tunnelbarriere (CB) existiert für $x^i_{CB} > 8$ fm.

- Wie hoch ist die Tunnelbarriere?

- Welche Strecke muss der Heliumkern durchtunneln!

Die Höhe der Coulombbarriere ergibt sich aus dem elektrostatischen Potenzial und ist maximal bei $x = x^i_{CB}$.

$$\begin{aligned} U_{CB}(x_{CB}) &= \frac{e^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Z_\alpha \cdot (Z-2)}{x^i_{CB}} \\ U_{CB}(x_{CB}) &= \frac{(1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{4\,\pi \cdot (8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}})} \cdot \frac{2 \cdot 90}{8 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}} \\ U_{CB}(x_{CB}) &= 5.19 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} \\ U_{CB}(x_{CB}) &= 32.4 \cdot 10^{7}\,\mathrm{eV} = 32.4\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Ein α-Teilchen mit Kinetischer Energie E_α würde von den verbleibenden 90 Ladungen des Kerns im Abstand (x^o_{CB}) gestoppt werden. Energieerhaltung liefert:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{e^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Z_\alpha \cdot (Z-2)}{x^o_{CB}} \\ x^o_{CB} &= \frac{e^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Z_\alpha \cdot (Z-2)}{E_\alpha} \\ x^o_{CB} &= \frac{(1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{4\,\pi \cdot (8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}})} \cdot \frac{2 \cdot 90}{9.61 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}} \\ x^o_{CB} &= 2.16 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m} = 21.6\,\mathrm{fm} \end{aligned}$$

Die Region zwischen 6 und etwa 22 fm ist der klassisch verbotene Bereich, durch die das α-Teilchen tunneln muss.

Aufgabe 3.5: Wie ist das Verhältnis der kinetischen Energien beim α-Zerfall von Am-241?

Beim Zerfall entstehen Np-237 und He-4 Kerne, wobei wir den Zusammenhang zwischen Energie und Impuls nutzen:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2\,m}$$

Vor dem Stoß ist Am-241 in Ruhe (p_i=0) und die beiden in der Reaktion entstehenden Kernfragmente bewegen sich in entgegengesetzte Richtungen ($p_f^1 = p_f^2$). Aus der Auswertung der Impulserhaltung

$$\begin{aligned} p_i &= p_f^1 + p_f^2 \\ p(\text{Am-241}) &= p(\text{Np-237}) - p(\alpha) \\ 0 &= \sqrt{2\, m_{\text{Np-237}} \cdot E_{kin}^{\text{Np-237}}} - \sqrt{2\, m_{\text{He-4}} \cdot E_{kin}^{\alpha}} \\ \sqrt{2\, m_{\text{Np-237}} \cdot E_{kin}^{\text{Np-237}}} &= \sqrt{2\, m_{\text{He-4}} \cdot E_{kin}^{\alpha}} \\ \frac{E_{kin}^{\alpha}}{E_{kin}^{\text{Np-237}}} &= \frac{m_{\text{Np-237}}}{m_{\text{He-4}}} \\ \frac{E_{kin}^{\alpha}}{E_{kin}^{\text{Np-237}}} &= \frac{237}{4} \end{aligned}$$

ergibt sich, dass das α-Teilchen den Löwenanteil der Kinetischen Energie, nämlich den Anteil 237/241 erhält.

Aufgabe 3.6: Kann O-16 über eine α-Zerfall in C-12 zerfallen?

Es geht um folgenden Reaktionsprozess:

$$^{16}_{8}\text{O} \rightarrow ^{12}_{6}\text{C} + ^{4}_{2}\text{He}$$

Die Massen der Isotope sind: $^{16}_{8}$O: 15.994 92 amu, $^{12}_{6}$C: 12.000 00 amu, $^{4}_{2}$He: 4.002 60 amu.

$$\Delta m = 15.994\,92\,\text{amu} - 12.000\,00\,\text{amu} - 4.002\,60\,\text{amu} m = -0.007\,68$$

Der Massendefekt ist negativ. Die Ruhemasse der erzeugten Teilchen ist größer als die Ruhemasse des Sauerstoffisotops. Ein α-Zerfall ist deshalb nicht möglich.

Aufgabe 3.7: Wie hoch ist die elektrostatische Energie eines α-Teilchens im Urankern?

Dazu muss die elektrostatische Abstoßung von 2 Ladungen durch die restlichen 90 Ladungen im Abstand 7.4 fm berechnen.

$$E_{pot} = k_C \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot e^2}{r} = 1.44\,\text{MeV} \cdot \text{fm} \cdot \frac{2 \cdot 90}{7.4\,\text{fm}} = 35\,\text{MeV}$$

Aufgabe 3.8: Zeigen Sie, dass für die Halbwertzeit $t_{1/2}$ eines radioaktiven Kerns und die Kinetischen Energie E_{kin} des emittierten Teilchens beim α-Zerfall folgendes gilt: $\ln t_{1/2} \approx 1/\sqrt{E_{kin}}$.

Für die Halbwertzeit $t_{1/2}$ und die Zerfallskonstante λ gilt $t_{1/2}$=$\ln 2/\lambda$, wobei λ=$f_\alpha \cdot P_\alpha$. Dabei ist f_α die Frequenz mit der der α-Kern an die Coulombbarriere anklopft:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{f \cdot P_\alpha}$$

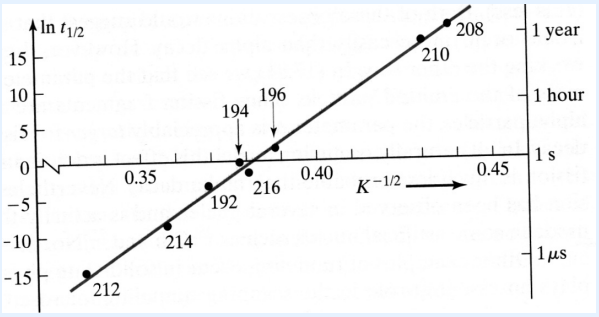


Abb. 23.30: Auftragung von $\ln t_{1/2}$ gegen $\sqrt{E_{kin}}$ für Polonium-Isotope, die über einen α-Zerfall relaxieren. In dieser Darstellung lassen sich die Werte gut über eine Gerade beschreiben [**?**].

Den Wert von f_α kann kann man folgendermaßen abschätzen. Die Geschwindigkeit, mit der sich das α-Teilchen im Kern bewegt entspricht etwa $c/4$. Bei einem Kerndurchmesser von $2\,R$=15 fm ergibt sich:

$$f_\alpha \sim \frac{v_\alpha}{2\,R} \sim \frac{c/4}{15 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}} = 5 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{s}^{-1}$$

Eine umfassende Analyse liefert für die Wahrscheinlichkeit P, dass ein Tunneln erfolgreich ist:

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \exp\left(-a \cdot Z \cdot E_{kin}^{-1/2} + b \cdot (Z \cdot R)^{1/2}\right) \\ a &= \frac{2\,\pi \cdot k \cdot e^2 \cdot \sqrt{2\,m}}{\hbar} = 3.97\,(\mathrm{MeV})^{1/2} \\ b &= \frac{8 \cdot \sqrt{m \cdot k \cdot e^2}}{\hbar} = 2.98\,(\mathrm{fm})^{1/2} \end{aligned}$$

Setzt man typische Werte ein (Ordnungszahl: Z=90; E_{kin}=6 MeV; Kernradius: R=8 fm) ergibt sich:

$$P_\alpha \approx \exp(-146 + 80) = 2 \cdot 10^{-29}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das α-Teilchen die Barriere durchdringt, ist also ziemlich gering. Damit kann man die obige Gleichung folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \ln t_{1/2} &= -\ln P_\alpha + \ln \frac{0.693}{f} \\ \ln t_{1/2} &= a \cdot Z \cdot E_{kin}^{-1/2} - b \cdot (Z \cdot R)^{1/2} + \ln \frac{0.693}{f} \end{aligned} \qquad (23.29)$$

Für den Ausdruck $\ln(0.693/f)$ ergibt sich ein Wert von etwa -50. Als Test betrachten wir α-Strahler mit gleicher Ordnungszahl, nämlich Isotope des Elements Polonium (^{192}Po, ^{194}Po, ^{196}Po, ^{208}Po, ^{210}Po, ^{212}Po, ^{214}Po, ^{216}Po). In diesem Fall ändert sich der zweite Term in der Gleichung kaum und die Gleichung reduziert auf.

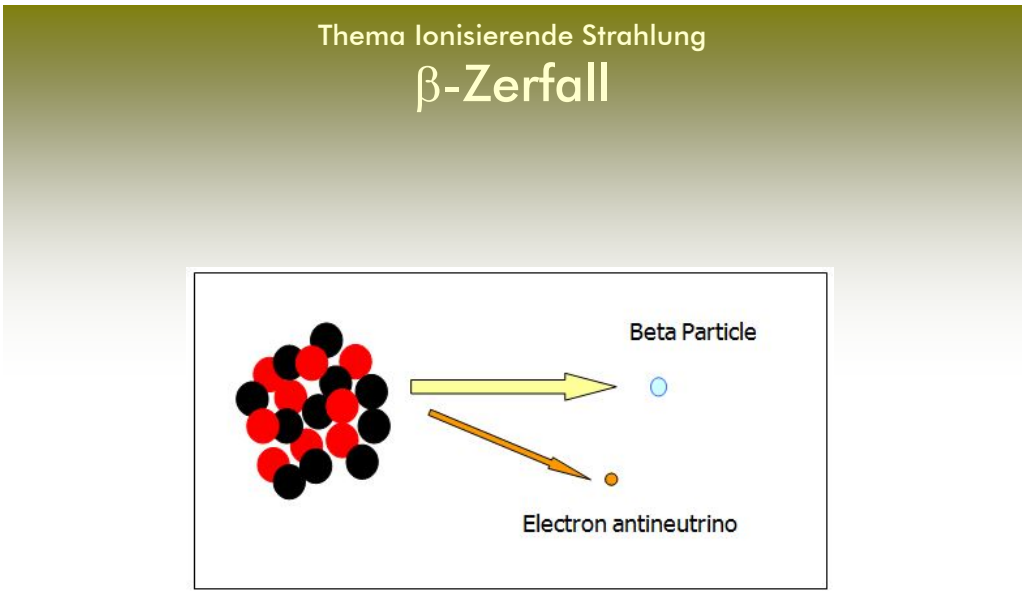
$$\ln t_{1/2} = a \cdot Z \cdot E_{kin}^{-1/2} + const. \qquad (23.30)$$

Das die Analyse eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten liefert, zeigt Abb. 23.30. Der erwartete Wert der Steigung ist $3.97\,(\mathrm{MeV})^{1/2} \cdot (82) = 326\,(\mathrm{MeV})^{1/2}$. Die Anpassungsgerade ergibt einen Wert von $328\,(\mathrm{MeV})^{1/2}$.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie notiert man das α-Teilchen?
2. Wie lautet die Reaktionsgleichung für den α-Zerfall?
3. Was versteht man unter einer Coulomb-Barriere?
4. Von welchen Parametern hängt die Tunnelwahrscheinlichkeit ab?
5. Beschleunigt ein α-Teilchen nach dem Tunneln oder wird es abgebremst?
6. Welche spektroskopischen Hinweise gibt es, dass man beim α-Zerfall nicht falsch liegt und in Wirklichkeit ein Proton oder Neutron emittiert wird?
7. Wie fand Rutherford heraus, dass es sich bei α-Teilchen um Heliumkerne handelte?
8. Ein ^{222}Ra-Kern, anfänglich in Ruhe, zerfällt in einem α-Zerfall. Welcher der Fragmente hat die höhere kinetische Energie?

Beta-Zerfall



We are happy to inform you that we have definitely detected neutrinos from fission fragments by observing inverse beta decay of protons. Observed cross section agrees well with expected six times ten to minus forty-four square centimeters.

Reines-Cowan Telegramm an Wolfgang Pauli (1956)

Die Rolle der Neutrinos

Die Geschichte der Entdeckung des Neutrinos rüttelte an den Grundfesten der Physik, weil die experimentellen Ergebnisse darauf hinwiesen, dass im β-Zerfall möglicherweise der Impulserhaltungssatz verletzt sein könnte.[32] Aus der Reaktionsgleichung hatte man

[32] *Lexikon:* Der β^- Zerfallsmechanismus geht wie folgt vonstatten. Ein *down*-Quark in einem Neutron, dessen elektrische Ladung $-e/3$ beträgt, emittiert eine negative Ladung $-e$. Seine Ladung beträgt jetzt $+2e/3$ und das Teilchen ist zu einem *up*-Quark geworden. Im Allgemeinen absorbiert das *up*-Quark die negative Ladung sofort wieder und kehrt in den *down*-Quark Zustand zurück. Die kurzzeitig emittierte und sofort wieder absorbierte negative Ladung wird von einem instabilen Teilchen namens W^--Boson getragen. Die Heisenbergsche Unschärferelation erlaubt es nun auf einer Zeitspanne von 10^{-26} s, dass das W^--Boson mit einer geringen Wahrscheinlichkeit in ein Elektron und ein Antineutrino zerfällt (Abb. 23.34). Dies ist der Ursprung der β^--Radioaktivität. In ähnlicher Weise ergibt sich der β^+-Zerfall.

erwartet, dass beim β-Zerfall eines radioaktiven Isotops die Elektronen mit ein und derselben kinetischen Energie emittiert werden. Tatsächlich ergab sich eine breite Energieverteilung, wobei nur die maximale Energie der Elektronen/Positronen dem erwartetem Wert entsprach. Wolfgang Pauli löste das Rätsels, indem er der Hypothese aufstellte, dass ein schwach wechselwirkendes Teilchen in der Reaktion beträgt. Die Existenz des Neutrinos konnte erst 26 Jahre später experimentell bestätigt werden [**?**].[33].

The Neutrino [?]: The view has recently been put forward that a neutral particle of about electronic mass, and spin $\hbar$ exists, and that this neutrino is emitted together with an electron in decay. This assumption allows the conservation laws for energy and angular momentum to hold in nuclear physics, Both the emitted electron and neutrino could be described either (a) as having existed before in the nucleus or (b) as being created at the time of emission. In a recent paper Fermi has proposed a model of disintegration using (b) which seems to be confirmed by experiment.

Der β-Zerfall und der Elektroneneinfang verändern die Zusammensetzung von Protonen und Neutronen im Kern, wobei die elektrische Ladung des Kerns um EINS zu- oder abnimmt.

$$ {}^{A}_{Z}X \overset{\beta^-}{\rightarrow} {}^{A}_{Z+1}Y + e^- + \overline{\nu_e} \tag{23.31} $$

$$ {}^{A}_{Z}X \overset{\beta^+}{\rightarrow} {}^{A}_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e \tag{23.32} $$

Abb. 23.31 zeigt, in welcher Weise die Elemente des Periodensystem über den β^+- und β^--Reaktionskanal zerfallen. Diese Ladungsänderung wird durch die Emission eines geladenen Teilchens -eines Elektrons oder Positrons- oder seltener durch den Einfang eines Elektrons kompensiert (Abb. 23.32). Dieser Vorgang stellt ein Problem dar. Der β-Zerfall verletzt gleich drei Erhaltungssätze: Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung. Beispielsweise kann man aus dem Massendefekt berechnen, dass im Zerfall

$$ {}^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Po} + \beta^- \tag{23.33} $$

eine Energie von 1.17 MeV freigesetzt wird. Die Energieverteilung der Elektronen, die diese Energie in Form kinetischer Energie aufweisen sollten, haben deutlich geringe Energien. Das Ergebnis eines Experiments an Cu-64 ist in Abb. 23.33 wiedergegeben. Die Analyse ergibt, dass man die Reaktion nur nachvollziehen kann, wenn man die Existenz neuer Teilchen annimmt, die in dem Prozess gebildet werden. Diese sind Neutrinos [**?**] oder Antineutrinos. Verbirgt sich hinter dem Umwandlungsprozess $n \rightarrow p$ neue Physik? JA! Die elektromagnetische Wechselwirkung kann die Reaktion nicht auslösen, denn das Neutron ist ungeladen. Die starke Wechselwirkung kann es auch nicht sein, da das emittierte Elektron nicht dieser Wechselwirkung unterliegt. Die Lebensdauern solcher instabiler Kerne ist extrem unterschiedlich und reicht von 15 Minuten für ein freies Neutron, eine Woche für Jod-131, dreißig Jahre für Cäsium-137 bis zu einer Milliarde Jahre für Kalium-40. Im Vergleich zu typischen Zeitskalen in Kernen sind diese Zeiträume extrem

[33]Siehe auch das Gedicht *Cosmic Call* von John Updike im Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*

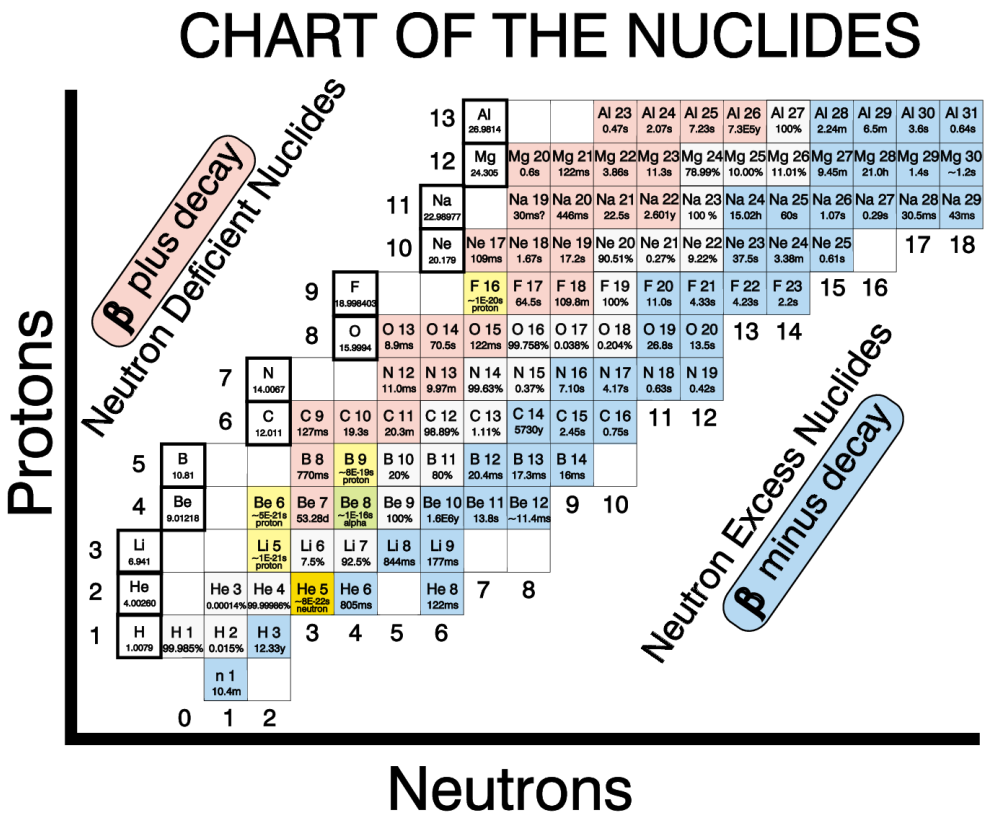


Abb. 23.31: Radioaktiver Zerfall der leichten Elemente im Periodensystem (Wasserstoff bis Aluminium) über β-Strahlung.

lang. Die großen Halbwertszeiten deuten darauf hin, dass die Stärke der Wechselwirkung gering ist. Die Reaktion wird über die vierte der vier fundamentalen Wechselwirkungen, der Schwachen Wechselwirkung eingeleitet.[34] Alle Teilchen mit Ausnahme des Photons unterliegen der Schwachen Wechselwirkung und hier verbirgt sich der EINZIGE Mecha-

[34] *Lexikon:* Die Reichweite und die Stärke der fundamentalen Wechselwirkungen liegen weit auseinander. Gravitation und elektromagnetische Wechselwirkung werden durch ein 1/Abstand Gesetz beschrieben und haben im Prinzip eine Reichweite von Unendlich. Bei der Starken und der Schwachen Wechselwirkung ist das anders. Die Starke Wechselwirkung hat eine Reichweite von nur 10^{-15} m. Die Schwache Wechselwirkung ist mit 10^{-18} m noch kurzreichweitiger. Auf makroskopischer Längenskala spielen diese beiden Kräfte also gar keine Rolle und Teilchen sind darüber hinaus, in Bezug auf die Starke Wechselwirkung, wählerisch. Zwischen zwei Elektronen und das gilt für alle Leptonen wie Myon und Neutrino, gibt es beispielsweise keine Starke Wechselwirkung. Wirken alle vier fundamentalen Kräfte, ist die Starke Wechselwirkung dagegen die stärkste, gefolgt von der elektromagnetischen, der Schwachen Wechselwirkung und abgeschlagen der Gravitation.

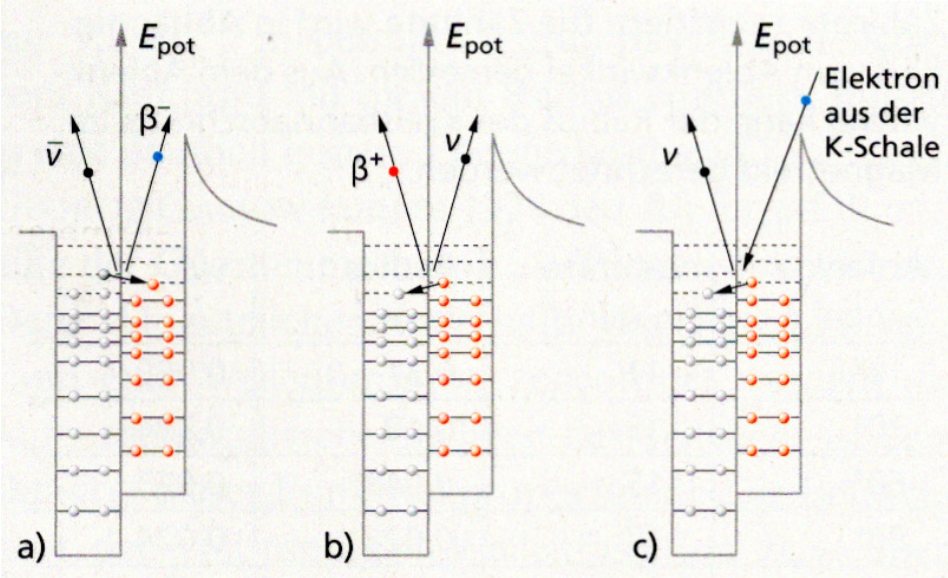


Abb. 23.32: β-Zerfall und K-Einfang im Kern.

nismus der Interaktion von Neutrinos und Antineutrinos mit Materie.[35] [36] Beispiele sind der Zerfall eines geladenen Pions in ein Myon und der eines Myons in ein Elektron. Um die Stärke der Wechselwirkungen in Relation zu setzen betrachten wir $\pi^{\pm}$ und π^0. Die durch die Schwache Wechselwirkung verursachte Zerfälle von $\pi^{\pm}$ weisen Halbwertszeiten auf, die um acht Größenordnungen höher liegen als der durch die elektromagnetische Wechselwirkung eingeleitete Zerfall von π^0.

Den Umwandlungsprozess kann man nur auf der Ebene der Quarks verstehen.[37] Der β-Zerfall spielt weiter eine erhebliche Rolle bei den Fusionsprozessen in der Sonne, da in der Elementarreaktion vier Wasserstoffatomkerne zu einem Heliumkern verschmelzen.

[35] Im November 1950 wurde an der Columbia University während der Kaffeestunde eine Diskussion über mögliche Experimente zum Nachweis der schwachen Wechselwirkungen geführt. Die Forscher, unter anderem T.D. Lee überlegten, welche hochenergetischen Teilchen wie Protonen, Elektronen, Pionen oder Myonen wohl in Frage kämen wären. Wie sich herausstellte, war keiner der Teilchen geeignet, da alle unvermeidlich der elektromagnetischen und starken Wechselwirkungen unterliegen. Für einen Nachweis der schwachen Wechselwirkungen wäre dies störend. Einer der Teilnehmer, Melvin Schwartz, erkannte, dass Neutrinos allein der schwachen Wechselwirkungen unterliegen und daher als ideale Sondes für die schwache Wechselwirkungen dienen könnten. Trotz der Tatsache, dass Neutrinos sehr schwach wechselwirken, ist die Untersuchung von Neutrinos nicht absolut unmöglich [**? ?**].

[36] The Nobel Prize in Physics 1957 was awarded jointly to Chen Ning Yang and Tsung-Dao (T.D.) Lee *for their penetrating investigation of the so-called parity laws which has led to important discoveries regarding the elementary particles*

[37] The Nobel Prize in Physics 2008 was divided, one half awarded to Yoichiro Nambu *for the discovery of the mechanism of spontaneous broken symmetry in subatomic physics*, the other half jointly to Makoto Kobayashi and Toshihide Maskawa *for the discovery of the origin of the broken symmetry which predicts the existence of at least three families of quarks in nature.*

Aus den zwei Protonen kann Deuterium entstehen, wenn sich eines der Protonen ein Neutron umwandelt. Diese Reaktion erlaubt der β^+-Zerfall. Ohne diesen Prozess käme es nicht zur Bildung von Helium und die Fusionskaskade wäre unterbrochen. Nur weil die schwache Wechselwirkung eine äußerst geringe Reaktionsrate hat, strahlt die Sonne seid $4.5 \cdot 10^6$ Jahren gleichmäßig hell und das wird sie auch noch in den nächsten Milliarden Jahre tun.

High-precision measurement of the W boson mass with the CDF II detector [?]: The mass of the W boson, a mediator of the weak force between elementary particles, is tightly constrained by the symmetries of the standard model of particle physics. The Higgs boson was the last missing component of the model. After observation of the Higgs boson, a measurement of the W boson mass provides a stringent test of the model. We measure the W boson mass, M_W, using data corresponding to 8.8 inverse femtobarns of integrated luminosity collected in proton-antiproton collisions at a 1.96 tera-electron volt center-of-mass energy with the CDF II detector at the Fermilab Tevatron collider. A sample of approximately 4 million W boson candidates is used to obtain $M_W = 80\,433.5 \pm 9.4\,\mathrm{MeV}/c^2$, the precision of which exceeds that of all previous measurements combined (stat, statistical uncertainty; syst, systematic uncertainty). This measurement is in significant tension with the standard model expectation.

Betrachtet man die Ruhemassen wird klar, dass sich nur ein freies Neutron in einem β^--Zerfall in ein Proton umwandeln kann.

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \tag{23.34}$$

Warum zerfällt das Neutron nicht im α-Teilchen? Der entsprechende Reaktionskanal wäre

$$\alpha \to^4 \mathrm{Li} + e^- + \bar{\nu}_e \tag{23.35}$$

Da die Ruhemasse des α-Teilchens aber geringer ist als die Ruhemasse des Lithiumkerns steht dieser Zerfallskanal nicht zur Verfügung.

Ein Proton kann sich nur im Atomkern in ein Neutron umwandeln, da $m_p < m_n$. Was geht, ist beispielsweise

$$^{11}\mathrm{C} \to {}^{11}\mathrm{Be} + e^+ + \nu_e \tag{23.36}$$
$$^{23}\mathrm{Mg} \to {}^{23}\mathrm{Na} + e^+ + \nu_e \tag{23.37}$$
$$^{41}\mathrm{Sc} \to {}^{41}\mathrm{Ca} + e^+ + \nu_e \tag{23.38}$$

Eine Besonderheit zeigt sich im Vergleich der Energiespektren. Abb. 23.33 zeigt β-Zerfälle von Cu-64. Im unteren Spektrum fehlen niederenergetische Elektronen, was darauf hindeutet das die Teilchen durch die positive Ladung des Kerns abgestoßen werden. Hier handelt es sich offensichtlich um die Emission von Positronen. Insgesamt verschiebt sich der Schwerpunkt der kinetischen Energien zu höheren kinetischen Energien.

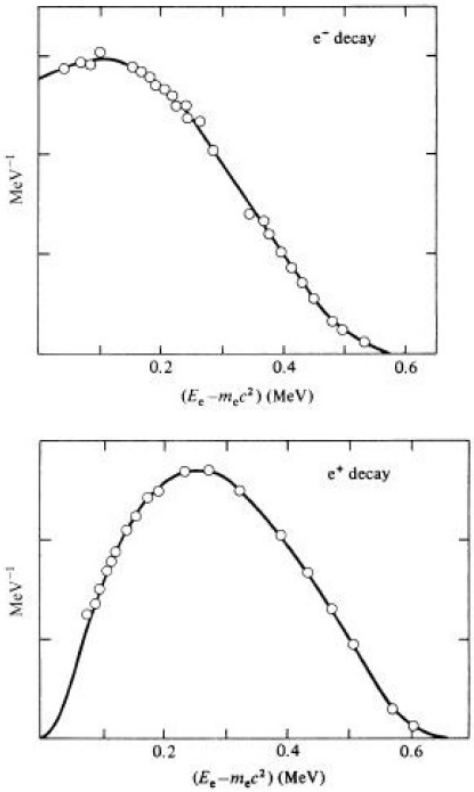


Abb. 23.33: Verteilung der kinetischen Energien der Elektronen nach dem β^-- (oben) und β^+-Zerfall (unten) von ^{64}Cu. Aufgrund der Impuls- und Energieerhaltung sollten Elektron und Positron eine maximale Kinetische Energie nach dem Zerfall des Kerns erreichen. Die Rückstoßenergie des Kerns kann dabei vernachlässigt werden. Um die Form des Spektrums zu verstehen, muss man annehmen, dass in dem Prozess unbekannte Teilchen zur Energie- und Impulsbilanz beitragen. Wie sich herausstellt, sind dies die Neutrinos [**?**].

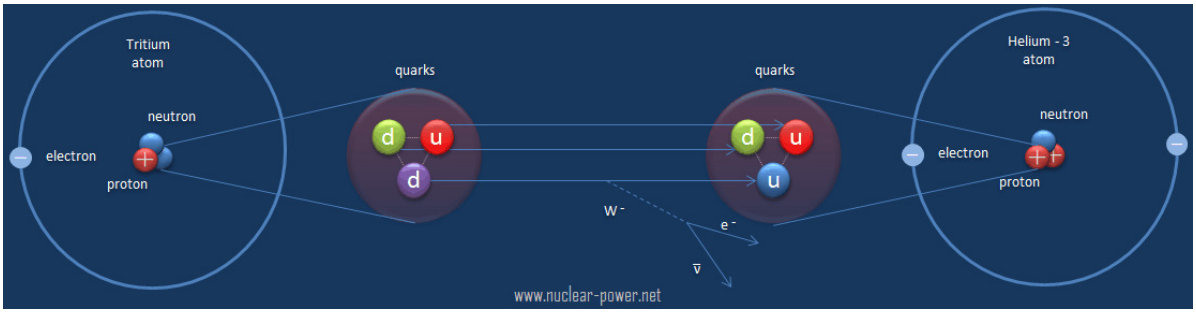


Abb. 23.34: Der β-Zerfall wird hervorgerufen durch die Schwache Wechselwirkung und wird auf der Ebene der Quarks ausgelöst.

Die Wahrscheinlichkeit für die Wechselwirkung eines Neutrinos mit Materie kann man folgendermaßen illustrieren. Beim Durchqueren der Erde ist die Chance, dass EINE Wechselwirkung stattfindet nur 10^{-12}. Auch die enorme Anzahl von Sonnenneutrinos[38] führen deshalb nicht zu einer Reaktion.[39]

K-Einfang

Jedes Nuklid, dass über einen β^+-Emission zerfällt, kann ebenfalls über den Einfang von Elektronen instabil werden und zerfallen, siehe Abb. 23.32. Eine Reaktion ist beispielsweise

$$^7\mathrm{Be} + e^- \rightarrow ^7\mathrm{Li} + \nu_e \tag{23.39}$$

Insbesondere in schweren Kernen tritt dieser Prozess häufig auf. Die aus der hohen Kernladung resultierenden engen Elektronenbahnen um den Kern, lassen diese Reaktion häufiger zu.

$$^0_{-1}e + ^1_1 p \rightarrow ^1_0 n + ^0_0 \nu \tag{23.40}$$

Die Reaktionsprodukte sind ein Neutron und ein Neutrino. Aufgrund der Energie- und Impulserhaltung und der geringen Masse überträgt sich im Prozess nahezu die gesamte kinetische Energie auf das Neutrino. Das Neutron erhält nur etwa einige eV an Rückstoßenergie. Einige Kerne zerfallen nur über Elektroneneinfang, wenn die Differenz von Ausgangs- und Endprodukt geringer ist als die Masse des β^+. Die Umwandlung eines Protons in ein Neutron ergibt die Reaktionsgleichung:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu \tag{23.41}$$

Die Absorption eines Elektrons durch einen Kerns ist äquivalent zu der Emission eines Positrons:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu \tag{23.42}$$

In ähnlicher Weise ist die Absorption eine Antineutrinos äquivalent zur Emission eines Positrons:

$$p + \overline{\nu} \rightarrow n + e^+ \tag{23.43}$$

Diesen Prozess nennt man den inversen β-Zerfall. Diese Reaktion wird genutzt, um Neutrinos nachzuweisen, beispielsweise um das Problem der Sonnenneutrinos zu klären (Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*) [**?**].

β^--Zerfall

Die Reaktionsgleichung für einen β^- Zerfallsprozess lautet:

$$^A_Z X \rightarrow ^A_{Z+1} Y + e^- + \overline{\nu_e} \tag{23.44}$$

[38] Jede Sekunde durchströmen 70 Milliarden Neutrinos die Fläche eines Daumennagels

[39] Anderes Beispiel: Ein Neutrino durchquert einen Eisenblock einer Länge von 100 LJ bevor es im Mittel zu EINER Wechselwirkung kommt.

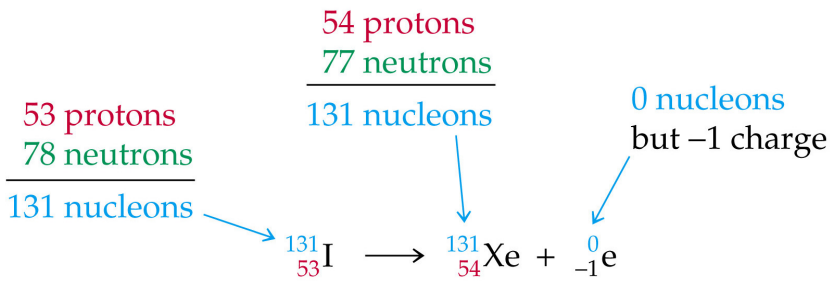
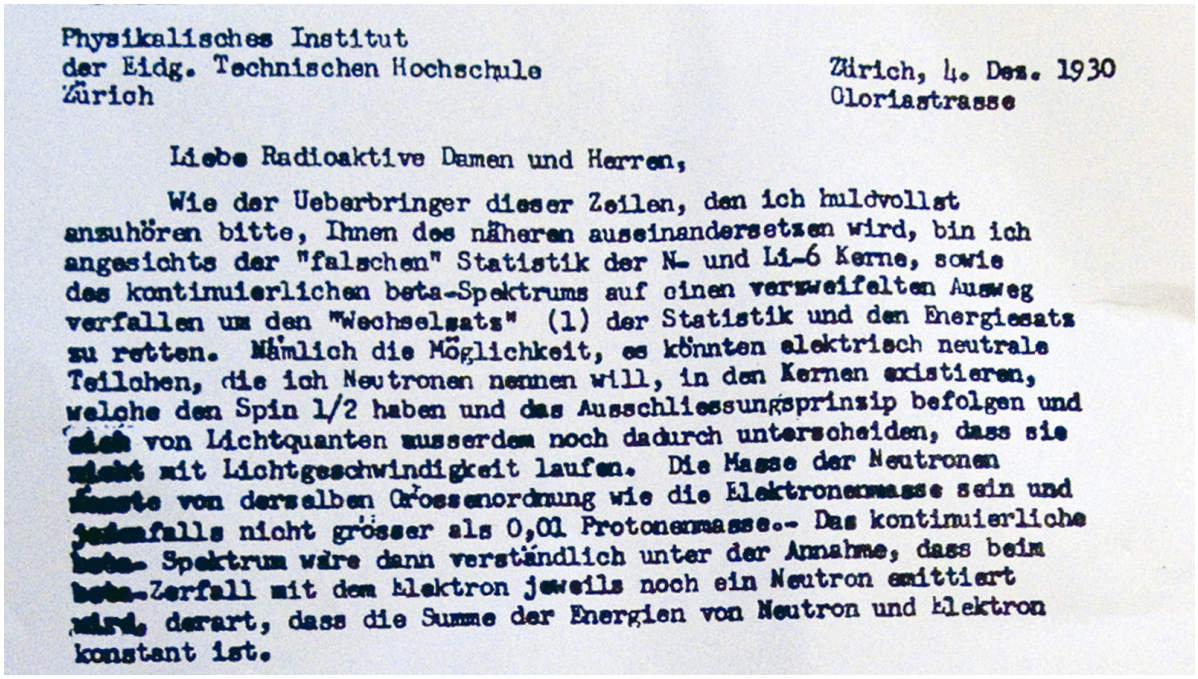


Abb. 23.35: β^--Zerfall von Jod-131.

Abb. 23.35 zeigt einen solchen β^-Zerfall am Beispiel von Jod, wobei das Augenmerk auf der Erhaltung der Nukleonenzahl liegt. Durch die Umwandlung eines Protons in ein Neutron muss, aus Gründen der Ladungserhaltung, ein negatives Teilchen das System verlassen. Das zugehörige β-Teilchen ist das Elektron. Es entsteht erst im Moment des Zerfalls. Zusammenfassend kann man für diesen Prozess feststellen, dass die Ordnungszahl um Eins zunimmt. Der resultierende Kern ist in dem Beispiel somit nicht mehr Jod sondern Xenon. Es kommt also beim β-Zerfall zu einer Umwandlung in ein anderes chemisches Element. Allerdings ändert sich, im Gegensatz zum α-Zerfall die Anzahl der Nukleonen nicht.

Interessant wird es, wenn man die Energien der emittierten β^--Teilchen aufzeichnet. Abb. 23.33 zeigt ein gemessenes Spektrum. Überraschender Weise beobachtet man keine definierte Energie der Elektronen, sondern eine breite Energieverteilung. Da die freiwerdende Bindungsenergie aus dem Zerfall (Kapitel *Einsteingleichung*) genau definiert ist, erwartet man aufgrund der Energie- und Impulserhaltung eigentlich eine fest vorgegebene Energie der Elektronen. Da der Kern im Vergleich zum Elektron deutlich schwerer ist, erhält das β-Teilchen nahezu die gesamt kinetische Energie im Rückstoßprozess. Man könnte vermuten, dass es zu einem Energieverlust kommt, wenn das aus dem Kern emittierte Elektron mit den Elektronen der Atomhülle stößt und sich dadurch die Form des Energiespektrums ergibt. Um diese Vermutung zu überprüfen, wurde ein β-Emitter in ein Kalorimeter eingebracht und die Änderung der Temperatur als Maß für den Energietransfer bestimmt. Der Wert der Temperaturänderung ergibt sich aus der Anzahl der β-Zerfälle und der mittleren Energie der Elektronen aus dem Zerfall. Wie sich herausstellte ist der gefundene Wert nahe dem Wert der mittleren Energie der emittierten Elektronen. Die gemessene Energieverteilung entspricht der Energieverteilung der Elektronen des β-Emitters. Die berechnete maximale kinetische Energie der Elektronen wird aber tatsächlich beobachtet. Diese Ergebnisse hat die Forscher zutiefst verunsichert, da hier scheinbar der Impulserhaltungssatz verletzt zu sein schien. Man kannte kein System, dass dieses Verhalten zeigte. Aktuell ist KEIN Prozess bekannt, in dem der Impulserhaltungssatz verletzt wäre!



Physikalisches Institut
der Eidg. Technischen Hochschule
Zürich

Zürich, 4. Dez. 1930
Gloriastrasse

Liebe Radioaktive Damen und Herren,

Wie der Ueberbringer dieser Zeilen, den ich huldvollst anzuhören bitte, Ihnen des näheren auseinandersetzen wird, bin ich angesichts der "falschen" Statistik der N- und Li-6 Kerne, sowie des kontinuierlichen beta-Spektrums auf einen verzweifelten Ausweg verfallen um den "Wechselsatz" (1) der Statistik und den Energiesatz zu retten. Nämlich die Möglichkeit, es könnten elektrisch neutrale Teilchen, die ich Neutronen nennen will, in den Kernen existieren, welche den Spin 1/2 haben und das Ausschliessungsprinzip befolgen und sich von Lichtquanten ausserdem noch dadurch unterscheiden, dass sie nicht mit Lichtgeschwindigkeit laufen. Die Masse der Neutronen müsste von derselben Grössenordnung wie die Elektronenmasse sein und jedenfalls nicht grösser als 0,01 Protonenmasse.- Das kontinuierliche beta- Spektrum wäre dann verständlich unter der Annahme, dass beim beta-Zerfall mit dem Elektron jeweils noch ein Neutron emittiert wird, derart, dass die Summe der Energien von Neutron und Elektron konstant ist.

Abb. 23.36: Brief von Wolfgang Pauli, geschrieben am 4. Dez. 1930 in Zürich.

Wolfgang Pauli [40] hatte 1930 die zündende Idee und sagte voraus, dass im β-Zerfall ein weiteres, gut getarntes Teilchen erzeugt wird, welches Energie und Impuls aufnimmt, siehe Abb. 23.36. Fermi[41] nahm die Idee Paulis auf und entwickelte darauf aufbauend eine Theorie des β-Zerfalls und prägte den Begriff Neutrino. Das von Pauli postulierte Teilchen ist das Antineutrino und wurde erst 1956 im Rahmen des so genannten Poltergeist-Experiments nachgewiesen [**?**].[42] Wie sich herausstellt, wechselwirken Neutrinos kaum mit ihrer Umwelt.Wie gelingt es trotzdem, das Neutrinos nachzuweisen. Die Idee der Forscher war, die umgekehrten β-Zerfall zu untersuchen. Durch die Wechselwirkung des Antineutrino mit einem Proton kommt es zum inversen β-Zerfall, d.h. das Proton wandelt sich in ein Neutron unter Aussendung eines Positrons um.

$$p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+ \tag{23.45}$$

Elektron-Positron Annilihation führt zu Emission von γ-Quanten.[43] Durch den Nachweis dieser Prozesse gelingt der indirekte Nachweis des Neutrinos. Abb. 23.37 zeigt ein Sche-

[40] The Nobel Prize in Physics 1945 was awarded to Wolfgang Pauli *for the discovery of the Exclusion Principle, also called the Pauli Principle.*

[41] The Nobel Prize in Physics 1938 was awarded to Enrico Fermi *for his demonstrations of the existence of new radioactive elements produced by neutron irradiation, and for his related discovery of nuclear reactions brought about by slow neutrons.*

[42] The Nobel Prize in Physics 1995 was awarded *for pioneering experimental contributions to lepton physics* jointly with one half to Martin L. Perl *for the discovery of the tau lepton* and with one half to Frederick Reines *for the detection of the neutrino.*

[43] Wo findet man Antimaterie? Wenn die Gaswolke, die eine Materiegalaxie umgibt, mit einer Gaswolke in Kontakt kommt, die eine Antimateriegalaxie umgibt, würde an der Kontaktstelle eine enorme

ma. Die Forscher verwendeten einen Tank mit Wasser und Spuren von Cadmiumchlorid, um Protonen bereitzustellen. Als Hinweis auf die gesuchte Reaktion suchten sie nach kurz aufeinander folgenden γ-Blitzen. Der erste Blitz stammt von der e^+e^- Paarvernichtung und der zweite aus der Aktivierung von Cd durch das entstandene Neutron. Dieser zerfällt ebenfalls unter Aussendung eines γ-Photons. In einer fünfmonatigen Kampagne mit einer Beobachtungszeit von 1000 h gelang es den Forscher den Nachweis zu erbringen. Um einen Eindruck von den Schwierigkeiten zu vermitteln, an dieser Stelle die Anzahl der Antineutrino-Ereignisse pro Stunde: DREI! Cowan und Reines hatten einen Wirkungsquerschnitt der Reaktion von rund $6 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{cm}^2$ erwartet. Die Messung ergab $6.3 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{cm}^2$. Nicht schlecht abgeschätzt! In einem Brief vom 14. Juni 1956 an Wolfgang Pauli berichten sie, dass sie die Reaktion nachgewiesen hätten und γ-Photonen in einem Zeitabstand von 5.5 μs beobachtet hatten.

Link to *The Neutrino with Dr. Clyde L. Cowan*

Hinweise darauf, dass es möglicherweise unterschiedliche Arten von Neutrinos geben könnte, ergaben sich aus Experimenten zum Myonzerfall, den man nur verstehen kann, wenn man annimmt, dass es sich um einen 3-Körperprozess handelt.

$$\mu^- \to e^- + \nu_1 + \bar{\nu}_2 \tag{23.46}$$

In einem Experiment, das auf einer Idee von Melvin Schwartz beruhte [**?**], wurden Neutrinos aus dem Myonzerfall auf ein dichtes Target geleitet. Innerhalb von 25 Tagen traten 10^{14} Neutrinos in Wechselwirkung mit der Probe. 51 Myonen, aber kein Elektron, wurde im Target durch die Neutrinos erzeugt, was bewies, dass man mit Myon-Neutrinos Myonen aber keine Elektronen erzeugen kann. Im Gegensatz dazu erzeugen Elektron-Neutrinos Elektronen, aber keine Myonen[**?**].[44]

Measurement of the neutron lifetime using a magneto-gravitational trap and in situ detection[?]: Unlike the proton, whose lifetime is longer than the age of the universe, a free neutron decays with a lifetime of about 15 minutes. Measuring the exact lifetime of neutrons is surprisingly tricky; putting them in a container and monitoring their decay can lead to errors because some neutrons will be lost owing to interactions with the container walls. To overcome this problem, Pattie et al. measured the lifetime in a trap where ultracold polarized neutrons were levitated by magnetic fields, precluding interactions with the trap walls (see the Perspective by Mumm). This more precise determination of the neutron lifetime will aid our understanding of how the first nuclei formed after the Big Bang.

Energiemenge in Form von γ-Strahlen mit definierter Photonenenergie (511 keV) freigesetzt. Einen solchen γ-Ausbruch hat bislang man nicht beobachtet, woraus man schließen kann, dass zumindest unsere Milchstraße aus normaler Materie besteht.

[44]The Nobel Prize in Physics 1988 was awarded jointly to Leon M. Lederman, Melvin Schwartz and Jack Steinberger *for the neutrino beam method and the demonstration of the doublet structure of the leptons through the discovery of the muon neutrino*

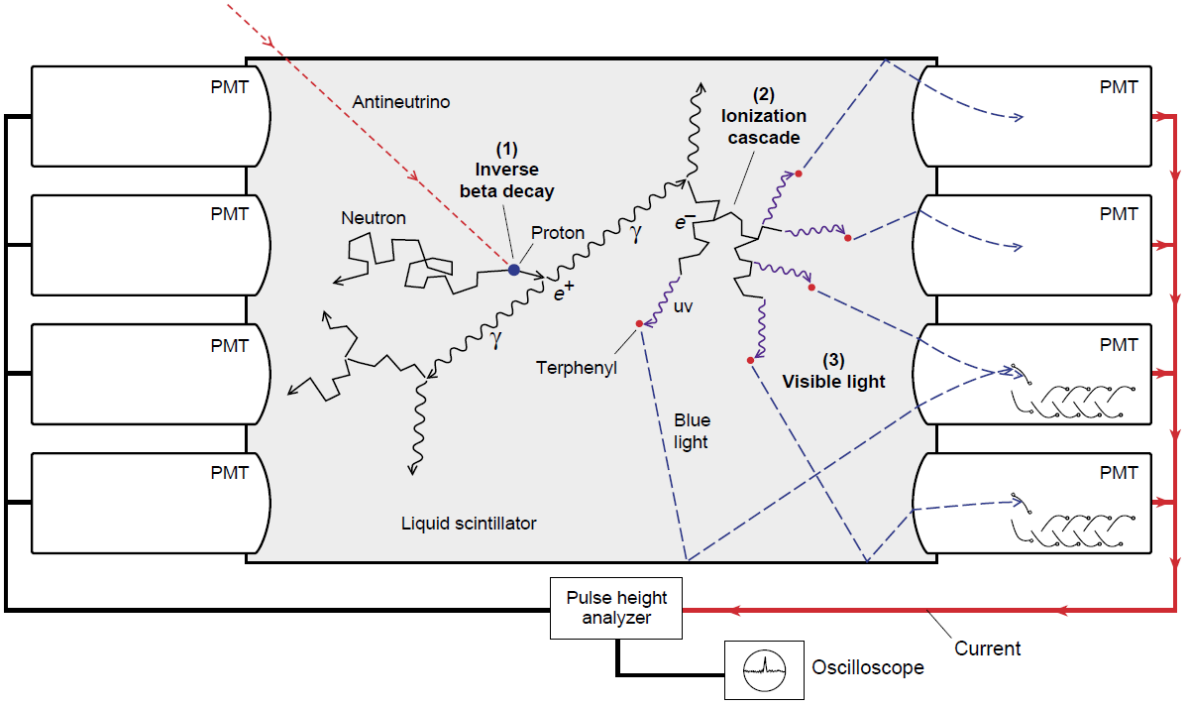


Abb. 23.37: Flüssigkeitsszintillationszähler zum Nachweis des Positrons aus dem inversen β-Zerfall, wie er im Experiment von Cowan et al. [**?**] verwendet wurde.

Kann ein Proton in einem β^+-Zerfall in ein Neutron zerfalen? NEIN, da die Masse des Protons mit m_p=1.673 $\cdot$ 10^{-27} kg geringer ist, als die Masse des Neutrons (m_n=1.675 $\cdot$ 10^{-27} kg), siehe Kapitel *Einsteingleichung* . Ein freies Neutron zerfällt dagegen (siehe Abb. 23.39) [**?**], da die Massen von Proton, Elektron und Antineutrino geringer sind als m_n:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu}_e \tag{23.47}$$

Diese Frage kann aber umgekehrt gestellt werden: Warum zerfallen manche Teilchen wie beispielsweise Elektronen und Protonen nicht, wenn ihr Zerfall den Energieerhaltungssatz nicht verletzt? Die Antwort ist: Aufgrund anderer Erhaltungssätze! Elektronen sind beispielsweise die leichtesten (511 keV) der geladenen Teilchen. Aufgrund der Ladungserhaltung können sich Elektronen nicht in leichtere Teilchen ohne elektrische Ladung umwandeln. Massereichere geladene Teilchen wie Myonen oder Mesonen zerfallen auf unterschiedlichen Zerfallswegen letztendlich in Elektronen. Protonen sind dagegen etwa 1800 mal schwerer als Elektronen und stabil. Noch nie wurde beobachtet, dass ein Proton in das leichtere Positron zerfallen wäre.

β^+-Zerfall und das Positron

Paul Dirac[45] stellte 1928 eine Quantentheorie auf der Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie auf. Anhand dieses Ansatzes konnten Details des Wasserstoffspektrums geklärt werden, die durch die Schrödinger-Gleichung nicht erfasst wurden. Interessant ist, dass die Lösungen der so genannten Dirac-Gleichung die Existenz eines positiven geladenen Elektrons vorhersagten. Der Nachweis des Positron erfolgte über Messungen der kosmischen Höhenstrahlung. Abb. 23.38 zeigt den experimentellen Nachweis[46] durch Anderson [**?**].[47] Das Positron e^+ hat dieselbe Masse wie das Elektron und ist positiv geladen. Ein typischer β^+ Emitter ist Na-22 mit einer Halbwertszeit von 2.6 Jahren.

$$^{22}_{11}\mathrm{Na} \;\rightarrow\; ^{22}_{10}\mathrm{Ne} \;+\; e^+ \;+\; \nu \tag{23.48}$$

Das Positron kann leicht anhand seiner e/m- Verhältnisses identifiziert werden. Kerne, die β^+-Strahler sind, zerfallen in der Regel auch durch K-Einfang.

$$^{22}_{11}\mathrm{Na} \;+\; e^- \rightarrow\; ^{22}_{10}\mathrm{Ne} \;+\; \nu \tag{23.49}$$

In diesem Fall wird das Loch in der K-Schale durch ein schwächer gebundenes Elektron aufgefüllt und es kommt zur Emission eines Röntgenphotons. Der Prozess des Einfangs ist am wahrscheinlichsten, wenn es sich um das s-Elektron der K-Schale handelt, da insbesondere dieses eine hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Ort des Kerns hat. Bei Elektronen in anderen ℓ-Zuständen ist die Wellenfunktion am Kernort praktisch NULL. Die Wahrscheinlichkeit für einen L-Einfang eines $2s$-Elektrons ist gegenüber dem K-Einfang deutlich geringer. Ein Beispiel für eine solche radioaktive Probe ist Eisen-56:

$$^{56}\mathrm{Fe} \;+\; e^- \rightarrow\; ^{55}\mathrm{Mn} \;+\; \gamma \tag{23.50}$$

Die dabei ausgesendete Strahlung hat einen Photonenenergie von 5.36 keV. Quellen dieser Art sind handlich. Allerdings ist der Photonenfluss gegenüber Röntgenquellen deutlich geringer.

Anwendungen[4LP]

Ein Beispiel aus der Energietechnik

Betavoltaik basiert auf dem Prinzip, unter Verwendung von Halbleiterübergängen, elektrischen Strom aus β-Teilchen zu erzeugen. Im Gegensatz zu anderen Verfahren der Ausnutzung nuklearer Energiequellen verwenden Betavoltaik-Geräte einen nicht-thermischen

[45] The Nobel Prize in Physics 1933 was awarded jointly to Erwin Schrödinger and Paul Adrien Maurice Dirac *for the discovery of new productive forms of atomic theory.*

[46] One lesson to be learned from cosmic-ray research is the need to examine carefully any rare but apparently strange observations, and not to discard them as part of the background noise that many particle-physics experiments accumulate. The discovery of antimatter rested on the detection of a single track of a lone positron. Similarly, the discovery of some kaons was based on observations of single events. Although some discoveries may emerge from the statistical analysis of large quantities of data, we should remember that important discoveries can still be established by a single observation [**?**]

[47] The Nobel Prize in Physics 1936 was divided equally between Victor Franz Hess *for his discovery of cosmic radiation* and Carl David Anderson *for his discovery of the positron.*

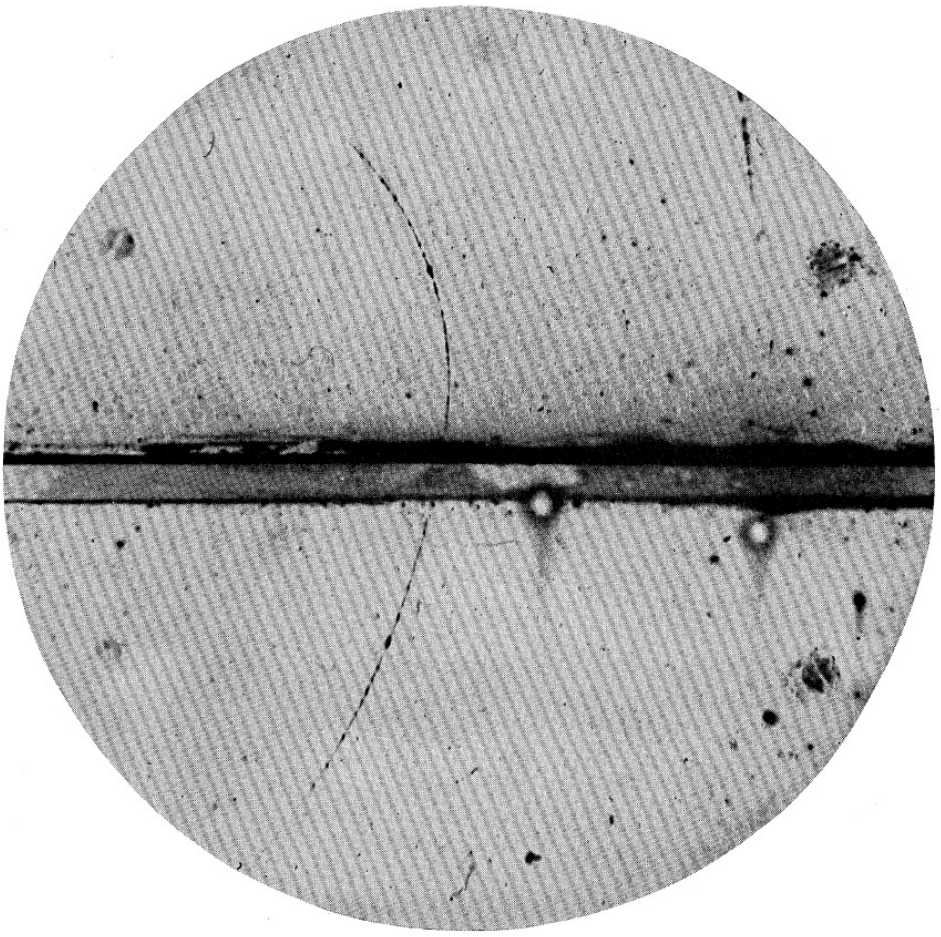


FIG. 1. A 63 million volt positron ($H\rho = 2.1 \times 10^5$ gauss-cm) passing through a 6 mm lead plate and emerging as a 23 million volt positron ($H\rho = 7.5 \times 10^4$ gauss-cm). The length of this latter path is at least ten times greater than the possible length of a proton path of this curvature.

Abb. 23.38: Ein 63 MeV Positron durchquert eine 6 mm dicke Bleiplatte, verliert dabei Energie und rast mit 23 MeV weiter. Anderson erkannte, dass man die Bahn dieses Teilchens NICHT einem Proton zuordnen konnte. Das Teilchen musste deutlich leichter sein [**?**].

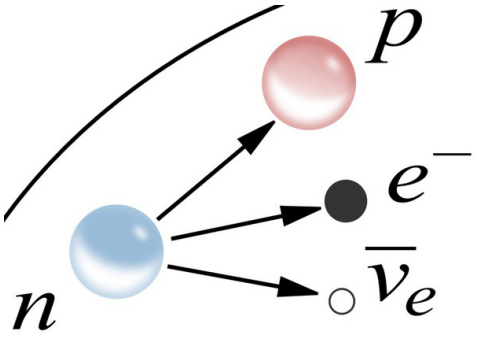


Abb. 23.39: Ein freies Neutron ist nicht stabil, sondern zerfällt in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino.

Umwandlungsprozess. Elektron-Loch-Paare werden durch die Ionisationsspur erzeugt, wenn die β-Teilchen den Halbleiter durchqueren. Betavoltaik-Stromquellen eignen sich gut für Langzeitanwendungen mit geringem Stromverbrauch, wie beispielsweise in Herzschrittmachern oder in Weltraummissionen.

A review of nuclear batteries [?]: This paper reviews recent efforts in the literature to miniaturize nuclear battery systems. The potential of a nuclear battery for longer shelf-life and higher energy density when compared with other modes of energy storage make them an attractive alternative to investigate. The performance of nuclear batteries is a function of the radioisotope(s), radiation transport properties and energy conversion transducers. The energy conversion mechanisms vary significantly between different nuclear battery types, where the radioisotope thermoelectric generator, or RTG, is typically considered a performance standard for all nuclear battery types. The energy conversion efficiency of non-thermal-type nuclear batteries requires that the two governing scale lengths of the system, the range of ionizing radiation and the size of the transducer, be well-matched. Natural mismatches between these two properties have been the limiting factor in the energy conversion efficiency of small-scale nuclear batteries. Power density is also a critical performance factor and is determined by the interface of the radioisotope to the transducer. Solid radioisotopes are typically coated on the transducer, forcing the cell power density to scale with the surface area (limiting power density). Methods which embed isotopes within the transducer allow the power density to scale with cell volume (maximizing power density). Other issues that are examined include the limitations of shelf-life due to radiation damage in the transducers and the supply of radioisotopes to sustain a commercial enterprise. This review of recent theoretical and experimental literature indicates that the physics of nuclear batteries do not currently support the objectives of miniaturization, high efficiency and high power density. Instead, the physics imply that nuclear batteries will be of moderate size and limited power density. The supply of radioisotopes is limited and cannot support large scale commercialization. Niche applications for nuclear batteries exist, and advances in materials science may enable the development of high-efficiency solid-state nuclear batteries in the near term.

Ein Beispiel aus der Sonnenforschung

Der β^+-Zerfall spielt für die Fusionsprozesse, die in der Sonne stattfinden, eine wichtige Rolle. Bei der Fusion von vier Wasserstoffatomkernen entsteht ein Helium-4 Kern. Diese Reaktion erfolgt in mehreren Schritten, wobei im Zwischenstadium Deuterium und He-3 gebildet wird, siehe Abb. 23.40. Aus zwei Protonen bildet sich ein Deuteriumkern, wenn sich eines der Protonen durch eine β^+-Reaktion in ein Neutron umwandelt.

$$ {}^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^2_1\mathrm{H} + e^+ + \nu_e + 0.42\,\mathrm{MeV} \tag{23.51} $$

Die Reaktionsrate ist gering und bestimmt die Rate der gesamten Reaktionskette. Die Ursache liegt unter anderem darin, dass sich die Protonen extrem nahe kommen müssen. Dies kann nur bei hinreichend hohen thermischen Energien erfolgen. Tatsächlich erfolgt

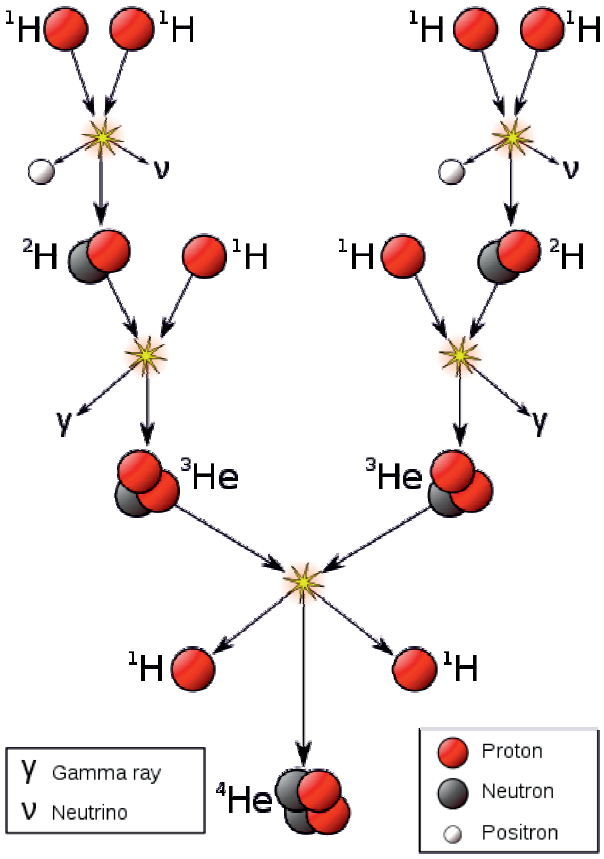


Abb. 23.40: *pp*-Fusions-Reaktionskette, wie er in der Sonnen abläuft.

der Bildungsprozess durch quantenmechanisches Tunneln (siehe Kapitel *Tunneleffekt*). In der Sonne dauert es etwa 10^{10} Jahre, bis zwischen Protonen eine solche Reaktion stattfindet. Das ist im Übrigen der Grund, warum die Sonne einen so langen Lebenszyklus hat.[48] Das entstandene Positron annihiliert bei Stoß mit einem Elektron und es kommt zur Emission von zwei 511 keV γ-Quanten (siehe Kapitel *Einsteingleichung*). Das Neutrino verlässt den Sonnenbereich ohne eine Wechselwirkung (siehe Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt*). Die zugehörige Energie von etwa 0.25 MeV geht dem Energiehaushalt der Sonne verloren. Im Stoß von Proton und Deuteron entsteht in einem weiteren Reaktionsschritt He-3:

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + \gamma + 5.5\,\mathrm{MeV} \tag{23.52} $$

Im letzten Schritt wird He-4 im Stoß zweier He-3 Kerne generiert.

$$ {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2\,{}^{1}_{1}\mathrm{H} + 13\,\mathrm{MeV} \tag{23.53} $$

Die Analyse der Energiebilanz ergibt, dass in dieser Reaktionskette etwa 26 MeV freigesetzt wird. Für den Fusionsprozess sind Temperaturen im Kern der Sonne von 10 bis $14 \cdot 10^6$ K erforderlich.

[48] Wenn diese Reaktion ausgereizt ist, geht die weitere Entwicklung zur Supernova deutlich schneller voran.

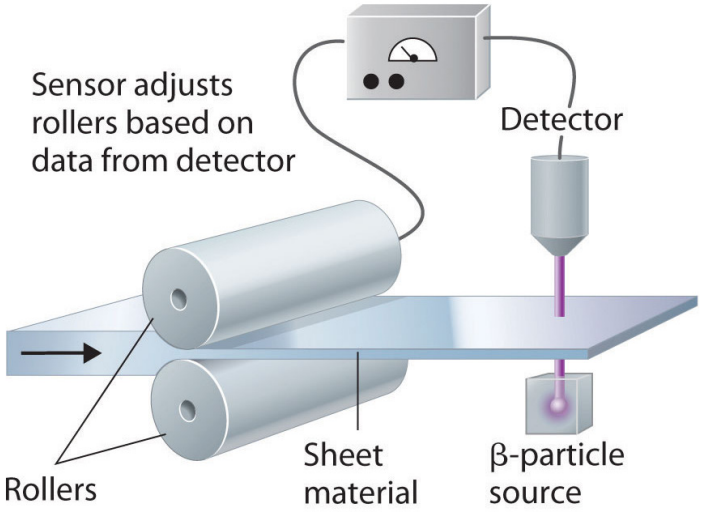


Abb. 23.41: Verwendung radioaktiver Strahlung zur Kontrolle von beispielsweise Blechen. Die von einer Probe absorbierte Strahlung ist proportional zur Dicke des Materials. Die Absorption der Strahlung kann verwendet werden, um die Dicke von Folie und Blechen zu bestimmen. Dazu wird die Probe zwischen β-Strahler und Detektor platziert. Eine Änderung im Transmissionssignal weist auf eine Änderung in der Materialdicke hin.

Ein Beispiel aus der Materialforschung

Eine Anwendungen radioaktiver Stoffe ist die Dickenbestimmung von Materialien wie beispielsweise dünnen Blechen, siehe Abb. 23.41. Dabei nutzt man das Durchdringungsvermögen radioaktiver Strahlung zur Steuerung des Herstellungsprozesses. Ein β-Strahler wird verwendet, weil β-Strahlung Papier oder dünnes Blech durchdringt. Die Intensität der transmittierten Strahlung ist ein Maß für die Dicke der Probe. Für den technische Anwendung verwendet man eine Strahlungsquelle mit langer Halbwertszeit, damit die Aktivität über längere Zeit konstant bleibt. Dazu passt der Bericht aus der OZ, siehe Abb. 23.42.

Bei diesem Gerät handelt es sich um ein tragbares Messinstrument zur schnellen Ermittlung des Füllstandes von Stahlflaschen mit Flüssigkeitsgas und zur Überwachung von Rohrleitungen auf Verstopfung. Es arbeitet mit Gammastrahlen nach dem Durchstrahlungsprinzip. Die beiden Schenkel, welche die Strahlungsquelle und das Zählrohr enthalten, umfassen das Messobjekt und werden an ihm entlang bewegt. Die Impulszahl wird an der leeren Stelle des Behälters nur gering herabgesetzt, wo sich das Füllmedium befindet, erfolgt eine stärkere Dämpfung.

Automatik 10, 394 (1969)



Großalarm in Ribnitz: Schüler finden radioaktive Fässer

Ribnitz-Damgarten. Strahlen-Alarm gestern in Ribnitz-Damgarten (Vorpommern-Rügen). Zwei Jugendliche hatten am Mittwochnachmittag auf dem Gelände des ehemaligen Faserplattenwerkes zwei Metallbehälter mit einem schwarz-gelben Warnsymbol für Radioaktivität entdeckt, wie die Polizei mitteilte.

Erst gestern meldeten sie den Fund bei der Polizei und legten auf dem Revier ein schwarzes Metallschild vor. Auf diesem Schild waren die Worte „Strahlen Schirm" und „Radioaktives Präparat" zu lesen. Auch das Kürzel Cs-137 für Cäsium 137 stand darauf – sowie die Jahreszahl 1972.

Die Jungen kamen sofort ins Krankenhaus. In der Boddenstadt wurde Großalarm ausgelöst. Feuerwehr und Polizei sperrten das Gelände um den Fundort großräumig ab. Spezialeinsatzkräfte in Strahlenanzügen durchsuchten die Industriebrache und fanden die Bleibehälter. Außerhalb der Fässer wurde keine Strahlung festgestellt. Eingehende Begutachtungen an den fest verschlossenen Fässern ergaben jedoch, dass sie wohl radioaktives Material beinhalten. „Wir vermuten, dass es Aufbewahrungsbehälter für Teststrahler sind", sagte Dirk Scholwin von der Feuerwehr Ribnitz-Damgarten. Solche Teststrahler seien im Faserplattenwerk bei der Dichtemessung verwendet worden.

Das Fabrik-Gelände soll in den nächsten Tagen weiträumig nach möglichen weiteren Fässern abgesucht werden. Die beiden Schüler konnten das Krankenhaus wieder verlassen. Sie waren wohl nicht mit Radioaktivität in Berührung gekommen.

Abb. 23.42: Bericht aus der Ostseezeitung vom 27.5.2016

Ein Beispiel aus der Medizin

Der β^+-Zerfall hat Bedeutung Für die dreidimensionale medizinische Bildgebung (Tomographie, PET),[49] siehe Abb. 23.43. Ladungs-, Energie- und Impulserhaltung spielen eine Rolle . Die Reaktionsgleichung lautet:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + e^{+} + \nu_e \tag{23.54} $$

Die Grundlage der Methode ist die Annihilation in zwei Lichtquanten beim Kontakt des emittierten Positrons mit einem Elektron:

$$ e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\,\gamma \tag{23.55} $$

Der Ort der Lichtemission kann mit Hilfe der Koinzidenztechnik gut lokalisiert werden. Aufgrund der geringen Reichweite der Positronen in Gewebe erreicht man eine gute räumliche Auflösung im Bereich von mm. Die zugrundeliegende Physik wird ausführlich im Kapitel *Bildgebende Verfahren* behandelt. PET wird verwendet, um die Physiologie und nicht die Anatomie des Körpers abzubilden und wird in folgenden Bereich der Diagnostik eingesetzt:

- Erkennung und Ausbreitung von Krebs
- Wirksamkeit von Behandlungsplänen
- Blutfluss zum Herzen und Auswirkungen eines Herzinfarkts
- Bewertung von Anomalien im Gehirn wie Tumore und Gedächtnisstörungen
- Abbildung von Gehirn- und Herzfunktionen

[49] PET: positron-emission-tomography

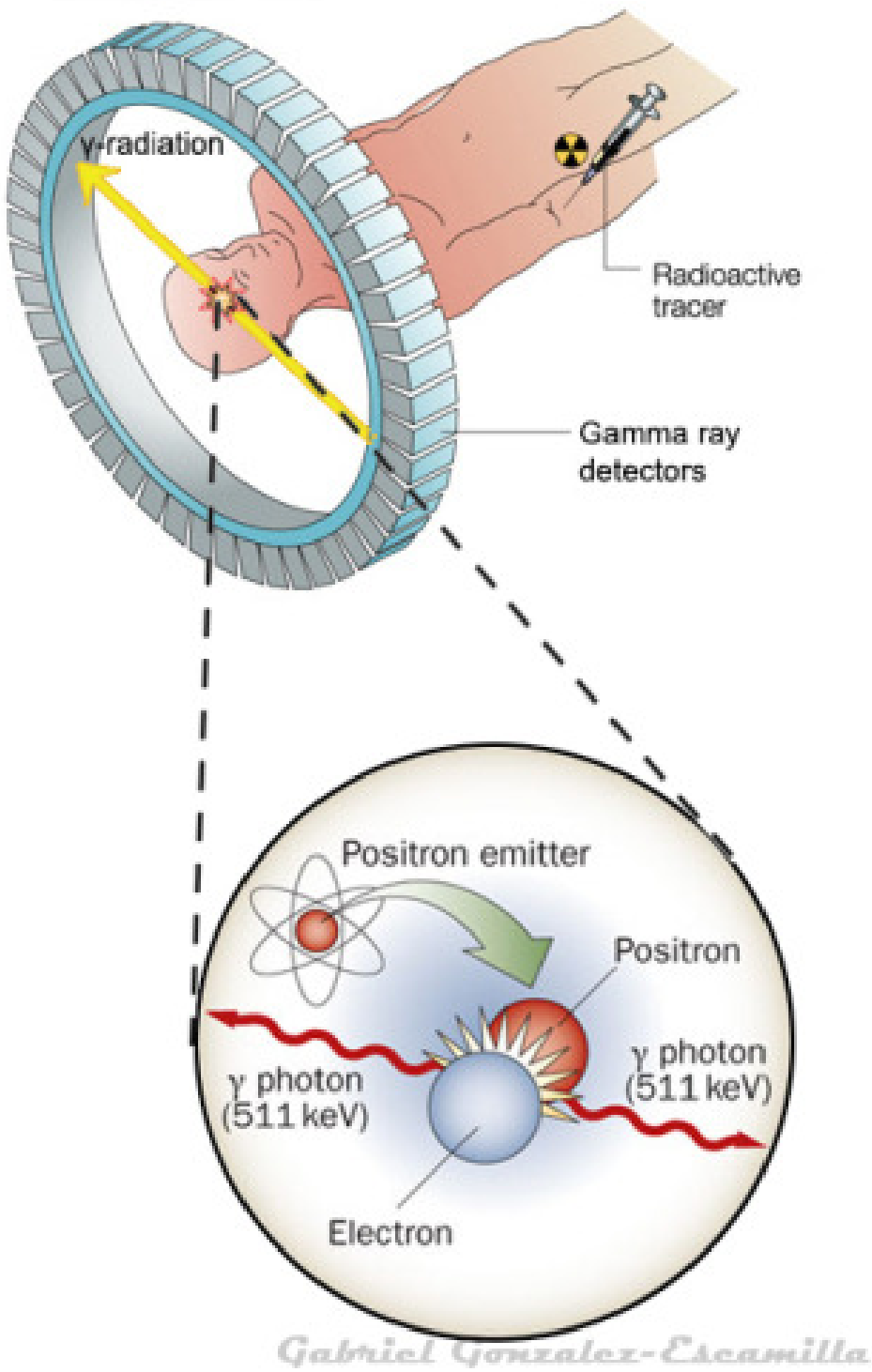


Abb. 23.43: Ausnutzung des β^+-Zerfalls in der medizinischen Anwendung: Positron-Emissions-Tomographie (PET).

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 4.1: An α particle emitted in radioactive decay is accelerated away from the nucleus by electric force. The same is true of positrons in β^+ decay. But what about electrons in β^- decay? How are they able to overcome the electric force pulling them back toward the nucleus, and escape?[50]

(a) The electrons tunnel through a quantum barrier.

(b) Repulsive forces of orbital electrons cancel out the attractive force of the nucleus.

(c) Electrons are launched with greater-than-excape velocity.

(d) The finite wavelength of the electrons enables them to reach out beyond the atom.

Aufgabe 4.2: Erstellen Sie die Reaktionsgleichung für den β^+-Zerfall von Na-22!

$$^{22}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + e^+ + \nu_e$$

Aufgabe 4.3: Im β^- Zerfall wird[51]

(a) Ein Teil der Bindungsenergie wird zur Bildung eines Elektron verwendet.

(b) Ein Neutron zerfällt und emittiert ein Elektron.

(c) Ein Elektron, dass sich schon im Kern befindet wird emittiert.

(d) Ein Elektron aus der Atomhülle wird emittiert.

Aufgabe 4.4: Im radioaktiven Zerfall stammt das Elektron[52]

(a) aus dem Kern des Atoms.

(b) aus einer inneren Schale der Elektronenhülle.

(c) aus der äußersten Elektronenbahn des Atoms.

(d) aus einer Bahn mit Hauptquantenzahl 1.

[50] Antwort: (c)
[51] Antwort: (b)
[52] Antwort: (a)

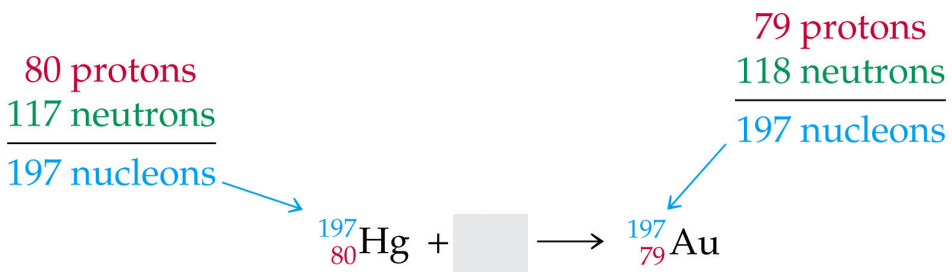


Abb. 23.44:

Aufgabe 4.5: Betrachten Sie den Zerfall des Neutrons, in dem ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino erzeugt wird. Die kinetische Energie des Protons ergibt sich aus der Rückstoßenergie der beiden anderen emittierten Teilchen. Unter der Annahme, das das Neutron ruht, das Antineutrinos masselos und vernachlässigbare Energie hat, ergibt sich die maximale kinetische Energie des Elektrons mit 0.8 MeV. Welche maximale Energie erhält das Antineutrino?[53]

(a) 0.0 MeV.

(b) Deutlich geringer als 0.8 MeV.

(c) Etwa 0.8 MeV.

(d) Deutlich mehr als 0.8 MeV.

Aufgabe 4.6: Wir betrachten den β-Zerfall des Neutrons. Nehmen wir mal an, Elektron und Proton erhalten im Zerfall den gleichen Impuls. Wie ist das klassisch das Verhältnis der kinetischen Energien?

$$\frac{E^e_{kin}}{E^e_{kin}} = \left(\frac{p_e^2}{2 \cdot m_e}\right) \cdot \left(\frac{p_p^2}{2 \cdot m_p}\right)^{-1} = \frac{m_e}{m_p} = \frac{1}{1837}$$

Aufgabe 4.7: Ergänzen Sie die Reaktionsgleichung, die in Abb. 23.44 dargestellt ist!

Aufgabe 4.8: Ergänzen Sie die Reaktionsgleichung, die in Abb. 23.45 dargestellt ist!

Aufgabe 4.9: In einem β^--Zerfall kommt es zur Emission[54]

(a) eines Elektrons aus der Atomhülle.

(b) eines bereits im Kern vorhandenen Elektrons.

(c) eines Elektrons, dass bei der Umwandlung eines Neutrons entsteht.

[53] Antwort: (c)
[54] Antwort: (c)

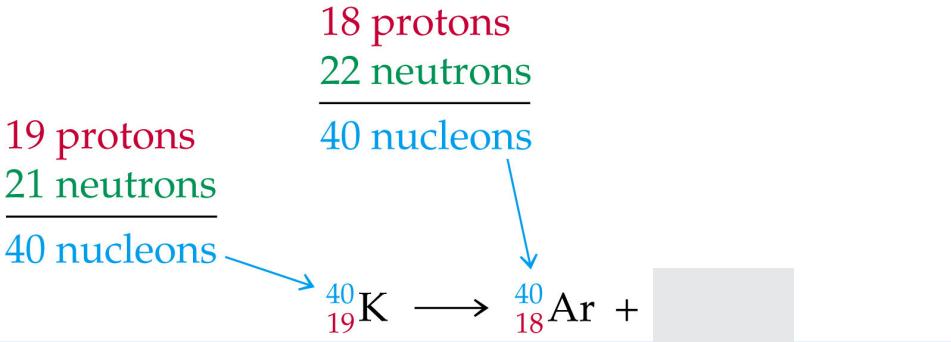


Abb. 23.45:

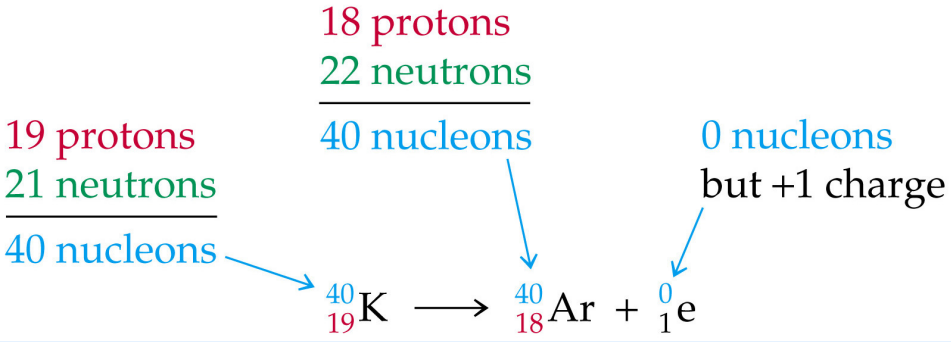


Abb. 23.46: Lösung zur Aufgabe 4.7.

(d) Stimmt alles nicht. Ein Teil der Bindungsenergie wird in ein Elektron umgewandelt.

(e) eines Elektrons, dass bei der Umwandlung eines Protons entsteht.

Aufgabe 4.10: Beim K-Einfang[55]

(a) wechselt ein Elektrons aus dem Kern in die Atomhülle.

[55] Antwort: (e)

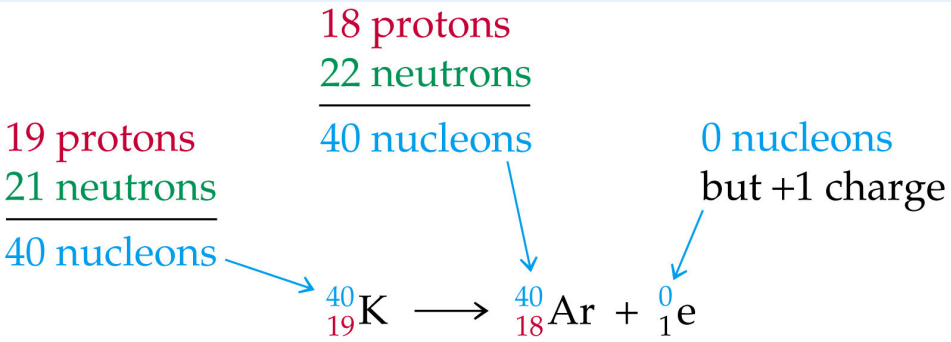


Abb. 23.47: Lösung zur Aufgabe 4.8.

(b) wird ein K-Teilchen vom Kern absorbiert.

(c) wird ein Elektron in ein Neutron umgewandelt.

(d) wird Bindungsenergie umgewandelt.

(e) ein Elektron aus der Atomhülle vom Kern eingefangen und ein Neutron gebildet.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Welcher der drei Kernreaktionen (α, β, γ) erfolgt aufgrund der schwachen Wechselwirkung?
2. Wie lauten die Reaktionsgleichungen für den β^+- und den β^--Zerfall?
3. Welche experimentelle Beobachtung führte zur Entdeckung des Neutrinos?
4. Welche Teilchen erhalten beim β-Zerfall den erheblichen Anteil der freigesetzten Energie?
5. Was ist der Unterschied zwischen einem Photon und einem Neutrino?
6. Warum sind Neutrinos so schwer nachzuweisen?
7. Ein α- und ein β-Teilchen gleicher kinetischer Energie werden im Magnetfeld abgelenkt. Welches Teilchen wird im Magnetfeld stärker abgelenkt?
8. Was sind Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen α- und β-Zerfall?
9. Ein freies Neutron unterliegt einem β-Zerfall mit einer Halbwertszeit von von etwa 10 Minuten. Kann ein freies Proton einen ähnlichen Zerfall vollführen?
10. Star Trek Fans haben bestimmt schon mal den Begriff Antimaterieantrieb gehört. Wie könnte ein solcher Antrieb aussehen?

Gamma-Zerfall



One of our joys was to go into our workroom at night; we then perceived on all sides the feebly luminous silhouettes of the bottles or capsules containing our products. It was really a lovely sight and one always new to us. The glowing tubes looked like faint, fairy lights [**?**].

Marie Curie (1923)

Der γ-Zerfall ist eine Kernreaktion, bei der radioaktive Kerne Überschussenergie durch spontane Lichtemission abführen. Dabei werden hochenergetische Photonen mit einer

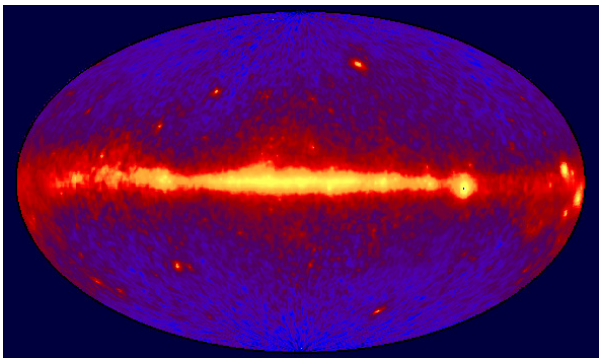


Abb. 23.48: Photo der Milchstraße, aufgenommen bei hohen Photonenenergien [**?**].

1981

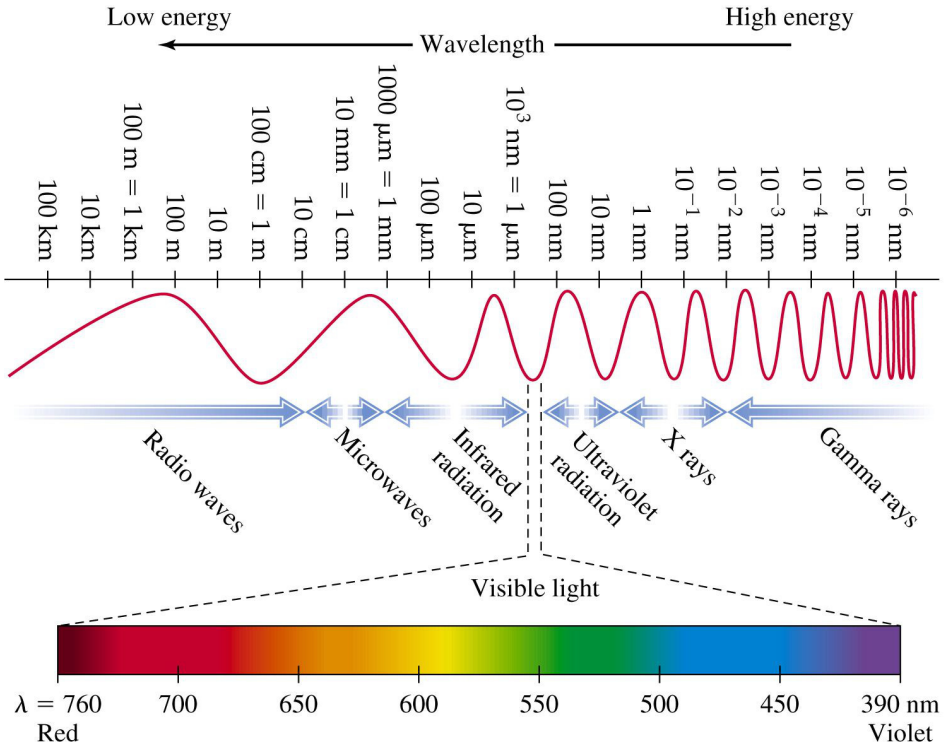


Abb. 23.49: Elektromagnetisches Spektrum. γ-Strahlung sind MeV Photonen.

charakteristischen Photonenenergie abgestrahlt. Abb. 23.48 zeigt als Beispiel eine Aufnahme der Milchstraße im Spektralbereich der γ-Strahlung. Wie man erkennt, kommt es überall in der Galaxis zur Emission von γ-Strahlung. Abb. 23.49 zeigt den Bereich des elektromagnetischen Spektrums in dem γ-Strahlung zu finden ist. Die Photonenenergien sind mit Energien von MeV deutlich höher als optische Strahlung (eV) und Röntgenlicht (keV). Die Energie der Strahlung bestimmt auch die Wechselwirkung mit Materie. Abb. 23.50 zeigt, wie sich der Wechselwirkungsquerschnitt σ mit der Photonenenergie entwickelt. Der γ-Zerfall umfasst auch zwei andere Prozesse, interne Umwandlung und interne Paarbildung.

- Bei interner Umwandlung wird überschüssige Energie auf ein kernnahes Elektron übertragen, wodurch es zur Photoemission kommt. Es kommt also nicht zu γ-Strahlung. Vielmehr wird ein Elektron mit definierter kinetischer Energie vom Atom emittiert. Beim so ablaufenden Prozess muss mindestens die Bindungsenergie des Zustandes aufgebracht werden. Bei tomographischen Untersuchungen wird das γ-Photon ausgewertet. Interne Konversion trägt dagegen nicht zur Bildgebung bei. Der Beitrag dieses konkurrierenden Reaktionskanals sollte deshalb so gering wie möglich sein, um die Strahlenbelastung zu minimieren

- Bei interner Paarbildung führt die Überschussenergie zur Bildung eines Elektron-Positron Paares, wenn die Energie ausreicht ($2\,m_e \cdot c^2$) (Kapitel *Einsteingleichung*).

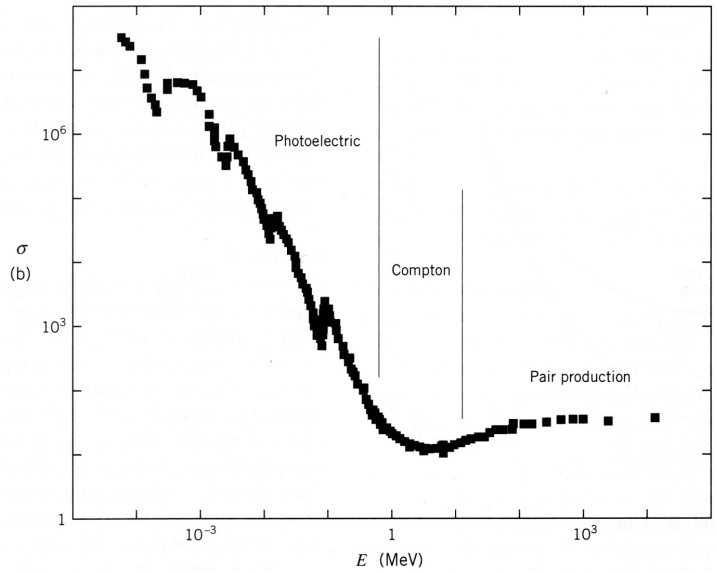


Abb. 23.50: Bei niedrigen Photonenenergien dominiert der Photoeffekt, siehe Kapitel *Photoelektrischer Effekt*. Der Wechselwirkungsquerschnitt σ fällt mit $1/\mathrm{E}_{ph}^3$ ab. Nahe 1 MeV dominiert der Compton-Effekt (Kapitel *Materiewellen*) und der Querschnitt entwickelt sich wie $1/E_{ph}$. Bei höheren Photonenenergien dominiert Paarbildung (Kapitel *Einsteingleichung*), wobei die Querschnitt sich kaum mit der Photonenenergie ändert [**?**].

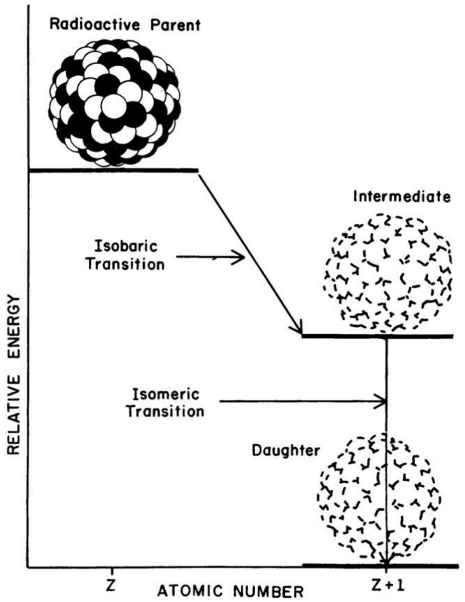


Abb. 23.51: Zerfall eines radioaktiven Kerns in einem angeregten Zustand, der unter Emission eines γ-Photons in den Grundzustand des Tochterkerns gelangt [**?**].

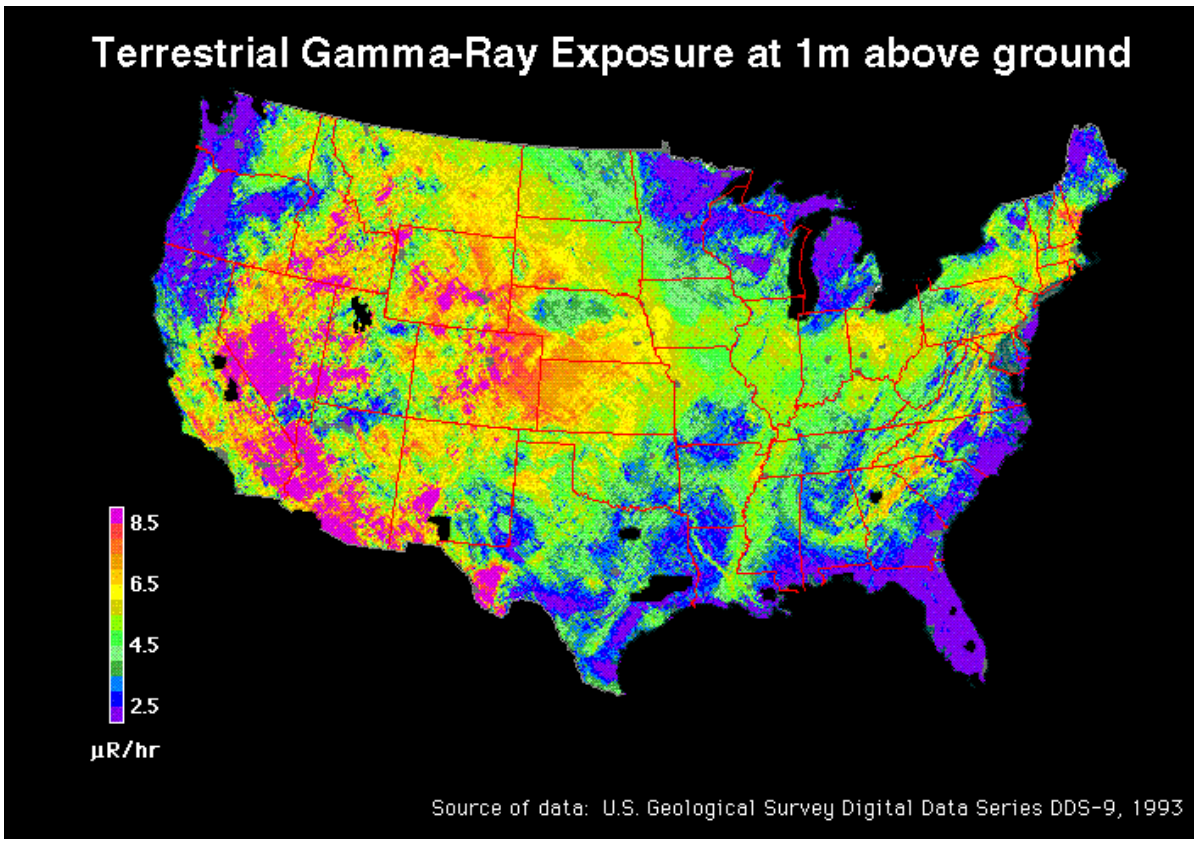


Abb. 23.52: Exposition der USA mit terrestrischer γ-Strahlung mit Referenz Meereshöhe [**?**].

Instabile Kerne, die einem γ-Zerfall unterliegen, haben vorab schon einen anderen Kernprozess durchlaufen (α-, β- oder Neutroneneinfang). Der resultierende Kern befindet sich in einem angeregten Zustand (Kapitel *Kernmodelle*) und gibt die Energie in Form von γ-Strahlung ab, bis der Kern seinen Grundzustand erreicht hat.

Energy of the ^{229}Th nuclear clock transition [?]: Owing to its low excitation energy and long radiative lifetime, the first excited isomeric state of thorium-229, ^{229m}Th, can be optically controlled by a laser and is an ideal candidate for the creation of a nuclear optical clock, which is expected to complement and outperform current electronic-shell-based atomic clocks. A nuclear clock will have various applications -such as in relativistic geodesy, dark matter research and the observation of potential temporal variations of fundamental constants- but its development has so far been impeded by the imprecise knowledge of the energy of ^{229m}Th. Here we report a direct measurement of the transition energy of this isomeric state to the ground state with an uncertainty of 0.17 electronvolts (one standard deviation) using spectroscopy of the internal conversion electrons emitted in flight during the decay of neutral ^{229m}Th atoms. The energy of the transition between the ground state and the first excited state corresponds to a wavelength of 149.7 ± 3.1

nanometres, which is accessible by laser spectroscopy through high-harmonic generation. Our method combines nuclear and atomic physics measurements to advance precision metrology, and our findings are expected to facilitate the application of high-resolution laser spectroscopy on nuclei and to enable the development of a nuclear optical clock of unprecedented accuracy.

Die internen Prozesse, die schließlich zur γ-Emission führt zeigt Abb. 23.51. Abb. 23.52 zeigt die Strahlenbelastung durch γ-Strahlen auf die Erde anhand der Daten für die Vereinigten Staaten. Ein Beispiel für einen solchen Zerfall ist die Relaxation von ${}^{60}_{27}$Co, siehe Abb. 23.53. Mit einer Halbwertszeit von 5.26 a zerfällt der Kern über einen β^--Zerfall (0.31 MeV) in einen angeregten Kobalt-60. Der Kern relaxiert über die Emission von zwei γ-Quanten (1.17 MeV, 1.33 MeV) in den Grundzustand von ${}^{60}_{28}$Ni. Ein anderes Beispiel ist ^{137}Cs. Dieses Isotop wird im Labor als γ-Strahler eingesetzt. Tatsächlich zerfällt Cs-137 in einem β^--Zerfall unter Aussendung eines Elektrons und eines Antineutrinos in Ba-137, wobei eine Energie von 0.52 MeV freigesetzt wird. Die Halbwertszeit dieses Prozesses ist etwa 30 Jahre. Der Tochterkern Ba-137 ist nach der Reaktion in einem angeregten Zustand. Die Relaxation in den Grundzustand erfolgt innerhalb von Sekunden unter Aussendung eines 0.66 MeV Photons.[56] Cs-137 ist also ein γ-Emitter, die Photonen stammen aber tatsächlich aus dem Bariumkern.[57]

Co-60 und Cs-137 sind typische γ-Strahler. Tatsächlich sind die Energiezustände im Kern, genauso wie im Atom quantisiert und elementspezifisch. Jedes radioaktive Element emittiert bei der Relaxation charakteristische γ-Strahlung und liefert damit insgesamt einen Fingerabdruck der in der Probe enthaltenen Elemente. Dies erlaubt beispielsweise eine Identifizierung unbekannter radioaktiver Substanzen. Abb. 23.54 zeigt als Beispiel die Analyse einer Uranerzprobe.

Die hochenergetische Strahlung kann genutzt werden um über den Photoeffekt Kernphysikalische Prozesse auszulösen. Ein Beispiel ist die Reaktion:

$$ {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \gamma \rightarrow {}^{13}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}n \tag{23.56} $$

Das Energiespektrum der in der Reaktion emittierten Neutronen lässt Rückschlüsse auf die Energieverhältnisse im Ausgangskern zu. Ein weiteres Beispiel ist:

$$ {}^{9}_{4}\mathrm{Be} + \gamma \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n \tag{23.57} $$

[56] *Lexikon:* Radiolumineszenz ist eine Leuchterscheinung in Proben wie beispielsweise Mineralen oder Kristallen, die durch radioaktive Strahlung zum Leuchten angeregt werden. Natürliche Radiolumineszenz tritt beispielsweise in Fluorit-Uraninit auf, wobei die radioaktive Strahlung des Uraninit den Fluorit zur Lumineszenz anregt. Eine Anwendung mit hoher Strahlenbelastung ist selbstleuchtende Radium-Leuchtfarbe, wie sie beispielsweise auf Uhren- und Kompasszifferblättern und Fluginstrumenten verwendet wurde. Auf Promethium basierende Radiolumineszenz wurde auf den Apollo-Mondlandefähren verwendet, um die Bedienfelder zu beleuchten.

[57] *Lexikon:* Eng verwandt mit dem γ-Zerfall ist ein Prozess, den man als Interne Konversion bezeichnet. In diesem Fall gibt der angeregte Kern seine Energie nicht über die Emission eines γ-Photons ab. Die Überschussenergie wird stattdessen auf ein Elektron in den inneren Rumpfniveaus des Atoms übertragen.

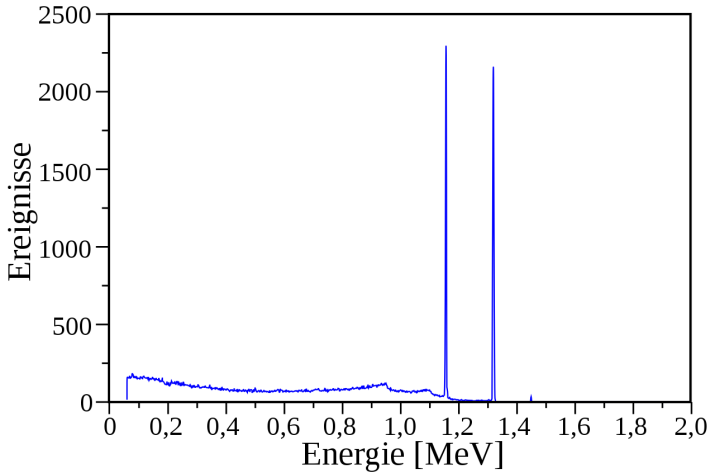


Abb. 23.53: Relaxationsspektrum von Kobalt-60 mit den charakteristischen γ-Linien bei 1.17 und 1.33 MeV[**?**].

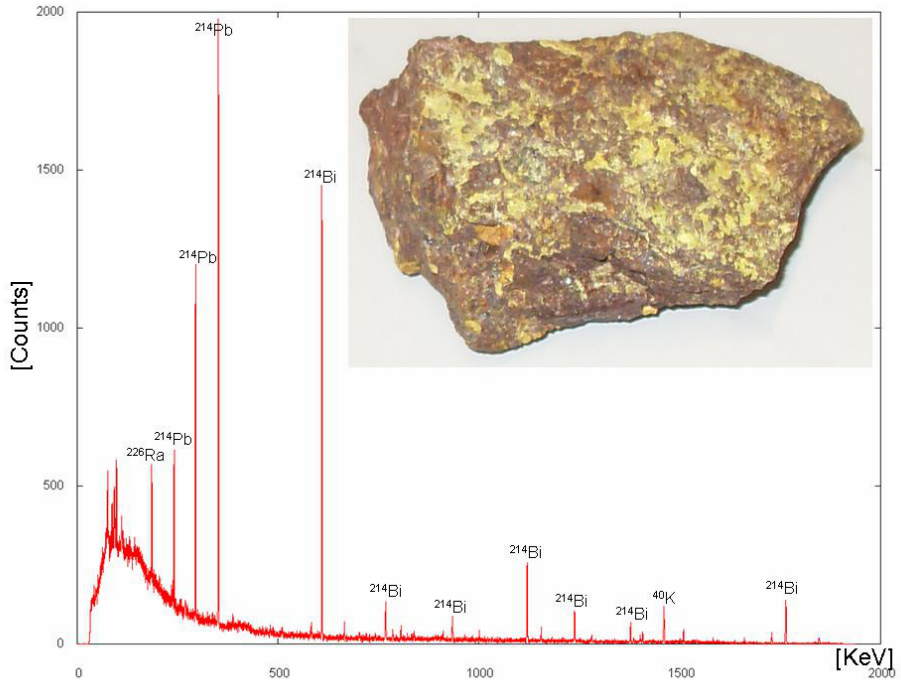


Abb. 23.54: Das γ-Spektrum von Uranerz zeigt eine Reihe diskreter Linien. Die spektrale Analyse weist die Isotope 226-Ra, 214-Pb und 214-Bi nach [**?**]. Diese entstehen im radioaktiven Zerfall von Uran-238, siehe Abb. 23.17d.

Für die Reaktion muss das γ-Photon eine Energie von mindestens 1.67 MeV haben.

A Nuclear Photo-effect Disintegration of the Diplon by γ-Rays [?]: By analogy with the excitation and ionisation of atoms by light, one might expect that any complex nucleus should be excited or ionised, that is, disintegrated, by γ-rays of suitable energy. Disintegration would be much easier to detect than excitation. The necessary condition to make disintegration possible is that the energy of the γ-ray must be greater than the binding energy of the emitted particle. The γ-rays of thorium C″ of $h\nu = 2.62 \cdot 10^6$ electron volts are the most energetic which are available in sufficient intensity, and therefore one might expect to produce disintegration with emission of a heavy particle, such as a neutron, proton, etc., only of those nuclei which have a small or negative mass defect; for example, D-2, Be-9, and the radioactive nuclei which emit α-particles. The emission of a positive or negative electron from a nucleus under the influence of γ-rays would be difficult to detect unless the resulting nucleus were radioactive. Heavy hydrogen was chosen as the element first to be examined, because the diplon has a small mass defect and also because it is the simplest of all nuclear systems and its properties are as important in nuclear theory as the hydrogen atom is in atomic theory.

In dieser Veröffentlichung haben Chadwick und Goldhaber [**?**] den Massenunterschied zwischen Proton und Neutron betrachtet. Das Experiment ergab, im Gegensatz zur Vermutung von Rutherford, dass ein Neutron kein gebundener Zustand eines Protons und eines Elektrons ist.

Non-mare silicic volcanism on the lunar farside at Compton-Belkovich [?]: Non-basaltic volcanism is rare on the Moon. The best known examples occur on the lunar nearside in the compositionally evolved Procellarum KREEP terrane. However, there is an isolated thorium-rich area -the Compton-Belkovich thorium anomaly- on the lunar farside for which the origin is enigmatic (Abb. 23.55). Here we use images from the Lunar Reconnaissance Orbiter Cameras, digital terrain models and spectral data from the Diviner lunar radiometer to assess the morphology and composition of this region. We identify a central feature, 25 by 35,km across, that is characterized by elevated topography and relatively high reflectance. The topography includes a series of domes that range from less than 1 km to more than 6 km across, some with steeply sloping sides. We interpret these as volcanic domes formed from viscous lava. We also observe arcuate to irregular circular depressions, which we suggest result from collapse associated with volcanism. We find that the volcanic feature is also enriched in silica or alkali-feldspar, indicative of compositionally evolved, rhyolitic volcanic materials. We suggest that the Compton-Belkovich thorium anomaly represents a rare occurrence of non-basaltic volcanism on the lunar farside. We conclude that compositionally evolved volcanism did occur far removed from the Procellarum KREEP terrane.

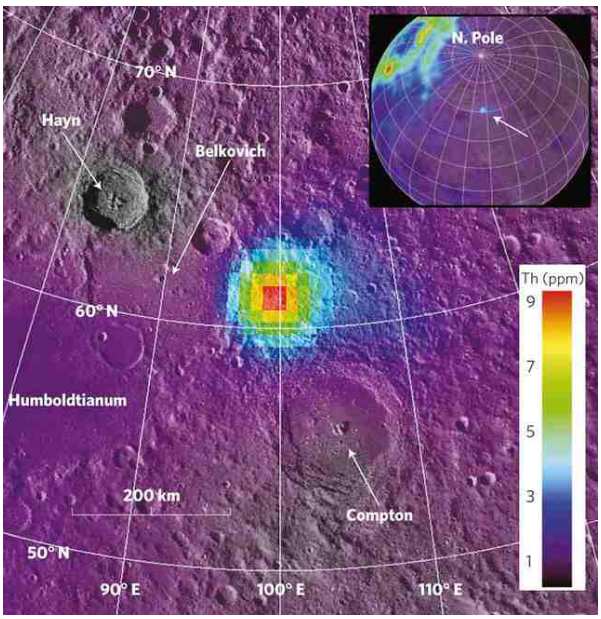


Abb. 23.55: Die Compton-Belkovich-Thorium-Anomalie ist eine Quelle starker γ-Strahlung auf der Rückseite des Mondes. Die Position der Anomalie liegt nordöstlich des Humboldtianum-Beckens und knapp hinter dem östlichen Rand des Mondes. Die höchste gemessene Thorium-Intensität entspricht einer Konzentration bei dieser Auflösung von etwa 10 ppm im Zentrum des Th-Hotspots [**?**].

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Astrophysik

Die Nukleosynthese bezeichnet den Prozess der Entstehung der Elemente im Verlauf der Entwicklung des Universums, siehe Abbildung 23.57. Während der Nukleosynthese entstehen radioaktive Atomkerne, von denen manche erst zerfallen, wenn sie den interstellaren Raum erreichen. Damit sind sie Zeugen der Vorgänge, die in den Sternen abgelaufen sind. Abb. 23.57 zeigt, wie die Elemente im Laufe der Entwicklung des Universums entstanden sind. Instabile Kerne, die über Lichtausstrahlung relaxieren, sind deshalb astronomische Uhren. Beispielsweise schwächt sich der Strahlungsausbruch einer Supernova-Explosion mit einer Zeitkonstanten von etwa hundert Tagen ab. Das passt gut zur Lebensdauer von Co-56 Kernen (111 Tage) und man vermutet, dass dieses Isotop die zugrundeliegende Energiequelle ist. Der spektroskopische Nachweis eines instabilen Nuklids weist darauf hin, dass es vor wenigen paar Halbwertszeiten erzeugt wurde. Die relative Anzahl solcher Nuklide liefert Informationen über die Historie bestimmter Prozesse im Universum. Jahrzehnte später beobachten Astronomen am Ort des Geschehens noch eine rauchende Kanone, die ihnen Einzelheiten verrät. Die zugehörige Zeitskala reicht von Bruchteilen von Sekunden bis zu Millionen von Jahren. Im Spektrum roter Riesen wurde beispielsweise das radioaktives Technetium entdeckt [**?**]. $^{98}_{43}$Te hat mit

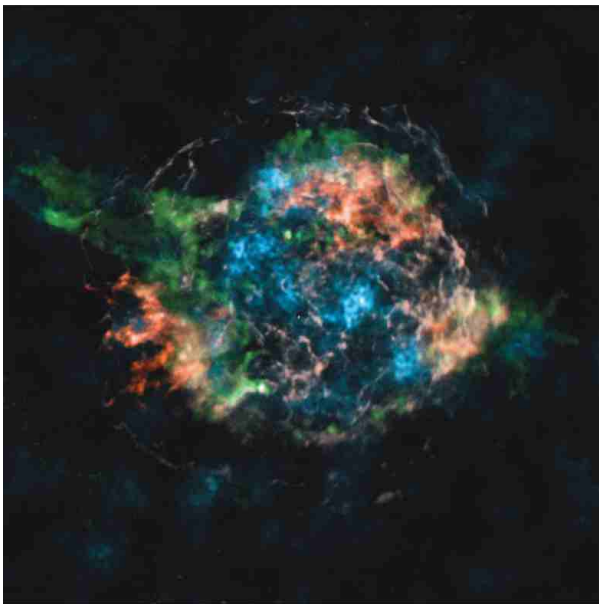


Abb. 23.56: Der Gasnebel Cassiopeia A ist ein Relikt einer Supernova und man findet hier γ-Emission radioaktiver Nuklide. Titan-44 ist blau dargestellt, Nickel-56 in Weiß und Rot. Das gelbe Kreuz kennzeichnet das Epizentrum der Supernova-Explosion. Weiß ist die Position und die Bewegungsrichtung des entstandenen Neutronensterns [**?**].

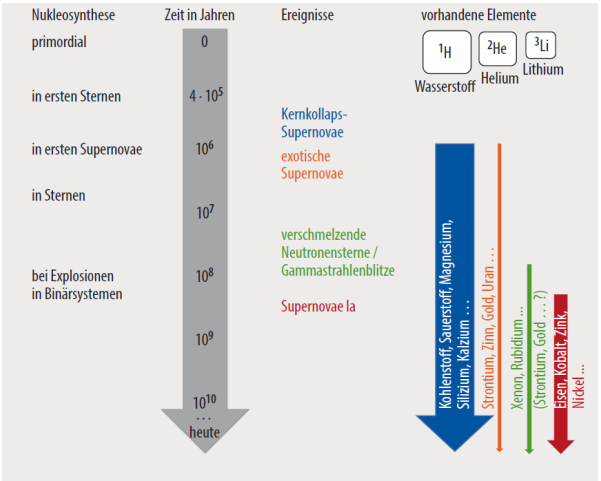


Abb. 23.57: In der primordialen Nukleosynthese wurden unmittelbar nach dem Urknall Wasserstoff, Helium und Lithium erzeugt. In den Supernova-Explosionen der ersten Sterne entstanden neue Elemente (blau, orange). Nach etwa einhundert Millionen Jahren wurden in Binärsystemen weitere Elemente erzeugt (grün, rot). Als Resultat dieser Vorgänge ergibt sich die heutige chemische Zusammensetzung des Kosmos [**?**].

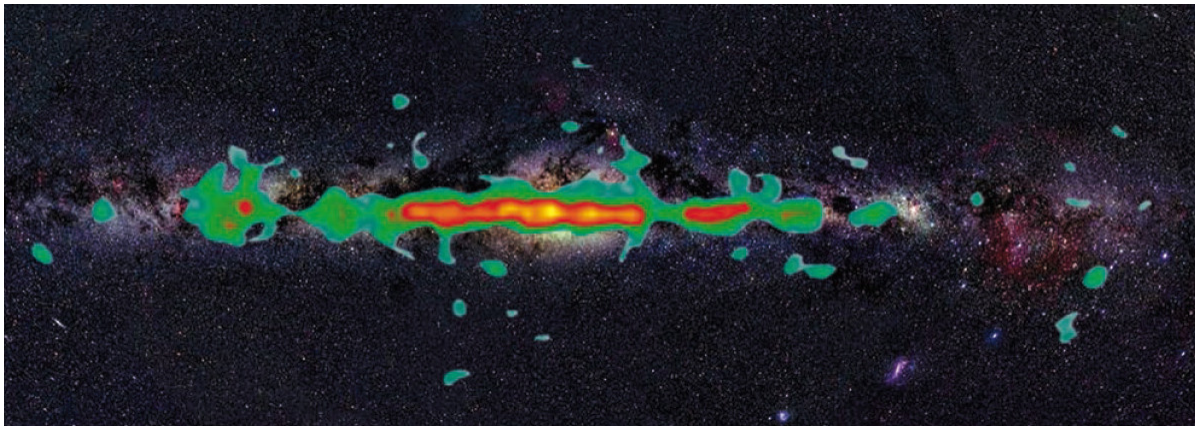


Abb. 23.58: $^{26}_{13}$Al findet man in weiten Bereichen der Milchstraße (im Hintergrund angedeutet). Die Intensität (rot: hoch; grün: schwach) der γ-Linie (1808.6 keV) ist im zentralen Bereich der Galaxis am höchsten und nimmt in den äußeren Bereichen ab [**?**].

$6 \cdot 10^6$ Jahren von allen Isotopen die höchste Lebensdauer und deshalb müssen diese Sterne innerhalb der letzten Millionen Jahre entstanden sein. Ein weiteres Beispiel ist Strahlung, die man dem γ-Zerfall des Titan-44 Kerns zuordnen kann. Das γ-Licht fand sich in bestimmten Bereichen des Kosmos. Der Nachweis einer Nukleosynthese von $^{44}_{22}$Ti in diesem Sterngebiet legt nahe, dass vor kurzem möglicherweise eine Supernovaexplosion stattgefunden hat. Der Titan-44 Kern fungiert hier als galaktische Uhr. Modellrechnungen können die räumliche Verteilung der radioaktiven Elementen beispielsweise in Nebel um Cassiopeia A erklären. Die Ergebnisse untermauern die Vermutung, dass solche Sternexplosionen von Neutrinos angetrieben werden [**?**].

Gemstone Irradiation and Radioactivity [**?**]**:** With the increasing use of radiation to color enhance gemstones, the issue of radioactivity has become a source of concern for gemologists worldwide. This article examines the basic characteristics of radiation and radioactivity, the sources of radiation in the earth and in the laboratory, the radiation treatment of gemstones in particular, and the detection and measurement of radiation. Also included is a discussion of potential health hazards and current government regulations regarding gemstone radioactivity.

Die Materie, die bei Supernova-Explosion ausgeworfen wird, weist Temperatur von 10^7 K auf und kühlt in einem Zeitraum von 10^8 Jahre auf wenige Kelvin ab. Aus diesem kalten Gas bilden sich neue Sternsysteme. Die γ-Emissionen aus den langlebigen radioaktiven Isotopen können dazu dienen, die Transportwege nachzuvollziehen. Geeignet für Zeitspannen von 10^8 a sind Isotope wie $^{26}_{13}$Al oder $^{60}_{26}$Fe. In der Milchstraße beobachtet man γ-Strahlung aus dem radioaktiven Zerfall von $^{26}_{13}$Al, siehe Abb. 23.58. Nukleosynthese findet also seid Jahrmillionen in unserer ganzen Galaxis statt.

1990

Ein Beispiel aus der Welt der Kernuhren

In der Nuklidkarte sind etwa 3000 Nuklide. Nur eine einziges dieser Isomere hat eine Halbwertszeit eines angeregten Zustands von mehr als einer Nanosekunde und der optische Überfang liegt im Sichtbaren: Thorium-229. Dieser nukleare Übergang könnte als optischer Frequenzstandard dienen, um eine optische Kernuhr zu realisieren [**?**]. Warum ist das interessant? Im Gegensatz zu den Elektronen in der Atomhülle sollte die Frequenz des Übergangs nahezu unempfindlich auf äußere Störungen reagieren.
X-ray pumping of the ^{229}Th nuclear clock isomer [?]: The metastable first excited state of thorium-229, ^{229m}Th, is just a few electronvolts above the nuclear ground state and is accessible by vacuum ultraviolet lasers. The ability to manipulate the ^{229}Th nuclear states with the precision of atomic laser spectroscopy5 opens up several prospects6, from studies of fundamental interactions in physics to applications such as a compact and robust nuclear clock. However, direct optical excitation of the isomer and its radiative decay to the ground state have not yet been observed, and several key nuclear structure parameters -such as the exact energies and half-lives of the low-lying nuclear levels of ^{229}Th- remain unknown11. Here we present active optical pumping into ^{229m}Th, achieved using narrow-band 29-kiloelectronvolt synchrotron radiation to resonantly excite the second excited state of ^{229}Th, which then decays predominantly into the isomer. We determine the resonance energy with an accuracy of 0.07 electronvolts, measure a half-life of 82.2 picoseconds and an excitation linewidth of 1.70 nanoelectronvolts, and extract the branching ratio of the second excited state into the ground and isomeric state. These measurements allow us to constrain the ^{229m}Th isomer energy by combining them with γ-spectroscopy data collected over the past 40 years.

Ein Beispiel aus der Welt der Mineralien

Rauchquarz ist eine Variation von Quarz. Weiter gibt es Spuren von Aluminium im Kristallgitter. Aluminium ersetzt die Kieselsäure und bildet AlO_4 anstelle von SiO_4. Durch die Einwirkung von γ-Strahlung, beispielsweise aus natürlichen Quellen, entstehen Farbzentren, die das Mineral graubraun bis schwarz färben.

Ein Beispiel aus der Kunstgeschichte

Das Phänomen der γ-Fluoreszenz wird verwendet, um die chemische Zusammensetzung von Gemälden und anderen Kunstgegenständen zu analysieren. Dazu wird die Probe bestrahlt und zur Emission von γ-Quanten angeregt. Diese Methode wurde verwendet, um Pigmente in den Gemälden von Leonardo Da Vinci zu identifizieren [**?**]. Die Analyse ergab, dass neben Lapislazuli auch andere mit Kobalt versehene Farben verwendet wurden. Da diese Materialien erst nach dem Tod des Künstlers eingesetzt wurden, deutet vieles darauf hin, dass seine Gemälde später retuschiert wurden. In Wien wurden indonesische Kris-Dolche betrachtet und nach Spuren von Mineralien eines Meteoriten untersucht [**?**]. Dieser war 18. Jahrhundert in der Gegend niedergegangen. Ein Vorteil der γ-Fluoreszenzspektroskopie ist, dass die Untersuchungen mit handlichen Geräten

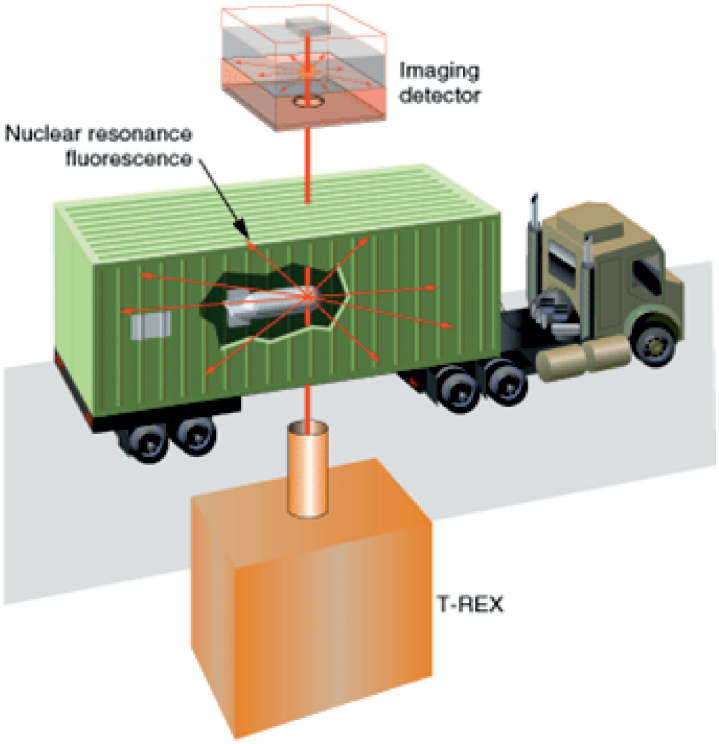


Abb. 23.59: Nachweis radioaktiver Materialien in verschlossenen Behältern durch γ-Fluoreszenzspektroskopie.

ausgeführt werden können, so dass man auch Wandfresken und größere Skulpturen analysieren kann, die nicht bewegt werden können. Eine weitere Anwendung ist der Einsatz ionisierender Strahlung zur Desinfektion und Reinigung von Kunstwerken und historischen Objekten bei Parasitenbefall (Insekten, Pilze). Durch die Strahlen werden die behandelten Materialien weder radioaktiv noch beschädigt. Im Jahr 1977 wurde in Paris ein solches Verfahren erstmals angewendet, um die Mumie von Ramses II zu desinfizieren.[58] Bei einer Aktivität der Co-60 Quelle von $6 \cdot 10^{15}$ Bq wurde die Mumie 13 Stunden bestrahlt. Kürzlich wurde die Methode eingesetzt, das Weichgewebe eines im sibirischen Permafrost gefundenen 50 000 Jahre alten Mammuts zu desinfizieren.

Beispiele aus der Politik

Wie kann man die Verbreitung kernwaffentauglicher Stoffe verhindern? Auch hier könnte das γ-Fluoreszenzverfahren helfen. Abb. 23.59 zeigt wie die Methode arbeitet. Da die Strahlung auch größere Proben durchdringt, können auch Signale verborgener Objekte detektiert werden. Die isotopenspezifische Emission erlaubt den Nachweis geringster Mengen an nuklearem Material.

Im Jahr 2001 wurden Briefe mit Milzbrandsporen an US-Nachrichtensender und Sena-

[58] *Ramses II, Pronounced Cured of All Infection, Goes Home From Paris*, New York Times, 11.5.1977

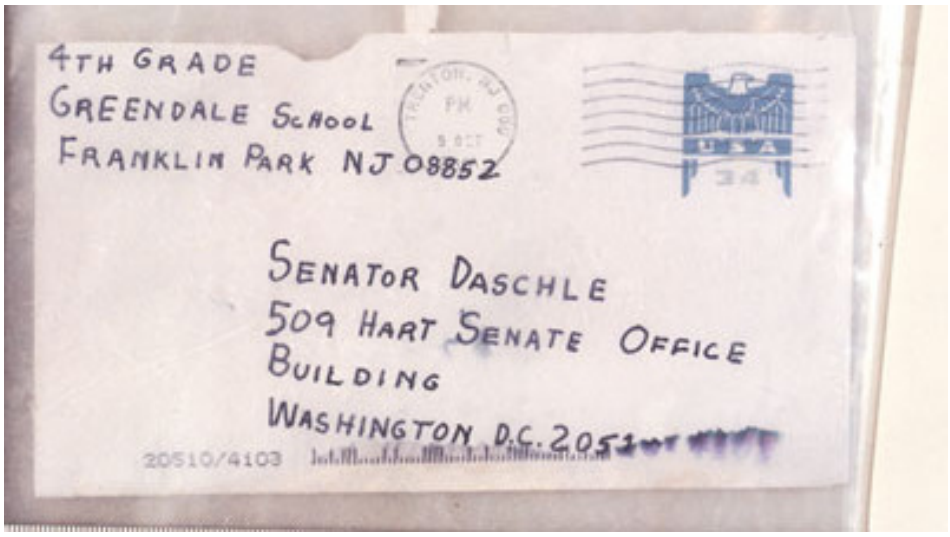


Abb. 23.60: Briefumschlag adressiert an Senator Thomas Daschle, Poststempel 9. Oktober 2001 [**?**].

toren verschickt (Anthrax-Anschläge). Abb. 23.60 zeigt ein Photo des Briefs, der an Senator Daschle addressiert war. Um solche Anschläge zu vereiteln, wird verdächtige Post mittlerweile ionisierender Strahlung ausgesetzt. Die Strahlung führt zur Abtötung von Bakterien und Viren und zu chemischen Reaktionen, die Farbe, Materialbeschaffenheit und Geruch verändern. Die so behandelten Materialien sind nach der Behandlung nicht radioaktiv belastet.

Aufgaben

Prüfen Sie sich selbst bei den *multiple choice* Aufgaben!
Wie sicher sind Sie sich mit Ihrer Antwort?
□ geraten; □ unsicher; □ unentschieden; □ sicherlich richtig; □ mit Sicherheit richtig

Aufgabe 5.1: The helium gas in Billie Boson's ballon has a history that involves[59]

(a) Radioactive decay of heavy elements

(b) Transmutation

(c) Both of these

(d) Neither of these

Aufgabe 5.2: Unter γ-Strahlung versteht man

(a) niederenergetische Elektronen.

(b) hochenergetische Elektronen.

(c) hochenergetische elektromagnetische Strahlung.

(d) hochenergetische Protonen.

(e) niederenergetische Protonen.

Aufgabe 5.3: Das Kobalt-Isotop ${}^{60}_{27}\mathrm{K}$ zerfällt in einem radioaktiven Zerfall in ${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$. Es handelt sich um einen[60]

(a) α-Zerfall

(b) β^--Zerfall

(c) β^+-Zerfall

(d) Elektroneneinfang

(e) γ-Zerfall

Aufgabe 5.4: Welches Teilchen ist geeignet, um ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$ in ${}^{30}_{15}\mathrm{P}+n$ umzuwandeln?[61]

(a) Ein Neutron

(b) Ein α-Teilchen

(c) Ein Proton

[59] Antwort: (c)
[60] Antwort: (b)
[61] Antwort: (b)

(d) Ein Deuteron

(e) Ein Positron

Aufgabe 5.5: Bei einem radioaktiven Zerfallsprozess stellt man fest, dass sich weder die Ordnungszahl noch die Massenzahl ändert. Was wurde emittiert? [62]

(a) Proton

(b) Neutron

(c) Elektron

(d) Photon

(e) Phonon

Aufgabe 5.6: Was ist der Unterschied zwischen Röntgen- und γ-Strahlung? [63]

(a) Röntgenstrahlung werden durch Prozesse außerhalb des Kerns erzeugt. γ-Strahlung entsteht bei Prozessen im Kern.

(b) Röntgenstrahlung werden durch Prozesse im Kerns erzeugt. γ-Strahlung entsteht bei Prozessen außerhalb des Kern.

(c) Röntgen- und γ-Strahlung wird vom Kern der Atome emittiert.

(d) Röntgen- und γ-Strahlung wird außerhalb des Kerns erzeugt.

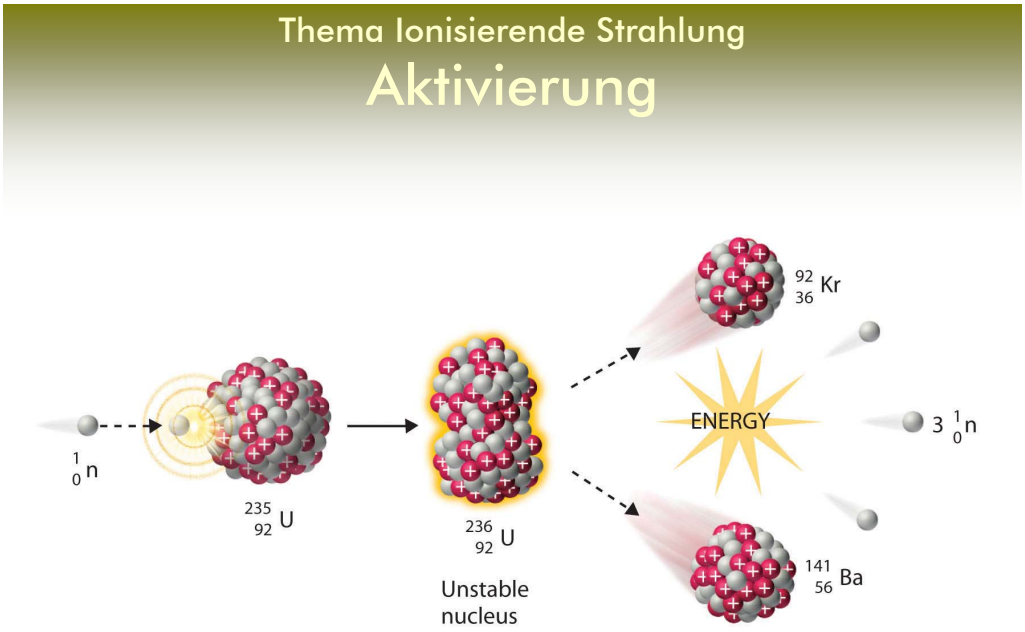
(e) Röntgen- und γ-Strahlung sind eigentlich dasselbe.

[62] Antwort: (d)
[63] Antwort: (a)

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Wie lautet die Reaktionsgleichung für den γ-Zerfall?
2. Wenn man Salze mit ultraviolettem Licht beleuchtet, beobachtet man Fluoreszenz. Warum wird bei dieser Anregung kein γ-Licht emittiert?
3. Kobalt-60 wird im Unterricht häufig als γ-Strahler eingesetzt. Was sind die Vorteile?
4. Isotope emittieren γ-Strahlung in isotroper Weise. Welche Vor- und Nachteile ergeben sich da durch für die medizinisch-tomographische Bildgebung?
5. Was ist der Unterschied zwischen γ-, Röntgen- und sichtbarer Strahlung?
6. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Lichtemission aus Atomen und Kernen
7. In welchen Teil des elektromagnetischen Spektrums findet man die Lichtemission aus Kernen?
8. Warum werden zum Nachweis des Zerfalls radioaktiver Marker γ-Strahlen und nicht α- und β-Teilchen genutzt?

Aktivierung



Die Ergebnisse Ihrer Forschungen sind für die reine Wissenschaft von größter Bedeutung, aber darüber hinaus erhoffen sich Physiologen, Ärzte und die gesamte leidende Menschheit von Ihren Entdeckungen Heilmittel von unschätzbarem Wert.

Nobelpreis-Komitee bei der Verleihung des Preises an Irene Joliot-Curie

Entdeckung des Neutrons

These results, and others I have obtained in the course of the work, are very difficult to explain on the assumption that the radiation from beryllium is a quantum radiation, if energy and momentum are to be conserved in the collisions. The difficulties disappear, however, if it be assumed that the radiation consists of particles of mass one and charge zero, or neutrons [**?**].

James Chadwick (1932)

Im Jahr 1921 führte Blackett ein Experiment durch, bei dem er Stickstoff mit α-Teilchen beschoss [**?**]. Es ergab sich, dass in der Reaktion Protonen ($^{1}_{1}H$) erzeugt werden:

$$^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}N + {}^{1}_{1}H \tag{23.58}$$

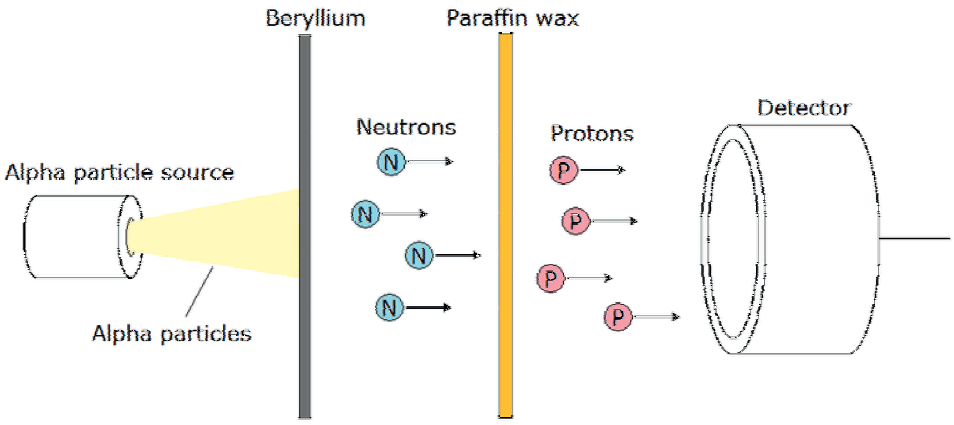


Abb. 23.61: Das Experiment von Chadwick, dass den Nachweis des Neutrons erbrachte.

Dieses Experiment war die erste Transmutationsreaktion und ließ vermuten, dass Protonen Bestandteile des Atomkerns waren.[64] Aus der Analyse des β-Zerfall wusste man, dass Elektronen aus dem Kern emittiert werden. Aus diesem Grund kam man zu der Annahme, dass der Kern A Protonen und $A - Z$ Elektronen enthält. Rutherford vermutete, dass im Kern neutrale Teilchen (Proton-Elektron Paare) vorhanden sind. Er lag falsch! Was spricht dagegen? 14 Protonen und 7 Elektronen ergeben, da alle Teilchen einen Spin von 1/2 haben einen ungeraden Gesamtspin, im Gegensatz zur Messung, die einen Spin von EINS ergibt. Zweitens haben wir schon anhand der Heisenbergschen Unschärferelation erkannt, dass Elektronen im Kern nicht sehr wahrscheinlich sind. Die Auflösung geht auf Messungen von Chadwick[65] zurück [**?** **?**]. Im Experiment beschoss er eine Berylliumprobe mit α-Teilchen und beobachtet eine bislang unbekannte Strahlung, siehe Abb. 23.61. Die Analyse ergab, dass es sich nicht um γ-Photonen handelte. Zwar konnte man die Strahlen nicht durch elektrische und magnetische Felder beeinflussen, aber ein photoelektrischer Effekt konnte nicht nachgewiesen werden. Wie sich herausstellte handelte es sich bei der Strahlung um neutrale Teilchen. Schickte man die Strahlen durch Paraffin, wurden Protonen ausgelöst. Aus der Messung von Energie und Impuls der ausgelösten Protonen konnte die Geschwindigkeit und die Masse der ungekannten Teilchen bestimmt werden. Wie sich herausstellte, war die Masse geringfügig höher als die des Protons. Das Neutron war entdeckt [**?**]!

Masse des Neutrons: $1.675 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Auf der Grundlage dieser Entdeckung entwickelte Heisenberg sein Kernmodell [**?**]. Das

[64] Die erste Transmutationsreaktion, die mit Hilfe eines Beschleunigers erfolgreich war, erzeugte im Jahr 1932 Heliumatome:

$$^{1}\mathrm{H} +^{7} \mathrm{Li} \rightarrow^{4} \mathrm{He} +^{4} \mathrm{He} \tag{23.59}$$

wobei die 600 keV Protonen auf Lithiumatome abgefeuert wurden [**?**].

[65] The Nobel Prize in Physics 1935 was awarded to James Chadwick *for the discovery of the neutron.*

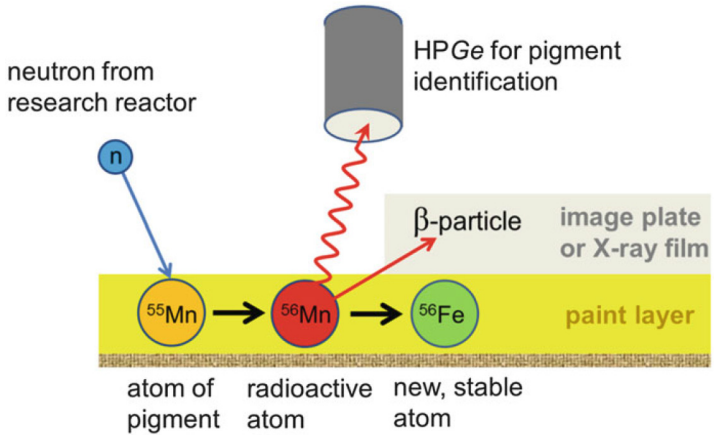


Abb. 23.62: Prinzip von Aktivierung durch Einfang eines Neutronen durch einen Kern am Beispiel von Mangan. Das stabile Isotop Mm-55 hat 30 Neutronen. Durch den n-Einfang entsteht Mn-56, dass unter Aussendung von β-Strahlung in Fe-56 zerfällt. Durch den ortsempfindlichen Nachweis der Strahlung erhält man Informationen über Ort und Häufigkeit des Elements in einer Probe [**?**].

Neutron ist als freies Teilchen nicht stabil, sondern zerfällt mit einer Halbwertszeit von 877.75 s [**?**]. Warum ist der genaue Wert so wichtig? Damit erreicht man experimentell eine Größenordnung, die es erlaubt Theorien zu überprüfen. Es dauert also etwa eine Viertelstunde bis im Mittel ein freies Neutron in ein Proton, eine Elektron und ein Antineutrino zerfällt.

Der erste, der Neutronen als Probeteilchen zur Untersuchung der Kernstruktur einsetzte, war Fermi. Er nutze den experimentellen Aufbau Chadwicks, und bombardierte die Elemente des Periodensystems mit Neutronen und charakterisierte in systematischer Weise die so künstlich erzeugten Reaktionsprodukte. Mit Ausnahme von Wasserstoff und Helium wurden Kernreaktionen nachgewiesen, wobei auch bislang unbekannte Isotope entdeckt wurden. Typische Kernreaktionen in der Wechselwirkung mit den Neutronen waren:

$$
\begin{aligned}
(Z,N)+n &\rightarrow (Z,N+1) && (23.60)\\
&\rightarrow (Z-1,N+1)+p && (23.61)\\
&\rightarrow (Z-2,N-1)+\alpha && (23.62)\\
& && (23.63)
\end{aligned}
$$

Weitere Arbeiten gehen auf Chadwick und Goldhaber zurück [**?**]. In den meisten Fällen erhöhte sich das N/Z-Verhältnis. Weiter ergab sich, dass viele der Tochterkerne β^--Strahler waren.

Neutronenaktivierung ist eine Methode, bei dem durch den Einfang von Neutronen ansonsten stabile Atomkerne radioaktiv und dann über einen α-, β- γ-Zerfall oder Neu-

tronenemission relaxieren, siehe Abb. 23.62. Alle stabilen Elemente können durch dieses Verfahren in neutronenreiche Radioisotope umgewandelt werden. Allerdings sind in manchen Fällen die Absorption mehrerer Neutronen notwendig, was die Aktivierung erschwert. ZWEI Neutronen sind beispielsweise notwendig um aus Wasserstoff das radioaktive Tritium zu generieren. Bei Sauerstoff-16 sind sogar DREI Neutronen erforderlich. Eine Aktivierung von Wasser ist deshalb im Vergleich zu Natriumchlorid aufwendiger. Hier ist jeweils nur der Einfang EINES Neutrons ausreichend. Eine typische Aktivierungsreaktion ist:

$$^{59}_{27}\mathrm{Co} + ^{1}_{1}n \rightarrow ^{60}_{27}\mathrm{Co} \tag{23.64}$$

Dieser Kern zerfällt in einem β- und anschließenden γ-Zerfall in Ni-60. Eine spektroskopische Analyse der ausgesendeten γ-Strahlung liefert weitere Informationen über die Elementzusammensetzung auch unbekannter Proben [**?**].

Ein Teelöffel voll Neutronensternmaterie wäre etwa so schwer wie ein massiver Eisenwürfel mit 700 Meter langen Kanten.

Klaus Blaum, Direktor am Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg, 2015

Anwendungen^{4LP}

Ein Beispiel aus der Reaktorphysik

Neutronen tragen keine elektrische Ladung. Die Wechselwirkung mit Materie erfolgt nicht über die Ladung, sondern über die starke Wechselwirkung. Der Reaktionsquerschnitt entspricht dabei annähernd dem geometrischen Querschnitt des Atomkerns. Thermische Neutronen haben eine große deBroglie Wellenlänge (Kapitel *Materiewellen*). Dadurch ist der Wechselwirkungsquerschnitt der Neutronen mit Kernen hoch. Durch den Einfang thermischer Neutronen kommt es zur Bildung instabiler Kerne. Diese zerfallen unter Teilchen- oder Lichtemission. Betrachten wir einen dieser Prozesse, und zwar die Kernspaltung, ausgelöst durch die Absorption eines Neutrons durch einen schweren Kern. Die Produkte der Kernspaltung haben überproportional viele Neutronen. Mehrere Neutronen werden innerhalb von 10^{-13} s emittiert. Dann folgen β-Zerfälle, wobei Neutronen in Protonen umgewandelt werden. Diese Prozesse bringen den Kern näher an einen stabile Konfiguration heran. Außerdem erhöht sich nach jedem Zerfall die Halbwertszeit. Betrachten wir, wie die beiden Uran-Isotope auf Neutronenaktivierung reagieren.

- Beim Stoß eines Neutrons mit U-235 wird ein elektronisch angeregter U-236 Kern gebildet. Der resultierende Energiezustand des Kerns liegt 6.8 MeV oberhalb des Grundzustandes. Da die Spaltungsbarriere von U-236 ebenfalls 6.8 MeV beträgt, kommt es zum unmittelbaren Zerfall des Kerns.

- Beim Stoß eines Neutrons mit U-238 wird ein elektronisch angeregter U-239 Kern gebildet. Hier liegt der angeregte Energiezustand 5.3 MeV oberhalb des Grundzustandes. Da die Spaltungsbarriere von U-239 7.9 MeV beträgt, zerfällt der Kern

nicht, solange die kinetische Energie des Neutrons einen Wert von 1.8 MeV nicht überschreitet. Schnellere Neutronen haben allerdings eine geringere deBroglie Wellenlänge und werden von den Kernen mit geringerer Wahrscheinlichkeit eingefangen.

Der Neutronen-Wechselwirkungsquerschnitt für die Spaltung von U-238 ist im Vergleich zu U-235 um einen Faktor $2 \cdot 10^3$ geringer. Kernspaltung durch Einfang von Neutronen ist deshalb in U-235 gegenüber U-238 deutlich effektiver.

Was sind die Vorteile von Experimenten mit Neutronen? Beim Stoß von Neutronen mit Kernen gilt der Impulserhaltungssatz.[66]

$$m_n \cdot v_n^i = m_n \cdot v_n^f + m_K \cdot v_K^f \tag{23.65}$$

In einem elastischen Stoß wird auf den Kern (K) Energie in Form kinetischer Energie übertragen. Für den Fall, dass der Stoß mit einem Kohlenstoffkern erfolgt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 4 \cdot E_{kin}^n \frac{(1.0\,\text{amu}) \cdot (12.0\,\text{amu})}{((1.0\,\text{amu}) \cdot (1.0\,\text{amu}))^2} \\ \Delta E &= 0.0714 \cdot E_{kin}^n \end{aligned} \tag{23.66}$$

Das bedeutet, dass es einen hohen Impuls- und Energieübertrag bei Stößen mit leichten Kernen wie Wasserstoff gibt. Ein weiterer Vorteil von Experimenten mit Neutronen ist, dass thermische Neutronen, im Gegensatz zu Röntgenstrahlung und Elektronen, nahezu keine elementspezifischen Querschnitte zeigen, siehe Abb. 23.63. Natürlich gibt es Ausnahmen. Dazu zählen Zr-88, Xe-135 und Ga-157 [**?**]. Eine Erklärung, warum gerade diese Kerne gerne Neutronen einfangen, wurde bislang noch nicht gefunden. Außerdem ergibt sich keine Systematik bezüglich der Stellung des betrachteten Elements im Periodensystem. Für die Analyse sind Neutronen deshalb interessant, weil die neutralen Teilchen eine hohe Eindringstiefe haben und mit allen Elementen wechselwirken.[67] Abb. 23.64 zeigt den Vergleich einer Untersuchung mit Neutronen und mit Röntgenstrahlung. Man erreicht durch den Einsatz von Neutronen einen empfindlichen Nachweis von Wasserstoff. Im hier untersuchten Taschenrechner ist Kohlenstoff und Wasserstoff in einem metallischen Behälter eingeschlossen.

The surprisingly large neutron capture cross-section of ^{88}Zr [**?**]: The probability that a nucleus will absorb a neutron -the neutron capture cross-section- is important to many areas of nuclear science, including stellar nucleosynthesis, reactor performance, nuclear medicine and defence applications. Although neutron capture cross-sections have been measured for most stable nuclei, fewer results exist for radioactive isotopes,

[66] i: initial; f: final

[67] The Nobel Prize in Physics 1994 was awarded for pioneering contributions to the development of neutron scattering techniques *for studies of condensed matter*jointly with one half to Bertram N. Brockhouse *for the development of neutron spectroscopy* and with one half to Clifford G. Shull *for the development of the neutron diffraction technique*

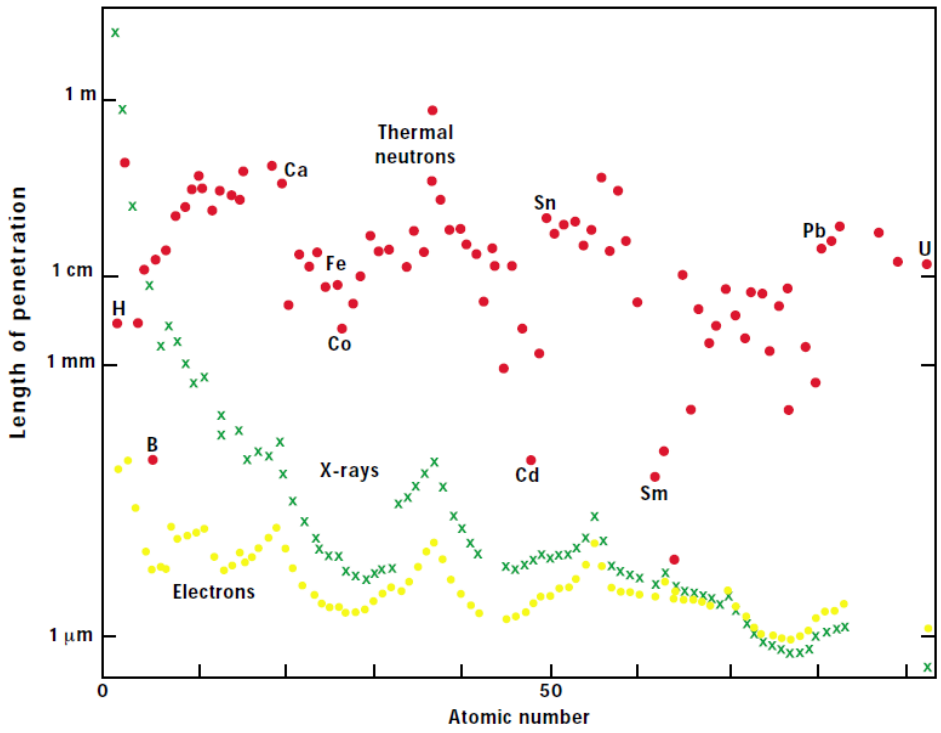


Abb. 23.63: Vergleich der Wechselwirkungsquerschnitte der Elemente für Neutronen (λ_{dB}=0.18 nm), Elektronen (λ_{dB}=0.004 nm) und Röntgenstrahlung (λ=0.1 nm). Als Maß betrachtet man die Eindringtiefe der Strahlung. Man beachte die logarithmische Auftragung der vertikalen Achse [**?**].

and statistical-model predictions typically have large uncertainties. There are almost no nuclear data for neutron-induced reactions of the radioactive nucleus ^{88}Zr, despite its importance as a diagnostic for nuclear security. Here, by exposing 88Zr to the intense neutron flux of a nuclear reactor, we determine that ^{88}Zr has a thermal neutron capture cross-section of $861,000 \pm 69,000$ barns, which is five orders of magnitude larger than the theoretically predicted value of 10 barns. This is the second-largest thermal neutron capture cross-section ever measured and no other cross-section of comparable size has been discovered in the past 70 years. The only other nuclei known to have values greater than 105 barns are ^{135}Xe ($2.6 \cdot 10^6$ barns), a fission product that was first discovered as a poison in early reactors, and $^{157}Gd(2.5 \cdot 10^5$ barns), which is used as a detector material, a burnable reactor poison and a potential medical neutron capture therapy agent. In the case of ^{88}Zr neutron capture, both the target and the product (^{89}Zr) nuclei are radioactive and emit intense γ-rays upon decay, allowing sensitive detection of miniscule quantities of these radionuclides. This result suggests that as additional measurements with radioactive isotopes become feasible with the operation of new nuclear-science facilities, further surprises may be uncovered, with far-reaching implications for our understanding of neutron capture reactions.

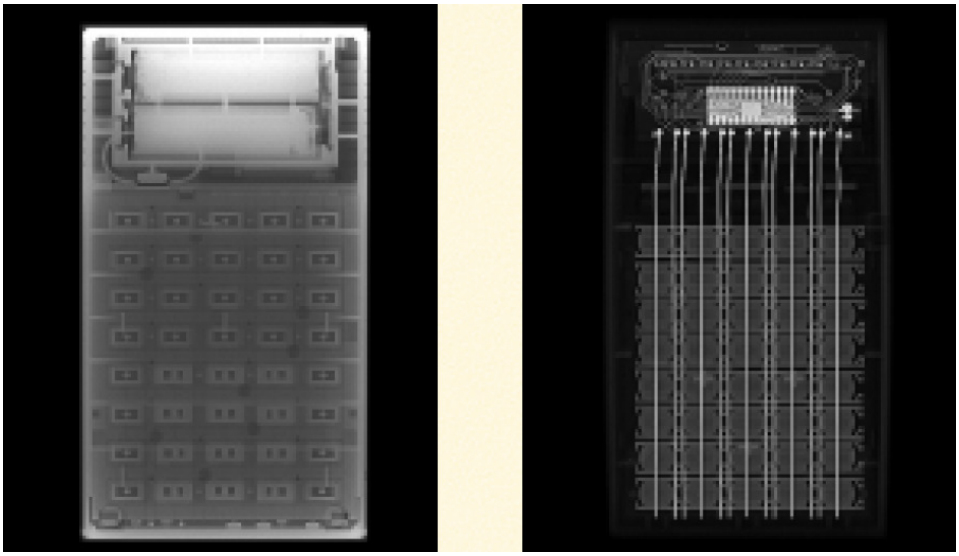


Abb. 23.64: Untersuchung eines Texas Instruments Taschenrechners mit Neutronen- (links) und Röntgenstrahlung (rechts). Gut zu erkennen ist, dass Neutronen auch die leichten abbilden, während die Röntgenstrahlung im wesentlichen die schweren Elemente in der Probe hervorhebt.

Ein Beispiel aus der Festkörperphysik

Neutronen sind elektrisch neutral und haben ein magnetisches Moment. Deshalb eignen sie sich besonders zur Aufklärung der Struktur der Materie. Die Neutronen-Flugzeitspektroskopie nutzt diese Eigenschaften [**?**]. Abb. 23.65 zeigt den Aufbau eine Spektrometers. Eine Neutronenquelle erzeugt kurze Pulse von Neutronen mit gleicher Richtung und Geschwindigkeit. Typisch sind einige 1000 m/s. Aufgrund ihrer deBroglie Wellenlänge tasten Neutronen das Innere der Probe, die Bewegung der Atome oder magnetische Momente ab. Durch die Wechselwirkung kommt es zu einem Neutronenstreuprozess. Bei inelastischer Streuung ändern die Neutronen beim Durchgang durch die Probe Energie und Geschwindigkeit. Aus der Flugzeit lässt sich der Energieübertrag auf die Neutronen bestimmen. Dadurch gelingt es beispielsweise, das Schwingungsverhalten der Atome zu analysieren. Über die Winkelabhängigkeit der inelastisch gestreuten Neutronen erhält man Informationen über räumliche Muster der Bewegung.

Irene Joliot-Curie und Frederic Joliot[68] entdeckten im Jahr 1934 das Phänomen der künstlichen Radioaktivität. Sie fanden, dass Aluminium, Bor und Magnesium radioaktiv werden, wenn man sie mit α-Teilchen bestrahlt. Beispielsweise ergibt sich beim

[68] The Nobel Prize in Chemistry 1935 was awarded jointly to Frédéric Joliot and Irène Joliot-Curie *in recognition of their synthesis of new radioactive elements.*

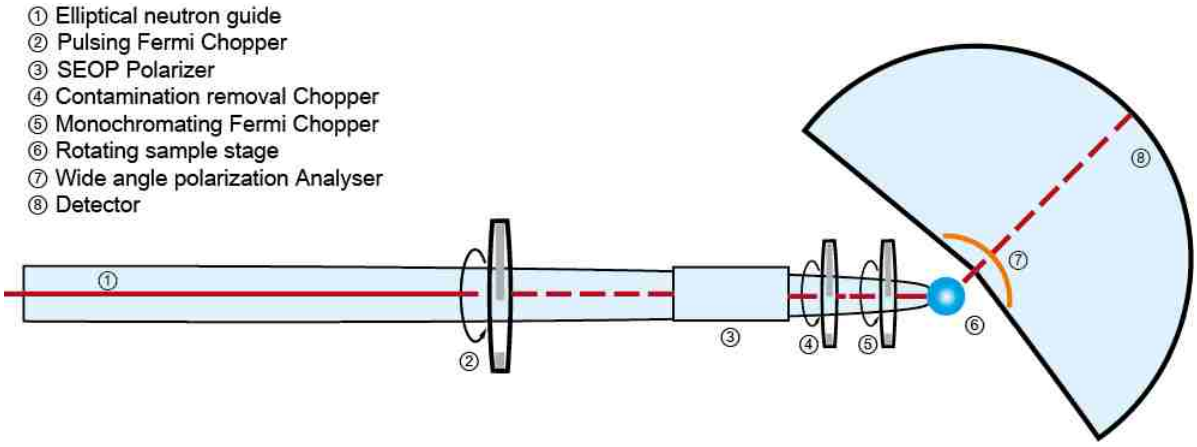


Abb. 23.65: Aufbau eines Neutronen-Flugzeitspektrometers zur Untersuchung fester Materie. Ein 45 m langer elliptischer Neutronenleiter fokussiert Neutronen auf eine Probe bei einem niedrigen Untergrundniveaus, siehe beispielsweise [**?**].

Experiment an Aluminium:[69]

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P}^{*} + {}^{1}_{0}n \tag{23.67}$$

$$^{30}_{15}\mathrm{P}^{*} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si}^{*} + e^{+} \tag{23.68}$$

Solche Reaktionen waren erste Nachweise, dass man radioaktive Stoffe synthetisieren kann. Außerdem ergab das Experiment, dass nicht nur schwere Elemente, sondern auch leichte Elemente radioaktive Isotope haben können. Radioaktive Isotope können durch Bestrahlung mit α-Teilchen, Protonen, Deuteronen oder hochenergetischer γ-Strahlung erzeugt werden. Interessant sind Neutronen. Alle Elemente mit Ausnahme von $^{4}_{2}\mathrm{He}$ können durch Absorption von Neutronen in radioaktive Nukleonen umgewandelt werden. Neutronenaktivierung ist ein Prozess, bei der Proben durch Neutronenstrahlung radioaktiv werden. Meistens erfolgt die Aktivierung durch den Einfang eines thermischen Neutrons. Das dadurch entstehende Isotop ist meistens radioaktiv. Beim Zerfall des radioaktiven Stoffes kommt es in der Regel zur Emission von γ-Strahlung. Da die Strahlung jedes Radionuklid elementspezifisch ist, kann man dadurch auch geringste Mengen an Spurenelementen nachweisen.

Die allgemeine Reaktionsgleichung für die Neutronenaktivierung lautet:

$$^{A}_{Z}X + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{A+1}_{Z}Y + {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e \tag{23.69}$$

Abb. 23.66 zeigt die Neutronen-Aktivierung von Eisen-58. Ein anderes Beispiel ist die Aktivierung von O-16:

$$^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{16}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{1}p + e^{-} \tag{23.70}$$

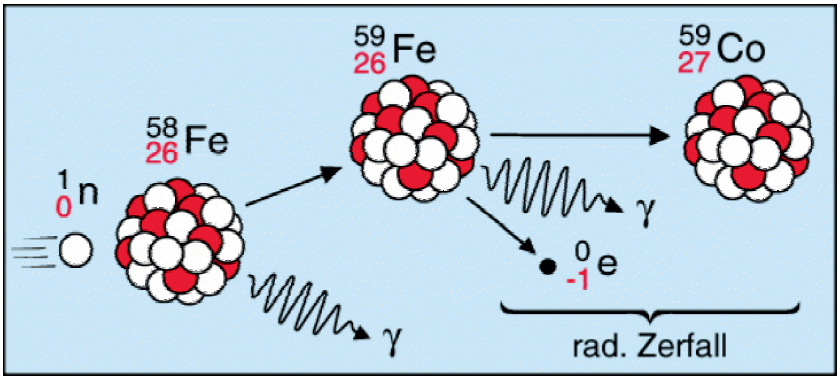


Abb. 23.66: Aktivierung und Relaxation von Eisen-58 durch Neutronen.

Ein Beispiel aus der Archäologie

Die Untersuchung und Erhaltung von Artefakten ist für Archäologen, Anthropologen und Historikern von immenser Bedeutung. Die Untersuchung der Prozesse, die die prähistorische Menschheit zur Herstellung, Verwendung und zum Handel mit Kulturgütern verwendete, helfen den Forschern bei der Interpretation des Verhaltens der Menschen, ihrer Rituale, ihrer sozialen Organisation und der Art der Interaktionen zwischen menschlichen Gruppen. Die Methoden zur Untersuchung der Artefakte wurden in der analytischen Chemie entwickelt. Damit werden Element-, Isotopen- oder Mineralzusammensetzungen bestimmt. Erste Versuche reichen zurück bis ins späte 18. Jahrhundert. Die Erforschung des Kulturerbes erfordert zunehmend multidisziplinären Ansätze zur physikalischen und chemischen Charakterisierung von Artefakten, um Struktur und Erhaltungszustand zu bestimmen und Informationen bei der Auswahl geeigneter mikroklimatischen Bedingungen bei Ausstellungen. Neutronenbasierte Methoden werden verstärkt zur Untersuchung von Objekten von historischem und kulturellem Interesse eingesetzt. Solche Techniken sind nicht-invasiv, zerstörungsfrei und daher ideal um Informationen über Artefakte (Zusammensetzung, Veränderungen aufgrund der Umgebungsbedingungen, Einschlüsse, Struktur, Herstellungstechniken) zu erhalten. Beispielsweise wurde ein 700 Jahre altes norwegisches Objekt, das Bispegata-Amulett, kürzlich mit Neutronenstrahlen untersucht. Archäologen fanden das rechteckige Metallobjekt während einer Ausgrabung in Oslo. Das Amulett ist mit Runen bedeckt und mehrfach gefaltet. Eine mechanische Entfaltung kam nicht in Frage. Da es aus Blei hergestellt ist, konnte man keine Röntgenstrahlen für eine Tomographie nutzen. Stattdessen wurden Neutronenstrahlen verwendet, um eine detaillierte Rekonstruktion zu erhalten. Die Untersuchung ergab, dass einige der Runen latinische und griechische Phrasen wiedergaben, während andere sich wiederholende Sequenzen scheinbar bedeutungslose Worte waren, siehe Abb. 23.67. Offenbar hatte das Amulett sowohl religiöse als auch magische Bedeutung [**?**].

Egyptian Grave Goods of Kha and Merit Studied by Neutron and Gamma Techniques [?]: Artifacts from the Egyptian grave goods of Kha and Merit preserved

[69]Der * deutet darauf hin, dass sich der Kern in einem angeregten Zustand befindet.

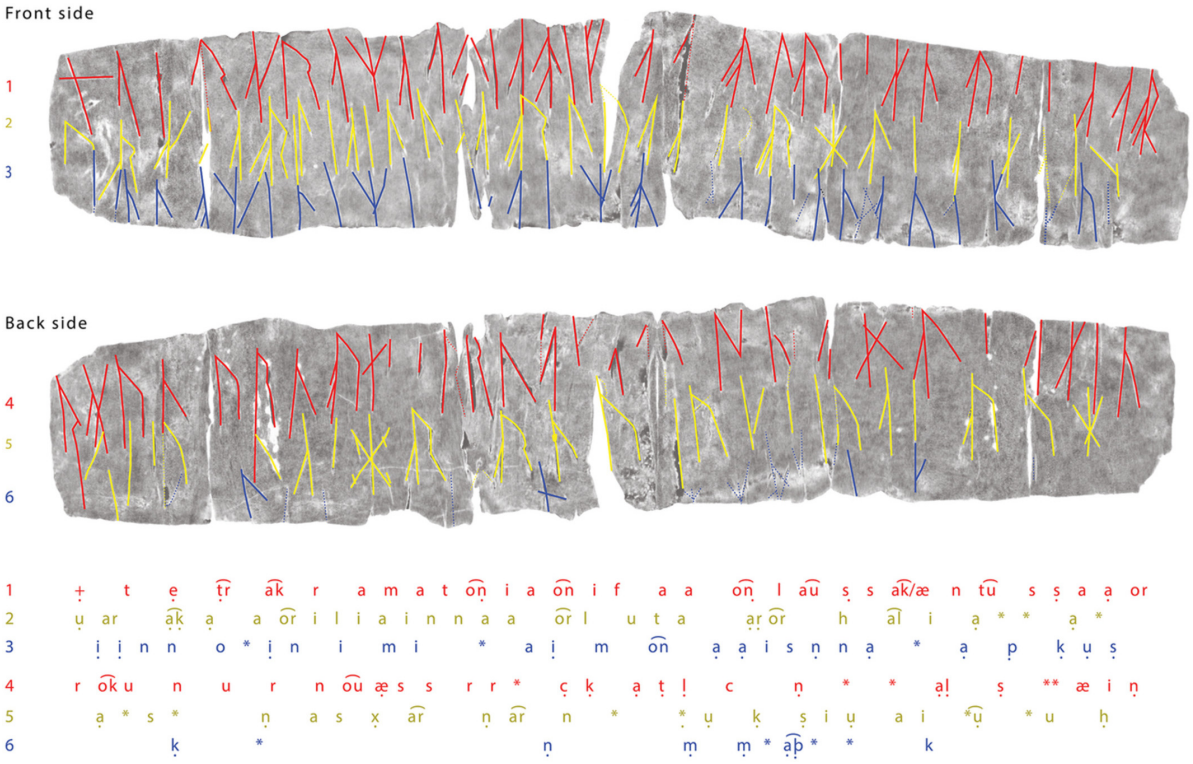


Abb. 23.67: Visualisierung der Runeninschrift mit Transliteration [**?**]

at the Museo Egizio in Turin were studied through a combination of non-destructive and non-invasive neutron and gamma techniques (namely neutron imaging, neutron diffraction and prompt gamma activation analysis). The results provide unprecedented morphological reconstructions of the inner parts of the two alabaster and metallic vases and their isotopic and phase composition, thereby extending our knowledge of the hitherto unknown content of the vases and their functions.

Ein Beispiel aus der Malerei

Erste Experimente zur Neutronenaktivierung wurden von Sayre und Lechtman an Gemälden aus dem 19. Jahrhundert durchgeführt [**?**]. Die resultierenden Autoradiographien[70] liefern Tiefendetails der Objekte. Da die Radioaktivität der Elemente in einem Gemälde unterschiedlich ist, kann man durch Wahl von spektralen Filtern Pigmente identifizieren und Informationen über Art und Weise gewissen, wie der Künstler gearbeitet hat. Die Versuche zeigten, dass die Gemälde durch die Methode der Aktivierung nicht beeinflusst werden, da die Strahlendosis nicht hoch ist. Noch Jahre nach der Exposition konnten keine Änderungen in Farbe, Härte, Flexibilität und Löslichkeit festgestellt werden.

[70] *Lexikon:* Autoradiographie ist eine Methode, mit der die Verteilung radioaktiv markierter Substanzen in Gewebe sichtbar gemacht wird.

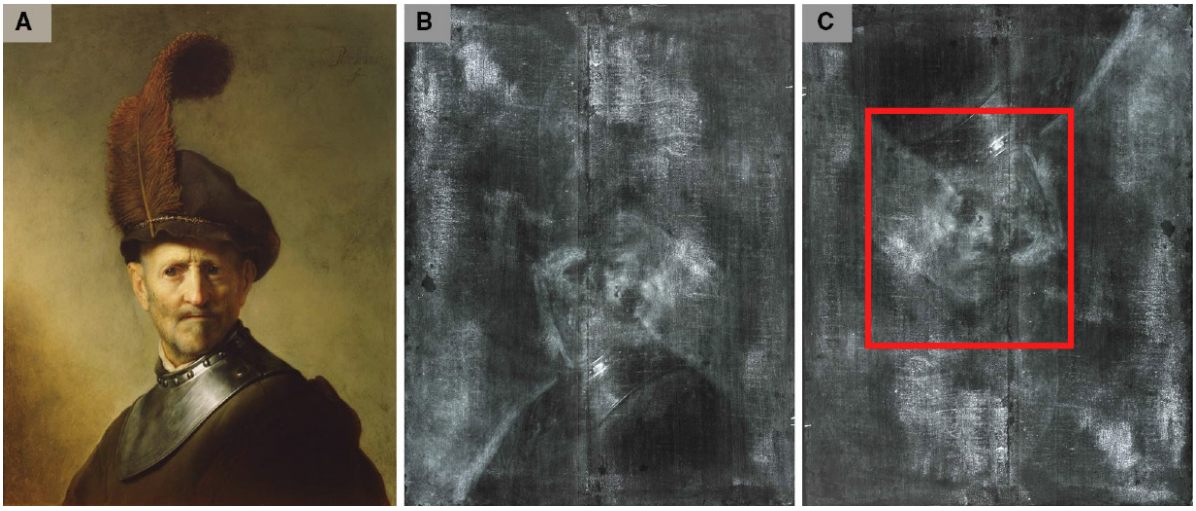


Abb. 23.68: a. Ein alter Mann in Militärköstum von Rembrandt van Rijn, entstanden um 1630. b. Röntgenaufnahme des Gemäldes. c Röntgenaufnahme des Gemäldes um 180^o gedreht, um das Gesicht der darunter liegenden Figur besser zu zeigen (rotes Quadrat) [**?**].



Abb. 23.69: Vorläufige Farbrekonstruktion der übermalten Figur, siehe Abb. 23.68 [**?**].

Mit der Methode der Neutronenaktivierung gelingt eine quantitative Analyse von Kleinstproben. Versteckte Gemälde sind seit langem von Interesse, da sie Informationen über die Arbeitsweise eines Künstlers preisgeben. Eines der untersuchten Objekte ist Rembrandts *Alter Mann in Militärkostüm*, siehe Abb. 23.68 und 23.69. Bei der Analyse wurde Messungen zu unterschiedlichen Zeiten nach der Aktivierung durchgeführt. Durch die Abklingzeiten der Signale konnte, aus den charakteristischen Halbwertszeiten, die chemische Zusammensetzung bestimmt werden [**?**].

Rembrandt's An Old Man in Military Costume: the underlying image re-examined [**?**] The painting An Old Man in Military Costume in the J. Paul Getty Museum, by Rembrandt Harmensz van Rijn, was studied using two complementary, element-specific imaging techniques-neutron activation autoradiography (NAAR) and macro-X-ray fluorescence (MA-XRF) mapping-to reveal the second, hidden painting. NAAR provided a strong image of the face and cloak of the underlying figure, along with an indication of the chemical composition. The single-element distribution maps produced by MA-XRF mapping provided additional details into the shape of the underlying image and the composition of the pigments used. The underlying figure's face is richer in mercury, indicative of the pigment vermilion, than the face of the figure on the surface. Likewise, the cloak of the underlying figure is richer in copper than the surface figure though the identity of the copper-containing pigment cannot be determined from these data. The use of iron earth pigments, specifically Si-rich umbers, is indicated through the complementary information provided by the NAAR and MA-XRF maps. These data are used to create a false color digital reconstruction, yielding the most detailed representation of the underlying painting to date.

Ein Beispiel aus der Geschichte

Wurde Napoleon vergiftet wie Weider und Hapgood in *The Murder of Napoleon*, siehe Abb. 23.70, behaupten? Um diese Frage zu klären, wurde ein Vergleich von Napoleons Haar mit anderen Zeitgenossen durch Neutronenaktivierung von As-75 durchgeführt. Napoleon Bonaparte starb im Jahr 1821 im Alter von 51 Jahren im Exil auf der Insel St. Helena. Eine Autopsie ergab eine krebsartige Wucherung seines Magens. Eine hohe Arsenkonzentrationen in Proben seines Haares im Vergleich zu heute, ließ Hapgood und Weider vermuten, dass Napoleon durch Arsen vergiftet wurde. Die daraufhin durchgeführte Analyse ergab, dass ein solcher Arsengehalt nicht außergewöhnlich war, da Arsen im 18. Jahrhundert als Bestandteil von Tinte verwendet wurde. Die Autoren der Untersuchung kommen schließlich zu dem Schluss: We therefore conclude that Napoleon Bonaparte did not die of chronic arsenic poisoning. [**?**].

Ein Beispiel aus der Medizin

Im Gegensatz zu energiereichen Neutronen (10 MeV), reduzieren sich bei energiearmen Neutronen (2 MeV) die Eindringtiefen von 10 auf 5 cm. Wie sich herausstellt, eignen sich elastische Stöße thermische Neutronen zur Behandlung oberflächennaher Tumore.

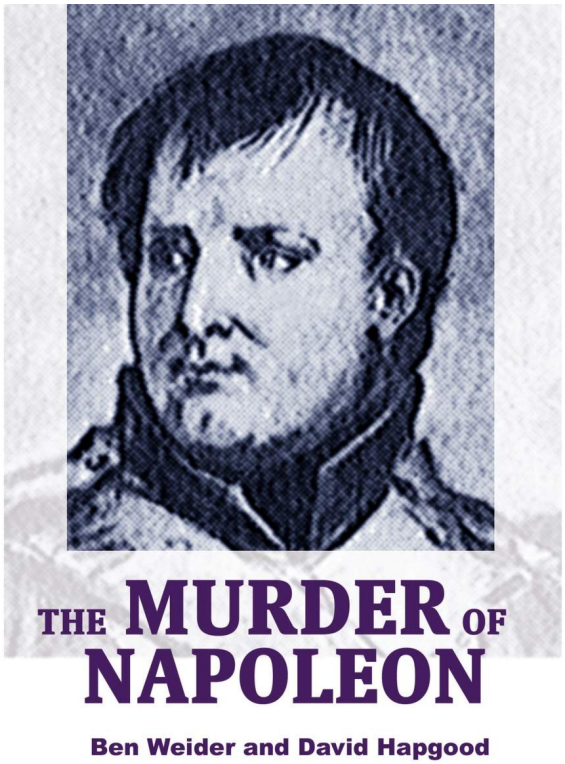


Abb. 23.70: Buch zur vermeintlichen Vergiftung von Kaiser Napoleon Bonaparte [**?**].

Noch wichtiger ist die Aktivierung als selektive Methode der Tumorbekämpfung. Die Methode nennt sich Bor-Neutroneneinfang-Therapie [**?**]. Bor-10 hat einen hohen Einfangquerschnitt für thermische Neutronen. Im Vergleich zu Wasserstoff ist der Wechselwirkungsquerschnitt gegenüber Neutronenstoß um einen Faktor 10^4 erhöht. Die Reaktionsgleichung lautet:

$$^{10}\mathrm{B} \; + \; n \; \rightarrow \; ^{4}\mathrm{He} \; + \; ^{7}\mathrm{Li} \; + \; 2.8\,\mathrm{MeV} \tag{23.71}$$

Der radioaktiver Zerfall führt also zur Emission von α-Teilchen und der Bildung von Lithium-7. Die mittlere freie Weglänge der Zerfallsprodukte in Gewebe ist mit etwa $9\,\mu$m gering. Das ist der Trick. Die Einwirkung der Zerfallsprodukte erfolgt deshalb insbesondere in der Nähe der Bor-angereicherten Zellen. Medikamente die Bor-10 in bösartigem Gewebe anreichern, sorgen dafür, dass es zu einer selektiver Schädigung des betroffenen Gewebes kommt. Ein Nachteil der Methode ist, dass es einer starken Neutronenquelle bedarf. Linearbeschleuniger liefern solch intensive Neutronenstrahlen. Abb. 23.71 zeigt wie der experimentelle Aufbau realisiert wird.

Ein Beispiel aus der Reaktortechnik

Kernreaktoren nutzen Bor, Kadmium, Hafnium und andere Elemente die langsame Neutronen absorbieren als Moderatoren, um die Rate der Kernspaltung (siehe Kapitel *Kern-*

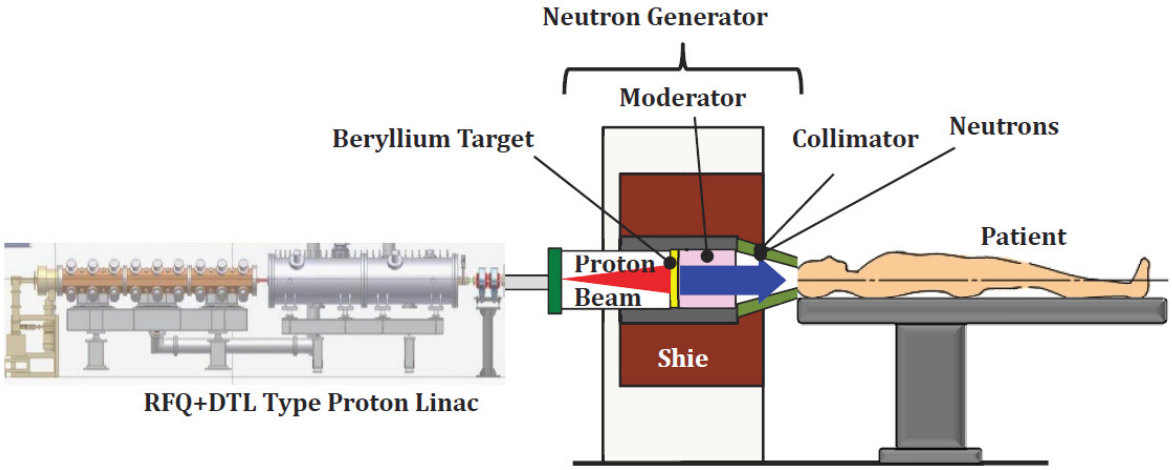


Abb. 23.71: Schematische Darstellung des Beryllium-Linearbeschleunigers zur Durchführung der Bor-Neutroneneinfang-Therapie [**?**].

modelle) zu reduzieren. Wenn Moderatorstäbe zur Steuerung in die Brennelementkammer des Reaktors eingeführt werden, nehmen sie einen größeren Anteil langsamer Neutronen auf, wodurch die Rate der Spaltungsreaktion verlangsamt und die erzeugte Leistung verringert wird. Umgekehrt werden, wenn man die Steuerstäbe entfernt, weniger Neutronen absorbiert und die Rate der Kernspaltung und die Energieproduktion steigt an. In einem Notfall kann die Kettenreaktion abgeschaltet werden, indem alle Steuerstäbe vollständig in Bereiche zwischen den Brennelementen eingeführt werden.

When the Joliot-Curies observed the reaction $\alpha + {}^{9}\mathrm{Be} \rightarrow \mathrm{n} + {}^{12}\mathrm{C}$ they suggested erronously that the neutral particle was a photon. Chadwick's argument against this concerned the large momentum (up to $100\,\mathrm{MeV}/c$) of the protons that these supposed photons ejected from wax.

Aufgaben

Aufgabe 6.1: Alle Isotope von Technetium (Tc) sind radioaktiv und zeichnen sich durch geringe Halbwertszeiten aus. Aus diesem Grund kommt Tc nicht natürlich vor. Technetium kann künstlich erzeugt werden und zwar wird Tc-97 durch die Wechselwirkung energetischer Deuteriumkerne mit einer Molybdän-96 Probe generiert. Identifizieren Sie das fehlende Teilchen in der Reaktion und schreiben Sie die Transmutationsreaktion auf!

Molybdän und Technetium haben die Ordnungszahlen 42 und 43. Das fehlende Teilchen ist das Neutron n.

$$^{96}_{42}\mathrm{Mo} \; + \; ^{2}_{1}\mathrm{H} \; \rightarrow \; ^{97}_{43}\mathrm{Tc} \; + \; ^{1}_{0}n$$

Aufgabe 6.2: Welche Energie wird beim Einfang eines Neutrons in einen ruhenden Stickstoff-14 Kern freigesetzt, bei der C-14 und ein Proton entsteht?

Die Reaktionsgleichung lautet:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} \; + \; n \; \rightarrow \; ^{14}_{6}\mathrm{C} \; + \; p$$

Energieerhaltung verlangt:

$$\begin{aligned} m_{N14} \cdot c^2 + m_n \cdot c^2 &= m_{C14} \cdot c^2 + m_p \cdot c^2 \\ E &= (m_{N14} + m_n - m_{C14} - m_p) \cdot c^2 \\ E &= (14.003074\,\mathrm{amu} + 1.008665\,\mathrm{amu}) \\ &\quad -(14.003242\,\mathrm{amu} + 1.007825\,\mathrm{amu}) \cdot (2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2 \\ E &= 1.0016 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} \\ E &= 0.626\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Aufgabe 6.3: Im Poltergeist-Experiment von Cowan und Reines [**?**] wurde ein Wassertank verwendete der $N_p = 3 \cdot 10^{28}$ Protonen enthielt. Der Fluss an Neutrinos aus dem Reaktor wurde mit $n_n = 1.7 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m}^{-2}$ pro Stunde bestimmt. Im Experiment erhielten die Forscher eine Rate von $N = 3\,\mathrm{h}^{-1}$ Ereignissen pro Stunde. Wie hoch ist der Wirkungsquerschnitt σ der Reaktion?

Die Anzahl der Neutrino-Proton Wechselwirkungen pro Stunde ist

$$n_n \cdot N_p = \frac{1.7 \cdot 10^{19}}{m^2 \cdot h} \cdot 3 \cdot 10^{28} = 5.1 \cdot 10^{47}\,\mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{h}^{-1}$$

Bei nur drei Ereignissen pro Stunde ist der Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{3\,\mathrm{h}^{-1}}{5.1 \cdot 10^{47}\,\mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{h}^{-1}} \\ \sigma &= 6 \cdot 10^{-48}\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Das ist ein ziemlich kleiner Wert. Es hat sich eingebürgert, Wirkungsquerschnitte in der Einheit Barn angegeben.

$$1\,\text{Barn} = 10^{-28}\,\text{m}^2.$$

Ein Barn entspricht dem geometrischen Querschnitts schwerer Atomkerne. Der Wechselwirkungsquerschnitt für diese Reaktion ist damit $6 \cdot 10^{-20}$ Barn.

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Ist das Neutron oder das Proton stabil?
2. Welche Vorteile in der Analytik haben Neutronen gegenüber Röntgenstrahlung?
3. Wie lautet die Reaktionsgleichung für die Kernaktivierung?
4. Wie erzeugt man Neutronenstrahlen?
5. Warum zerfallen durch Neutronen aktivierte Kerne über einen β^- und nicht über einen β^+-Zerfall?
6. Durch welchen Prozess bilden sich aus dem am häufigsten in der Atmosphäre vorkommende N-14 die Isotope C-14 und Tritium?

Nachweis Ionisierender Strahlung



This emanation, as it will be termed for shortness, has power of ionising the gas in its neighbourhoody...

Ernest Rutherford [**?**]

Strahlung ist eine Energieform. Die Energie kann zum Teil oder vollständig in einem Körper deponiert werden [**?**]. Bei Thermolumineszenz absorbiert ein Material wie LiF Strahlung wodurch es zu einer Strukturänderung kommt. Erhitzen des Kristalls führt zur Lichtemission, Dieses Verfahren wurde erstmals von Robert Boyle beschrieben.[71] Farbzentren in Kristallen können ebenfalls genutzt werden. Ein Kristall, der energetischen Teilchen oder elektromagnetischer Strahlung ausgesetzt ist, kann Farbzentren entwickeln. Das sind Stellen, an denen beispielsweise ein Ion versetzt wird und ein Elektron oder ein Loch zurückbleibt. Solche Defekte können sichtbares Licht bei verschiedenen Frequenzen absorbieren und einen zuvor klaren Kristall färben. Eine Technik, hochenergetische Strahlung nachzuweisen, den Tscherenkow-Zähler, haben wir schon im Kapitel *Relativistischer Dopplereffekt* kennengelernt. Da sich Masse und Ladungszustand der hochenergetischen Teilchen unterscheiden, kann man magnetische Felder nutzen, um die Natur

[71] Robert Boyle berichtete der Royal Society of London am 28. Oktober 1663 seine Beobachtung: *Eleventhly, I also brought it some kind of glimmering light by taking it (natural diamond) into bed with me and holding it a good while upon a warm part of my naked body.*

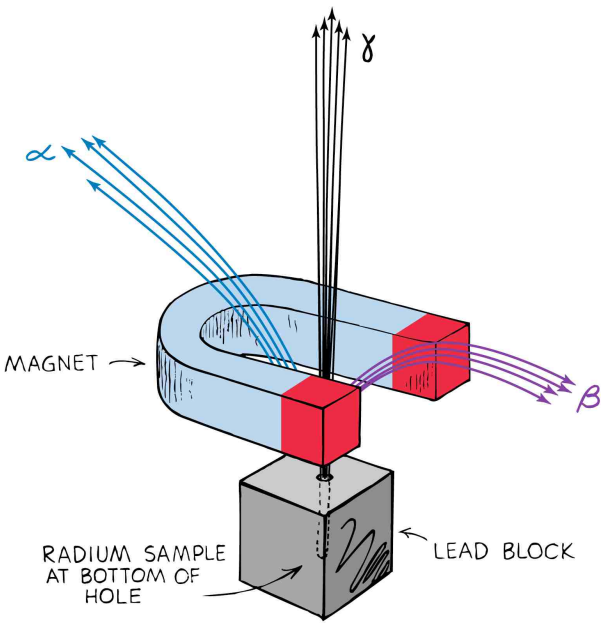


Abb. 23.72: Analyse Ionisierender Strahlung durch magnetische Felder.

der Strahlung zu charakterisieren. Die Lorentzkraft bewirkt eine Ablenkung geladener Teilchen in unterschiedliche Richtungen, je nach Ladungszustand (e^+, e^-). Eine unterschiedliche Masse (p, α) resultiert in unterschiedlichen Bahnradien. Neutrale Teilchen wie Photonen und Neutronen werden nicht abgelenkt. Abb. 23.72 illustriert das Verfahren. In diesem Abschnitt wollen wir weitere Methoden kennenlernen. Man unterscheidet drei Arten des Nachweises:

- Ein Detektor mit einem bestimmten empfindlichen Volumen, genannt Zähler, bestimmt die Anzahl der durch die einfallende Strahlung erzeugten Wechselwirkungen.

- Die einfallende Strahlung erzeugt im Detektor ein Signal, das proportional der Energie ist. Diese Instrumente nennt man Spektrometer.

- Ein Detektor bestimmt die mittlere Energie, die ein ausgewähltes strahlenempfindliches Volumen einfällt. Damit erhält man Auskunft über die absorbierte Strahlendosis. Solche Nachweissysteme bezeichnet man als Dosimeter.

Weiter unterscheidet man beim Nachweis zwischen Ionisation und Anregung:

- Bei Detektoren auf Basis von Ionisationsprozessen werden Ladungen (Elektron-Ionen Paare) durch die Strahlung erzeugt, wenn die Energie für den Prozess ausreicht.

- Die Strahlung regt Elektronen eines Atoms oder Moleküls in einen angeregten Zustand an. Relaxiert das Elektron, beispielsweise zurück in den Grundzustand, kommt es zur Lichtemission im ultravioletten oder sichtbaren Spektralbereich.

Technik	Räumliche Auflösung (μm)
Emulsion	1
Halbleiterdetektoren	10
Blasenkammer	10-150
Driftkammer	50-300
Drahtkammer	300
Funkenkammer	500
Blasenkammer	500

Tab. 23.5: Charakteristische räumliche Auflösung verschiedener Nachweisverfahren für Ionisierende Strahlung [**?**].

Tab. 23.5 vergleicht die räumliche Auflösung der einzelnen Nachweisverfahren.

During these manipulations the diamond accidentally touched the radium nitrate in the dish, and thus a few imperceptible grains of the radium salt got on to the zinc sulphide screen. The surface was immediately doted about with brilliant specks of green light, some being a millimetre or more across, although the inducing particles were too small to be detected on the white screen when examined by daylight. In a dark room, under a microscope with a 2/5-in objective, each luminous spot is seen to have a dull centrey. No two flashes succeed one another on the same spot, but are scattered over the surface, coming and going instantaneously, no movement of translations being seen. The scinitillations are somewhat better seen with a pocket lens magnifying about 20 diameters [**?**].

William Crookes, 1903

Ionisierende Strahlung kann also dazu führen, dass Atome und Moleküle positiv oder negativ geladen werden. α- und β-Strahlung verursacht einen direkten Ionisationseffekt, während bei Röntgen- und γ-Strahlung, sowie Neutronen, die Aufladung in der Wechselwirkung mit der Materie stattfindet. Der Mensch kann ionisierende Strahlung mit seinen Sinnen nicht erfassen. Technische Möglichkeiten des Nachweises existieren aber schon seid geraumer Zeit. Man denke an das Phänomen der Thermolumineszenz [**?**], das Goldblättchenelektroskop (1787) oder die Photographie. Gerhard Carl Schmidt fand, dass Thorium eine photographische Platte schwärzt und auch ein Elektroskop entlädt [**?**] Ionisierende Strahlung führt dazu, dass Luft elektrische leitend wird. Elster und Geitel [**?**], zwei Gymnasiallehrer aus Wolfenbüttel entwickelten ein Instrument, zum Nachweis ionisierender Strahlung über eine elektrische Entladung. Der Endladungsvorgang wird über ein Elektrometer angezeigt und ein Maß für die radioaktiven Stoffe in der Luft. Im Jahr 1903 stellte Crookes das Spinthariskop vor [**?**]. Das Prinzip des Nachweises beruht auf der Fluoreszenz von Zinksulfid bei der Wechselwirkung mit α-Strahlung [**?**]. Dieses Instrument ist in der Lage, einzelne α-Teilchen nachzuweisen. Ein Verfahren, die Strahlenbelastung zu monitoren, ist Thermolumineszenz (siehe auch Kapitel *Bohrsches Atommodell*). Thermolumineszenzdosimeter (TLD) sind häufig verwendete Geräte zur

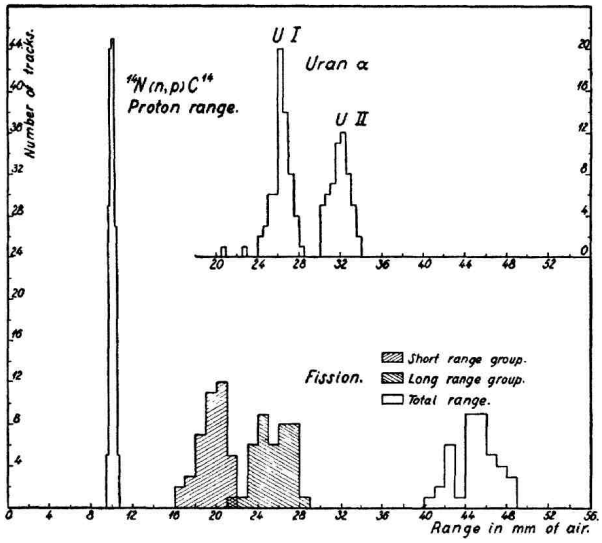


Abb. 23.73: Histogramm der Reichweitenverteilung von U-238 Zerfallsprodukten in Luft. Als Kontrolle verwendeten die Forscher den Zerfall von N-14 in C-14 [**?**].

Bestimmung personenbezogener Dosimetrie, siehe Kapitel. *Strahlentherapie*. Durch die Wechselwirkung mit ionisierender Strahlung werden in dem verwendeten Halbleiterkristall langlebige Störstellen erzeugt. Erhitzt man diese Kristalle, wird Licht emittiert. Beim Auslesen des Detektors wird die beim Erhitzen freigesetzte Lichtmenge bestimmt. Diese korreliert mit der in dem Einsatzzeit absorbierten Strahlendosis. Typische Materialien sind LiF, CaF_2 oder dotierte Materialien wie $CaSO_4$:Dy und $CaSO_4$:Mn. Detektoren, die die chemische Umwandlung von Stoffen aufgrund der Wechselwirkung mit Ionisierender Strahlung bestimmen, werden ebenfalls eingesetzt. Eine weitere Möglichkeit ist Methode der Kalorimetrie, bekannt aus der Thermodynamik.

Nebelkammer

Wenn mit Wasserdampf gesättigte Luft, getrieben durch Konvektion nach oben strömt, dehnt es sich adiabatisch aus, wodurch die Temperatur abfällt. Dies erzeugt übersättigten Wasserdampf. Geringste Störungen führen zur Kondensation und es entstehen Wolken oder Nebel. Die von Wilson[72] vorgestellte Nebelkammer nutzt dieses physikalische Phänomen aus, um Einzelereignisse Ionisierender Strahlung aufzulösen. Die Wilson-Kammer war von entscheidender Bedeutung für die Entdeckung neuer Teilchen und ihrer Eigenschaften! In den Instrument erreicht man diese übersättigten Dampfbedingungen durch die Bewegung eines Kolbens oder mit Hilfe einer elastischen Membran. Durchquert ein schnelles Teilchen die Kammer, bilden sich kleine Wassertropfen entlang der Teilchenbahn [**?**]. Mit Hilfe der Methode konnte man beispielsweise die Reichweite der Fragmente aus dem radioaktiven Zerfall von U-238 in Luft bestimmen. Die Teilchen kommen maximal 5 cm weit. Die Gruppierung in den Reichweiten kann man auf die unterschiedlichen Zerfallsprodukte zurückführen [**?**], siehe Abb. 23.73. Weiter gelang es in einer Ballonmessung BeV-Elektronen[73] in der kosmischen Höhenstrahlung nach-

[72] siehe Hinweis in Abb. 23.21
[73] 1 BeV $=10^9$ eV

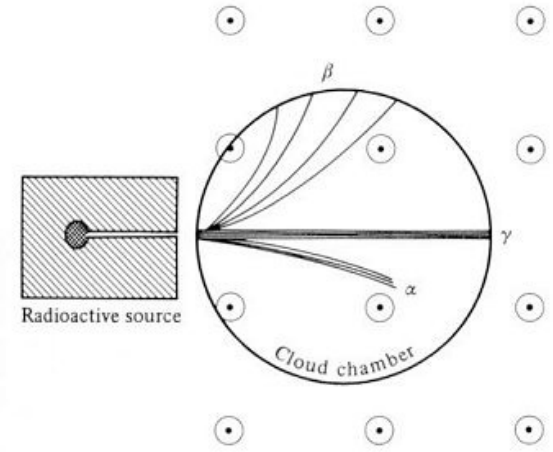


Abb. 23.74: Schematischer Aufbau einer Nebelkammer. Durch das Magnetfeld kommt es zur Ablenkung geladener Teilchen.

zuweisen [**?**]. Im Jahr 1932 beobachtet der Rostocker Physiker Paul Kunze in seiner Nebelkammer Spuren eines eines unbekannten positiv geladenen Teilchens [**?**]. Es handelte sich um das Myon (Kapitel *Zerfall des Myons*), deren Entdeckung Anderson und Neddermeyer zugeschrieben wurde [**? ?**].

Evidence for the Existence of New Unstable Elementary Particles [?]: Among some fifty counter-controlled cloud-chamber photographs of penetrating showers which we have obtained during the past year as part of an investigation of the nature of penetrating particles occurring in cosmic ray showers under lead, there are two photographs containing forked tracks of a very striking character. These photographs have been selected from five thousand photographs taken in an effective time of operation of 1500 hours. On the basis of the analysis given below we believe that one of the forked tracks represents the spontaneous transformation in the gas of the chamber of a new type of uncharged elementary particle into lighter charged particles, and that the other represents similarly the transformation of a new type of charged particle into two light particles, one of which is charged and the other uncharged.

In einer Nebelkammer spüren geladene Teilchen das herrschende Magnetfeld und bewegen sich in Folge der Lorentzkraft auf einer Kreisbahn. Abb. 23.74 zeigt den Aufbau und die Ausrichtung des Magnetfeldes. Wenn das Teilchen durch die andauernden Stöße mit dem Gas kinetische Energie verliert, reduziert sich der Radius des Kreises und die Teilchen spiralisieren in immer kleineren Bahnradius. Die Drehrichtung hängt vom Vorzeichen der Ladung ab. Nebelkammern können daher verwendet werden, Teilchen von Ladung und Masse zu identifizieren. Sind die Teilchenbahnen in der Abbildung richtig eingezeichnet?

Die Entdeckungen des Positrons und des Myons durch Anderson,[74] die des Kaons durch Rochester und Butler [**?**] gelangen durch den Einsatz von Nebelkammern, die die Spuren

[74] siehe Fußnote 47

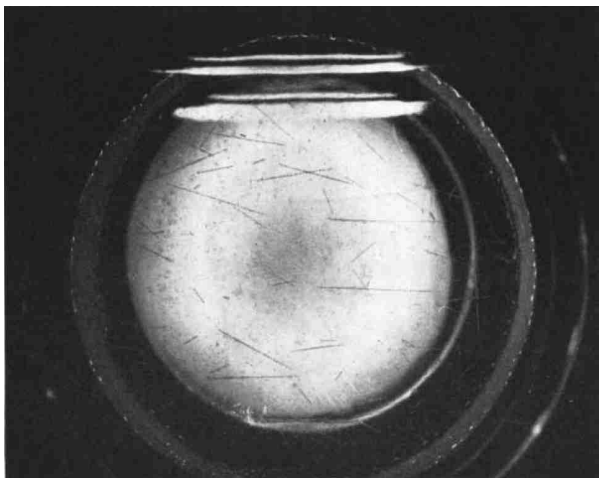


Abb. 23.75: Blasenspuren in flüssigem Wasserstoff. Neutronen durchsetzen die auf tiefe Temperaturen (33 K) abgekühlte Kammer (6.5 cm Durchmesser). Die Spuren zeigen zurückstoßende Protonen [**?**]

kosmischer Strahlung analysierten.

Die Diffusions-Nebelkammer [**?**] unterscheidet sich von der Wilson-Kammer dadurch, dass der Boden der Wanne auf niedriger Temperatur gehalten wird ($T_K < -26\,^o$C). Statt Wasserdampf verwendet man, aufgrund des niedrigeren Gefrierpunkts, Alkohole. Dadurch kann man den Eintrag kosmischer Strahlung durchgehend beobachten.

Emulsionen

Schon im Jahr 1910erkannte man, das in der Photographie eingesetzte Emulsionen mit einem hohen Anteil körnigen Silberhalogenid, empfindlich auf Ionisierende Strahlung reagierten. Mit Hilfe dieser Methode wurde im Jahr 1948 das Pion nachgewiesen, sowie sein Zerfall aufgrund der Schwachen Wechselwirkung [**?**]. [75]

Blasenkammer

In der Blasenkammer[**?**], die die Nebelkammern in den 1960er Jahren ablöste, dient eine Flüssigkeit (beispielsweise flüssiger Wasserstoff), die bis knapp unter den Siedepunkt erhitzt wird, dazu, die Teilchenbahnen nachzuweisen [**?**], siehe Abb. 23.75. Abb. 23.76 zeigt ein weiteres Beispiel.[76] Abb. 23.77 zeigt das Instrument, dass am CERN zwischen 1973 und 1984 eingesetzt wurde. Abb. 23.78 zeigt eine typische Aufnahme, wie sie in einer Blasenkammer beobachtet wird. Das Magnetfeld zwingt die geladenen Teilchen auf Kreisbahnen. Einige der Bahnen sind stärker gekrümmt. Was sagt uns das? Je geringer der Radius, desto geringer ist der Teilchenimpuls. An den Markierungen (D) startet eine Trajektorien. Ausgangspunkt ist eine Teilchenbahn mit hohem Impuls. Hier

[75] The Nobel Prize in Physics 1950 was awarded to Cecil Frank Powell *for his development of the photographic method of studying nuclear processes and his discoveries regarding mesons made with this method*

[76] The Nobel Prize in Physics 1960 was awarded to Donald Arthur Glaser *for the invention of the bubble chamber*

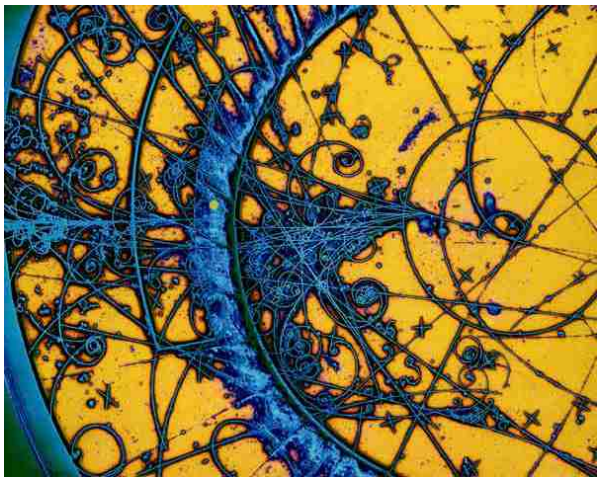


Abb. 23.76: Dieses Bild wurde in einem Experiment in der Big European Bubble Chamber aufgenommen. Geladene Teilchen durchqueren eine mit flüssigem Wasserstoff und Neon gefüllte Kammer. Die Ionisationsspuren erzeugen auf ihrem Weg Blasen in der Flüssigkeit [**?**].

wird ein Elektron durch das energetische Partikel weggekickt. Die Bahn des Elektrons spiralisiert. Was bedeutet das? Das Elektron verliert auf seinem Weg Energie, der Impuls nimmt ab und der Radius der Bahn reduziert sich. Andere Bahnen spiralisieren schwächer. Auch das kann man verstehen. Hier ist der Energieverlust Bremsstrahlung, siehe auch Markierung (B). An den Markierungen (C) entstehen durch die Wechselwirkung mit γ-Photonen Comptonelektronen. Durch γ-Photonen ausgelöste Paarbildung findet man an den Markiereungen (G). Aus dem Bahnradius kann mit Hilfe des Energie-Impulssatzes die Energieverhältnisse klären. In Blasenkammern gelingt es, aufgrund der dichteren Flüssigkeit Spuren sehr energiereicher Teilchen zu beobachten. Mit Blasenkammern wurden die Existenz der W- und Z-Bosonen nachgewiesen.[77]

Funkenkammer

Eine Funkenkammer (Einführung 1955) verwendet ein Gitter aus Metalldrähten [**?**]. Zwischen den nicht isolierten Drähten werden hohe Spannungen (etwa 1MeV/m) angelegt. Wie bei der Nebelkammer bewirken energiereiche, geladene Teilchen eine Ionisationsspur im Gas. Die elektrischen Felder sind allerdings hoch genug, um einen Funken am Ort der anfänglichen Ionisation zu erzeugen. Ort und Zeit des Ereignisses wird registriert und für die Analyse ausgewertet. Die Ortsgenauigkeit beträgt etwa $\pm 0.5\,\mathrm{mm}$ und die Zeitauflösung etwa $\pm 0.5\,\mu\mathrm{s}$.

Gasdetektoren

Die ionisierende Strahlung erzeugt in einem mit Gas (90% Argon, 10% Ethylalkohol) bei geringem Druck gefüllten Detektor Ladungen. Den schematischem Aufbau zeigt Abb. 23.79. Die so erzeugten Ladungen können sich aufgrund des geringen Druck nahezu frei bewegen (große mittlere freie Weglänge). Mit Hilfe von Elektroden, an die

[77] The Nobel Prize in Physics 1984 was awarded jointly to Carlo Rubbia and Simon van der Meer *for their decisive contributions to the large project, which led to the discovery of the field particles W and Z, communicators of weak interaction*



Abb. 23.77: Photo der Big European Bubble Chamber [**?**].

eine Spannung angelegt wird, erzeugt man ein elektrisches Feld, dass die Ladungsträger absaugt. Der resultierende Strom (Strommodus) ist ein Maß für die Strahlenbelastung. Eine andere Möglichkeit den Nachweis zu führen, ist die Bestimmung der Anzahl der Ionen-Elektronen Ladungspaare (Impulsmodus). Ionisationskammern, Proportionalzähler und Geiger-Müller-Zähler sind Beispiele für solche Gasdetektoren. In Ionisationskammern verwendet man den Strommodus, während Proportionalzähler und Geiger-Müller den Impulsmodus verwendet. Man unterscheidet sechs unterschiedliche Einstellungsbereiche bei den Gasdetektoren, siehe Abb. 23.80:

(1) Bei niedriger elektrischer Spannung reicht die Stärke des elektrischen Feldes nicht aus, um Elektronen und Ionen zu beschleunigen. In diesem Falle rekombinieren viele der Ladungsträger bevor sie die Elektroden erreichen. Bei diesen Einstellungen nimmt das Signal zu, wenn man die angelegte Spannung erhöht. Als Folge verringert sich die Rekombinationsrate und sinkt dann auf NULL. Dieser Einstellbereich (Rekombinationsbereich) ist ineffektiv beim Nachweis Ionisierender Strahlung .

(2) Im Ionisationsbereich ist die angelegte Spannung so hoch, dass jedes Ladungspaar die Elektroden erreicht. In diesem Einstellungsbereich ändert sich die Anzahl der Paare NICHT, wenn man die Spannung erhöht. Das bedeutet, dass die Anzahl der durch die Strahlung erzeugten Ionenpaare direkt proportional der Anzahl der von den Elektroden nachgewiesenen Ionenpaare ist.

(3) Im Proportionalbereich kommt es zu einer Verstärkung des Signals durch die Wech-

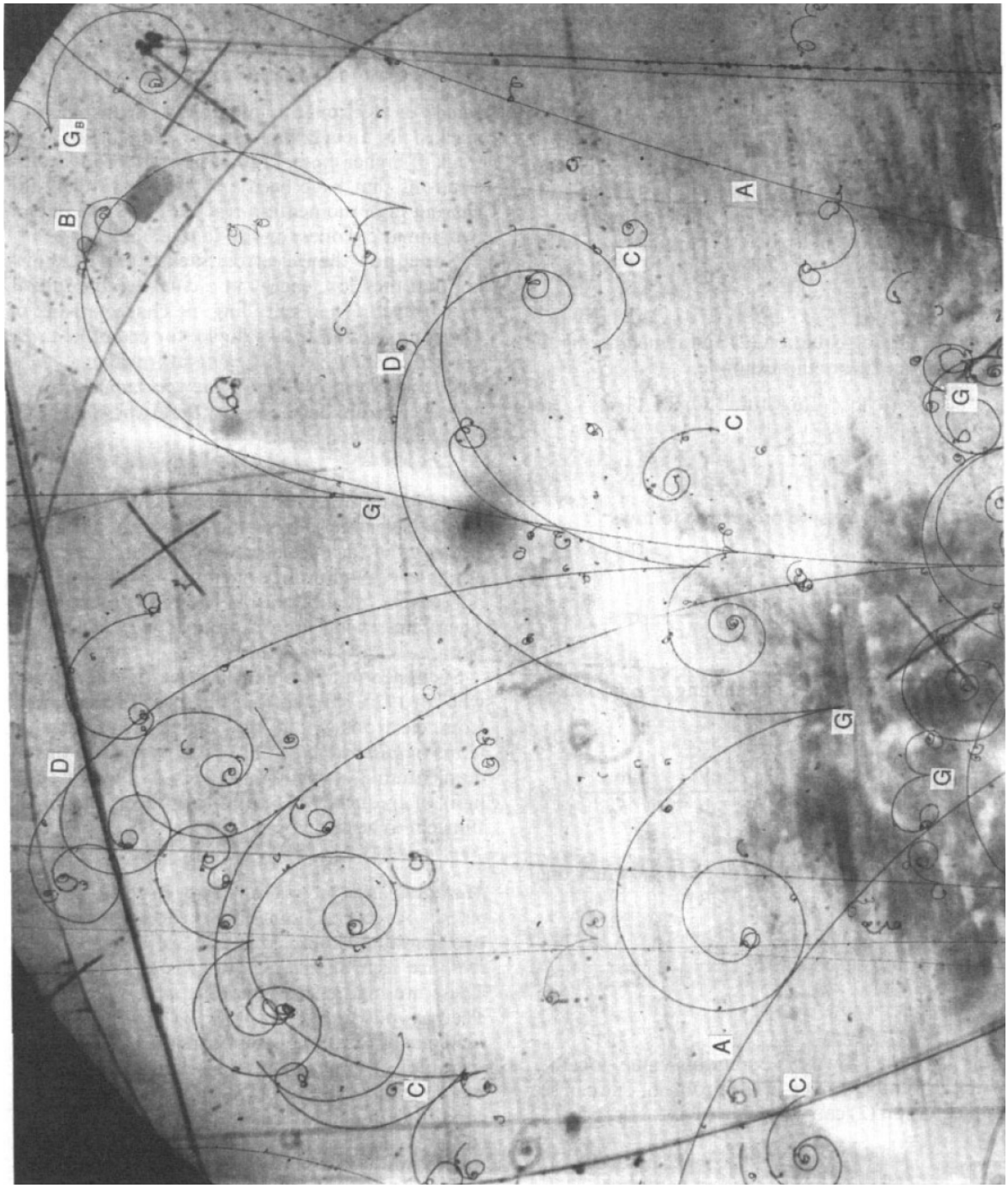


Abb. 23.78: Trajektorien energetischer Teilchen in einer Blasenkammer. Aufgrund der Ausrichtung des Magnetfeldes bewegen sich Elektronen nach links und Positronen nach rechts [**?**].

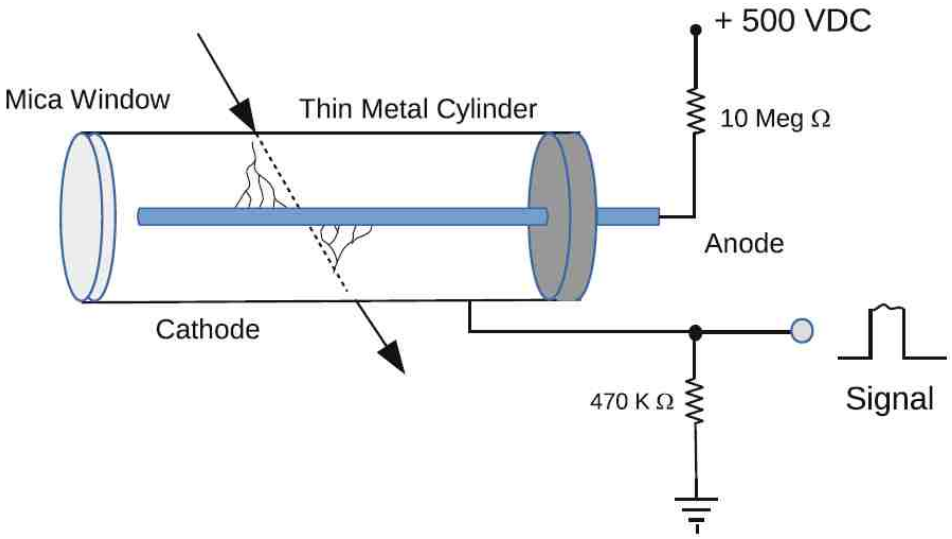


Abb. 23.79: Aufbau eines Zählrohrs zum Nachweis Ionisierender Strahlung [**?**].

selwirkung mit dem Gas im Behälter. Aufgrund höherer angelegter Spannung werden durch ionisierende Stöße zusätzliche Ladungspaare erzeugt. Diese Ladungsträger werden ebenfalls im elektrischen Feld beschleunigt. Es kommt zur sogenannten Townsend-Lawine,[78] wodurch ein starker elektrischen Impuls erzeugt wird. In Abhängigkeit von der Spannung ergibt sich ein bestimmter Verstärkungsfaktor. Die Impulshöhe hängt von der Teilchenenergie ab. Die Pulshöhe ist charakteristisch für die Art der ionisierenden Strahlung. Das erlaubt es, die einfallenden Teilchen zu identifizieren und ihre Energie zu bestimmen.

(4) Erhöht man die Spannung weiter, ist in einem eingegrenzten Proportionalbereich der Gasverstärkungsfaktor nicht mehr konstant und es treten nichtlineare Verstärkungseffekte auf, die man auf Verzerrungen des elektrischen Feldes durch die hohe Anzahl von erzeugten Ladungsträgern. In der Regel versucht man solche experimentellen Bedingungen zu vermeiden.

(5) Bei noch höheren Spannungen ist das elektrische Feld so stark, dass lawinenartig Elektron-Ionen-Paare entstehen. Das Signal ist nahezu unabhängig vom primären Ionisationsprozess und der Teilchenenergie. Diesen Bereich nennt man den Geiger-Müller-Bereich. Der detektierte Puls enthält keine Information über der Art der ionisierenden Strahlung.

[78] *Lexikon:* Die Townsend-Lawine ist ein Ionisierungsprozess in Gasen. Freie Elektronen werden durch ein elektrisches Feld beschleunigt, kollidieren mit Gasmolekülen und setzen Elektronen frei. Diese Elektronen werden wiederum beschleunigt und erzeugen in Stoßprozessen immer mehr Elektronen. Das Ergebnis ist eine Lawinen an Ladungsträgern, die das Gas elektrisch leitend machen. Dieser Lawinenprozess erfordert sowohl eine Quelle freier Elektronen als auch ein genügend hohes elektrisches Feld.

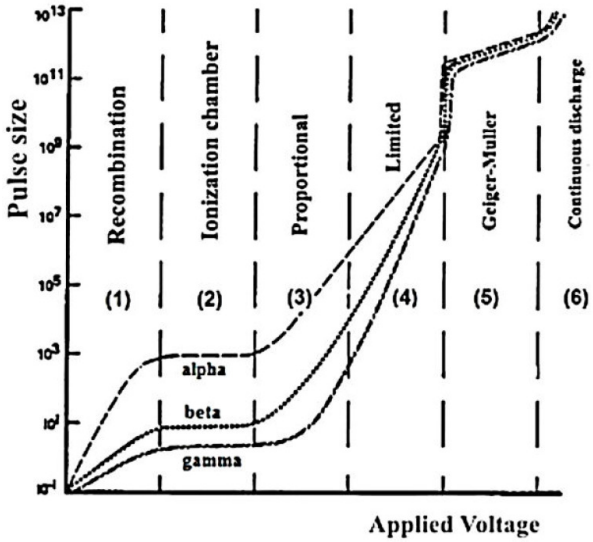


Abb. 23.80: Nachweisbereich von Gasdetektoren in einer Ionisationskammer [**?**].

Geiger-Müller Zähler eignen sich auch zum Nachweis von Neutronen. Dazu füllt man den Detektor mit Bortrifluorid. Der Bor-Kern hat einen hohen Querschnitt für die Bildung von α-Teilchen, wenn man ihn mit Neutronen bestrahlt. Die Empfindlichkeit in Bezug auf die schwerer nachzuweisende harte γ-Strahlung kann erhöht werden, wenn man ein Element hoher Ordnungszahl (z.B. Blei) als Kathode verwendet. Dies führt zu einer Empfindlichkeit der Strahlung von etwa 1% durch Ausnutzung der Reaktion: $\gamma \rightarrow e^+e^-$ (Kapitel *Einsteingleichung*).

(6) Bei noch höheren Spannungen ist die elektrische Feldstärke so hoch, dass es im neutralen Gas zu spontanen Ionisationsprozessen kommt. Der Detektor wird damit unempfindlich in Bezug auf den Nachweis ionisierender Strahlung.

Drahtkammer

Eine Drahtkammer arbeitet vergleichbar einem Zählrohr, besteht aber aus vielen parallel geführten Hochspannungsdrähte in einer mit Gas gefüllten Vakuumkammer.[79] Hochenergtische Teilchen ionisieren entlang ihrer Bahn Gasmoleküle und generieren einen kurzzeitigen elektrischen Strom zwischen einem naheliegen Draht und der Kathode. Der Spannungsabfall an jeden Draht wird elektronisch nachgewiesen und ausgewertet. Als Resultat erhält man die hochaufgelöste dreidimensionale Trajektorie des Teilchens. Gegenüber einer Blasenkammer (Rate 1 Hz) kann dieser Detektor bis zu einer Millionen Ereignisse pro Sekunde nachweisen.

[79] The Nobel Prize in Physics 1992 was awarded to Georges Charpak *for his invention and development of particle detectors, in particular the multiwire proportional chamber*

Szintillationsdetektoren

Szintillatoren nutzen die Eigenschaften von Halbleitermaterialien (anorganische und organische Kristalle) (siehe Kapitel *Festkörper*). Die Anregung mit Ionisierender Strahlung führt zu Lumineszenz [**?**]. Bei der Wechselwirkung wird ein Elektron aus dem Valenzband ins Leitungsband angeregt und ein Exziton erzeugt. Bei der Relaxation in den Grundzustand wird Licht im sichtbaren Spektralbereich emittiert, dass man über den Photoeffekt nachweist. Das Signal eines Szintillationsdetektors ist proportional zur Energie der Ionisierenden Strahlung. Szintillationszählers zeichnen sich durch eine hohe Nachweiseffizienz (hohe Quantenausbeute) aus. Aufgrund der kurzen Lichtblitze beim Nachweis sind diese Detektoren auch für hohe Zählraten geeignet. Die Intensität der Lichtblitze und die resultierende Amplitude des Ausgangsspannungspulses sind proportional zur Energie der Strahlung, was es ermöglicht, Energie und Anzahl der einfallen ionisierenden Teilchen zu bestimmen. Gebräuchliche Materialien sind Natriumiodid (NaI) oder hochreines Germanium.

Aufgaben

Aufgabe 7.1: Im Fermilab[80] wird in der Blasenkammer (Magnetfeld: 3 T) ein Teilchen beobachtet, dass sich auf einer Kreisbahn mit einem Radius r_q1.11 m bewegt. Berechnen Sie den Impuls des Teilchens in SI-Einheiten und in der atomaren Einheit GeV/c.

Aus dem Gleichgewicht von Lorentz- und Zentripetalkraft und $p{=}m \cdot v$ ergibt sich

$$\begin{aligned} q \cdot B_M \cdot v_q &= \frac{m \cdot v_q^2}{r_q} \\ p_q &= q \cdot B_M \cdot r_q \\ p_q &= (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (3.0\,\mathrm{T}) \cdot (1.11\,\mathrm{m}) \\ p_q &= 5.33 \cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{23.72}$$

Für die Umrechnung in atomaren Einheiten benötigen wir den entsprechenden Wert für 1 kg Materie in $\mathrm{eV}/^2$

$$1\,\mathrm{kg} = 5.61 \cdot 10^{35}\,\mathrm{eV}/c^2 \tag{23.73}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} p_q &= 5.33 \cdot 10^{-19} \cdot (5.61 \cdot 10^{35}\,\frac{\mathrm{eV}}{c^2}) \cdot \frac{\mathrm{m}}{s} \\ p_q &= 5.33 \cdot 10^{-19} \cdot (5.61 \cdot 10^{35}\,\frac{\mathrm{eV}}{c}) \cdot \frac{1}{c}\frac{\mathrm{m}}{s} \\ p_q &= 5.33 \cdot 10^{-19} \cdot (5.61 \cdot 10^{35}\,\frac{\mathrm{eV}}{c}) \cdot \frac{1}{(2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})}\frac{\mathrm{m}}{s} \\ p_q &= 5.33 \cdot 10^{-19} \cdot (5.61 \cdot 10^{35}\,\frac{\mathrm{eV}}{c}) \cdot \frac{1}{(3 \cdot 10^8)} \\ p_q &= 0.997\,\frac{\mathrm{GeV}}{c} \end{aligned}$$

Wenn man den Wert für den Impuls von $p_q{=}1$ GeV/c und die besprochenen Parameter des Experiments nutzt, ergibt sich eine einfache Formel:

$$p = 0.3 \cdot B_M\,[T] \cdot r\,[m] \tag{23.74}$$

Aufgabe 7.2: Warum kann man im Vakuum durch ein γ-Photon kein e^+e^--Paar erzeugen?

Im Schwerpunktsystem von Elektron und Positron haben die Teilchen gleich große und entgegengesetzte Impulse. Beim γ-Zerfall des e^+e^--Paars ergibt sich eine Photonenenergie von $2E_e$ und ein Photonenimpuls von $p_\gamma{=}0$. Es gilt aber aufgrund des relativistischen Energie-Impulssatzes, dass $E{=}p \cdot c$. Man kann deshalb kein Photon erzeugen, dass Energie aufweist, aber keinen Impuls besitzt.

[80] Fermi National Accelerator Laboratory

Aufgabe 7.3: α-Teilchen einer Energie von 4.4. MeV durchqueren einen Geiger-Müller Zähler. Im Mittel benötigt man 30 eV, um einen Ionisationsprozess in den Atomen des Gases auszulösen. Wie hoch ist der maximal erzeugte elektrische Ladung im Instrument?

$$N_e = \frac{4.4 \cdot 10^6 \,\mathrm{eV}}{30 \,\mathrm{eV}} = 1.5 \cdot 10^5 \,\mathrm{eV}$$

Das ergibt eine elektrische Ladung von

$$Q_e = N_e \cdot e = (1.5 \cdot 10^5 \,\mathrm{eV}) \cdot (1.602 \cdot 10^{-19} \,\mathrm{C}) = 2.4 \cdot 10^{-14} \,\mathrm{C} \tag{23.75}$$

Konzeptionelle und andere Fragen

1. Was versteht man unter Ionisierender Strahlung?
2. Welche radioaktiven Zerfallsprodukte kann man mit einem elektrischen Feld nachweisen?
3. Welche radioaktiven Zerfallsprodukte kann man mit einem magnetischen Feld nachweisen?
4. Was passiert im Hinblick auf die Trajektorie eines Teilchens, wenn auf dem Weg durch die Nebelkammer ein geladenes Teilchen neutral wird (Neutralisation)?
5. Wie gewinnt man Informationen über die Masse eines Teilchens?
6. Wie gewinnt man Informationen über die kinetische Energie eines Teilchens?
7. Welche Bedeutung hat die Wilson-Kammer für die Physik elementarer Teilchen?
8. Erklären Sie die Funktionsweise eines Geiger-Müller Zählrohrs!
9. Welche Techniken konnte Becquerel genutzt haben, um nachzuweisen, dass es drei Arten von radioaktiver Strahlung gibt?

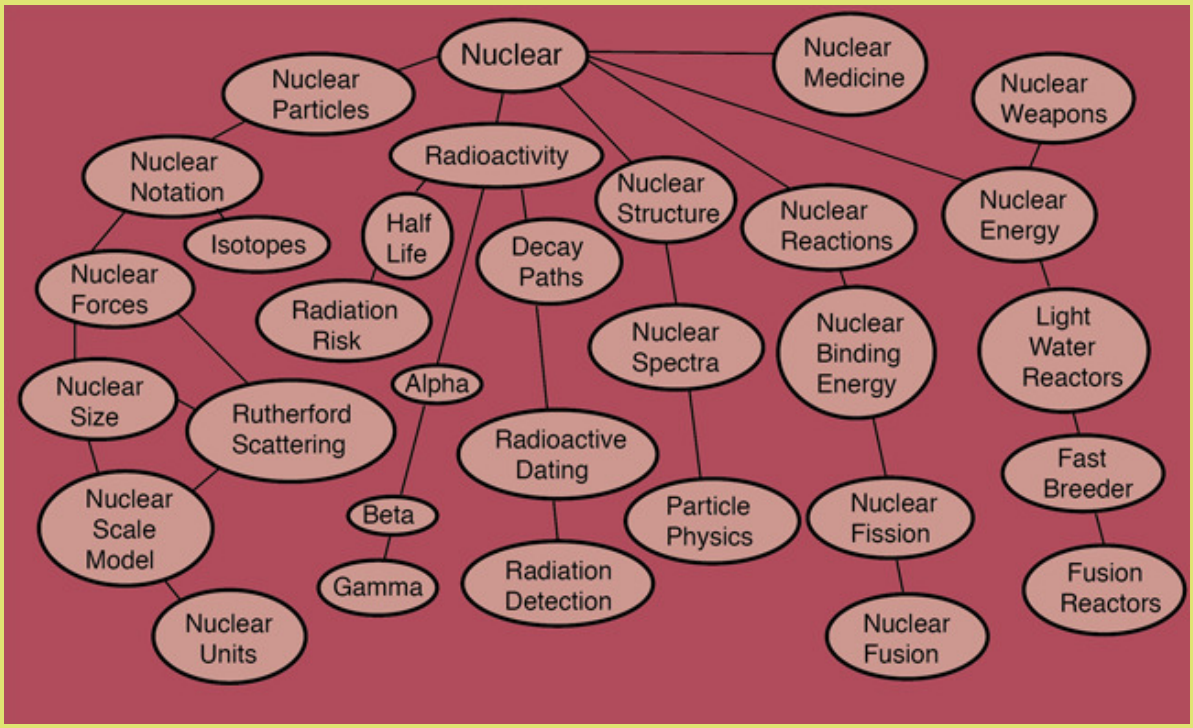


Abb. 23.81: Überprüfen Sie ihren Wissenstand und markieren Sie die behandelten Konzepte [**?**].

Was war relevant für die Klausur?

- Zerfallsreihen
  - Thorium-Reihe $^{232}_{90}\text{Th} \Longrightarrow ^{208}_{82}\text{Pb}$
  - Actinium-Reihe $^{235}_{92}\text{U} \Longrightarrow ^{207}_{82}\text{Pb}$
  - Uran-Radium-Reihe $^{238}_{92}\text{U} \Longrightarrow ^{206}_{82}\text{Pb}$
  - Neptunium-Reihe $^{237}_{93}\text{Np} \Longrightarrow ^{209}_{83}\text{Bi}$
- Q_{decay}-Faktor

$$Q_{decay} = m(X_{\text{parent}}) \cdot c^2 - m(X_{\text{parent}}) \cdot c^2 - m(\alpha) \cdot c^2$$

- α-Zerfall (Gl. 23.18), Tunneleffekt und Coulombbarriere

$$^{A}_{Z}X \;\xrightarrow{\alpha}\; ^{A-4}_{Z-2}Y \;+\; ^{4}_{2}He$$

- Geiger Nuttall Regel (Gl.23.26)

$$Q_\alpha = k_C \cdot \frac{2\,(Z-2) \cdot e^2}{r_\alpha}$$

- Schwache Wechselwirkung und β-Zerfall (Gl. 23.31 und 23.32)

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{Z}X &\xrightarrow{\beta^-} {}^{A}_{Z+1}Y + e^- + \overline{\nu_e} \\
{}^{A}_{Z}X &\xrightarrow{\beta^+} {}^{A}_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e
\end{aligned}
$$

- β-Elektronenspektrum,
- das Neutrino
- Positron
- K-Einfang
- γ-Zerfall (Gl. 23.11)

$$
{}^{A}_{Z}X^* \xrightarrow{\gamma} {}^{A}_{Z}X + h \cdot \nu_\gamma
$$

- Nachweis des Neutrons
- Aktivierung durch Neutronen (Gl. 23.69)

$$
{}^{A}_{Z}X \; + \; {}^{1}_{0}n \; \rightarrow \; {}^{A+1}_{Z}Y \; + \; {}^{1}_{1}p \; + \; {}^{0}_{-1}e
$$

- Methoden zum Nachweis Ionisierender Strahlung

Literaturverzeichnis

[1] J.W. Rohlf. *Modern Physics from α to Z^0*. Wiley & Sons, New York, 1994. Lehrbuchempfehlung.

[2] W. Demtröder. *Experimentalphysik 3*. Springer, Berlin, 3 edition, 2005.

[3] D. C. Ciancoli. *Physics*, volume 2. Prentice, 5 edition, 1998.

[4] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentals of physics*, volume 4. Wiley & Sons, 7 edition, 2005. Lehrbuchempfehlung.

[5] E. Hering and R. Martin. *Optik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Hanser, München, 2017.

[6] J. Heintze and P. Bock. *Lehrbuch zur Experimentalphysik*, volume 5. Springer Spektrum, Berlin, 2019.

[7] Ch. Kommer, T. Tugendhat, and N. Wahl. *Tutorium Physik fürs Nebenfach*. Springer, Berlin, 2 edition, 2019.

[8] U. Leute. *Physik und ihre Anwendungen in Technik und Umwelt*. Hanser, 2 edition, 2004.

[9] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer, Berlin, 24 edition, 2005.

[10] J. Orear. *Grundlagen der modernen Physik*. Carl Hanser, München, 1971. Lehrbuchempfehlung.

[11] J. Orear. *Physik*. Macmillan, 1979. Lehrbuchempfehlung.

[12] B. Povh. *Anschauliche Physik*. Springer, 2011.

[13] J. Rybach. *Physik für Bachelors*. Hanser, München, 4 edition, 2019.

[14] S. Slama. *Experimentalphysik kompakt für Naturwissenschaftler*. Springer Spektrum, Berlin, 2018.

[15] H. Stroppe. *Physik*. Hanser, München, 16 edition, 2018.

[16] S. Adams and J. Allday. *Advanced Physics*. Oxford University Press, Oxford, 2 edition, 2013.

[17] M.N. Avadhanulu and R.G. Kshirsagar. *Engineering Physics*. S. Chand, New Dehli, 2 edition, 2017. Lehrbuchempfehlung.

[18] W. G. Buckman. *College Physics*, volume 4. Van Nostrand, 1981.

[19] J. D. Cutnell and K. W. Johnson. *Physics*. Wiley & Sons, 6 edition, 2005.

[20] A. Giambattista, B. McCarthy Richardson, and R.C. Richardson. *College Physics*, volume 2. McGraw-Hill, Boston, 3 edition, 2010.

[21] P. G. Hewitt. *Conceptual physics*. Addison-Wesley, San Francisco, 9 edition, 2002.

[22] C. H. Holbrow et al. *Modern Introductory Physics*. Springer, New York, 2 edition, 2010.

[23] J.W. Kane and M. M. Sternheim. *Physics*. Wiley & Sons, New York, 1978.

[24] K. Krane. *Modern Physics*. Wiley & Sons, Hoboken, 3 edition, 2012. Lehrbuchempfehlung.

[25] R.D. Knight. *Physics*. Pearson, Boston, 2004. Lehrbuchempfehlung.

[26] R. D. Knight et al. *College Physics*. Addison-Wesley, Boston, 2 edition, 2010. Lehrbuchempfehlung.

[27] S.L. Ling, J. Sanny, and W. Moebs. *University Physics*, volume 3. Openstax, Houston, 2018.

[28] M. Mansfield and C. O´Sullivan. *Understanding Physics*. Wiley & Sons, 2 edition, 2011. Lehrbuchempfehlung.

[29] J. C. Morrison. *Modern Physics for Scientists and Engineers*. Academic Press, Amsterdam, 2010. Lehrbuchempfehlung.

[30] J. M. Pasachoff and M. L. Kutner. *Invitation to Physics*. Norton, New York, 1981.

[31] S. H. Patil. *Elements of Modern Physics*. Springer, Cham, 2021.

[32] R. L. Reese. *University Physics*, volume 2. Brooks, Pacific Grove, 1998.

[33] R. A. Serway, C. J. Moses, and C. A. Moyer. *Modern Physics*. Brooks/ Cole, Belmont, 2 edition, 2005. Lehrbuchempfehlung.

[34] M. M. Sternheim and J.W. Kane. *General Physics*. Wiley & Sons, New York, 2 edition, 1991. Lehrbuchempfehlung.

[35] P. A. Tipler, G. Mosca, and P. Kersten. *Physik*. Springer Spektrum, Berlin, 9 edition, 2024. Lehrbuchempfehlung.

[36] P.P. Urone and R. Hinrichs. *College Physics*. Openstax, Houston, 2020.

[37] R. Wolfson and J. M. Pasachoff. *Physics*, volume 2. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 3 edition, 1999.

[38] H.D. Young and R.A. Freedman. *University Physics*, volume 1. Addison-Wesley, 14 edition, 2016.

[39] P. Atkins and J. dePaula. *Physical Chemistry*. Oxford University Press, Oxford, 8 edition, 2008.

[40] P. Flowers, K. Theopold, R. Langley, E.J Neth, and W.R. Robinson. *Chemsitry: Atoms First*. Openstax, Houston, 2019.

[41] R. G. Mortimer. *Physical Chemistry*. Elsevier, Amsterdam, 3 edition, 2008.

[42] R. P. Ozerov and A.A Vorobyev. *Physics for Chemists*. Elsevier, Amsterdam, 2007.

[43] A. F. Fercher. *Medizinische Physik*. Springer, München, 1992. Lehrbuchempfehlung.

[44] S. Alexander. *The Jazz of Physics: The secret link between music and the structure of the universe*. Basic Books, New York, 2016.

[45] J. Baker. *50 Schlüsselideen*. Spektrum Verlag, Heidelberg, 2009.

[46] B. Bahr, J. Resag, and K. Riebe. *Faszinierende Physik*. Springer, Berlin, 2015.

[47] B. Bryson. *Eine kurze Geschichte von fast allem*. Goldmann, München, 5 edition, 2005.

[48] P. Evers. *Die wundersame Welt der Atomis*. Wiley & Sons, Berlin, 2002.

[49] R. Feynman. *The character of physical law*. Cox and Wyman Ltd., London, 1967.

[50] R. P. Feynman. *Six easy pieces : essentials of physics, explained by its most brilliant teacher*. Addison-Wesley, [1995].

[51] R. P. Feynman. *Quantum Electrodynamics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1998.

[52] S. W. Hawking. *Eine kurze Geschichte der Zeit*. Rowohlt, Reinbek, 1999.

[53] S. W. Hawking. *Kurze Antworten auf große Fragen*. Klett-Cotta, Stuttgart, 2019.

[54] R. H March. *Physics for Poets*. American Association of Physics Teachers, Chicago, 1978.

[55] K. Thorne and C. Nolan. *The Science of Interstellar*. W. W. Norton, New York, 2014.

[56] S. Weinberg. *The first three minutes: a modern view of the origin of the universe*. Basic Books, New York, 1977.

[57] G. Zukav. *The dancing of Wu Li masters*. Rider, London, 1979.

[58] J. Grehn and J. Krause. *Physik*. Metzler, Hannover, 3 edition, 1998.

[59] B. Diehl, R. Erb, H. Heise, U. Kotthaus, C. Schmalhofer, L.-H. Schön, H. Schulze, P. M. Schulze, W. Tews, and R. Winter. *Physik Oberstufe*. Cornelsen, Würzburg, 2012.

[60] Jr. C. D. Graham. Light Metallurgy. *Met. Prog.*, 71:83, 1957.

[61] M V Berry, N Brunner, S Popescu, and P Shukla. Can apparent superluminal neutrino speeds be explained as a quantum weak measurement? *J. Phys. A*, 44:492001, 2011.

[62] Chapman et al. Femtosecond x-ray protein nanocrystallography. *Nature*, 470:73–77, 2011.

[63] R. M. Kilner, J. R. Madden, and M. E. Hauber. Brood parasitic cowbird nestlings use host young to procure resources. *Science*, 305:877–879, 2004.

[64] Quantum shorts. The National University of Singapore. `https://shorts.quantumlah.org/quantum-quotes`. last visit: 2024-07-16.

[65] A. Einstein. How I created the theory of relativity. *Phys. Today*, 35:45–47, 1982.

[66] A. Beiser. *Perspectives of Modern Physics*. McGraw-Hill, New York, 6 edition, 1969. Lehrbuchempfehlung.

[67] A. Beiser. *Concepts of Modern Physics*. McGraw-Hill, Boston, 2003. Lehrbuchempfehlung.

[68] G. Beyvers and E. Rosenbaum. *Kleines 1x1 der Relativitätstheorie: Einsteins Physik mit Mathematik der Mittelstufe*. Springer-Verlag, Berlin, 2 edition, 2009.

[69] M. L. Burns. *Modern Physics for Science and Engineering*. Physics Curriculum and Instruction, Lakeville, 2012.

[70] B. Crowell. *Special Relativity*. Openstax, Houston, 2021.

[71] K. Fischer. *Relativity for Everyone: How Space-Time Bends*. Springer, Cham, 2015.

[72] A. Ph. French. *Special relativity*. WW Norton & Company, Inc, New York, 1968.

[73] R. Harris. *Moderne Physik*. Pearson, München, 2 edition, 2013.

[74] B. Hoffmann. *Einsteins Ideen*. Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1983.

[75] R. Meinel. *Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie für Bachelorstudenten*. Springer Spektrum, Berlin, 2 edition, 2019.

[76] P. J. Nolan. *Fundamentals of Modern Physics*. Physics Curriculum and Instruction, Lakeville, 2014.

[77] Peter J. O'Donnel. *Essential Dynamics and Relativity*. CRC Press, Boca Raton, 2015.

[78] R. Resnick. *Introduction To Special Relativity*. Wiley & Sons, New York, 1 edition, 1968.

[79] W. Rindler. *Essential Relativity*. Springer, New York, 2 edition, 1979.

[80] B. Russell. *Das ABC der Relativitätstheorie*. Fischer, Frankfurt, 1997.

[81] P. Sanghera. *Quantum Physics for Scientists and Technologists*. Wiley & Sons, Hoboken, 2011.

[82] R. Sexl and H. K. Schmidt. *Raum-Zeit-Relativität*. Vieweg, Braunschweig, 2 edition, 1979. Lehrbuchempfehlung.

[83] R. Skinner. *Relativity for Scientists and Engineers*. Dover Publications, 1982.

[84] R.L. Sproul and A.W. Phillips. *Modern Physics*. Dover, New York, 3 edition, 2016. Lehrbuchempfehlung.

[85] J. R. Taylor, C. D. Zafiratos, and M. A. Dubson. *Modern Physics for Scientists and Engineers*. Pearson, New York, 2 edition, 2004. Lehrbuchempfehlung.

[86] B. L. Theraja. *Modern Physics*. S. Chand, New Dehli, 2019.

[87] P. A. Tipler and R. A. Llewellyn. *Modern Physics*. W. H. Freeman, New York, 6 edition, 2012.

[88] S. T. Thornton and A. Rex. *Modern physics for scientists and engineers*. Cengage Learning, Boston, 4 edition, 2013.

[89] R. E. Turner. *Relativity Physics*. Routledge and Kegan Paul, London, 1984.

[90]

[91] P. Wang, N. I. Libeskind, E. Tempel, X. Kang, and Q. Guo. Possible observational evidence for cosmic filament spin. *Nature Astron.*, 5:839–845, 2021.

[92] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687.

[93] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley & Sons, New York, 1972.

[94] E. Mach, G. Wolters, and G. Hon. *Die Mechanik in ihrer Entwicklung: historisch-kritisch dargestellt*. Ernst-Mach-Studienausgabe. Xenomoi, 2012.

[95] A. A. Michelson and E. W. Morley. On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *Am. J. Sci.*, 34:333–345, 1887.

[96] The New York Times. `https://www.nytimes.com`. last visit: 2024-09-09.

[97] A. Huffman. Special relativity demonstration. *Am. J. Phys.*, 48:780–781, 1980.

[98] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. Phys.*, 322:891–921, 1905.

[99] G. Wegner. fotografie.zeitraffer.video. reisen. `https://gwegner.de`. last visit: 2025-02-11.

[100] HyperPhysics. Georgia State University. `https://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu`. last visit: 2024-05-27.

[101] J. Bradley. A new discovered motion of the fixed stars. *Phil. Trans.*, 35:637–661, 1784.

[102] H Fizeau. Sur une expérience relative à la vitesse de propagation de la lumière. *Comptes rendus*, 29:90–92, 1849.

[103] J. F. Mulligan and D. F. McDonald. Some recent determinations of the velocity of light ii. *American Journal of Physics*, 25(3):180–192, 1957.

[104] D. Sadeh. Experimental evidence for the constancy of the velocity of gamma rays, using annihilation in flight. *Phys. Rev. Lett.*, 10:271–273, 1963.

[105] K. M. Evenson, J. S. Wells, F. R. Petersen, B. L. Danielson, G. W. Day, R. L. Barger, and J. L. Hall. Speed of light from direct frequency and wavelength measurements of the methane-stabilized laser. *Phys. Rev. Lett.*, 29:1346–1349, 1972.

[106] Wikipedia. The Free Encyclopedia. `https://en.wikipedia.org`. last visit: 2024-05-27.

[107] Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, 2016.

[108] W. De Sitter. Ein astronomischer Beweis für die Konstanz der Lichgeshwindigkeit. *Phys. Z.*, 14:429–429, 1913.

[109] W. De Sitter. Ein astronomischer Beweis für die Konstanz der Lichgeshwindigkeit. *Physik. Z.*, 14:429–429, 1913.

[110] H. P. Robertson. Postulate versus observation in the special theory of relativity. *Rev. Mod. Phys.*, 21:378–382, 1949.

[111] CERN. Conseil europeen pour la recherche nucleaire. `https://www.home.cern`. last visit: 2024-10-18.

[112] T. Alväger, F.J.M. Farley, J. Kjellman, and L. Wallin. Test of the second postulate of special relativity in the GeV region. *Phys. Lett.*, 12:260–262, 1964.

[113] T. A. Filippas and J. G. Fox. Velocity of gamma rays from a moving source. *Phys. Rev.*, 135:B1071–B1075, 1964.

[114] W. Bertozzi. Speed and kinetic energy of relativistic electrons. *Am. J. Phys.*, 32:551–555, 1964.

[115] K. N. Geller and R. Kollarits. Experiment to measure the increase in electron mass with velocity. *Am, J. Phys.*, 40:1125–1130, 1972.

[116] J. G. Couch and T. K. Dorries. Measuring relativistic electrons in the undergraduate laboratory. *Am. J. Phys.*, 50:917–921, 1982.

[117] J. W. Luetzelschwab. Apparatus to measure relativistic mass increase. *Am. J. Phys.*, 71:878–884, 2003.

[118] M. Lund and U. I. Uggerhøj. Experimental special relativity with a meter stick and a clock. *Am. J. Phys.*, 77:757–761, 2009.

[119] P. Alikhani, N. Brunner, C. Crépeau, S. Designolle, R. Houlmann, W. Shi, N. Yang, and H. Zbinden. Experimental relativistic zero-knowledge proofs. *Nature*, 599:47–50, 2021.

[120] BPB. Bundeszentrale für Politische Bildung. `https://www.bpb.de`. last visit: 2024-09-13.

[121] R. S. Shankland. Conversations with albert einstein. *Am. J. Phys.*, 31:47–57, 1963.

[122] Th. Walther and H. Walther. *Was ist Licht?: von der klassischen Optik zur Quantenoptik*. CH Beck, München, 3 edition, 2010.

[123] A. G. Riess, S. Casertano, J. Anderson, J. MacKenty, and A. V. Filippenko. Parallax beyond a kiloparsec from spatially scanning the wide field camera 3 on the hubble space telescope. *Astrophys. J.*, 785:161, 2014.

[124] W. S. Adams, A. H. Joy, M. L. Humason, and M. Brayton, A. The spectroscopic absolute magnitudes and parallaxes of 4179 stars. *Astrophys. J.*, 81:187, 1935.

[125] The Gravity Probe B Experiment. Testing Einsteins's Universe. `https://einstein.stanford.edu/index.html`. last visit: 2024-10-18.

[126] G. B. Airy. IV. On a supposed alteration in the amount of astronomical aberration of light, produced by the passage of the light through a considerable thickness of refracting medium. *Proc. Royal Soc.*, 20:35–39, 1971.

[127] K. M. Pedersen. Water-Filled Telescopes and the Pre-History of Fresnel's Ether Dragging. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 54:499–564, 2000.

[128] S. J. G. Gift. Simple Test of Special Relativity Involving Fresnel Drag and Light Propagation in a Uniformly Moving Medium. *J. Appl. Math. Phys.*, 9:2660–2668, 2021.

[129] M. Mascart. Sur les modifications qu'éprouve la lumière par suite du mouvement de la source lumineuse et du mouvement de l'observateur. *Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Superieure*, 2e série, 1:157–214, 1872.

[130] O. Marti. Raum und Zeit: Eine Physikalische Zeitreise. Interdisziplinäre Beiträge zu Zeit und Raum, 1999.

[131] A. A. Michelson and E. W. Morley. Influence of motion of the medium on the velocity of light;. *Am. J. Sci*, 31:377, 1886.

[132] P. Zeeman. Fresnel's coefficient for light of different colours (first part). *Proc. Acad. Sci. Amst.*, 17:445–451, 1914.

[133] Pieter Zeeman. Fresnel's coefficient for light of different colours (second part). *Proc. Acad. Sci. Amst.*, 18:398–408, 1915.

[134] T. Lahaye, P. Labastie, and R. Mathevet. Fizeau's aether-drag experiment in the undergraduate laboratory. *Am. J. Phys.*, 80:497–505, 2012.

[135] F. Th. Trouton and H. R. Noble. V. the mechanical forces acting on a charged electric condenser moving through space. *Philos. Trans. Royal Soc. A*, 202:165–181, 1904.

[136] G. G. Shepherd, G. Thuillier, Y.-M. Cho, M.-L. Duboin, W. F. J. Evans, W. A. Gault, C. Hersom, D. J. W. Kendall, C. Lathuillère, R. P. Lowe, I. C. McDade, Y. J. Rochon, M. G. Shepherd, B. H. Solheim, D.-Y. Wang, and W. E. Ward. The Wind Imaging Interferometer (WINDII) on the Upper Atmosphere Research Satellite: A 20 year perspective. *Rev. Geophys.*, 50, 2012.

[137] L. Zehnder. Ein neuer interferenzrefraktor. *Z. Instrumentenkundekunde*, 11:275–285, 1891.

[138] L. Mach. Ueber einen Interferenzrefraktor. *Z. Instrumentenkunde*, 12(3):89, 1892.

[139] K P Zetie, S F Adams, and R M Tocknell. How does a Mach-Zehnder interferometer work? *Phys. Edu.*, 35:46, 2000.

[140] Jamin. Neuer Interferential-Refractor. *Ann. Phys.*, 174:345–349, 1856.

[141] M. Vollmer and K.-P. Möllmann. Michelson Interferometer for Your Kitchen Table. *Phys. Teach.*, 46:114–117, 2008.

[142] H. Lloyd. On a new case of interference of the rays of light. *Trans. Roy. Irish Acad.*, 17:171–177, 1831.

[143] H. Fischer, M. Birk, C. Blom, B. Carli, M. Carlotti, T. von Clarmann, L. Delbouille, A. Dudhia, D. Ehhalt, M. Endemann, J. M. Flaud, R. Gessner, A. Kleinert, R. Koopman, J. Langen, M. López-Puertas, P. Mosner, H. Nett, H. Oelhaf, G. Perron, J. Remedios, M. Ridolfi, G. Stiller, and R. Zander. MIPAS: an instrument for atmospheric and climate research. *Atmospheric. Chem. Phys.*, 8:2151–2188, 2008.

[144] E. Alanís, G. Romero, C. Martínez, L. Álvarez, and G. Salazar. An inexpensive interferometric setup for measuring microscopic displacements. *Phys. Teach.*, 42:223–225, 2004.

[145] J. J. Noh, S. Kim, and J. B. Kim. Measurement of Young's Modulus Using a Michelson Interferometer. *Phys. Teach.*, 61:618–620, 2023.

[146] Jr. Greenslade, Th. B. and J. A. Mason. Ultrasonic interferometers. *Phys. Teach.*, 36:249–252, 1998.

[147] Jr. Greenslade, Th. B. Ultrasonic interferometers revisited. *Phys. Teach.*, 45:145–147, 2007.

[148] M. Dobosz and M. Kouzchowski. Overview of the laser-wavelength measurement methods. *Opt Lasers Eng .*, 98:107–117, 2017.

[149] B. W. Scholl, R.and Liby. Using a Michelson Interferometer to Measure Coefficient of Thermal Expansion of Copper. *Phys. Teach.*, 47:306–308, 2009.

[150] Christensen et al. The OSIRIS-REx Thermal Emission Spectrometer (OTES) Instrument. *Space Sci. Rev.*, 214:87, 2018.

[151] S. Lloyd and M. Paetkau. Characterization of a Piezoelectric Buzzer Using a Michelson Interferometer. *Phys. Teach.*, 48:610–611, 2010.

[152] F. J. Macedo, M. E. Benedet, A. V. Fantin, D. P. Willemann, F. A. Alves da Silva, and A. Albertazzi. Inspection of defects of composite materials in inner cylindrical surfaces using endoscopic shearography. *Opt. Lasers Eng .*, 104:100–108, 2018.

[153] Flasar et al. *Exploring the Saturn System in the Thermal Infrared: The Composite Infrared Spectrometer*, pages 169–297. Springer Netherlands, Dordrecht, 2004.

[154] C. Carbonel, S. Grasset, and J. Maysonnave. Accessing high spatial resolution in astronomy using interference methods. *Phys. Teach.*, 56:232–234, 2018.

[155] C. Rueckner, W.and Papaliolios. How to beat the Rayleigh resolution limit: A lecture demonstration. *Am. J. Phys.*, 70:587–594, 2002.

[156] J. G. Bolton and O. B. Slee. Galactic Radiation at Radio Frequencies. V. The Sea Interferometer. *Aust. J. Phys.,*, 6:420–433, 1953.

[157] A. Quirrenbach. The development of astronomical interferometry. *Exp. Astron.*, 26:49–63, 2009.

[158] W. Qiao and Z. Chen. All-optically integrated photoacoustic and optical coherence tomography: A review. *J. Innov. Opt. Health Sci.*, 10:1730006, 2017.

[159] M. Kashif, A. A. A. Bakar, N. Arsad, and S. Shaari. Development of phase detection schemes based on surface plasmon resonance using interferometry. *Sensors*, 14:15914–15938, 2014.

[160] S. Deng, P. Wang, and X. Yu. Phase-Sensitive Surface Plasmon Resonance Sensors: Recent Progress and Future Prospects. *Sensors*, 17, 2017.

[161] X. Li, N. Chen, X. Zhou, P. Gong, S. Wang, Y. Zhang, and Y. Zhao. A review of specialty fiber biosensors based on interferometer configuration. *J. Biophotonics*, 14:e202100068, 2021.

[162] Abbott et al. LIGO: the laser interferometer gravitational-wave observatory. *Rep, Prog. Phys.*, 72:076901, 2009.

[163] GEO600. Gravitational-Wave Detector. `https://www.geo600.org`. last visit: 2024-10-18.

[164] Dooley et al. Status of GEO 600. *J. Phys. Conf. Ser.*, 610:012015, 2015.

[165] E. Calloni, S. Caprara, M. De Laurentis, G. Esposito, M. Grilli, E. Majorana, G.P. Pepe, S. Petrarca, P. Puppo, P. Rapagnani, F. Ricci, L. Rosa, C. Rovelli, P. Ruggi, N.L. Saini, C. Stornaiolo, and F. Tafuri. The Archimedes experiment. *Nucl. Instr. Meth A*, 824:646–647, 2016.

[166] Avino et al. Progress in a vacuum weight search experiment. *Physics*, 2:1–13, 2020.

[167] G. W. Hammar. The velocity of light within a massive enclosure. *Phys. Rev.*, 48:462–463, 1935.

[168] M. A. Handschy. Re-examination of the 1887 Michelson-Morley experiment. *Am. J. Phys.*, 50:987–990, 1982.

[169] G. Joos. Die Jenaer Wiederholung des Michelsonversuchs. *Ann. Phys.*, 399:385–407, 1930.

[170] L. Essen. A new æther-drift experiment. *Nature*, 175:793–794, 1955.

[171] R. S. Shankland, S. W. McCuskey, F. C. Leone, and G. Kuerti. New analysis of the interferometer observations of dayton c. miller. *Rev. Mod. Phys.*, 27:167–178, 1955.

[172] J. P. Cedarholm, G. F. Bland, B. L. Havens, and C. H. Townes. New experimental test of special relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 1:342–343, 1958.

[173] D C Champeney, G R Isaak, and A M Khan. A time dilatation experiment based on the Mössbauer effect. *Proc. Phys. Soc.*, 85:583–593, 1965.

[174] A. Franklin and R. Laymon. *Measuring Nothing, Repeatedly.* Morgan and Claypool Publishers, San Rafael, 2019.

[175] M. Nagel, S. R. Parker, E. V. Kovalchuk, P. L. Stanwix, J. G. Hartnett, E N. Ivanov, A Peters, and M. E. Tobar. Direct terrestrial test of Lorentz symmetry in electrodynamics to 10^{-18}. *Nature Commun.*, 6:8174, 2015.

[176] Abuter et al. First light for gravity: Phase referencing optical interferometry for the very large telescope interferometer. *Astron. Astrophys*, 602:A94, 2017.

[177] M. Jackson and H. H. Mantsch. The Use and Misuse of FTIR Spectroscopy in the Determination of Protein Structure. *Crit. Rev. Biochem. Mol. Biol.*, 30:95–120, 1995.

[178] A. D. Cronin, J. Schmiedmayer, and D. E. Pritchard. Optics and interferometry with atoms and molecules. *Rev. Mod. Phys.*, 81:1051–1129, 2009.

[179] T. Pruttivarasin, M. Ramm, S. G. Porsev, I. I. Tupitsyn, M. S. Safronova, M. A. Hohensee, and H. Häffner. Michelson–Morley analogue for electrons using trapped ions to test Lorentz symmetry. *Nature*, 517:592–595, 2015.

[180] T. E. Mehlstäubler, G. Grosche, Ch. Lisdat, P. O Schmidt, and H. Denker. Atomic clocks for geodesy. *Rep. Prog. Phys.*, 81:064401, 2018.

[181] Shen et al. Free-space dissemination of time and frequency with 10^{-19} instability over 113 km. *Nature*, 610:661–666, 2022.

[182] A: Einstein and L. Infeld. *The Evolution of Physics: the Growth of Ideas from Early Concepts to Relativity and Quanta.* Simon and Schuster, New York, USA, 1938.

[183] ESO. European Southern Observatory. `https://www.eso.org`. last visit: 2024-06-05.

[184] J. Walker. *Fundamentals of Physics*. Wiley, Hoboken, 9 edition, 201.

[185] H. Manos. Extant time balls around the world. *Phys. Teach.*, 63:152–155, 2025.

[186] R.P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, and E. M. Hafner. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 1. Addison-Wesley, Boston, MA, 1963.

[187] J. Walker. *Fundamentals of Physics*. Wiley, Hoboken, 8 edition, 2007.

[188] H. E. Ives and G. R. Stilwell. An experimental study of the rate of a moving atomic clock. *J. Opt. Soc. Am.*, 28:215–226, 1938.

[189] C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband, and D. J. Wineland. Optical clocks and relativity. *Science*, 329:1630–1633, 2010.

[190] H.A. Bethe, P.A.M. Dirac, W. Heisenberg, E.P. Wigner, O. Klein, and E.M. Lifshitz. *From A Life Of Physics*. World Scientific Publishing Company, Singapur, 1989.

[191] F. Behroozi. A simple derivation of time dilation and length contraction in special relativity. *Phys. Teach.*, 52:410–412, 2014.

[192] M. Kaivola, O. Poulsen, E. Riis, and S. A. Lee. Measurement of the relativistic doppler shift in neon. *Phys. Rev. Lett.*, 54:255–258, 1985.

[193] S. Perlmutter. The supernova cosmology project. `https://supernova.lbl.gov`. last visit: 2025-02-12.

[194] H. A. Bethe. Supernova mechanisms. *Rev. Mod. Phys.*, 62:801–866, 1990.

[195] Squicciarini, V., Gratton, R., Janson, M., Mamajek, E. E., Chauvin, G., Delorme, P., Langlois, M., Vigan, A., Ringqvist, S. C., Meeus, G., Reffert, S., Kenworthy, M., Meyer, M. R., Bonnefoy, M., Bonavita, M., Mesa, D., Samland, M., Desidera, S., D´Orazi, V., Engler, N., Alecian, E., Miglio, A., Henning, T., Quanz, S. P., Mayer, L., Flasseur, O., and Marleau, G.-D. A scaled-up planetary system around a supernova progenitor. *Astron. Astrophys.*, 664:A9, 2022.

[196] O.C. Wilson. Possible applications of supernovae to the study of the nebular red shifts. *Astrophys. J*, 90:634, 1939.

[197] Goldhaber et al. *Observation of Cosmological Time Dilation Using Type Ia Supernovae as Clocks*, pages 777–784. Springer Netherlands, Dordrecht, 1997.

[198] S. Blondin, T. M. Davis, K. Krisciunas, B. P. Schmidt, J. Sollerman, W. M. Wood-Vasey, A. C. Becker, P. Challis, A. Clocchiatti, G. Damke, A. V. Filippenko, R. J. Foley, P. M. Garnavich, S. W. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, W. Li, T. Matheson, G. Miknaitis, G. Narayan, G. Pignata, A. Rest, A. G. Riess, J. M. Silverman, R. C. Smith, J. Spyromilio, M. Stritzinger, C. W. Stubbs, N. B.

Suntzeff, J. L. Tonry, B. E. Tucker, and A. Zenteno. Time Dilation in Type Ia Supernova Spectra at High Redshift. *Astrophys. J.*, 682:724–736, 2008.

[199] Goldhaber et al. Cosmological time dilation using type Ia supernovae as clocks. *Nucl. Phys. B*, 51:123–127, 1996.

[200] G. Goldhaber, D. E. Groom, A. Kim, G. Aldering, P. Astier, A. Conley, S. E. Deustua, R. Ellis, S. Fabbro, A. S. Fruchter, A. Goobar, I. Hook, M. Irwin, M. Kim, R. A. Knop, C. Lidman, R. McMahon, P. E. Nugent, R. Pain, N. Panagia, C. R. Pennypacker, S. Perlmutter, P. Ruiz-Lapuente, B. Schaefer, N. A. Walton, and T. York. Timescale stretch parameterization of type ia supernova b-band light curves. *The Astrophysical Journal*, 558:359, 2001.

[201] J. C. Hafele and R. E. Keating. Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains. *Science*, 177:168–170, 1972.

[202] S. Reinhardt, G. Saathoff, H. Buhr, L. A. Carlson, A. Wolf, D. Schwalm, S. Karpuk, Ch. Novotny, G. Huber, M. Zimmermann, R. Holzwarth, Th. Udem, Th. W. Hänsch, and G. Gwinner. Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities. *Nature Phys.*, 3:861–864, 2007.

[203] G. Gamov. *One two three... infinity: Facts and speculations of science*. Compass Books, New York, 1961.

[204] G. Gamow. *Mr. Tompkins in Wonderland*. Cambridge University Press, Cambridge, 1964.

[205] R. D. Knight. *Physics for Scientists and Engineers*. Pearson Addison-Wesley, San Francisco, 2 edition, 2008.

[206] P. Gibbs. The Relativistic Rocket. `https://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/Rocket/rocket.html`. last visit: 2024-09-12.

[207] B. Crowell. *Conceptual Physics*. Openstax, Houston, 2023.

[208] Ph. Ball. Quark soup goes on the menu. *Nature*, 2000.

[209] Aihara et al. Charged-Hadron Inclusive Cross Sections and Fractions in e^+e^- Annihilation at $\sqrt{s}$=29 GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 61:1263–1266, 1988.

[210] W. Rindler. Length Contraction Paradox. *Am. J. Phys.*, 29:365–366, 1961.

[211] J. M. Supplee. Relativistic buoyancy. *A. J. Phys.*, 57:75–77, 1989.

[212] E. Dewan and M. Beran. Note on stress effects due to relativistic contraction. *Am. J. Phys.*, 27:517–518, 1959.

[213] Paul Ehrenfest. Gleichförmige rotation starrer Körper und Relativitätstheorie. *Phys. Z.*, 10:918, 1909.

[214] T. Wulf. Beobachtungen über Strahlung hoher Durchdringungsfähigkeit auf dem Eiffelturm. *Phys. Z.*, 11:811–813, 1910.

[215] P. K. F. Grieder. *Cosmic Rays at Earth*. Elsevier, Amsterdam, 2001.

[216] R. A. Millikan and G. H. Cameron. The origin of the cosmic rays. *Phys. Rev.*, 32:533–557, 1928.

[217] A. H. Compton. Recent developments in cosmic rays. *Rev. Sci. Instr.*, 7:71–81, 1936.

[218] Tendler et al. Experimentally Observed Cherenkov Light Generation in the Eye During Radiation Therapy. *Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys.*, 106:422, 2019.

[219] C. A. Tobias, Th.F. Budinger, and J. T. Lyman. Radiation-induced light flashes observed by human subjects in fast neutron, x-ray and positive pion beams. *Nature*, 230:596–598, 1971.

[220] Abbasi et al. First Observation of the Greisen-Zatsepin-Kuzmin Suppression. *Phys. Rev. Lett.*, 100:101101, 2008.

[221] P. A. Davidson. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[222] Cao et al. Ultrahigh-energy photons up to 1.4 petaelectronvolts from 12 γ-ray galactic sources. *Nature*, 594:33–36, 2021.

[223] HAP. Helmholtz allianz für astrophysik. `https://www.hap-astroteilchen.de`. last visit: 2025-04-07.

[224] G. M. Comstock, R. L. Fleischer, W. R. Giard, H. R. Hart, G. E. Nichols, and P. B. Price. Cosmic-Ray Tracks in Plastics: The Apollo Helmet Dosimetry Experiment. *Science*, 172:154–157, 1971.

[225] Abi et al. Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, 126:141801, 2021.

[226] E. Gibney. Nuclear-fusion reactor smashes energy record. *Nature*, 602:371, 2022.

[227] E. Gibney. Particle physicists want to build the world's first muon collider. *Nature*, 608:660, 2022.

[228] M. Kobel. Kosmische strahlung. Netzwerk Teilchenwelt, 2016.

[229] C. D. Anderson. Early work on the positron and muon. *Am. J. Phys.*, 29:825–830, 1961.

[230] W. F. G. Swann. The history of cosmic rays. *Am. J. Phys.*, 29:811–816, 1961.

[231] Q. Xu and L. M. Brown. The early history of cosmic ray research. *Am. J. Phys.*, 55:23–33, 1987.

[232] P. Carlson. A century of cosmic rays. *Phys. Today*, 65:30–36, 2012.

[233] M. Friedlander. A century of cosmic rays. *Nature*, 483:400–401, 2012.

[234] C. F. Powell. The cosmic radiation. Noble Lecture, 1950.

[235] J. C. Street and E. C. Stevenson. New evidence for the existence of a particle of mass intermediate between the proton and electron. *Phys. Rev.*, 52:1003–1004, 1937.

[236] P. Kunze. Untersuchung der Ultrastrahlung in der Wilsonkammer. *Z. Phys.*, 83:1–18, 1933.

[237] B. Rossi and D. B. Hall. Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum. *Phys. Rev.*, 59:223–228, 1941.

[238] D. H. Frisch and J. H. Smith. Measurement of the relativistic time dilation using μ-mesons. *Am. J. Phys.*, 31:342–355, 1963.

[239] Morishima et al. Discovery of a big void in Khufu's Pyramid by observation of cosmic-ray muons. *Nature*, 552:386–390, 2017.

[240] R. Kaiser. Muography: Overview and future directions. *Phil. Trans. Royal Soc. A*, 377:20180049, 2018.

[241] L. W. Alvarez. Note 470, 1963. unpublished.

[242] Bross et al. Tomographic muon imaging of the great pyramid of giza. `https://arxiv.org/abs/2202.08184`, 2022.

[243] L. Bonechi, R. D'Alessandro, and A. Giammanco. Atmospheric muons as an imaging tool. *Rev. Phys.*, 5:100038, 2020.

[244] B. Hariharan, A. Chandra, S. R. Dugad, S. K. Gupta, P. Jagadeesan, A. Jain, P. K. Mohanty, S. D. Morris, P. K. Nayak, P. S. Rakshe, K. Ramesh, B. S. Rao, L. V. Reddy, M. Zuberi, Y. Hayashi, S. Kawakami, S. Ahmad, H. Kojima, A. Oshima, S. Shibata, Y. Muraki, and K. Tanaka. Measurement of the electrical properties of a thundercloud through muon imaging by the grapes-3 experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 122:105101, 2019.

[245] M. Tramontini, M. Rosas-Carbajal, C. Nussbaum, D. Gibert, and J. Marteau. Middle-atmosphere dynamics observed with a portable muon detector. *ESS*, 6:1865–1876, 2019.

[246] E. P. George. Cosmic rays measure overburden of tunnel. *Commonwealth Engineer*, 455:455–457, 1955.

[247] Aartsen et al. Observation of the cosmic-ray shadow of the moon with icecube. *Phys. Rev. D*, 89:102004, 2014.

[248] H. K. M. Tanaka, T. Nakano, S. Takahashi, J. Yoshida, H. Ohshima, T. Maekawa, H. Watanabe, and K. Niwa. Imaging the conduit size of the dome with cosmic-ray muons: The structure beneath Showa-Shinzan Lava Dome, Japan. *Geophys. Res. Lett.*, 34, 2007.

[249] K. Jourde, D. Gibert, J. Marteau, J. de Bremond d'Ars, and J.-Ch. Komorowski. Muon dynamic radiography of density changes induced by hydrothermal activity at the La Soufrière of Guadeloupe volcano. *Sci. Rep.*, 6:33406, 2016.

[250] L. F. Thompson, J. P. Stowell, S. J. Fargher, C. A. Steer, K. L. Loughney, E. M. O'Sullivan, J. G. Gluyas, S. W. Blaney, and R. J. Pidcock. Muon tomography for railway tunnel imaging. *Phys. Rev. Research*, 2:023017, 2020.

[251] R. Nishiyama, A. Ariga, T. Ariga, S. Käser, A. Lechmann, D. Mair, P. Scampoli, M. Vladymyrov, A. Ereditato, and F. Schlunegger. First measurement of ice-bedrock interface of alpine glaciers by cosmic muon radiography. *Geophys. Res. Lett.*, 44:6244–6251, 2017.

[252] A. Lechmann, D. Mair, A. Ariga, T. Ariga, A. Ereditato, R. Nishiyama, C. Pistillo, P. Scampoli, F. Schlunegger, and M. Vladymyrov. Muon tomography in geoscientific research - A guide to best practice. *Earth Sci. Rev.*, 222:103842, 2021.

[253] H. Miyadera, K. N. Borozdin, S. J. Greene, Z. Lukic, K. Masuda, E. C. Milner, Ch. L. Morris, and J. O. Perry. Imaging fukushima daiichi reactors with muons. *AIP Adv.*, 3:052133, 2013.

[254] K. N. Borozdin, G. E. Hogan, Ch. Morris, W. C. Priedhorsky, A. Saunders, L. J. Schultz, and M. E. Teasdale. Radiographic imaging with cosmic-ray muons. *Nature*, 422:277–277, 2003.

[255] Tanaka et al. Atmospheric muography for imaging and monitoring tropic cyclones. *Sci. Rep.*, 12:16710, 2022.

[256] A. Zenoni, G. Bonomi, A. Donzella, M. Subieta, G. Baronio, I. Bodini, D. Cambiaghi, M. Lancini, D. Vetturi, O. Barnabà, F. Fallavollita, R. Nardò, C. Riccardi, M. Rossella, P. Vitulo, and G. Zumerle. Historical building stability monitoring by means of a cosmic ray tracking system, 2014.

[257] V. Venuti S. D'Amico. *Handbook of Cultural Heritage Analysis*. Springer, Cham, 2022.

[258] B. V. Hampshire, K. Butcher, K. Ishida, G. Green, D. M. Paul, and A. D. Hillier. Using negative muons as a probe for depth profiling silver roman coinage. *Heritage*, 2:400–407, 2019.

[259] J. R. Smithson and E. R. Pinkston. Half-life of a water column as a laboratory exercise in exponential decay. *Am. J. Phys.*, 28:740–742, 1960.

[260] Jr. Greenslade, Th. B. Simulated secular equilibrium. *Phys. Teach.*, 40:21–23, 2002.

[261] Jr. Greenslade, Th. B. Exponential decay experiments. *Physis. Teach.*, 62:738–739, 2024.

[262] F. J. M. Farley, J. Bailey, and E. Picasso. Is the special theory right or wrong? experimental verifications of the theory of relativity. *Nature*, 217:17–18, 1968.

[263] R. P. Durbin, H. H. Loar, and W. W. Havens. The lifetimes of the π^+ and π^- mesons. *Phys. Rev.*, 88:179–183, 1952.

[264] A. M. Boyarski, E. C. Loh, L. Q. Niemela, D. M. Ritson, R. Weinstein, and S. Ozaki. Study of the K^+ decay. *Phys. Rev.*, 128:2398–2402, 1962.

[265] R. A. Lundy. Precision measurement of the μ^+ lifetime. *Phys. Rev.*, 125:1686–1696, 1962.

[266] Botermann et al. Test of Time Dilation Using Stored Li^+ Ions as Clocks at Relativistic Speed. *Phys. Rev. Lett.*, 113:120405, 2014.

[267] H. C. Burrowes, D. O. Caldwell, D. H. Frisch, D. A. Hill, D. M. Ritson, and R. A. Schluter. K-Meson-Nucleon Total Cross Sections from 0.6 to 2.0 Bev. *Phys. Rev. Lett.*, 2:117–119, 1959.

[268] D. C. Giancoli. *Physik*. Pearson Studium, München, 3 edition, 2010.

[269] A. Lampa. Wie erscheint nach der Relativitätstheorie ein bewegter Stab einem ruhenden Beobachter? *Z. Phys.*, 27:138–148, 1924.

[270] R. Penrose. The apparent shape of a relativistically moving sphere. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 55:137–139, 1959.

[271] J. Terrell. Invisibility of the lorentz contraction. *Phys. Rev.*, 116:1041–1045, 1959.

[272] V. F. Weisskopf. The visual appearance of rapidly moving objects. *Phys. Today*, 13:24–27, 1960.

[273] R. J. Kennedy and E. M. Thorndike. Experimental establishment of the relativity of time. *Phys. Rev.*, 42:400–418, 1932.

[274] K. P. Mooley, J. Anderson, and W. Lu. Optical superluminal motion measurement in the neutron-star merger gw170817. *Nature*, 610:273–276, 2022.

[275] M. J. Rees. Appearance of relativistically expanding radio sources. *Nature*, 211:468–470, 1966.

[276] Gal-Yam et al. On the progenitor of SN 2005gl and the nature of type IIn supernovae. *Astrophys. J.*, 656:372–381, 2007.

[277] T. J. Pearson, S. C. Unwin, M. H. Cohen, R. P. Linfield, A. C. S. Readhead, G. A. Seielstad, R. S. Simon, and R. C. Walker. Superluminal expansion of quasar 3C273. *Nature*, 290(5805):365–368, 1981.

[278] O. J. Sovers, J. L. Fanselow, and Ch. S. Jacobs. Astrometry and geodesy with radio interferometry: experiments, models, results. *Rev. Mod. Phys.*, 70:1393–1454, 1998.

[279] Tschechische Astronomische Gesellschaft. Astronomischer informationsserver. `https://www.astro.cz`. last visit: 2024-0-17.

[280] J.-L. Gómez, A. P. Marscher, A. Alberdi, S. G. Jorstad, and I. Agudo. Monthly 43 GHz VLBA Polarimetric Monitoring of 3C 120 over 16 Epochs: Evidence for Trailing Shocks in a Relativistic Jet. *Astrophys. J.*, 561:L161–L164, 2001.

[281] BKS. Bundesamt für kartographie und geodesie. `https://www.bkg.bund.de`. last visit: 2024-10-17.

[282] I. F. Mirabel and L. F. Rodríguez. A superluminal source in the galaxy. *Nature*, 371:46–48, 1994.

[283] R. C. Thomson, C. D. Mackay, and A. E. Wright. Internal structure and polarization of the optical jet of the quasar 3C273. *Nature*, 365:133–135, 1993.

[284] W. Junor, J. A. Biretta, and M. Livio. Formation of the radio jet in M87 at 100 Schwarzschild radii from the central black hole. *Nature*, 401:891–892, 1999.

[285] R. Porcas. Superluminal motions: Astronomers still puzzled. *Nature*, 302:753–754, 1983.

[286] J. A. Biretta, W. B. Sparks, and F. Macchetto. Hubble space telescope observations of superluminal motion in the m87 jet. *Astrophys. J.*, 520:621, 1999.

[287] NET. Nasa/ipac extragalactic database. `https://ned.ipac.caltech.edu`. last visit: 2024-10-17.

[288] U. Kraus und C. Zahn. Tempolimit lichtgeschwindigkeit. `https://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de`. last visit: 2024-10-17.

[289] H. Alfvén and N. Herlofson. Cosmic radiation and radio stars. *Phys. Rev.*, 78:616–616, 1950.

[290] K. O. Kiepenheuer. Cosmic rays as the source of general galactic radio emission. *Phys. Rev.*, 79:738–739, 1950.

[291] Aguilar et al. Towards understanding the origin of cosmic-ray electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 122:101101, 2019.

[292] F. R. Elder, A. M. Gurewitsch, R. V. Langmuir, and H. C. Pollock. Radiation from electrons in a synchrotron. *Phys. Rev.*, 71:829–830, 1947.

[293] I. S. Blumenthal. The operating principles of synchrotron accelerators. *Am. J. Phys.*, 21:164–170, 1953.

[294] H. C. Pollock. The discovery of synchrotron radiation. *Am. J. Phys.*, 51:278–280, 1983.

[295] D. Attwood. *Soft X-Rays and Extreme Ultraviolet Radiation: Principles and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[296] ESRF. The European Synchrotron Radiation Facility. `https://www.esrf.fr`. last visit: 2024-10-18.

[297] DESY. Deutsches Elektronen-Synchrotron. `https://www.desy.de`. last visit: 2024-10-18.

[298] J. M. J. Madey. Stimulated emission of bremsstrahlung in a periodic magnetic field. *J. Appl. Phys.*, 42:1906–1913, 1971.

[299] L. R. Elias, W. M. Fairbank, J. M. J. Madey, H. A. Schwettman, and T. I. Smith. Observation of stimulated emission of radiation by relativistic electrons in a spatially periodic transverse magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 36:717–720, 1976.

[300] D. A. G. Deacon, L. R. Elias, J. M. J. Madey, G. J. Ramian, H. A. Schwettman, and T. I. Smith. First operation of a free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.*, 38:892–894, 1977.

[301] ALBA. Spanish Synchrotron Facility. `https://www.cells.es/en`. last visit: 2024-10-18.

[302] I. Georgescu. The first decade of XFELs. *Nature Rev. Phys.*, 2:345–345, 2020.

[303] A. Pradel, M. Langer, J. G. Maisey, D. Geffard-Kuriyama, P. Cloetens, Ph. Janvier, and P. Tafforeau. Skull and brain of a 300-million-year-old chimaeroid fish revealed by synchrotron holotomography. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 106:5224–5228, 2009.

[304] M. Tałanda, V. Fernandez, E. Panciroli, S. E. Evans, and R. J. Benson. Synchrotron tomography of a stem lizard elucidates early squamate anatomy. *Nature*, 611:99–104, 2022.

[305] J. A. Laissue, Lyubimova N., H.-P. Wagner, D. W. Archer, D. N. Slatkin M.D., M. D. Michiel, Ch. Nemoz, M. Renier, E. Brauer, P. O. Spanne, J.-O. Gebbers, K. Dixon, and H. Blattmann. Microbeam radiation therapy. In H. Bradford Barber and Hans Roehrig, editors, *Medical Applications of Penetrating Radiation*, volume 3770, pages 38–45. SPIE, 1999.

[306] D. N. Slatkin, P. Spanne, F. A. Dilmanian, and M. Sandborg. Microbeam radiation therapy. *Med. Phys.*, 19:1395–1400, 1992.

[307] F Estève, S Corde, H Elleaume, J.F Adam, A Joubert, A.M Charvet, M.C Biston, J Balosso, and J.F Le Bas. Enhanced radio sensitivity with iodinated contrast agents using monochromatic synchrotron x-rays on human cancerous cells. *Acad. Radiol.*, 9:S540–S543, 2002.

[308] A. Brynes. Accelerator-based light sources get a boost. *Nature*, 590:556, 2021.

[309] Deng et al. Experimental demonstration of the mechanism of steady-state microbunching. *Nature*, 590:576–579, 2021.

[310] C. Doppler. *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels*. Abhandlungen der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Prag, 1842.

[311] S. L. Jaki. Olbers', halley's, or whose paradox? *Am. J. Phys.*, 35:200–210, 1967.

[312] E. R. Harrison. Why the sky is dark at night. *Phys. Today*, 27:30–36, 1974.

[313] O. Heaviside. The electro-magnetic effects of a moving charge. *The Electrician*, 22:147–148, 1888.

[314] H. Liu, X. Zhang, B. Xing, P. Han, S. Sam Gambhir, and Z. Cheng. Radiation-luminescence-excited quantum dots for in vivo multiplexed optical imaging. *Small*, 6:1087–1091, 2010.

[315] E. Branger, S. Grape, S. Jacobsson Svärd, P. Jansson, and E. Andersson Sundén. On cherenkov light production by irradiated nuclear fuel rods. *J. Instr.*, 12:T06001–T06001, 2017.

[316] M. Rabaud and F. Moisy. Ship Wakes: Kelvin or Mach Angle? *Phys. Rev. Lett.*, 110, 2013.

[317] E. Hecht. *Optics*. Addison Wesley, San Francisco, 4 edition, 2012.

[318] B. Porter, P. Auchincloss, P. de Barbaro, A. Bodek, and H. Budd. A study of an acrylic Cerenkov radiation detector. *Am. J. Phys.*, 67:1022–1028, 1999.

[319] B. M. Bolotovskii. Vavilov-Cherenkov radiation: its discovery and application. *Phys. Usp.*, 52:1099, 2009.

[320] R. Robertson, M. S. Germanos, C. Li, G. S. Mitchell, S. R. Cherry, and M. D. Silva. Optical imaging of cerenkov light generation from positron-emitting radiotracers. *Phys. Med. Bio.*, 54:N355–N365, 2009.

[321] G. S. Mitchell, R. K. Gill, D. L. Boucher, C. Li, and S R. Cherry. In vivo Cerenkov luminescence imaging: a new tool for molecular imaging. *Phil. Trans. A*, 369:4605–4619, 2011.

[322] R. Zhang, A. V. D'souza, R. Gunn J, T. V. Esipova, S. A. Vinogradov, A. K. Glaser, L. A. Jarvis, D. J. Gladstone, and B. W. Pogue. Cherenkov-excited luminescence scanned imaging. *Opt. Lett.*, 40:827–830, 2015.

[323] J. Hinton. Ground-based gamma-ray astronomy with Cherenkov telescopes. *New J. Phys.*, 11:055005, 2009.

[324] P. Morrison. On gamma-ray astronomy. *Il Nuovo Cimento*, 7:858–865, 1958.

[325] Weekes et al. Observation of tev gamma-rays from the crab nebula using the atmospheric cherenkov imaging technique. *Astrophys. J.*, 342:379–395, 1989.

[326] Ph. M. Adamson, J. M. Andreozzi, E. LaRochelle, D. J. Gladstone, and B. W. Pogue. Single photon detection imaging of Cherenkov light emitted during radiation therapy. In B. W. Pogue, S. Gioux, and G. Biggs, editors, *Molecular-Guided Surgery: Molecules, Devices, and Applications IV*, volume 10478, pages 52 – 62. SPIE, 2018.

[327] R. Davis. A half-century with solar neutrinos. *Rev. Mod. Phys.*, 75:985–994, 2003.

[328] J. N. Bahcall and R. K. Ulrich. Solar models, neutrino experiments, and helioseismology. *Rev. Mod. Phys.*, 60:297–372, 1988.

[329] J. N. Bahcall. The Solar-Neutrino Problem. *Sci. Am*, 262:54, 1990.

[330] R. Davis, D. S. Harmer, and K. C. Hoffman. Search for neutrinos from the sun. *Phys. Rev. Lett.*, 20:1205–1209, 1968.

[331] J. N. Bahcall, N. A. Bahcall, and G. Shaviv. Present Status of the Theoretical Predictions for the ^{37}Cl Solar-Neutrino Experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 20:1209–1212, 1968.

[332] B. T. Cleveland, T Daily, R Davis, J. R. Distel, K Lande, C. K. Lee, P. S. Wildenhain, and J Ullman. Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector. *Astrophys. J.*, 496:505–526, 1998.

[333] G. Danby, J-M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, and J. Steinberger. Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 9:36–44, 1962.

[334] Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1562–1567, 1998.

[335] J. Spitz. Neutrino secrets could be revealed close to home. *Nature*, 625:243, 2024.

[336] C. A. Argüelles, P. Fernández, I. Martínez-Soler, and M. Jin. Measuring oscillations with a million atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. X*, 13:041055, 2023.

[337] K. Hirata, T. Kajita, M. Koshiba, M. Nakahata, Y. Oyama, N. Sato, A. Suzuki, M. Takita, Y. Totsuka, T. Kifune, T. Suda, K. Takahashi, T. Tanimori, K. Miyano, M. Yamada, E. W. Beier, L. R. Feldscher, S. B. Kim, A. K. Mann, F. M. Newcomer, R. Van, W. Zhang, and B. G. Cortez. Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1490–1493, 1987.

[338] Abbasi et al. Evidence for neutrino emission from the nearby active galaxy NGC 1068. *Science*, 378(6619):538–543, 2022.

[339] A. B. McDonald, J. R. Klein, and D. L. Wark. Solving the Solar Neutrino Problem. Sci. Am. Special Edition: The frontiers in Physics, 2006.

[340] L. Wolfenstein and E. W. Beier. Neutrino oscillations and solar neutrinos. *Phys. Today*, 42:28–36, 1989.

[341] Aker et al. Direct neutrino-mass measurement based on 259 days of KATRIN data. *Science*, 388:180–185, 2025.

[342] A. Donini, S. Palomares-Ruiz, and J. Salvado. Neutrino tomography of earth. *Nature Phys.*, 15(1):37–40, 2019.

[343] Aker et al. Direct neutrino-mass measurement with sub-electronvolt sensitivity. *Nature Phys.*, 18:160–166, 2022.

[344] L. V. Volkova and G.T. Zatsepin. Passage of neutrinos through the earth. Technical report, Inst. of Nuclear Research, Moscow, 1974.

[345] M. C. Gonzalez-Garcia, F. Halzen, M. Maltoni, and H. K. M. Tanaka. Radiography of earth's core and mantle with atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 100:061802, 2008.

[346] C. Rott, A. Taketa, and D. Bose. Spectrometry of the earth using neutrino oscillations. *Sci. Rep.*, 5:15225, 2015.

[347] F. M. Benslimane, M. Alser, Z. Z. Zakaria, A. Sharma, H. A. Abdelrahman, and H. C. Yalcin. Adaptation of a mice doppler echocardiography platform to measure cardiac flow velocities for embryonic chicken and adult zebrafish. *Front. Bioeng. Biotechnol.*, 7, 2019.

[348] P. Sprawls. *Physical principles of medical imaging.* Aspen Gaithersburg, Madison, 2 edition, 1993.

[349] M. Kaivola, O. Poulsen, E. Riis, and S. A. Lee. Measurement of the Relativistic Doppler Shift in Neon. *Phys. Rev. Lett.*, 54:255–258, 1985.

[350] W. Kündig. Measurement of the Transverse Doppler Effect in an Accelerated System. *Phys. Rev.*, 129:2371–2375, 1963.

[351] NASA. National aeronautics and space administration. `https://www.nasa.gov`. last visit: 2024-05-27.

[352] V. M. Slipher. The radial velocity of the Andromeda nebula. *Pop. Astron.*, 22:19–21, 1914.

[353] Y. Gabsi, J. L. Bertaux, A. Hauchecorne, J. Schmitt, and S. Guibert. Measuring Venus winds using the Absolute Astronomical Accelerometer: Solid super-rotation model of Venus clouds. *Planet. Space Sci.*, 56:1454–1466, 2008.

[354] A. Hanslmeier. *Faszination Astronomie*. Springer, Berlin, 3 edition, 2021.

[355] Xing Li, Huw Morgan, Drew Leonard, and Lauren Jeska. A solar tornado observed by aia/sdo: Rotational flow and evolution of magnetic helicity in a prominence and cavity. *Astrophys. J. Lett.*, 752:L22, 2012.

[356] J. Martínez-Sykora, B. De Pontieu, V. H. Hansteen, L. Rouppe van der Voort, M. Carlsson, and T. M. D. Pereira. On the generation of solar spicules and Alfvenic waves. *Science*, 356:1269–1272, 2017.

[357] Schmieder, B., Mein, P., Mein, N., Levens, P. J., Labrosse, N., and Ofman, L. H-α shifts in a tornado in the solar corona. *Astron. Astrophys.*, 597:A109, 2017.

[358] S. Wedemeyer-Böhm, E. Scullion, O. Steiner, J. van der Voort, L. R.and de la Cruz Rodriguez, V. Fedun, and R. Erdélyi. Magnetic tornadoes as energy channels into the solar corona. *Nature*, 486:505–508, 2012.

[359] D. W. Sciama. *Modern cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

[360] Schödel et al. A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way. *Nature*, 419:694–696, 2002.

[361] A. M. Ghez, S. Salim, N. N. Weinberg, J. R. Lu, T. Do, J. K. Dunn, K. Matthews, M. R. Morris, S. Yelda, E. E. Becklin, T. Kremenek, M. Milosavljevic, and J. Naiman. Measuring distance and properties of the milky way's central supermassive black hole with stellar orbits. *Astrophys. J.*, 689(2):1044–1062, 2008.

[362] Abuter et al. A geometric distance measurement to the galactic center black hole with 0.3% uncertainty. *Astron. Astrophys.*, 625:L10, 2019.

[363] L. Meyer, A. M. Ghez, R. Schödel, S. Yelda, A. Boehle, J. R. Lu, T. Do, M. R. Morris, E. E. Becklin, and K. Matthews. The shortest-known-period star orbiting our galaxy's supermassive black hole. *Science*, 338:84–87, 2012.

[364] R. Clausius. Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. *Ann. Phys.*, 217:124–130, 1870.

[365] ALMA. Atacama large millimeter/submillimeter array. `https://www.almaobservatory.org`. last visit:2024-10-17.

[366] El-Badry et al. A sun-like star orbiting a black hole. *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, 518:1057–1085, 2022.

[367] I. R. Seitenzahl, P. Ghavamian, J. M. Laming, and F. P. A. Vogt. Optical Tomography of Chemical Elements Synthesized in Type Ia Supernovae. *Phys. Rev. Lett.*, 123:041101, 2019.

[368] R. Boyle. Wie standhaft ist das Standardmodell. *Spektr. Wiss.*, 7:66, 2023.

[369] Robertson et al. Identification and properties of intense star-forming galaxies at redshifts z>10. *Nature Astron.*, 7:611–621, 2023.

[370] R. A. Alpher and R. Herman. Evolution of the universe. *Nature*, 162:774–775, 1948.

[371] V. Rubin. Seeing dark matter in the andromeda galaxy. *Phys. Today*, 59:8–9, 2006.

[372] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Hel. Phys. acta*, 6:110–127, 1933.

[373] S. Smith. The mass of the Virgo cluster. *Astrophys. J.*, 83:23, 1936.

[374] V. C. Rubin and W. K. Ford. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophys. J.*, 159:379, 1970.

[375] M. S. Roberts and R. N. Whitehurst. The rotation curve and geometry of M31 at large galactocentric distances. *Astrophys. J.*, 201:327–346, 1975.

[376] S. M. Faber and J. S. Gallagher. Masses and mass-to-light ratios of galaxies. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 17:135–187, 1979.

[377] D. P. Clemens. Massachusetts-stony brook galactic plane co survey: the galactic disk rotation curve. *Astrophys. J.*, 295:422–436, 1985.

[378] V. C. Rubin, Jr. Ford, W. K., and N. Thonnard. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc). *Astrophys. J.*, 238:471–487, 1980.

[379] J.F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. The structure of cold dark matter halos. *Astrophys. J.*, 462:563, 1996.

[380] M. J. Geller and J. P. Huchra. Mapping the universe. *Science*, 246:897–903, 1989.

[381] J. R. Gott III, M. Juric, D. Schlegel, F. Hoyle, M. Vogeley, M. Tegmark, N. Bahcall, and J. Brinkmann. A Map of the Universe. *Astrophys. J.*, 624:463, 2005.

[382] M. Schmidt. 3C 273 : A Star-Like Object with Large Red-Shift. *Nature*, 197:1040–1040, 1963.

[383] G. Principi. The Mössbauer Effect: A Romantic Scientific Page. *Metals*, 10:992, 2020.

[384] L. L. Lee, L. Meyer-Schutzmeister, J. P. Schiffer, and D. Vincent. Nuclear resonance absorption of gamma rays at low temperatures. *Phys. Rev. Lett.*, 3:223–225, 1959.

[385] Ph. Gütlich and Ch. Schröder. *Mössbauer Spectroscopy*, chapter 11, pages 351–389. Wiley & Sons, 2012.

[386] C. E. Johnson. Applications of the Mössbauer Effect in Biophysics. *J. Appl. Phys.*, 42:1325–1331, 1971.

[387] R. V. Pound and G. A. Rebka. Gravitational red-shift in nuclear resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 3:439–441, 1959.

[388] GEO. `https://www.geo.de`. last visit: 2024-10-17.

[389] H. J. Hay, J. P. Schiffer, T. E. Cranshaw, and P. A. Egelstaff. Measurement of the Red Shift in an Accelerated System Using the Mössbauer Effect in Fe^{57}. *Phys. Rev. Lett.*, 4:165–166, 1960.

[390] D. C. Champeney, G. R. Isaak, and A. M. Khan. Measurement of Relativistic Time Dilatation using the Mössbauer Effect. *Nature*, 198:1186–1187, 1963.

[391] R. V. Pound and G. A. Rebka. Apparent weight of photons. *Phys. Rev. Lett.*, 4:337–341, 1960.

[392] R. H. Herber. Chemical Applications of Mössbauer Spectroscopy. *Ann. Rev. Phys. Chem.*, 17:261–294, 1966.

[393] M. I. Oshtrakh. Biomedical applications of the Mössbauer effect. *Hyperfine Interac.*, 66:127, 1991.

[394] G. Klingelhöfer, G. M. da Costa, A. Prous, and B. Bernhardt. Rock paintings from Minas Gerais, Brasil, investigated by in-situ Mössbauer spectroscopy. *Hyperfine Interac.*, pages 423–426, 2002.

[395] M. I. Oshtrakh. Applications of Mössbauer Spectroscopy in Biomedical Research. *Cell Biochem. Biophys*, 77:15–32, 2019.

[396] D. R. Cousins and K. G. Dharmawaedena. Use of Mössbauer Spectroscopy in the Study of Ancient Pottery. *Nature*, 223:732–733, 1969.

[397] F. E. Wagner and U. Wagner. Mössbauer spectra of clays and ceramics. *Hyperfine Interact.*, 154:35–82, 2004.

[398] G. Klingelhöfer, B. Bernhardt, J. Foh, U. Bonnes, D. Rodionov, P. A. de Souza, Ch. Schröder, R. Gellert, S. Kane, P. Gütlich, and E. Kankeleit. The Miniaturized Mössbauer Spectrometer MIMOS II for Extraterrestrial and Outdoor Terrestrial Applications: A Status Report. *Hyperfine Interact.*, 144:371–379, 2002.

[399] Ch. Schröder, B. Bailey, G. Klingelhöfer, and H. Staudigel. Fe Mössbauer spectroscopy as a tool in astrobiology. *Planet. Space Sci.*, 54:1622–1634, 2006.

[400] Schmidt, T. O. B., Neuhäuser, R., Seifahrt, A., Vogt, N., Bedalov, A., Helling, Ch., Witte, S., and Hauschildt, P. H. Direct evidence of a sub-stellar companion around ct chamaeleontis. *Astron. Astrophys.*, 491:311–320, 2008.

[401] Lam et al. GJ 367b: A dense, ultrashort-period sub-Earth planet transiting a nearby red dwarf star. *Science*, 374:1271–1275, 2021.

[402] S. Seager. *Radial Velocity Techniques for Exoplanets*, page 526. University of Arizona Press, Tucson, 1993.

[403] M. Mayor and D. Queloz. A jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378:355–359, 1995.

[404] D. Charbonneau, T. M. Brown, A. Burrows, and G. Laughlin. When extrasolar planets transit their parent stars. `https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603376`, 2006.

[405] A. C. Lark and B. Moser. Exoplanet and binary star light curve demonstration. *Phys. Teach.*, 63:193–196, 2025.

[406] R. Boyle. Die Suche nach fernen Monden. *Spektr. Wiss.*, 8:68, 2021.

[407] J. N. Winn. Ein Himmel voller Exoplaneten. *Spetr. Wiss.*, 5:60, 2018.

[408] Trifonov et al. A nearby transiting rocky exoplanet that is suitable for atmospheric investigation. *Science*, 371:1038–1041, 2021.

[409] Aomawa L. Shields, Sarah Ballard, and John Asher Johnson. The habitability of planets orbiting M-dwarf stars. *Physics Reports*, 663:1–38, 2016.

[410] R. Thombre and P. Vaishampayan. *New Frontiers in Astrobiology.* Elsevier, Amsterdam, 2022.

[411] M. C. LoPresto. Analog environments. *Phys. Teach.*, 62:614–615, 2024.

[412] Ahrer et al. Identification of carbon dioxide in an exoplanet atmosphere. *Nature*, 614:649–652, 2023.

[413] Azevedo Silva et al. Detection of barium in the atmospheres of the ultra-hot gas giants WASP-76b and WASP-121b. *Astron. Astrophys.*, 666:L10, 2022.

[414] R. Luque and E. Pallé. Density, not radius, separates rocky and water-rich small planets orbiting M dwarf stars. *Science*, 377:1211–1214, 2022.

[415] Sing et al. Exospheric Mg-II and Fe-II in the Near-ultraviolet Transmission Spectrum of WASP-121b Using Jitter Decorrelation. *Astron. J.*, 158:91, 2019.

[416] Plavchan et al. A planet within the debris disk around the pre-main-sequence star AU Microscopii. *Nature*, 582:497–500, 2020.

[417] S. Seager and D. Deming. Exoplanet atmospheres. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 48:631–672, 2010.

[418] P. Robertson, S. Mahadevan, M. Endl, and A. Roy. Stellar activity masquerading as planets in the habitable zone of the M dwarf Gliese 581. *Science*, 345:440–444, 2014.

[419] Bonomo et al. A giant impact as the likely origin of different twins in the kepler-107 exoplanet system. *Nature Astronomy*, 3:416–423, 2019.

[420] H. I. Ewen and E. M. Purcell. Observation of a Line in the Galactic Radio Spectrum: Radiation from Galactic Hydrogen at 1,420 Mc./sec. *Nature*, 168:356–356, 1951.

[421] C. A. Muller and J. H. Oort. Observation of a Line in the Galactic Radio Spectrum: The Interstellar Hydrogen Line at 1,420 Mc./sec., and an Estimate of Galactic Rotation. *Nature*, 168:357–358, 1951.

[422] NRAO. National radio astronomy observatory. `https://public.nrao.edu`. last visit: 2024-10-18.

[423] W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, M. D. Thornley, and R. C. Kennicutt. First Results from THINGS: The HI Nearby Galaxy Survey. `https://arxiv.org/abs/astro-ph/0407103`, 2004.

[424] J. H. Oort, F. J Kerr, and G. Westerhout. The galactic system as a spiral nebula. *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, 118:379, 1958.

[425] A. Chowdhury, N. Kanekar, J. N. Chengalur, S. Sethi, and K. S. Dwarakanath. H1 21-centimetre emission from an ensemble of galaxies at an average redshift of one. *Nature*, 586(7829):369–372, 2020.

[426] H. Shapley and H. D. Curtis. The Scale of the Universe. *Bull. Nat. Res. Coun*, 2:171–217, 1921.

[427] H. S. Leavitt. 1777 variables in the magellanic clouds. *Annu. Harv. Obs. Coll.*, 60:87–108, 1908.

[428] V. M. Slipher. The radial velocity of the andromeda nebula. *Lowell Observatory Bulletin*, 2:56–57, 1913.

[429] V. M. Slipher. Spectrographic observations of nebulae. *Popular Astron.*, 23:21–24, 1915.

[430] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc.. Nat. Aca. Sci.*, 15:168–173, 1929.

[431] E. Hubble. The Realm of the Nebulae. *Ciel et Terre*, 53:194, 1937.

[432] W. Baade. The period-luminosity relation of the cepheids. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 68:5–16, 1956.

[433] D. Adams and B. Schwarz. *Per Anhalter durch die Galaxis*. Heyne, München, 2009.

[434] W. L. Freedman, B. F. Madore, B. K. Gibson, L. Ferrarese, D. D. Kelson, S. Sakai, J. R. Mould, Jr. R. C. Kennicutt, H. C. Ford, J. A. Graham, J. P. Huchra, S. M. G. Hughes, G. D. Illingworth, L. M. Macri, and P. B. Stetson. Final Results from the Hubble Space Telescope Project to Measure the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 553:47–72, 2001.

[435] University of Iowa. Department of physics and astronomy. `https://www.cyberphysics.co.uk`. last visit: 2024-05-22.

[436] Subaru Telescope. National astronomical observatory of japan. `https://www.nao.ac.jp/en/`. last visit: 2024-10-18.

[437] M. D. Lehnert, N. P. H. Nesvadba, J.-G. Cuby, A. M. Swinbank, S. Morris, B. Clément, C. J. Evans, M. N. Bremer, and S. Basa. Spectroscopic confirmation of a galaxy at redshift z=8.6. *Nature*, 467:940–942, 2010.

[438] R. J. Bouwens, G. D. Illingworth, P. A. Oesch, M. Stiavelli, P. van Dokkum, M. Trenti, D. Magee, I. Labbé, M. Franx, C. M. Carollo, and V. Gonzalez. Discovery of $z \sim 8$ Galaxies in the HUDF from ultra-deep WFC3/IR Observations. *Astrophys. J.*, 709:L133–L137, 2010.

[439] A. Sandage. Observational cosmology. *Obs.*, 88:91–106, 1968.

[440] B. Leibundgut. Kontroverse um eine Konstante. *Phys. J.*, 21:23, 2022.

[441] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and The Supernova Cosmology Project. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys. J.*, 517(2):565, 1999.

[442] S. Perlmutter, G. Aldering, M. Della Valle, S. Deustua, R. S. Ellis, S. Fabbro, A. Fruchter, G. Goldhaber, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, R. A. Knop, C. Lidman, R. G. McMahon, P. Nugent, R. Pain, N. Panagia, C. R. Pennypacker, P. Ruiz-Lapuente, B. Schaefer, and N. Walton. Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe. *Nature*, 391:51–54, 1998.

[443] G. C. McVittie. Hubble trouble. *Phys. Today*, 17:70–70, 1964.

[444] U. Kraus. Bewegung am kosmischen Tempolimit - Visualisierungen zur Speziellen Relativitätstheorie. *Sterne und Weltraum*, 8:40, 2005.

[445] A. Einstein. Die relativitäts-theorie. *Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 56:1, 1911.

[446] P. G. Hewitt. *Conceptual physics*. Addison-Wesley, San Francisco, 10 edition, 2006.

[447] J. Bailey, K. Borer, F. Combley, H. Drumm, F. Krienen, F. Lange, E. Picasso, W. von Ruden, F. J. M. Farley, J. H. Field, W. Flegel, and P. M. Hattersley. Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit. *Nature*, 268:301–305, 1977.

[448] L. Barnett. *The universe and Dr. Einstein*. Comet books. Collins, London, 1950.

[449] A. Einstein. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? *Ann. Phys.*, 323:639–641, 1905.

[450] A. Einstein. Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie [AdP 20, 627 (1906)]. *Ann. Phys.*, 14:268–274, 2005.

[451] J.W. von Goethe. *Faust: Eine Tragödie. Erster Theil*. Hermann Passarge, 1841.

[452] P. M. Fishbane, S. G. Gasiorowicz, and S. T. Thornton. *Physics for Scientists and Engineers*. Pearson, Upper Saddle River, 3 edition, 2005.

[453] J. D. Cockcroft and E. T. S. Walton. Disintegration of lithium by swift protons. *Nature*, 129:649–649, 1932.

[454] R.P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, and E. M. Hafner. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 2. Addison-Wesley, Boston, MA, 1964.

[455] F. Wilczek. The enigmatic electron. *Nature*, 498(7452):31–32, 2013.

[456] Spektrum der Wissenschaft. `https://www.spektrum.de`. last visit: 2024-06-11.

[457] LUMITOS. Die fachportale von lumitos. `https://www.chemie.de`. last visit: 2024-10-17.

[458] Pattie et al. Measurement of the neutron lifetime using a magneto-gravitational trap and in situ detection. *Science*, 360:627–632, 2018.

[459] M. P. Barrow, L. A. McDonnell, X. Feng, J. Walker, and P. J. Derrick. Determination of the Nature of Naphthenic Acids Present in Crude Oils Using Nanospray Fourier Transform Ion Cyclotron Resonance Mass Spectrometry: The Continued Battle Against Corrosion. *Anal. Chem.*, 75:860–866, 2003.

[460] E. Kendrick. A mass scale based on $ch_2 = 14.0000$ for high resolution mass spectrometry of organic compounds. *Anal. Chem.*, 35:2146–2154, 1963.

[461] J. V. Headley, K. M. Peru, and M. P. Barrow. Mass spectrometric characterization of naphthenic acids in environmental samples: A review. *Mass Spectrom. Rev.*, 28:121–134, 2009.

[462] T. Fouquet and H. Sato. Extension of the kendrick mass defect analysis of homopolymers to low resolution and high mass range mass spectra using fractional base units. *Anal. Chem.*, 89:2682–2686, 2017.

[463] Ubukata et al. Non-targeted analysis of electronics waste by comprehensive two-dimensional gas chromatography combined with high-resolution mass spectrometry: Using accurate mass information and mass defect analysis to explore the data. *J. Chromatogr. A*, 1395:152–159, 2015.

[464] L. Sleno. The use of mass defect in modern mass spectrometry. *J. Mass Spectrom.*, 47:226–236, 2012.

[465] A. G. Marshall and R. P. Rodgers. Petroleomics: The Next Grand Challenge for Chemical Analysis. *Acc. Chem. Res.*, 37:53–59, 2004.

[466] Daisaku Ohta, Shigehiko Kanaya, and Hideyuki Suzuki. Application of Fourier-transform ion cyclotron resonance mass spectrometry to metabolic profiling and metabolite identification. *Curr. Opin. Biotechnol.*, 21:35–44, 2010.

[467] H. Sato, S. Nakamura, K. Teramoto, and T. Sato. Structural Characterization of Polymers by MALDI Spiral-TOF Mass Spectrometry Combined with Kendrick Mass Defect Analysis. *J. Am. Soc. Mass Spectr.*, 25:1346–1355, 2014.

[468] S. Pourshahian. Mass defect from nuclear physics to mass spectral analysis. *J. Am. Soc. Mass Spectrom.*, 28:1836–1843, 2017.

[469] Wienholtz et al. Masses of exotic calcium isotopes pin down nuclear forces. *Nature*, 498:346–349, 2013.

[470] pro beam. `https://www.pro-beam.com`. last visit: 2024-10-17.

[471] K. Greisen. End to the cosmic-ray spectrum? *Phys. Rev. Lett.*, 16:748–750, 1966.

[472] G. T. Zatsepin and V. A. Kuz'min. Upper limit of the spectrum of cosmic rays. *JETP*, 4:78, 1966.

[473] C. E. Guye and Ch. Lavanchy. *Vérification expérimentale de la formule de Lorentz-Einstein par les rayons cathodiques de grande vitesse*. Société Générale d'Imprimerie, Pélisserie, 1916.

[474] A. H. Bucherer. Die experimentelle Bestätigung des Relativitätsprinzips. *Ann. Phys.*, 333:513–536, 1909.

[475] A. A. Bartlett and Malcolm Correll. An Undergraduate Laboratory Apparatus for Measuring e/m as a Function of Velocity. I. *Am. J. Phys.*, 33:327–339, 1965.

[476] R. E. Marvel and M. F. Vineyard. Relativistic electron experiment for the undergraduate laboratory. arxiv.org/abs/1108.5977v1, 2011.

[477] S. Richtberg. Virtuelle experimente. `https://virtuelle-experimente.de/en/b-feld/b-feld/kraefte.php`. last visit: 2025-02-10.

[478] W. Kaufmann. Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Bequerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl.*, 1901:143–155, 1901.

[479] Marguerite M. Rogers, A. W. McReynolds, and F. T. Rogers. A Determination of the Masses and Velocities of Three Radium B Beta-Particles The Relativistic Mass of the Electron. *Phys. Rev.*, 57:379–383, 1940.

[480] L. Karlov. On the transformation of force in relativistic statics. *Lett. Nuovo Cimento*, 3:37–39, 1970.

[481] R. Fleischmann and R. Kollath. Verfahren zur Messung der Ladung schnell bewegter Elektronen. *Z. Phys.*, 134:526–529, 1953.

[482] R. Kollath and D. Menzel. Ladungsmessung an bewegten Elektronen. *Z. Phys.*, 134:530–539, 1953.

[483] N Treitz. Energieverhältnisse. *Spektr. Wiss.*, 9:106, 2005.

[484] O. Chamberlain, E. Segrè, C. Wiegand, and Th. Ypsilantis. Observation of antiprotons. *Phys. Rev.*, 100:947–950, 1955.

[485] M. N. Anwar, Y. Lu, and B.-S. Zou. Modeling charmonium-η decays of $J^{PC} = 1^{--}$ higher charmonia. *Phys. Rev. D*, 95:114031, 2017.

[486] Th. G. Trippe, A. Barbaro-Galtieri, R. L. Kelly, A. Rittenberg, A. H. Rosenfeld, G. P. Yost, N. Barash-Schmidt, C. Bricman, R. J. Hemingway, M. J. Losty, M. Roos, V. Chaloupka, and B. Armstrong. Review of particle properties. *Rev. Mod. Phys.*, 48:S1–S245, 1976.

[487] G. Feinberg and M. Goldhaber. The conservation laws of physics. *Sci. Am.*, 209:36–45, 1963.

[488] Cyberphysics. `https://itu.physics.uiowa.edu`. last visit: 2024-09-16.

[489] P. Pyykko and J. P. Desclaux. Relativity and the periodic system of elements. *Acc. Chem. Res.*, 12:276–281, 1979.

[490] P. A. M. Dirac and R. H. Fowler. Quantum mechanics of many-electron systems. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci. A*, 123:714–733, 1929.

[491] HauteInnovations. Zukunftsagentur für Material und Technologie. `https://www.haute-innovation.com`. last visit: 2024-10-17.

[492] L. Gagliardi and B. O. Roos. Quantum chemical calculations show that the uranium molecule U2 has a quintuple bond. *Nature*, 433:848–851, 2005.

[493] M. Kaupp. Einstein in der Chemie. *Spektr. Wiss.*, 12:90, 2005.

[494] N. N. Greenwood and A. Earnshaw. *Chemistry of the Elements*. Elsevier, 2012.

[495] T. Gray and N. Mann. `https://periodictable.com`. last visit: 2024-10-17.

[496] S. Hofmann, V. Ninov, F. P. Heßberger, P. Armbruster, H. Folger, G. Münzenberg, H. J. Schött, A. G. Popeko, A. V. Yeremin, A. N. Andreyev, S. Saro, R. Janik, and M. Leino. The new element 111. *Z. Phys. A*, 350:281–282, 1995.

[497] B. T. Matthias, T. H. Geballe, and V. B. Compton. Superconductivity. *Rev. Mod. Phys.*, 35:1–22, 1963.

[498] K. S. Pitzer. Relativistic effects on chemical properties. *Acc. Chem. Res.*, 12:271–276, 1979.

[499] S. M. Blinder. *Introduction to Quantum Mechancs*. Academic Press, Burlington, 2004.

[500] P. Pyykkö. Relativistic effects in structural chemistry. *Chem. Rev.*, 88:563–594, 1988.

[501] Yakushev et al. Superheavy Element Flerovium (Element 114) Is a Volatile Metal. *Inorg. Chem.*, 53:1624–1629, 2014.

[502] R. Lougheed. Oddly ordinary seaborgium. *Nature*, 388:21–22, 1997.

[503] M. Schädel, W. Brüchle, R. Dressler, B. Eichler, H. W. Gäggeler, R. Günther, K. E. Gregorich, D. C. Hoffman, S. Hübener, D. T. Jost, J. V. Kratz, W. Paulus, D. Schumann, S. Timokhin, N. Trautmann, A. Türler, G. Wirth, and A. Yakuschev. Chemical properties of element 106 (seaborgium). *Nature*, 388:55–57, 1997.

[504] R. Ahuja, A. Blomqvist, P. Larsson, P. Pyykkö, and P. Zaleski-Ejgierd. Relativity and the lead-acid battery. *Phys. Rev. Lett.*, 106:018301, 2011.

[505] Th. Gold. New ideas in science. *J. Sci. Explor.*, 3(2):103–112, 1989.

[506] Th. Gol. Rotating neutron stars and the nature of pulsars. *Nature*, 221:25–27, 1969.

[507] J. Soldner. Über die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht (1804). *Reprint in Ann. Phys.*, 370:593–604, 1921.

[508] M. Janssen and J. Renn. History: Einstein was no lone genius. *Nature*, 527:298–300, 2015.

[509] S. Gibilisco. *Physics demystified*. McGraw-Hill, New York, 2002.

[510] H. Kruglak. Physical Effects of Apparent Weightlessness. *Phys. Teach.*, 1:34–35, 1963.

[511] H. Ayala, J. Slisko, and A. Corona. Magnetic demonstration of weightlessness: A spark of student creativity. *Phys. Teach.*, 49:524–525, 2011.

[512] J. Slisko. A new role for the Cartesian diver: Showing free-fall weightlessness. *Phys. Teach.*, 58:446–446, 2020.

[513] J. Slisko and A. Corona. Demonstrating free-fall weightlessness with a charged needle electroscope. *Phys. Edu.*, 57:053006, 2022.

[514] I. M. Krulj and J. Slisko. Absence of buoyant force in free fall: A magnetic demonstration. *Phys. Teach.*, 61:312–313, 2023.

[515] R. v. Eötvös, D. Pekár, and E. Fekete. Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Ann. Phys.*, 373:11–66, 1922.

[516] A. Einstein. Über Friedrich Kottlers Abhandlung Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation. *Ann. Phys.*, 356:639–642, 1916.

[517] Touboul et al. MICROSCOPE Mission: First Results of a Space Test of the Equivalence Principle. *Phys. Rev. Lett.*, 119:231101, 2017.

[518] P. A. Tipler and R. A. Llewellyn. *Modern Physics*. W. H. Freeman, New York, 5 edition, 2008.

[519] A Einstein. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. `cds.cern.ch/record/632319`, 1915.

[520] Oskar Höfling. *Physik*. Dümmler, Bonn, 15 edition, 1990.

[521] P Hewitt. Zero g? *Phys. Teach.*, 60:243–243, 2022.

[522] D. Walsh, R. F. Carswell, and R. J. Weymann. 0957 + 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens? *Nature*, 279(5712):381–384, 1979.

[523] Colley et al. Around-the-Clock Observations of the Q0957+561A,B Gravitationally Lensed Quasar. II. Results for the Second Observing Season. *Astrophys J.*, 587:71–79, 2003.

[524] SPL. Science Photo Library. `https://www.sciencephoto.com`. last visit: 2024-10-17.

[525] A. Einstein. Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field. *Science*, 84:506–507, 1936.

[526] K. C. Sahu, J. Anderson, S. Casertano, H. E. Bond, P. Bergeron, E. P. Nelan, L. Pueyo, Th. M. Brown, A. Bellini, Z. G. Levay, J. Sokol, M. Dominik, A. Calamida, N. Kains, and M Livio. Relativistic deflection of background starlight measures the mass of a nearby white dwarf star. *Science*, 356:1046–1050, 2017.

[527] S. Yancopoulos, T. T. Hamilton, and D. J. Helfand. The detection of pulsed x-ray emission from a nearby radio pulsar. *Astrophys. J.*, 429:832, 1994.

[528] H. Y. Chiu. Gravitational collapse. *Phys. Today*, 17:21–34, 1964.

[529] Wang et al. A luminous quasar at redshift 7.642. *Astrophys. J. Lett.*, 907:L1, 2021.

[530] Robert H. Dicke. Gravitational theory and observation. *Phys. Today*, 20:55–70, 1967.

[531] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. *123. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919*, pages 826–832. Harvard University Press, 2013.

[532] R. Ellis, M. R. Santos, J.-P. Kneib, and K. Kuijken. A Faint Star-forming System Viewed through the Lensing Cluster Abell 2218: First Light at $z \simeq 5.6$? *Astrophys. J.*, 560:L119–L122, 2001.

[533] Physics Forum. `https://www.physicsforums.com`. last visit: 2024-10-18.

[534] ING. Isaac newton group of telescopes. `https://www.ing.iac.es`. last visit: 2024-10-18.

[535] E. L Turner. Gravitational lenses. *Sci. Am.*, 259:54–61, 1988.

[536] D. Coe. Blick in der Kinderstue des Kosmos. *Spektr. Wiss.*, 5:46, 2019.

[537] Salmon et al. RELICS: A candidate $z \sim 10$ galaxy strongly lensed into a spatially resolved arc. *Astrophys. J.*, 864:L22, 2018.

[538] P. A. Oesch, G. Brammer, P. G. van Dokkum, G. D. Illingworth, R. J. Bouwens, I. Labbé, M. Franx, I. Momcheva, M. L. N. Ashby, G. G. Fazio, V. Gonzalez, B. Holden, D. Magee, R. E. Skelton, R. Smit, L. R. Spitler, M. Trenti, and S. P. Willner. A remarkably luminous galaxy at z = 11.1 measured with hubble space telescope grism spectroscopy. *Astrophys. J.*, 819:129, 2016.

[539] Welch et al. A highly magnified star at redshift 6.2. *Nature*, 603(7903):815–818, 2022.

[540] Shude M. Astrophysical applications of gravitational microlensing. *Res. Astron. Astrophys*, 12:947–972, 2012.

[541] X. Gou, X. Pan, and L. Wang. General relativity testing in exoplanetary systems. *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.*, 658:012051, 2021.

[542] T. Castellano, J. Jenkins, D. E. Trilling, L. Doyle, and D. Koch. Detection of planetary transits of the star HD 209458 in the *Hipparcos* data set. *Astrophys. J.*, 532:L51–L53, 2000.

[543] C. Alcock, C. W. Akerlof, R. A. Allsman, T. S. Axelrod, D. P. Bennett, S. Chan, K. H. Cook, K. C. Freeman, K. Griest, S. L. Marshall, H.-S. Park, S. Perlmutter, B. A. Peterson, M. R. Pratt, P. J. Quinn, A. W. Rodgers, C. W. Stubbs, and W. Sutherland. Possible gravitational microlensing of a star in the large magellanic cloud. *Nature*, 365:621–623, 1993.

[544] A. Udalski, M. Szymanski, J. Kaluzny, M. Kubiak, W. Krzeminski, M. Mateo, G. W. Preston, and B. Paczynski. The Optical Gravitational Lensing Experiment. Discovery of the First Candidate Microlensing Event in the Direction of the Galactic Bulge. *Acta Astron.*, 43:289–294, 1993.

[545] Beaulieu et al. Discovery of a cool planet of 5.5 earth masses through gravitational microlensing. *Nature*, 439:437–440, 2006.

[546] E. Roulet and S. Mollerach. Microlensing. *Phys. Rep.*, 279:67–118, 1997.

[547] C. Alcock, R. A. Allsman, D. R. Alves, T. S. Axelrod, A. C. Becker, D. P. Bennett, K. H. Cook, N. Dalal, A. J. Drake, K. C. Freeman, M. Geha, K. Griest, M. J. Lehner, S. L. Marshall, D. Minniti, C. A. Nelson, B. A. Peterson, P. Popowski, M. R. Pratt, P. J. Quinn, C. W. Stubbs, W. Sutherland, A. B. Tomaney, T. Vandehei, and D. Welch. The macho project: Microlensing results from 5.7 years of large magellanic cloud observations. *The Astrophysical Journal*, 542:281, 2000.

[548] R. Di Stefano. Discovering habitable earths hot jupiters and other close planets with microlensing. *Astrophys. J.*, 752:105, 2012.

[549] Shin et al. Microlensing binaries with candidate brown dwarf companions. *Astrophys. J.*, 760:116, 2012.

[550] Welch et al. A highly magnified star at redshift 6.2. *Nature*, 603:815–818, 2022.

[551] N. Hinkley, J. A. Sherman, N. B. Phillips, M. Schioppo, N. D. Lemke, K. Beloy, M. Pizzocaro, C. W. Oates, and A. D. Ludlow. An atomic clock with 10^{-18} instability. *Science*, 341:1215–1218, 2013.

[552] S. Simionato. Three redshifts: Doppler, cosmological, and gravitational. *Phys. Teach.*, 59:333–336, 2021.

[553] J. P. Gordon, H. J. Zeiger, and C. H. Townes. The Maser - New Type of Microwave Amplifier, Frequency Standard, and Spectrometer. *Phys. Rev.*, 99:1264–1274, 1955.

[554] Herrmann et al. Test of the gravitational redshift with galileo satellites in an eccentric orbit. *Phys. Rev. Lett.*, 121:231102, 2018.

[555] Grotti et al. Geodesy and metrology with a transportable optical clock. *Nature Phys.*, 14:437–441, 2018.

[556] J. C. Hafele and R. E. Keating. Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains. *Science*, 177:166–168, 1972.

[557] R. F. C. Vessot, M. W. Levine, E. M. Mattison, E. L. Blomberg, T. E. Hoffman, G. U. Nystrom, B. F. Farrel, R. Decher, P. B. Eby, C. R. Baugher, J. W. Watts, D. L. Teuber, and F. D. Wills. Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser. *Phys. Rev. Lett.*, 45:2081–2084, 1980.

[558] T. Bothwell, C. J. Kennedy, A. Aeppli, D. Kedar, J. M. Robinson, E. Oelker, A. Staron, and J. Ye. Resolving the gravitational redshift across a millimetre-scale atomic sample. *Nature*, 602:420–424, 2022.

[559] X. Zheng, J. Dolde, V. Lochab, B. N. Merriman, H. Li, and S. Kolkowitz. Differential clock comparisons with a multiplexed optical lattice clock. *Nature*, 602(7897):425–430, 2022.

[560] Abuter et al. Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole. *Astron. Astrophys.*, 615:L15, 2018.

[561] I. I. Shapiro. Fourth test of general relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 13:789–791, 1964.

[562] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376, 2003.

[563] R. D. Reasenberg, I. I. Shapiro, P. E. MacNeil, R. B. Goldstein, J. C. Breidenthal, J. P. Brenkle, D. L. Cain, T. M. Kaufman, T. A. Komarek, and A. I. Zygielbaum. Viking relativity experiment - Verification of signal retardation by solar gravity. *Astrophys. Lett.*, 234:L219–L221, 1979.

[564] I. I. Shapiro, G. H. Pettengill, M. E. Ash, M. L. Stone, W. B. Smith, R. P. Ingalls, and R. A. Brockelman. Fourth test of general relativity: Preliminary results. *Phys. Rev. Lett.*, 20:1265–1269, 1968.

[565] I. I. Shapiro, M. E. Ash, R. P. Ingalls, W. B. Smith, D. B. Campbell, R. B. Dyce, R. F. Jurgens, and G. H. Pettengill. Fourth test of general relativity: New radar result. *Phys. Rev. Lett.*, 26:1132–1135, 1971.

[566] Cromartie et al. Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. *Nature Astron.*, 4:72–76, 2020.

[567] P. Yam. Einstein im Alltag. *Spektr. Wiss. Special*, 1:28, 2005.

[568] J. L. Greenstein, J. B. Oke, and H. L. Shipman. Effective Temperature, Radius, and Gravitational Redshift of Sirius B. *Astrophys. J.*, 169:563, 1971.

[569] M. Sato and H. Sato. Gravitational wave derived from fluid mechanics applied on the permittivity and the permeability offree space. *Phys. Essays*, 25:1, 2012.

[570] A. Einstein. Über Gravitationswellen. *Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wissenschaft. Berlin*, pages 154–167, 1918.

[571] J. M. Weisberg and J. H. Taylor. Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis. `https://arxiv.org/abs/astro-ph/0407149`, 2004.

[572] L. M. Burko. Gravitational wave detection in the introductory lab. *Phys. Teach.*, 55:288–292, 2017.

[573] Hewish et al. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, 217:709–713, 1968.

[574] J. M. Weisberg, D. J. Nice, and J. H. Taylor. Timing Measurements Of The Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16. *Astrophys. J.*, 722:1030–1034, 2010.

[575] R. A. Hulse. The discovery of the binary pulsar. *Rev. Mod. Phys.*, 66:699–710, 1994.

[576] SLAC. Stanford linear accelerator center. `https://www6.slac.stanford.edu`. last visit: 2024-10-18.

[577] M. Kramer, I. H. Stairs, R. N. Manchester, N. Wex, A. T. Deller, W. A. Coles, M. Ali, M. Burgay, F. Camilo, I. Cognard, T. Damour, G. Desvignes, R. D. Ferdman, P. C. C. Freire, S. Grondin, L. Guillemot, G. B. Hobbs, G. Janssen, R. Karuppusamy, D. R. Lorimer, A. G. Lyne, J. W. McKee, M. McLaughlin, L. E. Münch, B. B. P. Perera, N. Pol, A. Possenti, J. Sarkissian, B. W. Stappers, and G. Theureau. Strong-field gravity tests with the double pulsar. *Phys. Rev. X*, 11:041050, 2021.

[578] J. Weber. Gravitational radiation. *Phys. Rev. Lett.*, 18:498–501, 1967.

[579] O. D. Aguiar. Past, present and future of the resonant-mass gravitational wave detectors. *Res. Astron. Astrophys*, 11:1–42, 2010.

[580] FAZ. Frankfurter Allgemeine Zeitung. `https://www.faz.net`. last visit: 2024-10-18.

[581] Editorial. A triumph of sensitivity. *Nature Phot.*, 11:677–677, 2017.

[582] C. Sabín, J. Kohlrus, D. E. Bruschi, and I. Fuentes. Thermal noise in BEC-phononic gravitational wave detectors. *Eur. Phys. J. Quant. Techn.*, 3:8, 2016.

[583] Coulter et al. Swope Supernova Survey 2017a (SSS17a), the optical counterpart to a gravitational wave source. *Science*, 358:1556–1558, 2017.

[584] LIGO. Laser interferometer gravitational-wave observatory. `https://www.ligo.org`. last visit: 2024-10-18.

[585] R. Gast. Das Raumzeitbeben von NGC 4993. *Spektr. Wiss.*, 1:58, 2018.

[586] Arcavi et al. Optical emission from a kilonova following a gravitational-wave-detected neutron-star merger. *Nature*, 551:64–66, 2017.

[587] D. Castelvecchi. Am Puls der Raumzeit. *Spektr. Wiss.*, 10:60, 2018.

[588] Bailes et al. Gravitational-wave physics and astronomy in the 2020s and 2030s. *Nature Rev. Phys.*, 3:344–366, 2021.

[589] D. Cley. Crash of the titans: imminent merger of giant black holes predicted. *Science*, 375:478, 2022.

[590] N. Jiang, H. Yang, T. Wang, J. Zhu, Z. Lyu, L. Dou, Y. Wang, J. Wang, Z. Pan, H. Liu, X. Shu, and Z. Zheng. Tick-tock: The imminent merger of a supermassive black hole binary. `https://arxiv.org/abs/2201.11633`, 2022.

[591] M. Peplow. The next big hit in molecule hollywood. *Nature*, 544:408–410, 2017.

[592] Stray et al. Quantum sensing for gravity cartography. *Nature*, 602:590–594, 2022.

[593] S. Harris. *What's so funny about science?* William Kaufmann inc., Los Altos, 1977.

[594] M. Jammer. *Philosophy of Quantum Mechanics*. Wiley & Sons, New York, 1974.

[595] M. Sevvana, F. Long, A. S. Miller, Th. Klose, G. Buda, L. Sun, R. J. Kuhn, and M. G. Rossmann. Refinement and Analysis of the Mature Zika Virus Cryo-EM Structure at 3.1 Å Resolution. *Structure*, 26:1169–1177.e3, 2018.

[596] D. Sirohi, Z. Chen, L. Sun, Th. Klose, Th. C. Pierson, M. G. Rossmann, and R. J. Kuhn. The 3.8 Å resolution cryo-EM structure of Zika virus. *Science*, 352:467–470, 2016.

[597] M. Haider, P. Hartel, H. Müller, S. Uhlemann, and J. Zach. Information Transfer in a TEM Corrected for Spherical and Chromatic Aberration. *Microsc. Microanal.*, 16:393–408, 2010.

[598] S. Uhlemann, H. Müller, P. Hartel, J. Zach, and M Haider. Thermal magnetic field noise limits resolution in transmission electron microscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 111:046101, 2013.

[599] E. Schrödinger and L. Mazurczak. *Was ist Leben?: Die lebende Zelle mit den Augen des Physikers betrachtet*. Serie Piper. Piper, München, Germany, 1989.

[600] C. Wrigley. It's a bird! it's a plane! an aerial biopolitics for a multispecies sky. *Environ. Plan. E Nat. Space*, 1:712–734, 2018.

[601] E. J. Warrant. Unravelling the enigma of bird magnetoreception. *Nature*, 594:497, 2021.

[602] Xu et al. Magnetic sensitivity of cryptochrome 4 from a migratory songbird. *Nature*, 594:535–540, 2021.

[603] A. J. G Hey, T. Hey, and P. Walters. *The new quantum universe*. Cambridge University Press, 2003.

[604] P. A. Tipler. *Physik*. Spektrum, 3 edition, 1994.

[605] Ch. Schiller. *Motion Mountain*. Motion Mountain Physikverein, München, 2007.

[606] G. N. Lewis. The conservation of photons. *Nature*, 118:874–875, 1926.

[607] F. McMurry. *Chemistry*. Pearson, New York, 2003.

[608] W. H. Zurek. Decoherence and the transition from quantum to classical revisited. *Los Alamos Sci*, 27:2, 2002.

[609] A. H. Compton. A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements. *Phys. Rev.*, 21:483–502, 1923.

[610] A. H. Compton. The spectrum of scattered x-rays. *Phys. Rev.*, 22:409–413, 1923.

[611] A. H. Compton. The scattering of x rays as particles. *Am. J. Phys.*, 29:817–820, 1961.

[612] L.-C. Tu, J. Luo, and G. T. Gillies. The mass of the photon. *Rep. Prog. Phys.*, 68:77–130, 2004.

[613] G. Cocconi. Upper limits on the electric charge of the photon. *Am. J. Phys.*, 60:750–751, 1992.

[614] E. F. Nichols and G. F. Hull. The pressure due to radiation. *Proc. Am. Acad. Arts Sci.*, 38(20):559–599, 1903.

[615] E. F. Nichols and G. F. Hull. A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation. *Phys. Rev. (Series I)*, 13:307–320, 1901.

[616] P. Lebedew. Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes. *Ann. Phys.*, 311:433–458, 1901.

[617] R. D. Lorenz and J. N. Spitale. The Yarkovsky effect as a heat engine. *Icarus*, 170:229–233, 2004.

[618] R. Saunders. Clipper ships of space. *Astounding Science Fiction*, page 135, 1951.

[619] The Planetary Society. `https://www.planetary.org`. last visit: 2024-11-11.

[620] E. J. Davis. A history of single aerosol particle levitation. *Aerosol Sci. Technol.*, 26:212–254, 1997.

[621] A. Ashkin. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 24:156–159, 1970.

[622] C. Gonzalez-Ballestero, M. Aspelmeyer, L. Novotny, R. Quidant, and O. Romero-Isart. Levitodynamics: Levitation and control of microscopic objects in vacuum. *Science*, 374:168, 2021.

[623] C.S Adams, M Sigel, and J Mlynek. Atom optics. *Phys. Rep.*, 240:143–210, 1994.

[624] R. Fleischmann. *Einführung in die Physik*. Physik Verlag, Weinheim, 1973.

[625] W. G. Cross and N. F. Ramsey. The conservation of energy and momentum in compton scattering. *Phys. Rev.*, 80:929–936, 1950.

[626] W. Bothe and H. Geiger. Über das Wesen des Comptoneffekts; ein experimenteller Beitrag zur Theorie der Strahlung. *Z. Phys.*, 32:639–663, 1925.

[627] S. N. Ahmed. *Physics and Engineering of Radiation Detection*. Academic Press, San Diego, 2 edition, 2007.

[628] P. Cruvinel and F.A. Balogun. Compton scattering tomography for agricultural measurements. *Eng. Agríc. Jaboticabal*, 26, 2006.

[629] P Tothill. Methods of bone mineral measurement. *Phys. Med. Bio.*, 34:543–572, 1989.

[630] A. L. Huddleston and D. Bhaduri. Compton scatter densitometry in cancellous bone. *Phys. Med. Bio.*, 24:310, 1979.

[631] L. De Broglie. Waves and quanta. *Nature*, 112:540–540, 1923.

[632] T. L. Dimitrova and A. Weis. The wave-particle duality of light: A demonstration experiment. *Am. J. Phys.*, 76:137–142, 2008.

[633] C. Jönsson. Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten. *Z. Phys.*, 161:454–474, 1961.

[634] K. M. Carr. The 'ten most beautiful' experiments interpreted by novice students. *Phys. Teach.*, 43:533–537, 2005.

[635] F. J. Rodríguez-Fortuño. An optical double-slit experiment in time. *Nature Phys.*, 19(7):929–930, 2023.

[636] R. Tirole, S. Vezzoli, E. Galiffi, I. Robertson, D. Maurice, B. Tilmann, S. A. Maier, J. B. Pendry, and R. Sapienza. Double-slit time diffraction at optical frequencies. *Nature Phys.*, 19:999–1002, 2023.

[637] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, and H. Ezawa. Demonstration of single electron buildup of an interference pattern. *Am. J. Phys.*, 57:117–120, 1989.

[638] C. Jönsson. Electron diffraction at multiple slits. *Am. J. Phys.*, 42:4–11, 1974.

[639] P. G. Merli, G. F. Missiroli, and G. Pozzi. On the statistical aspect of electron interference phenomena. *Am. J. Phys.*, 44:306–307, 1976.

[640] G. I. Taylor. Interference fringes with feeble light. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 15:114–115, 1909.

[641] S. Frabboni, G. C. Gazzadi, and G. Pozzi. Young's double-slit interference experiment with electrons. *Am. J. Phys.*, 75:1053–1055, 2007.

[642] S. Frabboni, G. C. Gazzadi, and G. Pozzi. Nanofabrication and the realization of Feynman's two-slit experiment. *Appl. Phys. Lett.*, 93:073108, 2008.

[643] R. Bach, D. Pope, S.-H. Liou, and H. Batelaan. Controlled double-slit electron diffraction. *New J. Phys.*, 15:033018, 2013.

[644] G. Möllenstedt and H. Düker. Beobachtungen und Messungen an Biprisma-Interferenzen mit Elektronenwellen. *Z. Phys.*, 145:377–397, 1956.

[645] G. S. Blanpied, W. R. Coker, R. P. Liljestrand, G. W. Hoffmann, L. Ray, D. Madland, C. L. Morris, J. C. Pratt, J. E. Spencer, H. A. Thiessen, T. Kozlowski, N. M. Hintz, G. S. Kyle, M. A. Oothoudt, T. S. Bauer, G. Igo, R. J. Ridge, C. A. Whitten, P. M. Lang, H. Nann, and K. K. Seth. Proton elastic and inelastic scattering at 0.8 gev from ^{12,13}c and ^{208}pb. *Phys. Rev. C*, 18:1436–1446, 1978.

[646] Ph. Grangier, A. Aspect, and J. Vigue. Quantum interference effect for two atoms radiating a single photon. *Phys. Rev. Lett.*, 54:418–421, 1985.

[647] I. Hirano and N. Hirai. Holography in the single-photon region. *Appl. Opt.*, 25:1741–1742, 1986.

[648] S. E. Canton, E. Plésiat, J. D. Bozek, B. S. Rude, P. Decleva, and F. Martín. Direct observation of Young's double-slit interferences in vibrationally resolved photoionization of diatomic molecules. *Proc. Nat. Acad.. Sci.*, 108:7302–7306, 2011.

[649] E. M. Rasel, M. K. Oberthaler, H. Batelaan, J. Schmiedmayer, and A. Zeilinger. Atom wave interferometry with diffraction gratings of light. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2633–2637, 1995.

[650] C. Davisson and L. H. Germer. Diffraction of electrons by a crystal of nickel. *Phys. Rev.*, 30:705–740, 1927.

[651] G. P. Thomson and J. J. Thomson. Experiments on the diffraction of cathode rays. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci. A*, 117:600–609, 1928.

[652] G. P. Thomson and A. Reid. Diffraction of cathode rays by a thin film. *Nature*, 119:890–890, 1927.

[653] G. P. Thomson. Electron diffraction as a method of research. *Nature*, 135:492–495, 1935.

[654] P. C. Tartakovskii. Wave views on the nature of matter and experience. *Usp. Fiz. Nauk*, 8:338–341, 1928.

[655] R. K. Gehrenbeck. Electron diffraction: fifty years ago. *Phys. Today*, 31:34–41, 1978.

[656] E. Riedel and Ch. Janiak. Röntgenbeugung. In *Anorganik Online*. De Gruyter, Berlin, Boston, 2016.

[657] C.J. Davisson. Are electrons waves? *J. Frank. Inst.*, 205:597–623, 1928.

[658] C. Davisson and C. H. Kunsman. The scattering of electrons by nickel. *Science*, 54:522–524, 1921.

[659] G. Ertl and J. Küppers. *Low energy electrons and surface chemistry*. Vch Weinheim, 1985.

[660] U. Gradmann and G. Waller. Periodic lattice distortions in epitaxial films of Fe(110) on W(110). *Surf. Sci.*, 116:539–548, 1982.

[661] L. B. McCusker. Electron diffraction and the hydrogen atom. *Science*, 355:136, 2017.

[662] I. Estermann, R. Frisch, and O. Stern. Monochromasierung der deBroglie-Wellen von Molekularstrahlen. *Z. Phys.*, 73:348–365, 1932.

[663] Th. H. Johnson. Diffraction of hydrogen atoms. *Phys. Rev.*, 37:847–861, 1931.

[664] H. Raether. *Elektroneninterferenzen*, pages 443–551. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1957.

[665] A. Giambattista, B.M.C. Richardson, and R.C. Richardson. *College Physics Vol. 2*. McGraw-Hill, Boston, 2007.

[666] J. Heisenberg, R. Hofstadter, J. S. McCarthy, I. Sick, B. C. Clark, R. Herman, and D. G. Ravenhall. Elastic Electron Scattering by Pb-208 And New Information About the Nuclear Charge Distribution. *Phys. Rev. Lett.*, 23:1402–1405, 1969.

[667] H. Palevsky, J. L. Friedes, R. J. Sutter, G. W. Bennett, G. J. Igo, W. D. Simpson, G. C. Phillips, D. M. Corley, N. S. Wall, R. L. Stearns, and B. Gottschalk. Elastic scattering of 1-bev protons from hydrogen, helium, carbon, and oxygen nuclei. *Phys. Rev. Lett.*, 18:1200–1204, 1967.

[668] C. G. Shull and E. O. Wollan. X-ray, electron, and neutron diffraction. *Science*, 108:69–75, 1948.

[669] J Saudinos and C Wilkin. Proton-nucleus scattering at medium energies. *Annu. Rev. Nucl. Sci.*, 24:341–378, 1974.

[670] A. Zeilinger, R. Gähler, C. G. Shull, W. Treimer, and W. Mampe. Single- and double-slit diffraction of neutrons. *Rev. Mod. Phys.*, 60:1067–1073, 1988.

[671] R. Gähler and A. Zeilinger. Waveoptical experiments with very cold neutrons. *Am. J. Phys.*, 59:316–324, 1991.

[672] I. Estermann and O. Stern. Beugung von Molekularstrahlen. *Z. Phys.*, 61:95–125, 1930.

[673] J. A. Leavitt and F. A. Bills. Single-slit diffraction pattern of a thermal atomic potassium beam. *Am. J. Phys.*, 37:905–912, 1969.

[674] M. S. Chapman, Ch. R. Ekstrom, T. D. Hammond, R. A. Rubenstein, J. Schmiedmayer, S. Wehinger, and D. E. Pritchard. Optics and Interferometry with Na_2 Molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4783–4786, 1995.

[675] F. Luo, C. F. Giese, and W. R. Gentry. Direct measurement of the size of the helium dimer. *J. Chem. Phys.*, 104:1151–1154, 1996.

[676] O. Nairz, M. Arndt, and A. Zeilinger. Quantum interference experiments with large molecules. *Am. J. Phys.*, 71:319–325, 2003.

[677] M. Arndt, O Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw, and A. Zeilinger. Wave-particle duality of C_{60} molecules. *Nature*, 401:680–682, 1999.

[678] L. Hackermüller, K. Hornberger, B. Brezger, A. Zeilinger, and M. Arndt. Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation. *Nature*, 427:711–714, 2004.

[679] Ch. Brand, S. Troyer, Ch. Knobloch, O. Cheshnovsky, and M. Arndt. Single-, double-, and triple-slit diffraction of molecular matter waves. *Am. J. Phys.*, 89:1132–1138, 2021.

[680] A. Shayeghi, P. Rieser, G. Richter, U. Sezer, J. H. Rodewald, P. Geyer, T. J. Martinez, and M. Arndt. Matter-wave interference of a native polypeptide. *Nature Commun.*, 11:1447, 2020.

[681] C. Mereschkowsky. Theorie der zwei Plasmaarten als Grundlage der Symbiogenesis, einer neuen Lehre von der Entstehung der Organismen. *Biol. Zent.bl.*, 30:278–288, 1910.

[682] M. Knoll and E. Ruska. Das Elektronenmikroskop. *Z. Phys.*, 78:318–339, 1932.

[683] O. Scherzer. Das theoretisch erreichbare Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops. *Z. Phys.*, 114:427–434, 1939.

[684] D. Clery. Golden Eye. *Science*, 378:6625, 2022.

[685] Photonics Media. Photonics spectra. `https://www.photonics.com`. last visit: 2024-11-11.

[686] Universität Kiel. Zentrale mikroskopie. `https://applux05.rz.uni-kiel.de/zm/galerie/?/categories/rem/content/`. last visit: 2024-11-11.

[687] T. Yang, H. Chen, Z. Jia, Z. Deng, L. Chen, E. M. Peterman, J. C. Weaver, and L. Li. A damage-tolerant, dual-scale, single-crystalline microlattice in the knobby starfish, ¡i¿protoreaster nodosus¡/i¿. *Science*, 375:647–652, 2022.

[688] T. Yuasa and O. Takahashi. Light and electron microscopic observations of the reproductive swarmer cells of nassellarian and spumellarian polycystines (Radiolaria). *Eur. J. Protistol.*, 54:19–32, 2016.

[689] M. von Ardenne. Das Elektronen-Rastermikroskop. *Z. Phys.*, 109:553–572, 1938.

[690] F. Gentile, M. Moretti, T. Limongi, A. Falqui, G. Bertoni, A. Scarpellini, S. Santoriello, L. Maragliano, R. Proietti Zaccaria, and E. di Fabrizio. Direct Imaging of DNA Fibers: The Visage of Double Helix. *Nano Lett.*, 12:6453–6458, 2012.

[691] Z. Chen, Y.Jiang, Y.-T. Shao, M. E. Holtz, M. Odstr?il, M. Guizar-Sicairos, I. Hanke, S. Ganschow, D. G. Schlom, and D. A. Muller. Electron ptychography achieves atomic-resolution limits set by lattice vibrations. *Science*, 372:826–831, 2021.

[692] P. R. Bergethon. *The Physical Basis of Biochemistry*. Springer, New York, 2 edition, 2010.

[693] W. Heisenberg, A. Zeilinger, and H. Fritzsch. *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*. Hirzel Verlag, 2010.

[694] M. Planck. Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Ann. Phys.*, 309:553–563, 1901.

[695] G. Aldica, F. Vasiliu, I. I. Geru, and B. M. Puscasu. The Effect of Electron Beam Irradiation on Electron Diffraction Patterns of Bi-Sr-Ca-Cu-O High- Tc Superconductors. *J. Supercond*, 13:623–631, 2000.

[696] M. O. Steinhauser. *Quantenmechanik für Naturwissenschaftler*. Springer Spektrum, Berlin, 2017.

[697] E. Goulielmakis, M. Schultze, M. Hofstetter, V. S. Yakovlev, J. Gagnon, M. Uiberacker, A. L. Aquila, E. M. Gullikson, D. T. Attwood, R. Kienberger, F. Krausz, and U. Kleineberg. Single-cycle nonlinear optics. *Science*, 320:1614–1617, 2008.

[698] S. Dwyer. Squeezing quantum noise. *Phys. Today*, 67:72–73, 2014.

[699] A. Hobson. Teaching quantum uncertainty. *Phys. Teach.*, 49:434–437, 2011.

[700] R.P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, and E. M. Hafner. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 2. Addison-Wesley, Boston, MA, 1964.

[701] P. Atkins and J. dePaula. *Physical Chemistry for the Life Sciences*. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[702] W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z. Phys.*, 43:172–198, 1927.

[703] Aasi et al. Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light. *Nature Phot.*, 7:613–619, 2013.

[704] P. Pesic. Einstein and baseball. *Phys. Teach.*, 37:234–235, 1999.

[705] Buikema et al. Sensitivity and performance of the advanced ligo detectors in the third observing run. *Phys. Rev. D*, 102:062003, 2020.

[706] Pedro L. Muiño. Introducing the uncertainty principle using diffraction of light waves. *J. Chem. Edu.*, 77:1025, 2000.

[707] P. Ehrenfest. Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik. *Z. Phys.*, 45:455–457, 1927.

[708] O. Nairz, M. Arndt, and A. Zeilinger. Experimental verification of the Heisenberg uncertainty principle for fullerene molecules. *Phys. Rev. A*, 65:032109, 2002.

[709] S. Schreppler, N. Spethmann, N. Brahms, T. Botter, M. Barrios, and D. M. Stamper-Kurn. Optically measuring force near the standard quantum limit. *Science*, 344:1486–1489, 2014.

[710] J. Mehra and H. Rechenberg. *The quantum theory of Planck, Einstein, Bohr, and Sommerfeld: Its foundation and the rise of its difficulties, 1900-1925*, volume 1. Springer, 1982.

[711] M. Mansfield and C. O´Sullivan. *Understanding Physics*. Wiley & Sons, 1 edition, 1998.

[712] J. J. Aubert, U. Becker, P. J. Biggs, J. Burger, M. Chen, G. Everhart, P. Goldhagen, J. Leong, T. McCorriston, T. G. Rhoades, M. Rohde, Samuel C. C. Ting, Sau Lan Wu, and Y. Y. Lee. Experimental Observation of a Heavy Particle *J*. *Phys. Rev. Lett.*, 33:1404–1406, 1974.

[713] J. E. Augustin, A. M. Boyarski, M. Breidenbach, F. Bulos, J. T. Dakin, G. J. Feldman, G. E. Fischer, D. Fryberger, G. Hanson, B. Jean-Marie, R. R. Larsen, V. Lüth, H. L. Lynch, D. Lyon, C. C. Morehouse, J. M. Paterson, M. L. Perl, B. Richter, P. Rapidis, R. F. Schwitters, W. M. Tanenbaum, F. Vannucci, G. S. Abrams, D. Briggs, W. Chinowsky, C. E. Friedberg, G. Goldhaber, R. J. Hollebeek, J. A. Kadyk, B. Lulu, F. Pierre, G. H. Trilling, J. S. Whitaker, J. Wiss, and J. E. Zipse. Discovery of a narrow resonance in e^+e^- annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, 33:1406–1408, 1974.

[714] B. Richter. From the psi to charm: The experiments of 1975 and 1976. *Rev. Mod. Phys.*, 49:251–266, 1977.

[715] Sirunyan et al. Measurements of production cross sections of the Higgs boson in the four-lepton final state in proton–proton collisions at $\sqrt{s}$=13 TeV. *Eur. Phys. J. C*, 81:488, 2021.

[716] G. P. Salam, L.-T. Wang, and G. Zanderighi. The Higgs boson turns ten. *Nature*, 607:41–47, 2022.

[717] T. W. Hänsch, S. A. Lee, R. Wallenstein, and C. Wieman. Doppler-free two-photon spectroscopy of hydrogen $1s - 2s$. *Phys. Rev. Lett.*, 34:307–309, 1975.

[718] S. K. Lamoreaux. Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5–8, 1997.

[719] H. B. G. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. In *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, volume 51, page 793, 1948.

[720] A. Larraza. A demonstration apparatus for an acoustic analog to the Casimir effect. *Am. J. Phys.*, 67:1028–1030, 1999.

[721] R. C. Tolman. On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity. *Phys. Rev.*, 35:904–924, 1930.

[722] Avino et al. Progress in a vacuum weight search experiment. *Physics*, 2:1–13, 2020.

[723] W. E. Lamb and R. C. Retherford. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Phys. Rev.*, 72:241–243, 1947.

[724] W. E. Lamb. Fine structure of the hydrogen atom. *Science*, 123:439–442, 1956.

[725] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell. Processes involving charged mesons. *Nature*, 159:694–697, 1947.

[726] R. Brown, U. Camerini, P. H. Fowler, H. Muirhead, C. F. Powell., and D. M. Ritson. Observations with electron-sensitive plates exposed to cosmic radiation. *Nature*, 163:82–87, 1949.

[727] O. Chamberlain, W. W. Chupp, G. Goldhaber, E. Segrè, C. Wiegand, E. Amaldi, G. Baroni, C. Castagnoli, C. Franzinetti, and A. Manfredini. On the observation of an antiproton star in emulsion exposed at the bevatron. *Il Nuovo Cimento*, 3:447–467, 1956.

[728] K. G. Jansky. Radio waves from outside the solar system. *Nature*, 132:66–66, 1933.

[729] R. H. Brown, J. Davis, and L. R. Allen. The Stellar Interferometer at Narrabri Observatory-I: A Description of The Instrument and the Observational Procedure. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 137:375–392, 12 1967.

[730] Y. Tanaka, K. Nandra, A. C. Fabian, H. Inoue, C. Otani, T. Dotani, K. Hayashida, K. Iwasawa, T. Kii, H. Kunieda, F. Makino, and M. Matsuoka. Gravitationally redshifted emission implying an accretion disk and massive black hole in the active galaxy MCG-6-30-15. *Nature*, 375:659–661, 1995.

[731] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, 1939.

[732] J. Michell. VII. On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose. By the Rev. John Michell, B.D. F.R.S. In a letter to Henry Cavendish, Esq. F.R.S. and A.S. *Phil. Trans. R. Soc.*, 74:35–57, 1784.

[733] K. S. Thorne. The search for black holes. *Sci. Am.*, 231:32, 1974.

[734] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott. Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center. *Astrophys. J.*, 692:1075–1109, 2009.

[735] J. D. Bekenstein. Black?hole thermodynamics. *Phys. Today*, 33:24–31, 1980.

[736] S. Hebden. Große Physik ganz klein. *Spektr. Wiss.*, 12:50, 2014.

[737] W. G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, 14:870–892, 1976.

[738] Akiyama et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *Astrophys. J. Lett.*, 930:L12, 2022.

[739] C. Scaletti, M. M. Rickard, K. J. Hebel, T. V. Pogorelov, S. A. Taylor, and M. Gruebele. Sonification-enhanced lattice model animations for teaching the protein folding reaction. *J. Chem. Edu.*, 99:1220–1230, 2022.

[740] L. Gionfrida and A. Roginska. A novel sonification approach to support the diagnosis of alzheimer's dementia. *Front. Neurol.*, 8, 2017.

[741] N. Sawe, Ch. Chafe, and J. Treviño. Using data sonification to overcome science literacy, numeracy, and visualization barriers in science communication. *Front. Commun.*, 5, 2020.

[742] A. Zanella, C. M. Harrison, S. Lenzi, J. Cooke, P. Damsma, and S. W. Fleming. Sonification and sound design for astronomy research, education and public engagement. *Nature Astron.*, 6:1241–1248, 2022.

[743] A. Wagner, S. Altherr, B. Eckert, and H. J. Jodl. Zwei Lehrvideos zum Absorptions- und Emissionsspektrum von Natrium. Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2006.

[744] PASCO. Conatex-Didactic Lehrmittel Gmbh.

[745] D. Jacquemin, J. Zúñiga, A. Requena, and J. P. Céron-Carrasco. Assessing the Importance of Proton Transfer Reactions in DNA. *Acc. Chem. Res.*, 47:2467–2474, 2014.

[746] F. Bloch. Heisenberg and the early days of quantum mechanics. *Phys. Today*, 29:23–27, 1976.

[747] G. Baym. *Lectures on quantum mechanics*. W.A. Benjamin, Massachusetss, 1974.

[748] A. Messiah. *Quantenmechanik 1*. de Gruyter, 2 edition, 1991.

[749] S. Weinberg. *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 2015.

[750] M. Born. Physikalische Wirklichkeit. *Phys. Bl.*, 10:49–61, 1954.

[751] K.-H. Biller. *Verständliche Atomphysik*. Verlag Neues Leben, Berlin, 1954.

[752] J. Kofler. Unschärfen in der Unschärferelation. *Phys. Zeit*, 45:186–190, 2014.

[753] R. Cummings. The time professor. Argosy All-Story Weekly, 1921.

[754] C. D. Porter and A. F. Heckler. Graduate student misunderstandings of wave functions in an asymmetric well. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.*, 15:010139, 2019.

[755] S. Ratcliffe. *Enrico Fermi*. Oxford University Press, Oxford, 2016.

[756] H. Kroemer. A proposed class of hetero-junction injection lasers. *Proc. IEEE*, 51:1782–1783, 1963.

[757] S. Nordholm and G. B. Bacskay. The Role of Quantum Dynamics in Covalent Bonding - A Comparison of the Thomas-Fermi and Hückel Models. In Ion I. Cotaescu, editor, *Advances in Quantum Theory*, chapter 5. IntechOpen, Rijeka, 2012.

[758] J. Joyce. *Finnegans Wake*. Penguin Books, New York, 1999.

[759] J. Kristian and M. Blouke. Charge-coupled devices in astronomy. *Sci. Am.*, 247(4):66–75, 1982.

[760] J. Autschbach. Why the particle-in-a-box model works well for cyanine dyes but not for conjugated polyenes. *J. Chem. Edu.*, 84:1840, 2007.

[761] G. Baars. Phenylpolyenale. *PdN-ChiS.*, 8/59:13, 2010.

[762] T. Wimpfheimer. A Particle in a Box Laboratory Experiment Using Everyday Compounds. *J. Lab. Chem. Educ.*, 3:19, 2015.

[763] N. Treitz. Von der Unbestimmtheitsrelation zur Farbe der Tomate. *Spektr. Wiss.*, 11:30, 2010.

[764] B. D. Anderson. Alternative compounds for the particle in a box experiment. *J. Chem. Educ.*, 74:985, 1997.

[765] M Henry, H. G. Roth, and B. D. Anderson. The Particle in a Box Redux: Improved Experimental Conditions for the Laser Synthesis of Linear Polyynes. *J. Chem. Educ.*, 89:960–961, 2012.

[766] ExcitonScience. Towards a sustainable energy future. `https://excitonscience.com`. last visit: 2024-05-22.

[767] Z. Hens. Economical routes to colloidal nanocrystals. *Science*, 348:1211–1212, 2015.

[768] L. Fischer and V. Tang. Quantenkristalle aus der Zwischenwelt. *Spektr. Wiss.*, 12:31, 2023.

[769] L. Brus. Electronic wave functions in semiconductor clusters: experiment and theory. *J. Phys. Chem.*, 90:2555–2560, 1986.

[770] M. Endres, M. Cheneau, T. Fukuhara, C. Weitenberg, P. Schauß, C. Gross, L. Mazza, M. C. Bañuls, L. Pollet, I. Bloch, and S. Kuhr. Observation of Correlated Particle-Hole Pairs and String Order in Low-Dimensional Mott Insulators. *Science*, 334:200–203, 2011.

[771] M. Jammer. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. McGraw Hill, New York, 1966.

[772] C. M. Bender, D. W. Hook, P. N. Meisinger, and Q.-H. Wang. Complex correspondence principle. *Phys. Rev. Lett.*, 104:061601, 2010.

[773] I. Radulescu, M.R. Calin, I. Ion, A.C. Ion, L. Capra, and C.A. Simon. Gross alpha, gross beta and gamma activities in bottled natural mineral water from Romania. *Rom. Rev. Phys.*, 69:710, 2017.

[774] Whittle et al. Approaching the motional ground state of a 10-kg object. *Science*, 372:1333–1336, 2021.

[775] M. Singh, A. Singh, and S. Kumar. Visualizing the probability density function of a classical harmonic oscillator. *The Physics Teacher*, 61:588–590, 2023.

[776] J. R. Friedman, V. Patel, W. Chen, S. K. Tolpygo, and J. E. Lukens. Quantum superposition of distinct macroscopic states. *Nature*, 406:43–46, 2000.

[777] E. Merzbacher. The early history of quantum tunneling. *Phys. Today*, 55:44–49, 2002.

[778] C. Schaefer and G. Gross. Untersuchungen über die Totalreflexion. *Ann. Phys.*, 337:648–672, 1910.

[779] Ph. W. Baumeister. Optical tunneling and its applications to optical filters. *Appl. Opt.*, 6:897–905, 1967.

[780] U. Dürig, D. W. Pohl, and F. Rohner. Near-field optical-scanning microscopy. *J. Appl. Phys.*, 59:3318–3327, 1986.

[781] Wiederrecht, G. P. Near-field optical imaging of noble metal nanoparticles. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, 28:3–18, 2004.

[782] R. Eisberg, R.M. Eisberg, R. Resnick, D.O. Caldwell, E. Derringh, and J.R. Christman. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, volume 1. Wiley & Sons, New York, 2 edition, 1985.

[783] S. G. Kukolich. Demonstration of the Ramsauer-Townsend Effect in a Xenon Thyratron. *Am. J. Phys.*, 36:701–703, 1968.

[784] C. Ramsauer. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen. I. Fortsetzung. *Ann. Phys.*, 371:546–558, 1922.

[785] D. Krause and N. Jones. How can a quantum particle be found in a classically forbidden region? *Phys. Teach.*, 63:16–19, 2025.

[786] F. Trixler. Quantum tunnelling to the origin and evolution of life. *Curr. Org. Chem.*, 17:1758–1770, 2013.

[787] S. Garrett. Bound state energies of a particle in a finite square well: A simple approximation. *Am. J. Phys.*, 47:195–195, 1979.

[788] G. Gamow. Zur Quantentheorie des Atomkernes. *Z. Phys.*, 51:204–212, 1928.

[789] R. W. Gurney and E. U. Condon. Wave mechanics and radioactive disintegration. *Nature*, 122:439–439, 1928.

[790] H. Geiger and J.M. Nuttall. LVII. The ranges of the α particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 22:613–621, 1911.

[791] S. Brünken, O. Sipilä, E. T. Chambers, J. Harju, P. Caselli, O. Asvany, C. E. Honingh, T. Kamiński, K. M. Menten, J. Stutzki, and S. Schlemmer. H_2D^+ observations give an age of at least one million years for a cloud core forming Sun-like stars. *Nature*, 516:219–221, 2014.

[792] Y. Cha, Ch. J. Murray, and J. P. Klinman. Hydrogen tunneling in enzyme reactions. *Science*, 243:1325–1330, 1989.

[793] Th. P. M. Goumans and J. Kästner. Hydrogen-Atom Tunneling Could Contribute to H_2 Formation in Space. *Angew. Chem. Int. Ed.*, 49:7350–7352, 2010.

[794] K. Hiraoka, T. Sato, S. Sato, N. Sogoshi, T. Yokoyama, H. Takashima, and S. Kitagawa. Formation of Formaldehyde by the Tunneling Reaction of H with Solid CO at 10 K Revisited. *Astrophys. J.*, 577:265–270, 2002.

[795] S. K. Blair, L. Magnani, J. Brand, and J. G. A. Wouterloot. Formaldehyde in the far outer galaxy: Constraining the outer boundary of the galactic habitable zone. *Astrobiology*, 8:59–73, 2008.

[796] Spectrum from Embedded Star in Herbig-Haro 46/47. `https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA04940`, 2003. NASA Photojournal last visit: 2024-05-22.

[797] Fowler R. H. and Nordheim L. Electron emission in intense electric fields. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci. A*, 119:173–181, 1928.

[798] P. B. Corkum. Plasma perspective on strong field multiphoton ionization. *Phys. Rev. Lett.*, 71:1994–1997, 1993.

[799] R.N. Hall. Tunnel diodes. *IEEE Trans Electron Devices*, 7:1–9, 1960.

[800] S. M. Sze, Y. Li, and K. K Ng. *Physics of semiconductor devices*. Wiley & Sons, New York, 4 edition, 2021.

[801] L. Esaki. New phenomenon in narrow germanium *p-n* junctions. *Phys. Rev.*, 109:603–604, 1958.

[802] J. Lincoln. Quantum tunneling experiments with tunnel diodes. *Phys. Teach.*, 59:76–77, 2021.

[803] S.R. Hofstein and G. Warfield. The insulated gate tunnel junction triode. *IEEE Trans. Electron Devices*, 12:66–76, 1965.

[804] J. Appenzeller, Y.-M. Lin, J. Knoch, and Ph. Avouris. Band-to-band tunneling in carbon nanotube field-effect transistors. *Phys. Rev. Lett.*, 93:196805, 2004.

[805] A. C. Seabaugh and Q. Zhang. Low-Voltage Tunnel Transistors for Beyond CMOS Logic. *Proc. IEEE*, 98:2095–2110, 2010.

[806] E. R. Brown, J. R. Söderström, C. D. Parker, L. J. Mahoney, K. M. Molvar, and T. C. McGill. Oscillations up to 712 GHz in InAs/AlSb resonant-tunneling diodes. *Appl. Phys. Lett.*, 58:2291–2293, 1991.

[807] M. Reddy, S.C. Martin, A.C. Molnar, R.E. Muller, R.P. Smith, P.H. Siegel, M.J. Mondry, M.J.W. Rodwell, H. Kroemer, and S.J. Allen. Monolithic Schottky-collector resonant tunnel diode oscillator arrays to 650 GHz. *IEEE Electron Device Lett.*, 18(5), 1997.

[808] M. Feiginov, C. Sydlo, O. Cojocari, and P. Meissner. Resonant-tunnelling-diode oscillators operating at frequencies above 1.1 THz. *Appl. Phys. Lett.*, 99:233506, 2011.

[809] S. Suzuki, M. Shiraishi, H. Shibayama, and M. Asada. High-power operation of terahertz oscillators with resonant tunneling diodes using impedance-matched antennas and array configuration. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, 19:8500108–8500108, 2013.

[810] T. Maekawa, H. Kanaya, S. Suzuki, and M. Asada. Oscillation up to 1.92 THz in resonant tunneling diode by reduced conduction loss. *Appl. Phys. Express*, 9:024101, 2016.

[811] J. R. Friedman, M. P. Sarachik, J. Tejada, and R. Ziolo. Macroscopic measurement of resonant magnetization tunneling in high-spin molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 76:3830–3833, 1996.

[812] L. Thomas, F. Lionti, R. Ballou, D. Gatteschi, R. Sessoli, and B. Barbara. Macroscopic quantum tunnelling of magnetization in a single crystal of nanomagnets. *Nature*, 383:145–147, 1996.

[813] H. Lyons. The atomic clock: A universal standard of frequency and time. *Am. Scholar*, 19:159, 1950.

[814] S. Knappe, V. Shah, P. D. D. Schwindt, L. Hollberg, J. Kitching, L.-A. Liew, and J. Moreland. A microfabricated atomic clock. *Appl. Phys. Lett.*, 85:1460–1462, 2004.

[815] G. G. Hammes and S. Hammes-Schiffer. *Physical Chemistry of the Biological Sciences*. Wiley & Sons, Hoboken, 2 edition, 2015.

[816] O. K. Rice. A contribution to the quantum mechanical theory of radioactivity and the dissociation by rotation of diatomic molecules. *Phys. Rev.*, 35:1538–1550, 1930.

[817] P. R. Schreiner, H. P. Reisenauer, D. Ley, D. Gerbig, C.-H. Wu, and W. D. Allen. Methylhydroxycarbene: Tunneling Control of a Chemical Reaction. *Science*, 332:1300–1303, 2011.

[818] T. Constantin, B Górski, M. J. Tilby, S. Chelli, F. Juliá, J. Llaveria, K. J. Gillen, H. Zipse, S. Lakhdar, and D. Leonori. Halogen-atom and group transfer reactivity enabled by hydrogen tunneling. *Science*, 377:1323–1328, 2022.

[819] C. Marletto, D. M. Coles, T. Farrow, and V. Vedral. Entanglement between living bacteria and quantized light witnessed by Rabi splitting. *J. Phys. Commun.*, 2:101001, 2018.

[820] P. Jordan. Die Quantenmechanik und die Grundprobleme der Biologie und Psychologie. *Sci. Nat.*, 20:815–821, 1932.

[821] A. Marais, B. Adams, A. K. Ringsmuth, M. Ferretti, J. M. Gruber, R. Hendrikx, M. Schuld, S. L. Smith, I. Sinayskiy, T. P. J. Krüger, F. Petruccione, and R. van Grondelle. The future of quantum biology. *J. R. Soc. Interface*, 15:20180640, 2018.

[822] P.-O. Löwdin. Proton Tunneling in DNA and its Biological Implications. *Rev. Mod. Phys.*, 35:724–732, 1963.

[823] L. Slocombe, M. Sacchi, and J. Al-Khalili. An open quantum systems approach to proton tunnelling in DNA. *Commun. Phys.*, 5:109, 2022.

[824] Ch. C. Moser, J. M. Keske, K. Warncke, R. S. Farid, and P. L. Dutton. Nature of biological electron transfer. *Nature*, 355:796–802, 1992.

[825] J. C. Brookes, F. Hartoutsiou, A. P. Horsfield, and A. M. Stoneham. Could humans recognize odor by phonon assisted tunneling? *Phys. Rev. Lett.*, 98:038101, 2007.

[826] J. Clarke. SQUIDs. *Sci. Am.*, 271:46–53, 1994.

[827] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1:251–253, 1962.

[828] I. Giaever. Energy gap in superconductors measured by electron tunneling. *Phys. Rev. Lett.*, 5:147–148, 1960.

[829] I. Giaever. Electron tunneling between two superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 5:464–466, 1960.

[830] P. W. Anderson and J. M. Rowell. Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect. *Phys. Rev. Lett.*, 10:230–232, 1963.

[831] J. E. Zimmerman, Paul Thiene, and J. T. Harding. Design and operation of stable rf?biased superconducting point?contact quantum devices, and a note on the properties of perfectly clean metal contacts. *J. Appl. Phys.*, 41:1572–1580, 2003.

[832] D. S. Barth, W. Sutherling, J. Engel, and J. Beatty. Neuromagnetic localization of epileptiform spike activity in the human brain. *Science*, 218:891–894, 1982.

[833] J. Clarke. Geophysical applications of SQUIDS. *IEEE Trans. Magn.*, 19:288–294, 1983.

[834] T. Sleator, E. L. Hahn, C. Hilbert, and J. Clarke. Nuclear-spin noise. *Phys. Rev. Lett.*, 55:1742–1745, 1985.

[835] J. S. Kargel. Enceladus: Cosmic Gymnast, Volatile Miniworld. *Science*, 311:1389–1391, 2006.

[836] F. Postberg, J. Schmidt, J. Hillier, S. Kempf, and R. Srama. A salt-water reservoir as the source of a compositionally stratified plume on Enceladus. *Nature*, 474:620–622, 2011.

[837] G. Schubert, J. D. Anderson, B. J. Travis, and J. Palguta. Enceladus: Present internal structure and differentiation by early and long-term radiogenic heating. *Icarus*, 188:345–355, 2007.

[838] S. Hawking. The Quantum Mechanics of Black Holes. *Sci. Am.*, 236:34, 1997.

[839] E. Siegel. The sun only shines because of quantum physics. `https://www.forbes.com/sites/startswithabang/2020/07/15/the-sun-only-shines-because-of-quantum-physics/`, 2020. last visit: 2025-05-15.

[840] G. Lemaitre. The beginning of the world from the point of view of quantum theory. *Nature*, 127:706–706, 1931.

[841] A. H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, 1981.

[842] A. Albrecht and P. J. Steinhardt. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220–1223, 1982.

[843] A.D. Linde. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Phys. Lett. B*, 108:389–393, 1982.

[844] R. P. Feynman. There's Plenty of Room at the Bottom: An Invitation to Enter a New Field of Physics. Presentation to American Physical Society on December 29, 1959.

[845] J. A. O'Keefe. Resolving power of visible light. *J. Opt. Soc. Am.*, 46:359–359, 1956.

[846] E. A. Ash and G. Nicholis. Super-resolution aperture scanning microscope. *Nature*, 237:510–512, 1972.

[847] G. Binnig and H. Rohrer. The scanning tunneling microscope. *Sci. Am.*, 253:50–58, 1985.

[848] G. Binnig and H. Rohrer. Scanning tunneling microscopy - from birth to adolescence. *Rev. Mod. Phys.*, 59:615–625, 1987.

[849] D. M. Eigler and E. K. Schweizer. Positioning single atoms with a scanning tunnelling microscope. *Nature*, 344:524–526, 1990.

[850] F. J. Giessibl. Advances in atomic force microscopy. *Rev. Mod. Phys.*, 75:949–983, 2003.

[851] U. Hartmann. Magnetic force spectroscopy. *Ann. Rev. Mat. Res.*, 29:53–87, 1999.

[852] C. C. Williams and H. K. Wickramasinghe. Scanning thermal profiler. *Appl. Phys. Lett.*, 49:1587–1589, 1986.

[853] D. W. Pohl, W. Denk, and M. Lanz. Optical stethoscopy: Image recording with resolution $\lambda/20$. *Applied Physics Letters*, 44:651–653, 1984.

[854] L. Novotny. *The history of near-field optics*, volume 50, chapter 5, pages 137–184. Elsevier, Amsterdam, 2007.

[855] E. Bloch. *Die Lehren von der Materie*. Suhrkamp, Berlin, 1978.

[856] Ch. R. Ast. Tunneln am Quantenlimit. *Phys. Zeit*, 48:185–189, 2017.

[857] P. K. Hansma and J. Tersoff. Scanning tunneling microscopy. *J. Appl. Phys.*, 61:R1–R24, 1987.

[858] Y. J. Dappe, M. Andersen, R. Balog, L. Hornekær, and X. Bouju. Adsorption and stm imaging of polycyclic aromatic hydrocarbons on graphene. *Phys. Rev. B*, 91:045427, 2015.

[859] B. C. Stipe, M. A. Rezaei, and W. Ho. Single-molecule vibrational spectroscopy and microscopy. *Science*, 280:1732–1735, 1998.

[860] B. Schuler, S. Fatayer, F. Mohn, N. Moll, N. Pavliček, G. Meyer, D. Peña, and L. Gross. Reversible Bergman cyclization by atomic manipulation. *Nature Chem.*, 8:220–224, 2016.

[861] H. C. Manoharan, C. P. Lutz, and D. M. Eigler. Quantum mirages formed by coherent projection of electronic structure. *Nature*, 403:512–515, 2000.

[862] M. F. Crommie, C. P. Lutz, and D. M. Eigler. Confinement of electrons to quantum corrals on a metal surface. *Science*, 262:218–220, 1993.

[863] F. E. Kalff, M. P. Rebergen, E. Fahrenfort, J. Girovsky, R. Toskovic, J. L. Lado, J. Fernández-Rossier, and A. F. Otte. A kilobyte rewritable atomic memory. *Nature Nanotechn.*, 11:926–929, 2016.

[864] J. F. Clauser. Experimental distinction between the quantum and classical field-theoretic predictions for the photoelectric effect. *Phys. Rev. D*, 9:853–860, 1974.

[865] P Grangier, G Roger, and A Aspect. Experimental evidence for a photon anti-correlation effect on a beam splitter: A new light on single-photon interferences. *Europhys. Lett.*, 1:173–179, 1986.

[866] A. Zeilinger, G. Weihs, Th. Jennewein, and M. Aspelmeyer. Happy centenary, photon. *Nature*, 433:230–238, 2005.

[867] A. Ananthaswamy. Kein Ausweg aus der Unendlichkeit. *Spektr. Wiss.*, 12:12, 2018.

[868] D. Bohm and Y. Aharonov. Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Phys. Rev.*, 108:1070–1076, 1957.

[869] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, 1935.

[870] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Phys.*, 1:195–200, 1964.

[871] Web Of Science. `https://www.webofscience.com`. last visit: 2024-05-22.

[872] J. S. Bell. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 38:447–452, 1966.

[873] A. Aspect, Ph. Grangier, and G. Roger. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91–94, 1982.

[874] C. A. Kocher and E. D. Commins. Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 18:575–577, 1967.

[875] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, 1969.

[876] S. J. Freedman and J. F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28:938–941, 1972.

[877] M. Lamehi-Rachti and W. Mittig. Quantum mechanics and hidden variables: A test of Bell's inequality by the measurement of the spin correlation in low-energy proton-proton scattering. *Phys. Rev. D*, 14:2543–2555, 1976.

[878] G. Weihs, Th. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5039–5043, 1998.

[879] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden. Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, 74:145–195, 2002.

[880] M. Proietti, J. Ho, F. Grasselli, P. Barrow, M. Malik, and A. Fedrizzi. Experimental quantum conference key agreement. *Sci. Adv.*, 7, 2021.

[881] M. B. Hesse. *Forces and fields: The concept of action at a distance in the history of physics*. Dover Publications, Mineola, 2005.

[882] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, and D. J. Wineland. A Schrödinger Cat Superposition State of an Atom. *Science*, 272:1131–1136, 1996.

[883] R. P. Crease and A. S. Goldhaber. *The Quantum Momentum*. W. W. Norton, New York, 2014.

[884] J. S. Bell. Bertlmann's socks and the nature of reality. *J. Phys. Colloq.*, 42:C2–41, 1981.

[885] J. S. Bell and Alain Aspect. *Bertlmann's socks and the nature of reality*, pages 139–158. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 2004.

[886] M. Sarovar, A. Ishizaki, G. R. Fleming, and K. B. Whaley. Quantum entanglement in photosynthetic light-harvesting complexes. *Nature Physics*, 6:462–467, 2010.

[887] E. Schrödinger. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23:807–812, 1935.

[888] R. S. Aspden, M. J. Padgett, and G. C. Spalding. Video recording true single-photon double-slit interference. *Am. J. Phys.*, 84:671–677, 2016.

[889] Aad et al. Observation of quantum entanglement with top quarks at the atlas detector. *Nature*, 633:542–547, 2024.

[890] P. Li, X. Lei, H. Cui, and L. Zhao. Malus's law and a dynamic three-polarizer system. *Phys. Teach.*, 62:302–304, 2024.

[891] P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 4 edition, 1981.

[892] C. S. Wu and I. Shaknov. The angular correlation of scattered annihilation radiation. *Phys. Rev.*, 77:136–136, 1950.

[893] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, and Y. Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337–4341, 1995.

[894] S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha, S. Pádua, and C. H. Monken. Double-slit quantum eraser. *Phys. Rev. A*, 65:033818, 2002.

[895] S. Pádua und C. H. Monken S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha. Quantenradierer selbst gemacht. *Spektr. Wiss.*, 7:68, 2004.

[896] W. Rueckner and J. Peidle. Young's double-slit experiment with single photons and quantum eraser. *Am. J. Phys.*, 81:951–958, 2013.

[897] R. Ghosh and L. Mandel. Observation of nonclassical effects in the interference of two photons. *Phys. Rev. Lett.*, 59:1903–1905, 1987.

[898] D. C. Burnham and D. L. Weinberg. Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 25:84–87, 1970.

[899] A. K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, 1991.

[900] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390:575–579, 1997.

[901] R. Ursin, Th. Jennewein, M. Aspelmeyer, R. Kaltenbaek, M Lindenthal, Ph. Walther, and A. Zeilinger. Quantum teleportation across the danube. *Nature*, 430:849–849, 2004.

[902] J. Yin, Y. Cao, Y.-H. Li, S.-K Liao, L. Zhang, J.-G. Ren, W.-Q. Cai, W.-Y. Liu, B. Li, H. Dai, G.-B. Li, Q.-M. Lu, Y.-H. Gong, Y. Xu, S.-L. Li, F.-Z. Li, Y.-Y. Yin, Z.-Q. Jiang, M. Li, J.-J. Jia, G. Ren, D. He, Y.-L. Zhou, X.-X. Zhang, N. Wang, X. Chang, Z.-C. Zhu, N.-L. Liu, Y.-Ao. Chen, C.-Y. Lu, R. Shu, C.-Z. Peng, J.-Y. Wang, and J.-W. Pan. Satellite-based entanglement distribution over 1 200 kilometers. *Science*, 356:1140–1144, 2017.

[903] J. Yin, Y.-H. Li, S.-K. Liao, M. Yang, Y. Cao, L. Zhang, J.-G. Ren, W.-Q. Cai, W.-Y. Liu, S.-L. Li, R. Shu, Y. M. Huang, L. Deng, L. Li, Q. Zhang, N.-L. Liu, Y.-A. Chen, C. Y. Lu, X.-B. Wang, F. Xu, J.-Y. Wang, C.-Z. Peng, A. K. Ekert, and J.-W. Pan. Entanglement-based secure quantum cryptography over 1,120 kilometres. *Nature*, 582:501–505, 2020.

[904] Rauch et al. Cosmic Bell Test Using Random Measurement Settings from High-Redshift Quasars. *Phys. Rev. Lett.*, 121:080403, 2018.

[905] Abellán et al. Challenging local realism with human choices. *Nature*, 557:212–216, 2018.

[906] K. Mizuno, J. Ishii, H. Kishida, Y. Hayamizu, S. Yasuda, D. N. Futaba, M. Yumura, and K. Hata. A black body absorber from vertically aligned single-walled carbon nanotubes. *PNAS*, 106:6044–6047, 2009.

[907] PTB. Physikalisch-Technische Bundesanstalt. `https://www.ptb.de`. last visit: 2024-05-27.

[908] T. B. Greenslade. Nils Gustav Dalén, the Unknown Nobel Prize Winner. *Phys. Teach.*, 47:37–37, 2009.

[909] W. Demtröder. *Atoms, Molecules and Photons*. Springer, Berlin, 2 edition, 2010.

[910] J. E. Bailey, A. J. L. Harris, J. Dehn, S. Calvari, and S. K. Rowland. The changing morphology of an open lava channel on Mt. Etna. *Bull Volcanol*, 68:497–515, 2006.

[911] M. Planck. *Wege zur physikalischen Erkenntnis: Reden und Vorträge*. S. Hirzel, Leipzig, 1933.

[912] D. D. Turner, E. J. Mlawer, G. Bianchini, M. P. Cadeddu, S. Crewell, J. S. Delamere, R. O. Knuteson, G. Maschwitz, M. Mlynczak, S. Paine, L. Palchetti, and D. C. Tobin. Ground-based high spectral resolution observations of the entire terrestrial spectrum under extremely dry conditions. *Geophys. Res. Lett.*, 39, 2012.

[913] M. Chaichian, H.P. Rojas, and A. Tureanu. *Basic Concepts in Physics: From the Cosmos to Quarks*. Springer, Berlin, 2014.

[914] O. Lummer and E. Pringsheim. Die Vertheilung der Energie im Spectrum des schwarzen Körpers. *Verh. Dt. Phys. Gesell.*, 1:215, 1899.

[915] H Rubens and F Kurlbaum. On the heat radiation of long wave-length emitted by black bodies at different temperatures. *Astrophys. J.*, 14:335, 1901.

[916] W. Wien. Ueber die Energievertheilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers. *Ann. Phys.*, 294:662–669, 1896.

[917] T. Iuchi, Y. Yamada, M. Sugiura, and A. Torao. Thermometry in steel production. In *Radiometric Temperature Measurements*, chapter 4, pages 217–277. Elsevier, Amsterdam, 2009.

[918] bo bautec. Sachverständigenbüro für das Bauwesen. `https://bo-bautec.de`. last visit: 2025-01-06.

[919] K.-P. Möllmann and M. Vollmer. Eine etwas andere, physikalische Sehweise: Visualisierung von Energieumwandlungen und Strahlungsphysik für die (Hochschul-)lehre. *Phys. Bl*, 56:65–69, 2000.

[920] B.F. Jones. A reappraisal of the use of infrared thermal image analysis in medicine. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 17:1019–1027, 1998.

[921] J. R. White. Herschel und das Rätsel der strahlenden Wärme. *Spektr. Wiss.*, 3:44, 2013.

[922] HBS. Hamburger Bildungsserver. `https://bildungsserver.hamburg.de`. last visit: 2024-05-27.

[923] E. Foote. Circumstances affecting the heat of the sun's rays. *Am. J. Sci. Arts*, 22:383–384, 1856.

[924] R. W. Spencer and J. R. Christy. Precise monitoring of global temperature trends from satellites. *Science*, 247:1558–1562, 1990.

[925] J. R. Christy, R. W. Spencer, and W. D. Braswell. How accurate are satellite 'thermometers'? *Nature*, 389:342–342, 1997.

[926] P. D. Jones and K. R. Briffa. Global Surface Air Temperature Variations During the Twentieth Century: Part 1, Spatial, Temporal and Seasonal Details. *Holocene*, 2:165–179, 1992.

[927] F.R. de Gruijl. Skin cancer and solar UV radiation. *Eur. J. Cancer*, 35:2003–2009, 1999.

[928] M. Kappas. *Leitfaden für Geowissenschaftler*. Dümmler, Bonn, 1994.

[929] schoolphysics. `https://www.schoolphysics.co.uk`.

[930] G. P. Kuiper. The empirical mass-luminosity relation. *Astrophys. J.*, 88:472, 1938.

[931] ESA. The Europeam Space agency. `https://esahubble.org`. last visit: 2024-05-27.

[932] H. N. Russell. "Giant" and "dwarf" stars. *The Observatory*, 36:324–329, 1913.

[933] D. Lincoln. Where is half of the universe? *Phys. Teach.*, 61:646–650, 2023.

[934] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow. The origin of chemical elements. *Phys. Rev.*, 73:803–804, 1948.

[935] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophys. J.*, 142:419–421, 1965.

[936] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, Ch. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.

[937] M. Bucher. Physics of the cosmic microwave background anisotropy. *Int. J. Mod. Phys. D*, 24:1530004, 2015.

[938] A. A. Penzias. The origin of the elements. *Science*, 205(4406):549–554, 1979.

[939] A. Weigert and H. Wendker. *Astronomie und Astrophysik*. Wiley, Berlin, 2009.

[940] Mather et al. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite. *Astrophys J.*, 354:L37–L40, 1990.

[941] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson. Cosmic black-body radiation. *Astrophys. J*, 142:414–419, 1965.

[942] R. W. Wilson and A. A. Penzias. Isotropy of Cosmic Background Radiation at 4080 Megahertz. *Science*, 156:1100–1101, 1967.

[943] R. A. Alpher and R. C. Herman. Remarks on the evolution of the expanding universe. *Phys. Rev.*, 75:1089–1095, 1949.

[944] R. A. Alpher and R. Herman. Reflections on Early Work on 'Big Bang' Cosmology. *Phys. Today*, 41:24–34, 1988.

[945] A. McKellar. Molecular lines from the lowest states of diatomic molecules composed of atoms probably present in interstellar space. *Publ. Dom. Astrophys. Obs.*, 7:251, 1941.

[946] R W Wilson. History of the discovery of the cosmic microwave background radiation. *Phys. Scr.*, 21:599–605, 1980.

[947] K. C. Roth, D. M. Meyer, and I. Hawkins. Interstellar cyanogen and the temperature of the cosmic microwave background radiation. *Astrophys. J.*, 413:L67, 1993.

[948] G. Herzberg and K.-P. Huber. *Molecular Spectra and Molecular Structure.* Van Nostrand, New York, 1950.

[949] R. B. Partridge and David T. Wilkinson. Isotropy and homogeneity of the universe from measurements of the cosmic microwave background. *Phys. Rev. Lett.*, 18:557–559, 1967.

[950] G. F. Smoot, M. V. Gorenstein, and R. A. Muller. Detection of anisotropy in the cosmic blackbody radiation. *Phys. Rev. Lett.*, 39:898–901, 1977.

[951] G. F. Smoot. Cosmic microwave background radiation anisotropies: Their discovery and utilization. *Rev. Mod. Phys.*, 79:1349–1379, 2007.

[952] J. C. Mather. From the big bang to the nobel prize and beyond. *Rev. Mod. Phys.*, 79:1331–1348, 2007.

[953] D. P. Woody and P. L. Richards. Spectrum of the cosmic background radiation. *Phys. Rev. Lett.*, 42:925–929, 1979.

[954] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright. The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set. *Astrophys. J.*, 473:576–587, 1996.

[955] D. J. Fixsen. The temperature of the cosmic microwave background. *Astrophys. J.*, 707:916–920, 2009.

[956] C. L. Bennett, D. Larson, J. L. Weiland, N. Jarosik, G. Hinshaw, N. Odegard, K. M. Smith, R. S. Hill, B. Gold, M. Halpern, E. Komatsu, M. R. Nolta, L. Page, D. N. Spergel, E. Wollack, J. Dunkley, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, and E. L. Wright. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps And Results. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 208:20, 2013.

[957] B. G. Levi. COBE Measures Anisotropy in Cosmic Microwave Background Radiation. *Phys. Today*, 45:17–20, 1992.

[958] R. Gast. Architekten unseres Weltbildes. *Spektr. Wiss*, 20:20, 2019.

[959] J. Schwinn and M. Bartelmann. Das Leuchten des Urknalls. *Phys. Zeit*, 51:220–227, 2020.

[960] C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, D. N. Spergel, G. S. Tucker, E. Wollack, E. L. Wright, C. Barnes, M. R. Greason, R. S. Hill, E. Komatsu, M. R. Nolta, N. Odegard, H. V. Peiris, L. Verde, and J. L. Weiland. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 148:1–27, 2003.

[961] J. S. Hey. Solar radiations in the 4–6 metre radio wave-length band. *Nature*, 157(3976):47–48, 1946.

[962] J. S. Hex and G. S. Stewart. Derivation of meteor stream radiants by radio reflexion methods. *Nature*, 158:481–482, 1946.

[963] J. S. Hey, S. J. Parsons, and J. W. Phillips. Fluctuations in cosmic radiation at radio-frequencies. *Nature*, 158:234–234, 1946.

[964] I. Chinnici and G. Consolmagno, editors. *Angelo Secchi and Nineteenth Century Science: The Multidisciplinary Contributions of a Pioneer and Innovator*. Springer International Publishing, Cham, 2021.

[965] Mroczkowski et al. Astrophysics with the Spatially and Spectrally Resolved Sunyaev-Zeldovich Effects. *Space Sci. Rev.*, 215:17, 2019.

[966] R. A. Sunyaev and Ya. B. Zeldovich. Small-scale fluctuations of relic radiation. *Astrophys. Space Sci.*, 7:3–19, 1970.

[967] D. A. Riechers, A. Weiss, F. Walter, Ch. L. Carilli, P. Cox, R. Decarli, and R. Neri. Microwave background temperature at a redshift of 6.34 from H_2O absorption. *Nature*, 602:58–62, 2022.

[968] Pique J.-P. Belorizky E. The thermal radiation of the black body. `https://www.encyclopedie-environnement.org`, 2021. last visit: 2024-05-27.

[969] M. Scholz. *Die Physik der Sterne*. Springer, Berlin, 2018.

[970] C. Jung and M. Arar. Natural vs. Artificial Light: A Study on the Influence of Light Source on Chlorophyll Content and Photosynthetic Rates on Indoor Plants. *Buildings*, 13:1482, 2023.

[971] Ch. D. P. Duffy. The simplicity of robust light harvesting. *Science*, 368:1427–1428, 2020.

[972] T. B. Arp, J. Kistner-Morris, R. Cogdell V. Aji, R. van Grondelle, and N. M. Gabor. Quieting a noisy antenna reproduces photosynthetic light-harvesting spectra. *Science*, 368:1490, 2020.

[973] M. Planck. Ueber irreversible Strahlungsvorgänge. *Ann. Phys.*, 306:69–122, 1900.

[974] A. Einstein. Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme. *Ann. Phys.*, 327:180–190, 1907.

[975] M. Rubner. *Die Kaliometrie*. in Robert Tigerstedt (ed.): Handbuch der physiologischen Methodik, Leipzig, 1991.

[976] R. A. Serway and Jr. J. W Jewett. *Physics*. Brooks/Cole, Boston, 9 edition, 2014.

[977] TECS. tec-science. `https://www.tec-science.com`. last visit: 2024-05-27.

[978] Y. Li, J. Wu, and Z.-Y.Guo. Re-recognition of the ideal gas and real gas, 2023.

[979] P. Debye. Zur Theorie der spezifischen Wärmen. *Ann. Phys.*, 344:789–839, 1912.

[980] H. Hertz. Ueber einen Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die electrische Entladung. *Ann. Phys.*, 267:983–1000, 1887.

[981] O. W. Richardson. Thermionic phenomena and the laws which govern them. *Nobel lecture*, 1929.

[982] S. Dushman. Electron emission from metals as a function of temperature. *Phys. Rev.*, 21:623–636, 1923.

[983] D. Herzog, V. Seyda, E. Wycisk, and C. Emmelmann. Additive manufacturing of metals. *Acta Mat.*, 117:371 – 392, 2016.

[984] A.M. Prokhorov. *Great Soviet Encyclopedia*. MacMillan, 1979.

[985] W. Hallwachs. Über den Einfluss des Lichtes auf electrostatisch geladene Körper. *Ann. Phys.*, 269:301–312, 1888.

[986] W. Hallwachs. Über die Electrisirung von Metallplatten durch Bestrahlung mit electrischem Licht. *Ann. Phys.*, 270:731–734, 1888.

[987] A. Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Ann. Phys.*, 322:132–148, 1905.

[988] P. Lenard. Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht. *Ann. Phys.*, 307:359–375, 1900.

[989] A. Kramida, Yu. Ralchenko, J. Reader, and and NIST ASD Team. `https://physics.nist.gov/asd`, 2021. last visit: 2024-05-22.

[990] H. B. Michaelson. The work function of the elements and its periodicity. *J. Appl. Phys.*, 48:4729–4733, 1977.

[991] E. O. Lawrence and J. W. Beams. The element of time in the photoelectric effect. *Phys. Rev.*, 32:478–485, 1928.

[992] D. Walsh. The photo-electric emission time from a metal surface. *Phys. Lett.*, 24:724–725, 1967.

[993] C. Hofmann, A. S. Landsman, and U. Keller. Attoclock revisited on electron tunnelling time. *J. Mod. Opt.*, 66:1052–1070, 2019.

[994] C. X. Chen and C. G. Zhang. New demonstration of photoelectric effect. *Phys. Teach.*, 37:442–442, 1999.

[995] A. Gkourmpis. A demonstration of the photoelectric effect with sunlight. *Phys. Teach.*, 61:710–711, 2023.

[996] R. A. Millikan. Albert Einstein on His Seventieth Birthday. *Rev. Mod. Phys.*, 21:343–345, 1949.

[997] R. A. Millikan. A Direct Photoelectric Determination of Planck's h. *Phys. Rev.*, 7:355–388, 1916.

[998] J. Rudnick and D. S. Tannhauser. Concerning a widespread error in the description of the photoelectric effect. *Am. J. Phys.*, 44:796–798, 1976.

[999] Hamamatsu Photonics. `https://www.hamamatsu.com`. last visit: 2024-05-22.

[1000] K. Lehovec. The photo-voltaic effect. *Phys. Rev.*, 74:463–471, 1948.

[1001] M.A. Green, Jianhua Zhao, A. Wang, and S.R. Wenham. Very high efficiency silicon solar cells-science and technology. *IEEE Trans. Electron Devices*, 46(10):1940–1947, 1999.

[1002] C.A. Gueymard, D. Myers, and K. Emery. Proposed reference irradiance spectra for solar energy systems testing. *Solar Energy*, 73:443–467, 2002.

[1003] W. Shockley and H. J. Queisser. Detailed balance limit of efficiency of p-n junction solar cells. *J. Appl. Phys.*, 32:510–519, 1961.

[1004] M. C. Hanna and A. J. Nozik. Solar conversion efficiency of photovoltaic and photoelectrolysis cells with carrier multiplication absorbers. *J. Appl. Phys.*, 100:074510, 2006.

[1005] M. C. Beard, J. M. Luther, O. E. Semonin, and A. J. Nozik. Third generation photovoltaics based on multiple exciton generation in quantum confined semiconductors. *Acc. Chem. Res.*, 46:1252–1260, 2013.

[1006] D. König, K. Casalenuovo, Y. Takeda, G. Conibeer, J.F. Guillemoles, R. Patterson, L.M. Huang, and M.A. Green. Hot carrier solar cells: Principles, materials and design. *Phys. E*, 42:2862–2866, 2010.

[1007] A. Polman, M. Knight, E. C. Garnett, B. Ehrler, and W. C. Sinke. Photovoltaic materials: Present efficiencies and future challenges. *Science*, 352:307, 2016.

[1008] R. Schwenz and L. Geiger. Photon-initiated hydrogen-chlorine reaction. *J. Chem. Edu.*, 76:470, 1999.

[1009] C. S. Bury, J. C. Brooks-Bartlett, S. P. Walsh, and E. F. Garman. Estimate your dose: RADDOSE-3D. *Protein Sci.*, 27:217–228, 2018.

[1010] X. Xia, Z.-G. Zhang, H.-G. Xu, X. Xu, X.and Kuang, C. Lu, and W. Zheng. Geometric Structures and Electronic Properties of $Al_nV^{0/-}$ (n=5-14) Clusters: Photoelectron Spectroscopy and Theoretical Calculations. *J. Phys. Chem. C*, 123:1931–1938, 2019.

[1011] S. L. Molodtsov, S. V. Halilov, V. D. P. Servedio, W. Schneider, S. Danzenbächer, J. J. Hinarejos, Manuel Richter, and C. Laubschat. Cooper minima in the photoemission spectra of solids. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4184–4187, 2000.

[1012] F. Reinert, G. Nicolay, B. Eltner, D. Ehm, S. Schmidt, S. Hüfner, U. Probst, and E. Bucher. Observation of a BCS Spectral Function in a Conventional Superconductor by Photoelectron Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3930–3933, 2000.

[1013] W.F. Egelhoff. Core-level binding-energy shifts at surfaces and in solids. *Surf. Sci. Rep.*, 6:253–415, 1987.

[1014] R. W. Rodieck. *The First Steps in Seeing.* Oxford University Press, Oxford, 1998.

[1015] K. Krisciunas and D. Carona. At what distance can the human eye detect a candle flame? `https://arxiv.org/abs/1507.06270`, 2015.

[1016] Umweltbundesamt. `https://www.umweltbundesamt.de`. last visit: 2024-05-22.

[1017] S. Löfgren, J. Thaung, and C. Lopes. Laser pointers and eye injuries. an analysis of reported cases. Technical report, Swedish Radiation Safty Authority, 2013.

[1018] M. P. Rowe. Inferring the Retinal Anatomy and Visual Capacities of Extinct Vertebrates. *Palaeontol. Electron.*, 3:43, 2000.

[1019] S. S. Stevens. On the psychophysical law. *Psychol. Rev.*, 64:153, 1957.

[1020] S. S. Stevens and L. E. Marks. *Psychophysics: Introduction to Its Perceptual, Neural, and Social Prospects*. Taylor and Francis, New York, 1986.

[1021] E. A. Boettner and J. R. Wolter. Transmission of the ocular media. *Investig. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 1:776–783, 1962.

[1022] D. A. Baylor, T. D. Lamb, and K. W. Yau. Responses of retinal rods to single photons. *J. Physiol.*, 288:613–634, 1979.

[1023] J. N. Tinsley, M. Molodtsov, R. Prevedel, D. Wartmann, J. Espigulé-Pons, M. Lauwers, and A. Vaziri. Direct detection of a single photon by humans. *Nature Commun.*, 7:12172, 2016.

[1024] M. Subr, P. Praus, A. Kuzminova, E. Kocisova, O. Kylian, F. Sureau, M. Prochazka, and J. Stepanek. Magnetron-sputtered polytetrafluoroethylene-stabilized silver nanoisland surface for surface-enhanced fluorescence. *Nanomaterials*, 10:773, 2020.

[1025] Z. Musilova, F. Cortesi, M. Matschiner, W. I. L. Davies, J. S. Patel, S M. Stieb, F. de Busserolles, M. Malmstrøm, O. K. Tørresen, C J. Brown, J. K. Mountford, R. Hanel, D. L. Stenkamp, K. S. Jakobsen, K. L. Carleton, S. Jentoft, J. Marshall, and W. Salzburger. Vision using multiple distinct rod opsins in deep-sea fishes. *Science*, 364:588–592, 2019.

[1026] T. Schaller. *Die berühmtesten Formeln der Welt... und wie man sie versteht*. dtv, München, 2010.

[1027] W. Thomson. 4. On Vortex Atoms. *Proc. R. Soc. Edinb.*, 6:94–105, 1869.

[1028] H. von Helmholtz. Ueber Integrale der hydrodynamischen portion Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *J. für die Reine und Angew. Math.*, 55:25, 1858.

[1029] W. Thomson. Floating magnets. *Nature*, 18:13–14, 1878.

[1030] H.A.M. Snelders. A. M. Mayer's experiments with floating magnets and their use in the atomic theories of matter. *Ann. Sci.*, 33:67–80, 1976.

[1031] I. V. Nemoianu, C. George Dragomirescu, Veronica Manescu, G. Dascalu, M.-I.and Paltanea, and R. M. Ciuceanu. Self-organizing equilibrium patterns of multiple permanent magnets floating freely under the action of a central attractive magnetic force. *Symmetry*, 14:795, 2022.

[1032] M. L. Cohen and W. D. Knight. The physics of metal clusters. *Phys. Today*, 43:42–50, 1990.

[1033] J. J. Thomson. XL. Cathode Rays. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 44:293–316, 1897.

[1034] R. A. Millikan. On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant. *Phys. Rev.*, 2:109–143, 1913.

[1035] J. J. Thomson. Carriers of negative electricity. *Nobel Lecture*, 11:1901–1921, 1906.

[1036] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Ann. Phys.*, 322:549–560, 1905.

[1037] J. D. Cockcroft, E. T. S. Walton, and E. Rutherford. Experiments with high velocity positive ions I. Further developments in the method of obtaining high velocity positive ions. *Proc. Royal Soc. A*, 136:619–630, 1932.

[1038] J. D. Cockcroft, E. T. S. Walton, and E. Rutherford. Experiments with high velocity positive ions II. The disintegration of elements by high velocity protons. *Proc. Royal Soc. A*, 137:229–242, 1932.

[1039] J. Franck and G. Hertz. Über Zusammenstöße zwischen Elektronen und den Molekülen des Quecksilberdampfes und die Ionisierungsspannung desselben. *Phys. Bl.*, 23:294–301, 1967.

[1040] M. Faraday. *Experimental researches in electricity.* Taylor and Francis, London, 1839.

[1041] D. Kehlmann. *Die Vermessung der Welt.* Rowohlt, Hamburg, 2005.

[1042] MathWorks. Accelerating the pace of engineering and science. `https://de.mathworks.com`. last visit: 2024-05-29.

[1043] max wissen. Aus der Forschung direkt in die Schule. `https://www.max-wissen.de`. last visit: 2024-06-03.

[1044] Maschinenbau-Wissen. Die maschinenbau-community. `https://www.maschinenbau-wissen.de`. last visit: 2024-05-29.

[1045] C. A. Russell. The electrochemical theory of Sir Humphry Davy. *Ann. Sci.*, 15:1–13, 1959.

[1046] S K Somayajula, A T Sriram, and V M Shelar. Study of argon and xenon gas properties on DC-glow discharge plasma. *J. Phys. Conf. Ser.*, 1706:012030, 2020.

[1047] A. Rathore, A. Tiwari, M. Nazim, A. K. Gupta, M. Gande, and J. Krishnakumar. Detection of Human PapillomaVirus and its Association with Potentially Malignant Disorders and Oral Squamous Cell Carcinoma: A Retrospective Study. *J. Pharm. Bioallied Sci.*, 14:S820, 2022.

[1048] R. A. Millikan. The electron and the light-quant from the experimental point of view. Nobel Lecture, 1924.

[1049] Arabatzis T. *Compendium of Quantum Physics*, chapter Cathode Rays, pages 89–92. Springer, Berlin, 2009.

[1050] P. Lenard. Ueber Kathodenstrahlen in Gasen von atmosphärischem Druck und im äussersten Vacuum. *Ann. Phys.*, 287:225–267, 1894.

[1051] O. Lueger. *Lexikon der gesamten Technik und ihrer Hilfswissenschaften*, volume 5. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1907.

[1052] J. Plücker and J. W. Hittorf. I. On the spectra of ignited gases and vapours, with especial regard to the different spectra of the same elementary gaseous substance. *Philos. Trans. Royal Soc. London*, 155:1–29, 1865.

[1053] Magnetic Acadamy. National High Magnetic Field Laboratory. `https://nationalmaglab.org`. last visit: 2024-06-03.

[1054] W. Crookes. V. The Bakerian Lecture. On the illumination of lines of molecular pressure, and the trajectory of molecules. *Proc. Royal Soc. London*, 170:135–164, 1879.

[1055] I. A. Kaltashov and S. J. Eyles. *Mass spectrometry in biophysics: conformation and dynamics of biomolecules*. Wiley & Sons, Baden-Baden, 2005.

[1056] J. Leopold, Y. Popkova, K. Engel, and J. Schiller. Recent Developments of Useful MALDI Matrices for the Mass Spectrometric Characterization of Lipids. *Biomolecules*, 8:173, 2018.

[1057] K. T. Bainbridge. The specific charge of the electron. *Am. J.Phys.*, 6:35–36, 1938.

[1058] R. C. Tolman and T. D. Stewart. The electromotive force produced by the acceleration of metals. *Phys. Rev.*, 8:97–116, 1916.

[1059] S. Patra, M. Germann, J.-Ph. Karr, M. Haidar, L. Hilico, V. I. Korobov, F. M. J. Cozijn, K. S. E. Eikema, W. Ubachs, and J. C. J. Koelemeij. Proton-electron mass ratio from laser spectroscopy of HD^+ at the part-per-trillion level. *Science*, 369:1238–1241, 2020.

[1060] R. Aebersold and M. Mann. Mass spectrometry-based proteomics. *Nature*, 422:198–207, 2003.

[1061] R. A. Millikan. The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of its Charge, and the Correction of Stokes's Law. *Phys. Rev.*, 32:349–397, 1911.

[1062] R. A. Millikan. *The Electron, Its Isolation and Measurement Ant the Determination of Some of Its Properties*. University Press, 1924.

[1063] PhysicsTeacher.in. High school physics. `https://physicsteacher.in`. last visit: 2024-05-29.

[1064] R. A. Millikan. The isolation of an ion, a precision measurement of its charge, and the correction of stokes's law. *Phys. Rev. (Series I)*, 32:349–397, 1911.

[1065] R. A. Lyttleton and H. Bondi. Physical consequences of a general excess of charge. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci. A*, 252:313–333, 1959.

[1066] G. Gallinaro, M. Marinelli, and G. Morpurgo. Electric neutrality of matter. *Phys. Rev. Lett.*, 38:1255–1258, 1977.

[1067] W. Kaufmann. Die elektromagnetische Masse des Elektrons. *Phys. Z.*, 4:54, 1902.

[1068] J. Bagdonaite, P. Jansen, Ch. Henkel, H. L. Bethlem, K. M. Menten, and W. Ubachs. A stringent limit on a drifting proton-to-electron mass ratio from alcohol in the early universe. *Science*, 339:46–48, 2013.

[1069] J. Van Polen, R. T. Hagstrom, and G. Hirsch. Search for fractional charges using droplet-jet techniques. *Phys. Rev. D*, 36:1983–1989, 1987.

[1070] E. Rutherford. LVII. The structure of the atom. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 27:488–498, 1914.

[1071] N. E. Shafer and R. N. Zare. Through a beer glass darkly. *Phys. Today*, 44:48–52, 1991.

[1072] Th. B. Greenslade Jr. Volta's pistol. *Rittenhouse*, 1:33, 1987.

[1073] M. Ducci and M. Oetken. Das Rätsel der verschwundenen Kohle. *Spektr. Wiss.*, 1:52, 2017.

[1074] R. Brown. A brief account of microscopical observations on the particles contained in the pollen of plants and the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Edinb. New Philos. J.*, page 358, 1828.

[1075] J. Loschmidt. *Zur Grösse der Luftmolecüle: vorgelegt in der Sitzung vom 12. October 1865*. K. K. Hof-und Staatsdruckerei, 1865.

[1076] R. Brown. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Phil. Mag.*, 4:161–173, 1828.

[1077] B. H. Lavenda. Brownian motion. *Sci. Am.*, 252:70–85, 1985.

[1078] S. U. S. Choi. Nanofluids: From Vision to Reality Through Research. *J. Heat Transf.*, 131:033106, 2009.

[1079] E. Otto and H. Fissan. Brownian coagulation of submicron particles. *Adv. Powder Technol.*, 10:1–20, 1999.

[1080] P. Garaud, F. Meru, M. Galvagni, and Ch. Olczak. From dust toplanetesimals an improved model for collisional growth in protoplanetary disks. *Astrophys. J.*, 764:146, 2013.

[1081] M. J. Saxton and K. Jacobson. Single particle tracking: Applications to membrane dynamics. *Ann. Rev. Biophys*, 26:373–399, 1997.

[1082] V. Vallaeys, R. C. Tyson, W. D. Lane, E. Deleersnijder, and E. Hanert. A lévy-flight diffusion model to predict transgenic pollen dispersal. *J. Royal Soci. Interface*, 14:20160889, 2017.

[1083] M. Pöschl. *Die kolloidale Stabilität untergäriger Biere - Einflussmöglichkeiten und Vorhersagbarkeit.* PhD thesis, Technische Universität München, München, 2009.

[1084] L. Bachelier. *Theory of speculation.* PhD thesis, Sorbonne, Paris, 1900.

[1085] J. Perrin. Mouvement brownien et réalité moléculaire. *Ann. Chim. Phys.*, 18:5, 1909.

[1086] J. A. Earl and F. E. Christensen. Brownian Motion Determination of Avogadro's Number. *Am. J. Phys.*, 33:xxi–xxii, 1965.

[1087] P. Nakroshis, M. Amoroso, J. Legere, and Ch. Smith. Measuring Boltzmann's constant using video microscopy of Brownian motion. *Am. J. Phys.*, 71:568–573, 2003.

[1088] G. Seisenberger, M. U. Ried, Th. Endreß, H. Büning, M. Hallek, and Ch. Bräuchle. Real-time single-molecule imaging of the infection pathway of an adeno-associated virus. *Science*, 294:1929–1932, 2001.

[1089] M. von Smoluchowski. Experimentell nachweisbare, der üblichen Thermodynamik widersprechende Molekularphänomene. *Z. Phys.*, 8:1069, 1912.

[1090] P. Eshuis, K. van der Weele, D. Lohse, and D. van der Meer. Experimental realization of a rotational ratchet in a granular gas. *Phys. Rev. Lett.*, 104:248001, 2010.

[1091] J. S. Wettlaufer. Climate Science: An Invitation for Physicists. *Phys. Rev. Lett.*, 116:150002, 2016.

[1092] K. Hasselmann. Stochastic climate models Part I. Theory. *Tellus*, 28:473–485, 1976.

[1093] C. Frankignoul and K. Hasselmann. Stochastic climate models, part ii application to sea-surface temperature anomalies and thermocline variability. *Tellus*, 29:289–305, 1977.

[1094] T. Barnett, F. Zwiers, G. Hengerl, M. Allen, T. Crowly, N. Gillett, K. Hasselmann, P. Jones, B. Santer, R. Schnur, P. Scott, K. Taylor, and S. Tett. Detecting and Attributing External Influences on the Climate System: A Review of Recent Advances. *J. Climate*, 18:1291–1314, 2005.

[1095] D. Mendelejew. Über die Beziehungen der Eigenschaften zu den Atomgewichten der Elemente. *Z. Chem.*, 12:405–406, 1869.

[1096] L. Meyer. Die Natur der chemischen Elemente als Function ihrer Atomgewichte. *Ann. Chem. Pharmazie*, 7:354, 1870.

[1097] C. Winkler. Germanium, Ge, ein neues, nichtmetallisches Element. *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft*, 19:210–211, 1886.

[1098] Wie uns Chemie die Welt erklärt. Geo Kompakt, 12 2012.

[1099] H. Geiger and E. Marsden. LXI. The laws of deflexion of a particles through large angles. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 25:604–623, 1913.

[1100] J. J. Thomson M.A. F.R.S. LVIII. On the masses of the ions in gases at low pressures. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 48:547–567, 1899.

[1101] M. Xu. Plum pudding random medium model of biological tissue toward remote microscopy from spectroscopic light scattering. *Biomed. Opt. Express*, 8:2879–2895, 2017.

[1102] B. A. Averill. *Principles of general chemistry.* Creative Commons, 2012.

[1103] M. Apolin. *Big Bang.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1 edition, 2019.

[1104] E. Rutherford, J. Chadwick, and Ch. D. Ellis. *Radiations from Radioactive Substances.* Cambridge Library Collection - Physical Sciences. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[1105] R. M. Eisberg and C. E. Porter. Scattering of alpha particles. *Rev. Mod. Phys.*, 33:190–230, 1961.

[1106] M-A. Nicolet, J. W. Mayer, and I. V. Mitchell. Microanalysis of materials by backscattering spectrometry. *Science*, 177(4052):841–849, 1972.

[1107] H. H. Radamson, A. Hallen, I. Sychugov, and A. Azarov. *Analytical Methods and Instruments for Micro- and Nanomaterials.* Springer, Cham, 2023.

[1108] Arnison et al. Angular distributions for high-mass jet pairs and a limit on the energy scale of compositeness for quarks from the cern $p\bar{p}$ collider. *Phys. Lett. B*, 177:244–250, 1986.

[1109] R. Hofstadter. Structure of nuclei and nucleons. *Science*, 136:1013–1022, 1962.

[1110] E. W. Müller. Field ion microscopy. *Science*, 149:591–601, 1965.

[1111] E.W. Müller. Das Feldionenmikroskop. *Z. Phys.*, 131:136–142, 1951.

[1112] J. M. Cairney, B. Gault, and D. J. Larson. Recognizing 60 years of achievements in field emission and atomic scale microscopy: Reflections on the International Field Emission Society. *Mat. Today*, 19:182–183, 2016.

[1113] M. K. Miller. *Atom Probe Tomography*. Kluwer Academic, Dordrecht, 2000.

[1114] J. W. Valley, A. J. Cavosie, T. Ushikubo, D. A. Reinhard, D. F. Lawrence, D. J. Larson, P. H. Clifton, Th. F. Kelly, S. A. Wilde, D. E. Moser, and M. J. Spicuzza. Hadean age for a post-magma-ocean zircon confirmed by atom-probe tomography. *Nature Geosci.*, 7:219–223, 2014.

[1115] R. Hofstadter. The atomis nucleus. *Sci. Am.*, 195:55–70, 1956.

[1116] Nuclear Power. Nuclearpower Net for everybody. `https://www.nuclear-power.com`. last visit: 2024-05-31.

[1117] NCAR. National Center for Atmospheric Research. `https://ncar.ucar.edu`. last visit: 2024-05-31.

[1118] W. Grotrian. G. E. Hales Spektrohelioskop. *Naturwissenschaften*, 19:193–202, 1931.

[1119] M. W. Travers. Ramsay and helium. *Nature*, 135:619–619, 1935.

[1120] Z. Yang, T. Albrow-Owen, W. Cai, and T. Hasan. Miniaturization of optical spectrometers. *Science*, 371:eabe0722, 2021.

[1121] H. H. Yoon, H. A. Fernandez, F. Nigmatulin, W. Cai, Z. Yang, H. Cui, F. Ahmed, X. Cui, M. G. Uddin, E. D. Minot, H. Lipsanen, K. Kim, P. Hakonen, T. Hasan, and Z. Sun. Miniaturized spectrometers with a tunable van der waals junction. *Science*, 378:296–299, 2022.

[1122] J.A.R. Samson and D.L. Ederer, editors. *Vacuum Ultraviolet Spectroscopy*. Academic Press, Burlington, 1999.

[1123] H.-G. Joosten, A. Golloch, and J. Flock. *Atom-Emissions-Spektrometrie: mit Funken- und Bogenanregung*. De Gruyter, Berlin, 2018.

[1124] S.J. Lötter, W. Purcell, and J.T. Nel. Glow discharge optical emission spectroscopy: A general overview with regard to nuclear materials. *J. S. Afr. Inst. Min. Metall.*, 115:22, 2015.

[1125] S.. S. Holt, E. V Gotthelf, H. Tsunemi, and H. Negoro. ASCA Observations of Cassiopeia A. *Publ. Astron. Soc. Jpn.*, 46:L151–L155, 1994.

[1126] Encyclopedia britannica. `https://www.britannica.com`. last visit: 2024-06-03.

[1127] J. J. Balmer. Notiz über die Spectrallinien des Wasserstoffs. *Ann. Phys.*, 261:80–87, 1885.

[1128] Th. Lyman. The spectrum of hydrogen in the region of extremely short wavelengths. *Astrophys. J.*, 23:181, 1906.

[1129] F. Paschen. Zur Kenntnis ultraroter Linienspektra. I. (Normalwellenlängen bis 27000 Å.-E.). *Ann. Phys.*, 332:537–570, 1908.

[1130] F. S. Brackett. An examination of the infra-red spectrum of the sun, λ 8900-λ 9900. *Astrophys. J.*, 53:121, 1921.

[1131] A. H. Pfund. The emission of nitrogen and hydrogen in the infrared. *J. Opt. Soc. Am.*, 9:193–196, 1924.

[1132] C. J Humphreys. The sixth series in the spectrum of atomic hydrogen. *J. Res. Natl. Bur. Stand. (U. S.)*, 50:1–6, 1953.

[1133] J. Brossel and F Bitter. A New *Double Resonance* Method for Investigating Atomic Energy Levels. Application to Hg $^3P_1$. *Phys. Rev.*, 86:308–316, 1952.

[1134] E. Goldstein. *Canalstrahlen.* Severus Verlag, Hamburg, 2010.

[1135] C. P. Snyder. The wave-number system of rhodium. *Astrophys. J.*, 14:179, 1901.

[1136] Lernhelfer. Duden Learnattack GmbH. `https://www.lernhelfer.de`. last visit: 2024-05-31.

[1137] Sven Wienstein. Far out. `https://www.svenwienstein.de`. last visit: 2024-05-31.

[1138] P. G. Tuthill. Schier unmögliche Sterne. *Spektr. Wiss*, 11:58, 2023.

[1139] Tabernero et al. ESPRESSO high-resolution transmission spectroscopy of WASP-76 b? *Astron. Astrophys.*, 646:A158, 2021.

[1140] P. A. Crowther. Physical Properties of Wolf-Rayet Stars. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 45(Volume 45, 2007):177–219, 2007.

[1141] J R Callingham, P A Crowther, P M Williams, P G Tuthill, Y Han, B J S Pope, and B Marcote. Two Wolf-Rayet stars at the heart of colliding-wind binary Apep. *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, 495:3323–3331, 2020.

[1142] P. G. Tuthill, J. D. Monnier, N. Lawrance, W. C. Danchi, S. P. Owocki, and K. G. Gayley. The Prototype Colliding-Wind Pinwheel WR 104. *Astrophys. J.*, 675:698, 2008.

[1143] J. Fraunhofer. Bestimmung des Brechungs- und des Farbenzerstreungs-Vermögens verschiedener Glasarten, in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhre. *Ann. Phys.*, 56:264–313, 1817.

[1144] Photonics. Marketplace. `https://www.photonics.com`. last visit: 2024-05-31.

[1145] E. C. Watson. The first reported observations on emission spectra. *Am. J. Phys.*, 20:569–577, 1952.

[1146] R.B. Voegborlo, A.M. El-Methnani, and M.Z. Abedin. Mercury, cadmium and lead content of canned tuna fish. *Food Chem.*, 67:341–345, 1999.

[1147] G. Kirchhoff. Ueber die Fraunhofer'schen Linien. *Ann. Phys.*, 185:148–150, 1860.

[1148] G. H. Jacoby, D. A. Hunter, and C. A. Christian. A library of stellar spectra. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 56:257–281, 1984.

[1149] Hubble. Hubblesite. `https://hubblesite.org`. last visit: 2024-05-31.

[1150] D. K. Sing, J. J. Fortney, N. Nikolov, H. R. Wakeford, T. Kataria, Th. M. Evans, S. Aigrain, G E. Ballester, A. S. Burrows, D. Deming, J.-M. Désert, N. P. Gibson, G. W. Henry, C. M. Huitson, H. A. Knutson, A. L. des Etangs, F. Pont, A. P. Showman, A. Vidal-Madjar, M. H. Williamson, and P. A. Wilson. A continuum from clear to cloudy hot-jupiter exoplanets without primordial water depletion. *Nature*, 529:59–62, 2016.

[1151] Kreidberg et al. Absence of a thick atmosphere on the terrestrial exoplanet LHS 3844b. *Nature*, 573:87–90, 2019.

[1152] S. A Rice and J. Jortner. James Franck 1882–1964: A Biographical Memoir, 2010.

[1153] N. Bohr. XLII. On the Quantum theory of radiation and the structure of the atom. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 30:394–415, 1915.

[1154] W. Buhr, W. Klein, and S. Pressler. Electron impact excitation and uv emission in the Franck-Hertz experiment. *Am. J. Phys.*, 51:810–814, 1983.

[1155] J. Franck. Transformations of kinetic energy of free electrons into excitation energy of atoms by impacts. *Nobel lectures*, 1941:98–108, 1922.

[1156] A. Kuppermann, J. K. Rice, and S. Trajmar. Low-energy, high-angle electron-impact spectrometry. *J. Phys. Chem.*, 72:3894–3903, 1968.

[1157] G. F. Hanne. What really happens in the Franck-Hertz experiment with mercury? *Am. J. Phys.*, 56:696–700, 1988.

[1158] R. E. Robson, R. D. White, and M. Hildebrandt. One hundred years of the Franck-Hertz experiment. *Eur. Phys. J. D*, 68:188, 2014.

[1159] R. E. Robson, R. D. White, and M. Hildebrandt. Ein Grundstein der Atomphysik. *Phys. J.*, 13:43, 2014.

[1160] J. Franck and P. Knipping. Über die Anregungsspannungen des Heliums. *Z. Phys.*, 1:320–332, 1920.

[1161] C. A. Gearhart. James Franck, the ionization potential of helium, and the experimental discovery of metastable states. *Stud. Hist. Philos. Sci. B*, 60:95–109, 2017.

[1162] R. P. Feynman. Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys.*, 21:467–488, 1982.

[1163] W. Heisenberg. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Z. Phys.*, 33:879–893, 1925.

[1164] K. Camilleri. The revolutionary dawn of quantum mechanics. *Nature*, 637:269, 2025.

[1165] W. Pauli. Exclusion principle and quantum mechanics. Nobel Lecture, 1946.

[1166] The Editor. Quantum mechanics at 100: an unfinished revolution. *Nature*, 637:251, 2025.

[1167] H. J. Eichler, J. Eichler, and O. Lux. *Lasers: Basics, Advances and Applications*. Springer International Publishing, Cham, 2018.

[1168] I. V. Hertel and C.-P. Schulz. *Atome, Moleküle und optische Physik*, volume 1. Springer, Berlin, 1 edition, 2008.

[1169] I. V. Hertel and C.-P. Schulz. *Atome, Moleküle und optische Physik*, volume 2. Springer, Berlin, 1 edition, 2010.

[1170] K.S. Krane. *Introductory to Nuclear Physics*. Wiley & Sons, New York, 1988.

[1171] J.-V. Kratz and K.H. Lieser. *Nuclear and Radiochemistry Fundamentals and Applications*. Wiley & Sons, Weinheim, 3 edition, 2013.

[1172] P.W. Milonni and J.H Eberly. *Laser Physics*. Wiley & Sons, Hoboken, 2010.

[1173] B. Povh, K. Rith, Ch. Scholz, F. Zetsche, and W. Rodejohann. *Teilchen und Kerne*. Springer, Berlin, 9 edition, 2013.

[1174] A. Morrison. *Engineering Physics*, volume 1. Openstax, Houston, 2021.

[1175] N. Bohr. I. On the constitution of atoms and molecules. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 26:1–25, 1913.

[1176] Quantum physics: The quantum atom. *Nature*, 498:21–21, 2013.

[1177] Th. W. Hänsch, A. L. Schawlow, and G. W. Series. The spectrum of atomic hydrogen. *Sci. Am.*, 240(3):94–111, 1979.

[1178] S. Earnshaw. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 7:97, 1848.

[1179] Raimund V Girwidz. Visualizing dipole radiation. *Eur. J. Phys.*, 37:065206, 2016.

[1180] Y. Babayan, J. M. McMahon, S. Li, S. K. Gray, G. C. Schatz, and T. W. Odom. Confining standing waves in optical corrals. *ACS Nano*, 3:615–620, 2009.

[1181] E. Schrödinger. What is matter? *Sci. Am.*, 189:52–57, 1953.

[1182] B. Friedrich and D. Herschbach. Stern and Gerlach: How a Bad Cigar Helped Reorient Atomic Physics. *Phys. Today*, 56:53–59, 2003.

[1183] V. W. Hughes, D. W. McColm, K. Ziock, and R. Prepost. Formation of muonium and observation of its larmor precession. *Phys. Rev. Lett.*, 5:63–65, 1960.

[1184] A. Kellerbauer. Antimaterie-Spiegelbild oder Zerrbild. Antiwasserstoff im Labor. *Phys. Zeit*, 38:168–175, 2007.

[1185] Andresen et al. Confinement of antihydrogen for 1 000 seconds. *Nature Phys.*, 7:558–564, 2011.

[1186] E. C. Pickering. The spectrum of ζ Puppis. *Astrophys. J.*, 5:92–94, 1897.

[1187] A. Fowler. Observations of the Principal and other Series of Lines in the Spectrum of Hydrogen. (Plates 2-4.). *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, 73:62–63, 1912.

[1188] I. S. Bowen. The origin of the nebulium spectrum. *Nature*, 120:473–473, 1927.

[1189] Moskal et al. Positronium imaging with the novel multiphoton PET scanner. *Sci. Adv.*, 7:eabh4394, 2021.

[1190] E. Gibney. Hyper-precise atomic clocks face off to redefine time. *Nature*, 522:16–17, 2015.

[1191] W. Ritz. On a new law of series spectra. *Astrophys. J.*, 28:237, 1908.

[1192] J.R. Rydberg. On the structure of the line-spectra of the chemical elements. *Kgl. Svenska Vetensk. Akad. Handl.*, 23:1, 1889.

[1193] R. T. Birge and D. H. Menzel. The relative abundance of the oxygen isotopes, and the basis of the atomic weight system. *Phys. Rev.*, 37:1669–1671, 1931.

[1194] H. C. Urey, F. G. Brickwedde, and G. M. Murphy. A hydrogen isotope of mass 2. *Phys. Rev.*, 39:164–165, 1932.

[1195] R. B. Partridge and P. J. E. Peebles. Are young galaxies visible? *Astrophs. J.*, 147:868, 1967.

[1196] E. M. Hu and R. G. McMahon. Detection of Lyman-α-emitting galaxies at redshift 4.55. *Nature*, 382:231–233, 1996.

[1197] M. Ouchi, K. Shimasaku, M. Akiyama, Ch. Simpson, T. Saito, Y. Ueda, H. Furusawa, K. Sekiguchi, T. Yamada, T. Kodama, N. Kashikawa, S. Okamura, M. Iye, T. Takata, M. Yoshida, and M. Yoshida. The subaru/XMM-NewtonDeep survey (SXDS). IV. evolution of lyα emitters from z=3.1 to 5.7 in the $1\,\mathrm{deg}^2$ field: Luminosity functions and AGN. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 176:301–330, 2008.

[1198] E. J. Wampler and J. B. Oke. The emission-line spectrum of 3c 273. *Astrophys. J.*, 148:695, 1967.

[1199] Burgarella et al. HerMES: Lyman break galaxies individually detected at $0.7 \leq z \leq 2.0$ in GOODS-N with HERSCHEL/SPIRE. *Astrophys. J. Lett.*, 734:L12, 2011.

[1200] Álvarez-Márquez, J., Burgarella, D., Heinis, S., Buat, V., Lo Faro, B., Béthermin, M., López-Fortín, C. E., Cooray, A., Farrah, D., Hurley, P., Ibar, E., Ilbert, O., Koekemoer, A. M., Lemaux, B. C., Pérez-Fournon, I., Rodighiero, G., Salvato, M., Scott, D., Taniguchi, Y., Vieira, J. D., and Wang, L. Dust properties of lyman-break galaxies at $z \sim 3$. *Astron. Astrophys.*, 587:A122, 2016.

[1201] Harikane et al. A Search for H-Dropout Lyman Break Galaxies at $z \sim 12 - 16$. *Astrophys. J.*, 929:1, 2022.

[1202] F. Pacucci, P. Dayal, Y. Harikane, Akio K. Inoue, and A. Loeb. Are the newly-discovered $z \sim 13$ drop-out sources starburst galaxies or quasars? *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, 514:L6–L10, 2022.

[1203] C T Kloock. Aerial insects avoid fluorescing scorpions. *Euscorpius*, 2005(21), 2005.

[1204] D. López-Cabrera, G. Ramos-Ortiz, E. González-Santillán, and R. Espinosa-Luna. Characterization of the fluorescence intensity and color tonality in the exoskeleton of scorpions. *J. Photochem. Photobio. B*, 209:111945, 2020.

[1205] F. Daniels, Ch. A. Boyd, and D. F. Saunders. Thermoluminescence as a research tool. *Science*, 117:343–349, 1953.

[1206] E. Schrödinger. Are There Quantum Jumps? Part I. *Br. J. Philos. Sci.*, 3:109–123, 1952.

[1207] N. Hedrich, I. Sergachev, J. Home, and A. Lichtenberger. Direct observations and measurements of single atoms. *Phys. Teach.*, 62:443–445, 2024.

[1208] R. J. Hendricks, D. M. Grant, P. F. Herskind, A. Dantan, and M. Drewsen. An all-optical ion-loading technique for scalable microtrap architectures. *Appl. Phys. B*, 88:507–513, 2007.

[1209] W. Nagourney, J. Sandberg, and H. Dehmelt. Shelved optical electron amplifier: Observation of quantum jumps. *Phys. Rev. Lett.*, 56:2797–2799, 1986.

[1210] J E Gunn and B A Peterson. On the density of neutral hydrogen in intergalactic space. *Astrophys. J.*, 142:1633–1636, 1965.

[1211] R. J. Weymann, R. F. Carswell, and M. G. Smith. Absorption lines in the spectra of quasistellar objects. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 19:41–76, 1981.

[1212] M. Rauch. The Lyman Alpha Forest In The Spectra Of Quasistellar Objects. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 36:267–316, 1998.

[1213] H. Hetznecker. Dunkle Energie: Neues aus dem Lyman-alpha-Wald? *Sterne und Weltraum*, 8:26, 2011.

[1214] J. J. Mestayer, B. Wyker, J. C. Lancaster, F. B. Dunning, C. O. Reinhold, S. Yoshida, and J. Burgdörfer. Realization of Localized Bohr-Like Wave Packets. *Phys. Rev. Lett.*, 100:243004, 2008.

[1215] B. A Schumm. *Deep down things: The breathtaking beauty of particle physics.* Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2004.

[1216] A. A. Michelson and E. W. Morley. LIX. On a method of making the wave-length of sodium light the actual and practical standard of length. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 24(151):463–466, 1887.

[1217] L. Morel, Z. Yao, P. Cladé, and S. Guellati-Khélifa. Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion. *Nature*, 588:61–65, 2020.

[1218] M. T. Murphy, D. A. Berke, F. Liu, Ch. Flynn, Ch. Lehmann, V. A. Dzuba, and V. V. Flambaum. A limit on variations in the fine-structure constant from spectra of nearby sun-like stars. *Science*, 378:634–636, 2022.

[1219] W. B. Jensen. The origin of the s, p, d, f orbital labels. *J. Chem. Educ.*, 84:757, 2007.

[1220] L. Pauling. *The Nature of the Chemical Bond and the Structure of Molecules and Crystals: An Introduction to Modern Structural Chemistry*. Cornell University Press, Ithaca, 1960.

[1221] E. Schrödinger. Versuch zur modellmäßigen Deutung des Terms der scharfen Nebenserien. *Z. Phys.*, 4:347–354, 1921.

[1222] C A J van Gils, S Hofmann, B K H L Boekema, R Brandenburg, and P J Bruggeman. Mechanisms of bacterial inactivation in the liquid phase induced by a remote RF cold atmospheric pressure plasma jet. *J. Phys. D*, 46:175203, 2013.

[1223] M. Aceto, O. Abollino, M. C. Bruzzoniti, E. Mentasti, C. Sarzanini, and M. Malandrino. Determination of metals in wine with atomic spectroscopy (flame-AAS, GF-AAS and ICP-AES); a review. *Food. Addit. Contam.*, 19:126–133, 2002.

[1224] L. Benramdane, F. Bressolle, and J.J. Vallon. Arsenic Speciation in Humans and Food Products: A Review. *J. Chromatogr. Sci.*, 37:330–344, 1999.

[1225] R. Ma, C. W. McLeod, K. Tomlinson, and R. K. Poole. Speciation of protein-bound trace elements by gel electrophoresis and atomic spectrometry. *Electrophoresis*, 25:2469–2477, 2004.

[1226] P. Leach. *Shepton Mallet: Romano-Britons and Early Christians in Somerset*. Birmingham University Archaeology Unit, 1991.

[1227] O. Chamberlain, W. W. Chupp, G. Goldhaber, E. Segrè, C. Wiegand, E. Amaldi, G. Baroni, C. Castagnoli, C. Franzinetti, and A. Manfredini. On the observation of an antiproton star in emulsion exposed at the bevatron. *Il Nuovo Cimento*, 3:447–467, 1956.

[1228] G. Backenstoss. Pionic atoms. *Annu. Rev. Nucl. Sci.*, 20:467–508, 1970.

[1229] M. Iwasaki, R. S. Hayano, T. M. Ito, S. N. Nakamura, T. P. Terada, D. R. Gill, L. Lee, A. Olin, M. Salomon, S. Yen, K. Bartlett, G. A. Beer, G. Mason, G. Trayling, H. Outa, T. Taniguchi, Y. Yamashita, and R. Seki. Observation of Kaonic Hydrogen K_α X Rays. *Phys. Rev. Lett.*, 78:3067–3069, 1997.

[1230] L. Venturelli, M. Amoretti, C. Amsler, G. Bonomi, C. Carraro, C.L. Cesar, M. Charlton, M. Doser, A. Fontana, R. Funakoshi, P. Genova, R.S. Hayano, L.V. Jørgensen, A. Kellerbauer, V. Lagomarsino, R. Landua, E. Lodi Rizzini, M. Macrì, N. Madsen, G. Manuzio, D. Mitchard, P. Montagna, L.G. Posada, H. Pruys, C. Regenfus, A. Rotondi, G. Testera, D.P. Van der Werf, A. Variola, Y. Yamazaki, and N. Zurlo. Protonium production in ATHENA. *Nucl. Instr Meth. B*, 261:40–43, 2007.

[1231] Zhabitsky, M. First πK atom lifetime measurement and recent results from the DIRAC experiment. *EPJ Web of Conferences*, 81:01019, 2014.

[1232] Ahmadi et al. Observation of the 1s–2s transition in trapped antihydrogen. *Nature*, 541:506–510, 2017.

[1233] Baker et al. Laser cooling of antihydrogen atoms. *Nature*, 592:35–42, 2021.

[1234] A. Grinin, A. Matveev, D. C. Yost, L. Maisenbacher, V. Wirthl, R. Pohl, Th. W. Hänsch, and Th. Udem. Two-photon frequency comb spectroscopy of atomic hydrogen. *Science*, 370:1061–1066, 2020.

[1235] A. Landé. Über den anomalen Zeemaneffekt (Teil I). *Z. Phys.*, 5:231–241, 1921.

[1236] D. Castelvecchi. Is the standard model broken? Physicists cheer major muon result. *Nature*, 592:333–334, 2021.

[1237] R H Garstang. Atoms in high magnetic fields (white dwarfs). *Reports on Progress in Physics*, 40:105–154, 1977.

[1238] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit. Spinning electrons and the structure of spectra. *Nature*, 117:264–265, 1926.

[1239] W. Gerlach and O. Stern. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. *Z. Phys.*, 9:349–352, 1922.

[1240] W. Pauli. Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. *Z.. Phys.*, 31:765–783, 1925.

[1241] P: A. M. Dirac and R. H. Fowler. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 117:610–624, 1928.

[1242] A. K. Shukla. *Electron Spin Resonance: An Introduction*, pages 1–14. Springer International Publishing, Cham, 2021.

[1243] S. Subramanian and M. C. Krishna. *Electron paramagnetic resonance imaging*, pages 112–127. Future Science Ltd, London, 2013.

[1244] P. Micke, T. Leopold, S. A. King, E. Benkler, L. J. Spieß, L. Schmöger, M. Schwarz, J. R. Crespo López-Urrutia, and P. O. Schmidt. Coherent laser spectroscopy of highly charged ions using quantum logic. *Nature*, 578:60–65, 2020.

[1245] T. E. Phipps and J. B. Taylor. The magnetic moment of the hydrogen atom. *Phys. Rev.*, 29:309–320, 1927.

[1246] G. Gamow. The Exclusion Principle. *Sci. Am.*, 201:74, 1959.

[1247] R. Chang. *Physical Chemistry for the Biosciences*. Openstax, Houston, 2012.

[1248] J. C. Slater. Atomic shielding constants. *Phys. Rev.*, 36:57–64, 1930.

[1249] N. Bohr. The spectra of helium and hydrogen. *Nature*, 92:231–232, 1913.

[1250] B. Bröcker. *dtv-Atlas zur Atomphysik*. dtv, München, 2 edition, 1980.

[1251] D. Coster and G. Hevesey. On celtium and hafnium. *Nature*, 111:462–463, 1923.

[1252] Ingrid Pelisoli, T R Marsh, V S Dhillon, E Breedt, A J Brown, M J Dyer, M J Green, P Kerry, S P Littlefair, S G Parsons, D I Sahman, and J F Wild. Found: a rapidly spinning white dwarf in LAMOST J024048.51+195226.9. *Mon. Notices Royal Astron. Soc. Lett.*, 509:L31–L36, 2021.

[1253] A. Hewish. Pulsars. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 8(1):265–296, 1970.

[1254] Th. Mann. *Der Zauberberg*. Fischer, Frankfurt, 14 edition, 2003.

[1255] W. C. Röntgen. On a new kind of rays. *Nature*, 53:274–276, 1896.

[1256] W. C. Röntgen. Ueber eine neue Art von Strahlen. *Ann. Phys.*, 300:12–17, 1898.

[1257] S. Galli. X-ray Crystallography: One Century of Nobel Prizes. *J. Chem. Educ.*, 91:2009–2012, 2014.

[1258] I. M. Klotz. The N-Ray Affair. *Sci. Am.*, 242(5):168, 1980.

[1259] A. Alexi. Early history of x rays, 1995.

[1260] T L Walden. The first radiation accident in america: a centennial account of the x-ray photograph made in 1890. *Radiology*, 181:635–639, 1991.

[1261] Th. W. Todd. The clinical anatomy of the gastro-intestinal tract. *Br. Med. J.*, 1:1985, 1915.

[1262] C. G. Camara, J. V. Escobar, J. R. Hird, and S. J. Putterman. Correlation between nanosecond x-ray flashes and stick–slip friction in peeling tape. *Nature*, 455:1089–1092, 2008.

[1263] F. Wilczek. Quantum beauty: real and ideal, 2021.

[1264] W. H. Tucker. The x-ray universe. SLAC Beam Line, 1995.

[1265] W. Friedrich, P. Knipping, and M. Laue. Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen. *Ann. Phys.*, 346:971–988, 1913.

[1266] J. R. Hird, C. G. Camara, and S. J. Putterman. A triboelectric x-ray source. *Appl. Phys. Lett.*, 98:133501, 2011.

[1267] eROSITA. extended ROentgen Survey with an Imaging Telescope Array. `https://www.mpe.mpg.de/450415/eROSITA`.

[1268] C. J. Hailey, K. Mori, F. E. Bauer, M. E. Berkowitz, J. Hong, and B. J. Hord. A density cusp of quiescent x-ray binaries in the central parsec of the galaxy. *Nature*, 556:70–73, 2018.

[1269] H. Friedman, S. W. Lichtman, and E. T. Byram. Photon counter measurements of solar x-rays and extreme ultraviolet light. *Phys. Rev.*, 83:1025–1030, 1951.

[1270] R. Giacconi, H. Gursky, F. R. Paolini, and B. B. Rossi. Evidence for x rays from sources outside the solar system. *Phys. Rev. Lett.*, 9:439–443, 1962.

[1271] H. Gursky, R. Giacconi, F. R. Paolini, and B. B. Rossi. Further evidence for the existence of galactic x rays. *Phys. Rev. Lett.*, 11:530–535, 1963.

[1272] James L. Reed. The genius of slater's rules. *J. Chem. Educ.*, 76:802, 1999.

[1273] M. Siegbahn. Relations between the K and L Series of the High-Frequency Spectra. *Nature*, 96:676–676, 1916.

[1274] F. Reinhardt, B. Beckhoff, H. Eba, B. Kanngiesser, M. Kolbe, M. Mizusawa, M. Müller, B. Pollakowski, K. Sakurai, and G. Ulm. Evaluation of high-resolution x-ray absorption and emission spectroscopy for the chemical speciation of binary titanium compounds. *Anal. Chem.*, 81:1770–1776, 2009.

[1275] L. Antonelli, P. Forestier-Colleoni, G. Folpini, R. Bouillaud, A. Faenov, L. Fedeli, C. Fourment, L. Giuffrida, S. Hulin, S. Pikuz, J. J. Santos, L. Volpe, and D. Batani. Measurement of reflectivity of spherically bent crystals using Kα signal from hot electrons produced by laser-matter interaction. *Rev. Sci. Instr.*, 86:073507, 2015.

[1276] L. v. Hámos. Röntgenspektroskopie und Abbildung mittels gekrümmter Kristallreflektoren. *Naturwissenschaften*, 20:705–706, 1932.

[1277] Ch. H. Shaw and L. G. Parratt. K_α Satellite Lines for Elements Zn(30) to Pd(46). *Phys. Rev.*, 50:1006–1012, 1936.

[1278] M. O. Krause and J. H. Oliver. Natural widths of atomic K and L levels, Kα X-ray lines and several KLL Auger lines. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 8:329–338, 1979.

[1279] D. R. Dance, S. Christofides, A. D. A. Maidment, I. D. McLean, and K.H. Ng. *Diagnostic radiology physics*, volume 299. IAEA, Vienna, 2014.

[1280] L. Meitner. Über die β-Strahl-Spektra und ihren Zusammenhang mit der γ-Strahlung. *Z. Phys.*, 11:35–54, 1922.

[1281] J. P. Hughes, I. Hayashi, D. Helfand, U. Hwang, M. Itoh, R. Kirshner, K. Koyama, Th. Markert, H. Tsunemi, and J. Woo. ASCA Observations of the Large Magellanic Cloud Supernova Remnant Sample: Typing Supernovae from Their Remnants. *Astrophys. J.*, 444:L81, 1995.

[1282] S. E. Woosley and Th. A. Weaver. The Evolution and Explosion of Massive Stars. II. Explosive Hydrodynamics and Nucleosynthesis. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 101:181, 1995.

[1283] M. J. Rees. Black hole models for active galactic nuclei. *Ann. Rev. of Astron. Astrophys.*, 22:471–506, 1984.

[1284] A. van der Broek. The number of possible elements and mendeléff's cubic periodic system. *Nature*, 87:78–78, 1911.

[1285] H. Moseley. LXXX. The high-frequency spectra of the elements. Part II. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 27:703–713, 1914.

[1286] H. Moseley. XCIII. The high-frequency spectra of the elements. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 26:1024–1034, 1913.

[1287] C. G. Barkla. Phenomena of x-ray transmission. In *Proc. Camb. Philos. Soc*, volume 15, pages 257–268, 1909.

[1288] M. Siegbahn. *X-ray Spectroscopy*, pages 265–276. Springer US, Boston, MA, 1962.

[1289] E. R. Levin. Principles of X-Ray Spectroscopy. *Scan. Electron. Microsc.*, 1986:65, 1986.

[1290] N. De Keyser, F. Broers, F. Vanmeert, S. De Meyer, F. Gabrieli, E. Hermens, G. Van der Snickt, K. Janssens, and K. Keune. Reviving degraded colors of yellow flowers in 17th century still life paintings with macro- and microscale chemical imaging. *Sci. Adv.*, 8:eabn6344, 2022.

[1291] G. Z. Yue, Q. Qiu, Bo Gao, Y. Cheng, J. Zhang, H. Shimoda, S. Chang, J. P. Lu, and O. Zhou. Generation of continuous and pulsed diagnostic imaging x-ray radiation using a carbon-nanotube-based field-emission cathode. *Appl. Phys. Lett.*, 81:355–357, 2002.

[1292] C. T. Bolton. Identification of Cygnus X-1 with HDE 226868. *Nature*, 235:271–273, 1972.

[1293] C. T. Ulrey. An Experimental Investigation of the Energy in the Continuous X-Ray Spectra Of Certain Elements. *Phys. Rev.*, 11:401–410, 1918.

[1294] W. Duane and F. L. Hunt. On x-ray wave-lengths. *Phys. Rev.*, 6:166–172, 1915.

[1295] E. P. Bertin. *Principles and practice of X-ray spectrometric analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.

[1296] A. T. Macrander and X. R. Huang. Synchrotron x-ray optics. *Ann. Rev. Mat. Res.*, 47:135–152, 2017.

[1297] H. Wolter. Spiegelsysteme streifenden Einfalls als abbildende Optiken für Röntgenstrahlen. *Ann. Phys.*, 445:94–114, 1952.

[1298] W. Meyer-Ilse, D. Hamamoto, A. Nair, S. A. Lelièvre, G. Denbeaux, L. Johnson, A. L. Pearson, D. Yager, M. A. Legros, and C. A. Larabell. High resolution protein localization using soft x-ray microscopy. *J. Microsc.*, 201:395–403, 2001.

[1299] S. C. B. Myneni, J. T. Brown, G. A. Martinez, and W. Meyer-Ilse. Imaging of humic substance macromolecular structures in water and soils. *Science*, 286:1335–1337, 1999.

[1300] H. Stoll, A. Puzic, B. van Waeyenberge, P. Fischer, J. Raabe, M. Buess, Th. Haug, R. Höllinger, Ch. Back, D. Weiss, and G. Denbeaux. High-resolution imaging of fast magnetization dynamics in magnetic nanostructures. *Appl. Phys. Lett.*, 84:3328–3330, 2004.

[1301] C. A. Larabell and M. A. Le Gros. X-ray tomography generates 3-d reconstructions of the yeast, saccharomyces cerevisiae, at 60-nm resolution. *Mol. Bio. Cell*, 15:957–962, 2004.

[1302] W. Chao, B. D. Harteneck, J. A. Liddle, E. H. Anderson, and D. T. Attwood. Soft x-ray microscopy at a spatial resolution better than 15 nm. *Nature*, 435:1210–1213, 2005.

[1303] D. J. Helfand. X rays from the rest of the universe. *Phys. Today*, 48:58–64, 1995.

[1304] A. T. Macrander and X. Huang. Synchrotron x-ray optics. *Annu. Rev. Mat. Res.*, 47:135–152, 2017.

[1305] W. Chao, B. D. Harteneck, J. A. Liddle, E. H. Anderson, and D. T. Attwood. Soft x-ray microscopy at a spatial resolution better than 15 nm. *Nature*, 435:1210–1213, 2005.

[1306] G. E. Ice, J D. Budai, and J. W. L. Pang. The race to x-ray microbeam and nanobeam science. *Science*, 334:1234–1239, 2011.

[1307] K Sansare, V Khanna, and F Karjodkar. Early victims of x-rays: a tribute and current perception. *Dentomaxillofac. Radiol.*, 40:123–125, 2011.

[1308] M. Artico, M. Spoletini, L. Fumagalli, F. Biagioni, L. Ryskalin, F. Fornai, M. Salvati, A. Frati, F. S. Pastore, and S. Taurone. Egas Moniz: 90 Years (1927-2017) from Cerebral Angiography. *Front. Neuroanat.*, 11:81, 2017.

[1309] W. Forssmann. Die Sondierung des Rechten Herzens. *Klinische Wochenschrift*, 8:2085–2087, 1929.

[1310] E Moniz, A Diaz, and A Lima. La radioartériographie et la topographie cranioencephalique. *J. Radiol. Electrol. Med. Nucl.*, 12:72, 1928.

[1311] J. Anthony Seibert and John M. Boone. X-Ray Imaging Physics for Nuclear Medicine Technologists. Part 2: X-Ray Interactions and Image Formation. *J. Nucl. Med. Techn.*, 33:3–18, 2005.

[1312] J. Duffin and Ch. R. R. Hayter. Baring the sole: The rise and fall of the shoe-fitting fluoroscope. *Isis*, 91:260–282, 2000.

[1313] D. R. Lapp. The X-ray Shoe Fitter - An Early Application of Roentgens New Kind of Ray. *Phys. Teach.*, 42:354–358, 2004.

[1314] L. H. Toledo-Pereyra. X-rays surgical revolution. *Journal of Investigative Surgery*, 22:327–332, 2009.

[1315] MORA. Museum of radium. `https://museumofradium.co.uk`. last visit: 2024-06-11.

[1316] F. Ballester and J. M. Udías. Física nuclear y medicina. *Rev Esp Fís*, 22(1), 2008.

[1317] H. A. Tritthart. *Physik und Biophysik für Mediziner*. Schattauer, 2 edition, 2011.

[1318] The Free Dictionary. Medical dictionary. `https://medical-dictionary.thefreedictionary.com`.

[1319] D. C. Giancoli. *Physics for scientists and engineers*, volume 2. Prentice Hall, Upper Saddle River, 7 edition, 2014.

[1320] P. J. Withers, Ch. Bouman, S. Carmignato, V. Cnudde, D. Grimaldi, C. K. Hagen, E. Maire, M. Manley, A. Du Plessis, and S. R. Stock. X-ray computed tomography. *Nat. Rev. Methods Primers*, 1:18, 2021.

[1321] Johann Radon. Uber die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte langs gewissez mannigfaltigheiten, ber. *Verh. Sachs. Akad. Wiss.*, 69, 1917.

[1322] R. Hanke, T. Fuchs, M. Salamon, and S. Zabler. 3 - x-ray microtomography for materials characterization. In G. Hübschen, I. Altpeter, R. Tschuncky, and H.-G.Herrmann, editors, *Materials Characterization Using Nondestructive Evaluation (NDE) Methods*, pages 45–79. Woodhead Publishing, Sawston, 2016.

[1323] S. Svanberg, S. Anderson-Engels, R. Cubeddu, E. Förster, M. Grätz, K. Herrlin, G. Hölzer, L. Kiernan, C. af Klinteberg, A. Persson, and et al. Generation, characterization, and medical utilization of laser-produced emission continua. *Laser Part. Beams*, 18:563, 2000.

[1324] B. Yu, R. S. Bradley, C. Soutis, and P. J. Withers. A comparison of different approaches for imaging cracks in composites by x-ray microtomography. *Phil. Trans. A*, 374(2071):20160037, 2016.

[1325] NASA. Aerosol optical depth. `https://earthobservatory.nasa.gov/global-maps/MODAL2_M_AER_OD`. last visit: 2024-06-11.

[1326] Sune Svanberg. Gas in scattering media absorption spectroscopy - from basic studies to biomedical applications. *Laser Photon. Rev.*, 7:779–796, 2013.

[1327] B. N. Holben, D. Tanré, A. Smirnov, T. F. Eck, I. Slutsker, N. Abuhassan, W. W. Newcomb, J. S. Schafer, B. Chatenet, F. Lavenu, Y. J. Kaufman, J. Vande Castle, A. Setzer, B. Markham, D. Clark, R. Frouin, R. Halthore, A. Karneli, N. T. O'Neill, C. Pietras, R. T. Pinker, K. Voss, and G. Zibordi. An emerging ground-based aerosol climatology: Aerosol optical depth from AERONET. *J. Geophys. Res. Atmos.*, 106:12067–12097, 2001.

[1328] M. Endrizzi. X-ray phase-contrast imaging. *Nucl Instr. Meth. A*, 878:88–98, 2018.

[1329] Radiology Key. Fastest radiology insight engine. `https://radiologykey.com`.

[1330] B. D. Arhatari, T. E. Gureyev, and B. Abbey. Elemental contrast x-ray tomography using ross filter pairs with a polychromatic laboratory source. *Sci. Rep.*, 7:218, 2017.

[1331] J.B. Lee, J.I. Byun, and J.Y. and Yun. Mass attenuation coefficients of environmental samples for gamma-ray energies from 46.5 keV to 1408 keV. *Int. J. Radiat. Res.*, 18, 2020.

[1332] W. C. Parke. *Biophysics*. Springer, Cham, 2020.

[1333] P. A. Alpert, A. Boucly, S. Yang, H. Yang, K. Kilchhofer, Z. Luo, C. Padeste, S. Finizio, M. Ammann, and B. Watts. Ice nucleation imaged with x-ray spectromicroscopy. *Environ. Sci. Atmos.*, 2:335–351, 2022.

[1334] J. A.eibert. X-Ray Imaging Physics for Nuclear Medicine Technologists. Part 1: Basic Principles of X-Ray Production. *J. Nucl. Med. Techn.*, 32:139–147, 2004.

[1335] T. Gog, P. M. Len, G. Materlik, D. Bahr, C. S. Fadley, and C. Sanchez-Hanke. Multiple-Energy X-Ray Holography: Atomic Images of Hematite (F_2O_3). *Phys. Rev. Lett.*, 76:3132–3135, 1996.

[1336] C. H. McCollough, K. Boedeker, D. Cody, X. Duan, Th. Flohr, S. S. Halliburton, J. Hsieh, R. R. Layman, and N. J. Pelc. Principles and applications of multienergy CT: Report of AAPM Task Group 291. *Med Phys.*, 47:e881–e912, 2020.

[1337] M. Kördel, A. Dehlinger, Ch. Seim, U. Vogt, E. Fogelqvist, J. A. Sellberg, H. Stiel, and H. M. Hertz. Laboratory water-window x-ray microscopy. *Optica*, 7:658–674, 2020.

[1338] V. Mocella, E. Brun, C. Ferrero, and D. Delattre. Revealing letters in rolled herculaneum papyri by x-ray phase-contrast imaging. *Nature Commun.*, 6:5895, 2015.

[1339] D. A. Shapiro, Y.-S. Yu, T. Tyliszczak, J. Cabana, R. Celestre, W. Chao, K. Kaznatcheev, A. L. D. Kilcoyne, F. Maia, S. Marchesini, Y. S. Meng, T. Warwick, L. L. Yang, and H. A. Padmore. Chemical composition mapping with nanometre resolution by soft x-ray microscopy. *Nature Phot.*, 8:765–769, 2014.

[1340] R. I. Ionasec, B. Heigl, and J. Hornegger. Acquisition-related motion compensation for digital subtraction angiography. *Comput. Med. Imaging Graph.*, 33:256–266, 2009.

[1341] O. E. Wetter. Imaging in airport security: Past, present, future, and the link to forensic and clinical radiology. *J. Forensic Radiol. Imaging*, 1:152–160, 2013.

[1342] A. Pietrobelli, C. Formica, Z. Wang, and S. B. Heymsfield. Dual-energy x-ray absorptiometry body composition model: review of physical concepts. *Am. J. Physiol. Endocrinol. Metab.*, 271:E941–E951, 1996.

[1343] A. Altman and R. Aaron. Dual x-ray absorptiometry. *Am. J. Phys.*, 80:621–626, 2012.

[1344] S Bayat, G Le Duc, L Porra, G Berruyer, C Nemoz, S Monfraix, S Fiedler, W Thomlinson, P Suortti, C G Standertskjöld-Nordenstam, and A R A Sovijärvi. Quantitative functional lung imaging with synchrotron radiation using inhaled xenon as contrast agent. *Phys. Med. Bio.*, 46:3287, 2001.

[1345] R. Wake, M. Yoshiyama, H. Iida, H. Takeshita, T. Kusuyama, H. Kanamitsu, H. Mitsui, Y. Yamada, S. Shimodozono, and K. Haze. History of coronary angiography. In S. F. Kirac, editor, *Advances in the Diagnosis of Coronary Atherosclerosis*, chapter 4. IntechOpen, Rijeka, 2011.

[1346] E. Rubenstein, R. Hofstadter, H. D. Zeman, A C. Thompson, J. N. Otis, G. S. Brown, J. C. Giacomini, H. J. Gordon, R. S. Kernoff, D. C. Harrison, and W. Thomlinson. Transvenous coronary angiography in humans using synchrotron radiation. *PNAS*, 83:9724–9728, 1986.

[1347] C. G. Barkla. Polarisation in Röntgen Rays. *Nature*, 69:463–463, 1904.

[1348] W. H. Bragg and W. L. Bragg. The reflection of x-rays by crystals. *Proc. Royal Soc. A*, 88:428–438, 1913.

[1349] L. Bragg. X-ray crystallography. *Sci. Am.*, 219:58–74, 1968.

[1350] W. M. Stanley. Isolation of a crystalline protein possessing the properties of tobacco-mosaic virus. *Science*, 81:644–645, 1935.

[1351] W. Krätschmer, Lowell D. Lamb, K. Fostiropoulos, and Donald R. Huffman. Solid C_60: a new form of carbon. *Nature*, 347:354–358, 1990.

[1352] M. Eckert. Max von Laue and the discovery of X-ray diffraction in 1912. *Ann. Phys.*, 524:A83–A85, 2012.

[1353] M. de Broglie. Sur une nouveau procédé permettant d'obtenir la photographie des spectres de raies des rayons röntgen. *Comptes Rendus*, 157:924–926, 1913.

[1354] N. Sakabe. X-ray diffraction data collection system for modern protein crystallography with a Weissenberg camera and an imaging plate using synchrotron radiation. *Nucl. Instrum. Meth. B*, 303:448–463, 1991.

[1355] E Schiebold. Über ein neues Röntgengoniometer. *Z. Kristallogr. Cryst. Mater.*, 86:370–383, 1933.

[1356] P Debye and P Scherrer. Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht. II. *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl.*, 1916:16–26, 1916.

[1357] A. Guinier. *X-ray crystallographic technology.* Hilger and Watts, 1952.

[1358] T. Li, A. J. Senesi, and B. Lee. Small angle x-ray scattering for nanoparticle research. *Chem. Rev.*, 116:11128–11180, 2016.

[1359] I. M. Tidswell, T. A. Rabedeau, P. S. Pershan, S. D. Kosowsky, J. P. Folkers, and George M. Whitesides. X-ray grazing incidence diffraction from alkylsiloxane monolayers on silicon wafers. *J. Chem. Phys.*, 95:2854–2861, 1991.

[1360] J. P. Glusker, M. Lewis, and M. Rossi. *Crystal structure analysis for chemists and biologists*, volume 16. Wiley & Sons, 1996.

[1361] N. Begam, A. Ragulskaya, A. Girelli, H. Rahmann, S. Chandran, F. Westermeier, M. Reiser, M. Sprung, F. Zhang, Ch. Gutt, and F. Schreiber. Kinetics of network formation and heterogeneous dynamics of an egg white gel revealed by coherent x-ray scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 126:098001, 2021.

[1362] F. Vanmeert, G. Van der Snickt, and K. Janssens. Plumbonacrite Identified by X-ray Powder Diffraction Tomography as a Missing Link during Degradation of Red Lead in a Van Gogh Painting. *Ang. Chem.Int. Ed.*, 54:3607–3610, 2015.

[1363] C. G. Shull and E. O. Wollan. X-ray, electron, and neutron diffraction. *Science*, 108:69–75, 1948.

[1364] David F. Rendle. Advances in chemistry applied to forensic science. *Chem. Soc. Rev.*, 34:1021–1030, 2005.

[1365] Marc Evers. Physikuntericht online. https://physikunterricht-online.de.

[1366] J. Hüfner and R. Löhken. *Physik ohne Ende.* Wiley, Berlin, 2010.

[1367] G Harburn, C. A. Tayler, and T. R. Welberry. *Atlas of optical transforms*. Cornell University Press, Ithaca, New York, 1975.

[1368] R. E. Franklin and R. G. Gosling. Molecular configuration in sodium thymonucleate. *Nature*, 171:740–741, 1953.

[1369] J. D. Watson and F. H. C. Crick. Molecular Structure of Nucleic Acids: A Structure for Deoxyribose Nucleic Acid. *Nature*, 171:737–738, 1953.

[1370] J. D. Watson. *Die Doppelhelix*. rororo, Hamburg, 21 edition, 2011.

[1371] M. Cobb and N. Comfort. What Rosalind Franklin truly contributed to the discovery of DNAs structure. *Nature*, 61:657, 2023.

[1372] V. Cherezov, D. M. Rosenbaum, M. A. Hanson, S. G. F. Rasmussen, F. S. Thian, T. S. Kobilka, H.-J. Choi, P. Kuhn, W. I. Weis, B. K. Kobilka, and R. C. Stevens. High-resolution crystal structure of an engineered human β_2-adrenergic g protein-coupled receptor. *Science*, 318:1258–1265, 2007.

[1373] N. E. Chayen, T. J. Boggon, A. Cassetta, A. Deacon, T. Gleichmann, J. Habash, S. J. Harrop, J. R. Helliwell, Y. P. Nieh, M. R. Peterson, and et al. Trends and challenges in experimental macromolecular crystallography. *Q. Rev. Biophys.*, 29:227–278, 1996.

[1374] Hodgkin et al. Structure of Vitamin B_{12}. *Nature*, 178:64–66, 1956.

[1375] J. C. Kendrew, G. Bodo, H. M. Dintzis, R. G. Parrish, H. Wyckoff, and D. C. Phillips. A three-dimensional model of the myoglobin molecule obtained by x-ray analysis. *Nature*, 181:662–666, 1958.

[1376] J. Deisenhofer, O. Epp, K. Miki, R. Huber, and H. Michel. Structure of the protein subunits in the photosynthetic reaction centre of Rhodopseudomonas viridis at 3 Å resolution. *Nature*, 318:618–624, 1985.

[1377] Günther et al. X-ray screening identifies active site and allosteric inhibitors of SARS-CoV-2 main protease. *Science*, 372:642–646, 2021.

[1378] S. Thangadurai, J. T. Abraham, A. K. Srivastava, M. Nataraja Moorthy, S. K. Shukla, and Y. Anjaneyulu. X-ray powder diffraction patterns for certain β-lactam, tetracycline and macrolide antibiotic drugs. *Anal. Sci.*, 21:833–838, 2005.

[1379] Chapman et al. Femtosecond diffractive imaging with a soft-x-ray free-electron laser. *Nature Phys.*, 2:839–843, 2006.

[1380] Schot et al. Imaging single cells in a beam of live cyanobacteria with an x-ray laser. *Nature Commun.*, 6:5704, 2015.

[1381] P. J. Ho, B. J. Daurer, M. F. Hantke, J. Bielecki, A. Al Haddad, M. Bucher, G. Doumy, K. R. Ferguson, L. Flückiger, T. Gorkhover, B. Iwan, Ch. Knight, S. Moeller, T. Osipov, D. Ray, S. H. Southworth, M. Svenda, N. Timneanu, A. Ulmer, P. Walter, J. Hajdu, L. Young, F. R. N. C. Maia, and Ch. Bostedt. The role of transient resonances for ultra-fast imaging of single sucrose nanoclusters. *Nature Commun.*, 11:167, 2020.

[1382] S. Eisebitt, J. Lüning, W. F. Schlotter, M. Lörgen, O. Hellwig, W. Eberhardt, and J. Stöhr. Lensless imaging of magnetic nanostructures by x-ray spectroholography. *Nature*, 432:885–888, 2004.

[1383] Seibert et al. Single mimivirus particles intercepted and imaged with an x-ray laser. *Nature*, 470:78–81, 2011.

[1384] J. Geilhufe, B. Pfau, M. Schneider, F. Büttner, C. M. Günther, S. Werner, S. Schaffert, E. Guehrs, S. Frömmel, M. Kläui, and S. Eisebitt. Monolithic focused reference beam x-ray holography. *Nature Commun.*, 5:3008, 2014.

[1385] Gorkhover *et. al.* Femtosecond and nanometre visualization of structural dynamics in superheated nanoparticles. *Nature Phot.*, 10:93–97, 2016.

[1386] Gorkhover et al. Femtosecond X-ray Fourier holography imaging of free-flying nanoparticles. *Nature Phot*, 12:150–153, 2018.

[1387] Christou et al. Time-resolved crystallography captures light-driven DNA repair. *Science*, 382:1015–1020, 2023.

[1388] R. Feynman. Jiggling atoms. `https://www.youtube.com/watch?v=NA4odJfINkE&t=4s`, 2010. last visit: 2024-06-11.

[1389] R. Neutze, R. Wouts, D. van der Spoel, Weckert E, and J. Hajdu. Potential for biomolecular imaging with femtosecond x-ray pulses. *Nature*, 406:752–757, 2000.

[1390] P. Fromme and J. C. H. Spence. Molekulare Schnappschüsse. *Spektr. Wiss.*, 10:62, 2017.

[1391] J Walker. Interference patterns made by motes on dusty mirrors. *Sci. Am.*, 245(2):146, 1981.

[1392] H. N. Chapman, S. P. Hau-Riege, M. J. Bogan, S. Bajt, A. Barty, S. Boutet, S. Marchesini, M. Frank, B. W. Woods, W. H. Benner, R. A. London, U. Rohner, A. Szöke, E. Spiller, Th. Möller, Ch. Bostedt, D. A. Shapiro, M. Kuhlmann, R. Treusch, E. Plönjes, F. Burmeister, M. Bergh, C. Caleman, G. Huldt, M. M. Seibert, and J Hajdu. Femtosecond time-delay x-ray holography. *Nature*, 448:676–679, 2007.

[1393] E. Wiedemann. Ueber Fluorescenz und Phosphorescenz I. Abhandlung. *Ann. Phys.*, 270:446–463, 1888.

[1394] G. Destriau. AC electroluminesence in ZnS. *J. Chimie Phys.*, 33:1936, 587.

[1395] S. H.D. Haddock, M. A. Moline, and J. F. Case. Bioluminescence in the sea. *Annu. Rev. Mar. Sci.*, 2:443–493, 2010.

[1396] H. Frenzel and H. Schultes. Luminescenz im ultraschallbeschickten Wasser. *Z. Phys. Chem.*, 27B:421–424, 1934.

[1397] A. J. Walton and G. T. Reynolds. Sonoluminescence. *Adv. Phys.*, 33:595–660, 1984.

[1398] L. A. Crum and R. A. Roy. Sonoluminescence. *Science*, 266:233–234, 1994.

[1399] A. Einstein. Strahlungs-emission und -absorption nach der Quantentheorie. *Verh. Dtsch. Phys. Ges.*, 18:121, 1916.

[1400] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93:99–110, 1954.

[1401] pro physik. `https://pro-physik.de`. last visit: 2024-06-13.

[1402] M. Gray. Astrophysical masers. *Phil. Trans. Royal Soc. A*, 357:3277–3298, 1999.

[1403] M. Gray. *Maser Sources in Astrophysics*, volume 50. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[1404] V. Strelnitski, M. R. Haas, H. A. Smith, E. F. Erickson, S. W. J. Colgan, and D. J. Hollenbach. Far-Infrared Hydrogen Lasers in the Peculiar Star MWC 349A. *Science*, 272:1459–1461, 1996.

[1405] T. H. Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, 187:493–494, 1960.

[1406] I. Wieder and L. R. Sarles. Stimulated optical emission from exchange-coupled ions of cr^{+++} in al_2o_3. *Phys. Rev. Lett.*, 6:95–96, 1961.

[1407] P. P. Sorokin and M. J. Stevenson. Stimulated infrared emission from trivalent uranium. *Phys. Rev. Lett.*, 5:557–559, 1960.

[1408] P. Rabinowitz, S. Jacobs, and G. Gould. Continuous optically pumped cs laser. *Appl. Opt.*, 1:513–516, 1962.

[1409] A. Javan, W. R. Bennett, and D. R. Herriott. Population inversion and continuous optical maser oscillation in a gas discharge containing a he-ne mixture. *Phys. Rev. Lett.*, 6:106–110, 1961.

[1410] J. Tollefson and E. Gibney. Nuclear-fusion lab achieves ignition: What does it mean? *Nature*, 612:597, 202.

[1411] D. Clery. With historic explosion, a long sought fusion breakthrough. *Science*, 378:1154, 2022.

[1412] Ch. Austin, T. M. Smith, A. Bradman, K. Hinde, R. Joannes-Boyau, D. Bishop, D. J. Hare, Ph. Doble, B. Eskenazi, and M. Arora. Barium distributions in teeth reveal early-life dietary transitions in primates. *Nature*, 498:216–219, 2013.

[1413] A. Einstein. Zur Theorie der Strahlung. *Phys. Z.*, 18:121, 1917.

[1414] A. L. Schalow. Laser light. *Sci. Am.*, 219:120, 1968.

[1415] G. R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Dover, New York, 2 edition, 1968.

[1416] R. W. Hakala. Simple justification of the form of Boltzmann's distribution law. *J. Chem.. Edu.*, 44:657, 1967.

[1417] R. Ladenburg. Untersuchungen über die anomale Dispersion angeregter Gase. *Z. Phys.*, 48:15–25, 1928.

[1418] V. A. Fabrikant. Emission mechanism of a gas discharge. *Tr. Vses. Elektrotekh. Inst.*, 41:236, 1940.

[1419] D. L. Matthews and M. D. Rosen. Soft-x-ray lasers. *Sci. Am.*, 259(6):86–91, 1988.

[1420] F. Träger, editor. *Springer Handbook of Lasers and Optics*. Springer, Berlin, 2012.

[1421] D. G. Matei, T. Legero, S. Häfner, C. Grebing, R. Weyrich, W. Zhang, L. Sonderhouse, J. M. Robinson, J. Ye, F. Riehle, and U. Sterr. 1.5μm Lasers with Sub-10 mHz Linewidth. *Phys. Rev. Lett.*, 118:263202, 2017.

[1422] R. Mirdell, F. Iredahl, F. Sjöberg, S. Farnebo, and E. Tesselaar. Microvascular blood flow in scalds in children and its relation to duration of wound healing: A study using laser speckle contrast imaging. *Burns*, 42:648–654, 2016.

[1423] A.F. Fercher and J.D. Briers. Flow visualization by means of single-exposure speckle photography. *Opt. Commun.*, 37:326–330, 1981.

[1424] G.A. Alphonse, D.B. Gilbert, M.G. Harvey, and M. Ettenberg. High-power superluminescent diodes. *J. Quant. Electr.*, 24:2454–2457, 1988.

[1425] LCLS. Frei nach Maiman. *Phys. J.*, 23:26, 2024.

[1426] J. Hecht. Short history of laser development. *Opt. Eng.*, 49:091002, 2010.

[1427] W. E. Lamb and R. C. Retherford. Fine Structure of the Hydrogen Atom. Part I. *Phys. Rev.*, 79:549–572, 1950.

[1428] E. M. Purcell and R. V. Pound. A nuclear spin system at negative temperature. *Phys. Rev.*, 81:279–280, 1951.

[1429] J. P. Gordon, H. J. Zeiger, and C. H. Townes. Molecular Microwave Oscillator and New Hyperfine Structure in the Microwave Spectrum of NH_3. *Phys. Rev.*, 95:282–284, 1954.

[1430] C.H. Townes. *How the Laser Happened. Adventures of a Scientist*. Oxford University Press, Oxford, 1999.

[1431] H. Weaver, D. R. W. Williams, N. H. Dieter, and W. T. Lum. Observations of a strong unidentified microwave line and of emission from the oh molecule. *Nature*, 208:29–31, 1965.

[1432] B. A. McGuire, R. A. Loomis, C. M. Charness, J. F. Corby, G. A. Blake, J. M. Hollis, F. J. Lovas, P. R. Jewell, and A. J. Remijan. Interstellar carbodiimide (HNCNH): A new astronomical detection from the GBT PRIMOS survey via maser emission features. *Astrophys. J. Lett.*, 758:L33, 2012.

[1433] A. L. Schawlow and C. H. Townes. Infrared and optical masers. *Phys. Rev.*, 112:1940–1949, 1958.

[1434] J.-I Nsishizawa. Extension of frequencies from maser to laser. *Proc Jpn. Acad. B*, 85:454–465, 2009.

[1435] T. H. Maiman. Optical and microwave-optical experiments in ruby. *Phys. Rev. Lett.*, 4:564–566, 1960.

[1436] T. H. Maiman. Stimulated Optical Emission in Fluorescent Solids. I. Theoretical Considerations. *Phys. Rev.*, 123:1145–1150, 1961.

[1437] G. D. Boyd and J. P. Gordon. Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers. *Bell Sys. Techn. J.*, 40:489–508, 1961.

[1438] W. S. C Chang. *Principles of lasers and optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[1439] W. S. Quon. Matrix treatment of ray optics. *Phys. Teach.*, 34:378–379, 1996.

[1440] Meschede. *Optics Light and Lasers*. Wiley & Sons, Weinheim, 2017.

[1441] M. Endo and R. F Walter. *Gas lasers*. CRC Press, Boca Raton, 2018.

[1442] D. Basting, N. Djeu, and K. Jain. *Historical Review of Excimer Laser Development*, pages 8–21. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.

[1443] C. V. Shank. Physics of dye lasers. *Rev. Mod. Phys.*, 47:649–657, 1975.

[1444] M C Lin, M E Umstead, and N Djeu. Chemical lasers. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 34:557–591, 1983.

[1445] S. Lamberson, H. Schall, and P. Shattuck. The airborne laser. In Dieter Schuöcker, editor, *XVI International Symposium on Gas Flow, Chemical Lasers, and High-Power Lasers*, volume 6346, page 63461M. International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2007.

[1446] R. E. Slusher. Laser technology. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S471–S479, 1999.

[1447] G.E. Forden. The airborne laser. *IEEE Spectrum*, 34:40–49, 1997.

[1448] A. Sennaroglu. *Solid-state lasers and applications*. CRC press, Boca Raton, 2007.

[1449] N. G. Basov. Semiconductor lasers. Nobel Lecture, 1964.

[1450] T. Numai. *Fundamentals of Semiconductor Lasers*, pages 89–186. Springer Japan, Tokyo, 2015.

[1451] W. Shi, Q. Fang, X. Zhu, R. A. Norwood, and N. Peyghambarian. Fiber lasers and their applications. *Appl. Opt.*, 53:6554–6568, 2014.

[1452] X. Wu, A. Yamilov, X. Liu, S. Li, V. P. Dravid, R. P. H. Chang, and H. Cao. Ultraviolet photonic crystal laser. *Appl. Phys. Lett.*, 85:3657–3659, 2004.

[1453] C. Pellegrini, A. Marinelli, and S. Reiche. The physics of x-ray free-electron lasers. *Rev. Mod. Phys.*, 88:015006, 2016.

[1454] T. W. Hänsch. Edible lasers and other delights of the 1970s. *Opt. Photonics News*, 16:14–16, 2005.

[1455] B. H. Soffer and B. B. McFarland. Continuously tunable, narrow-band organic dye lasers. *Appl. Phys. Lett.*, 10:266–267, 1967.

[1456] S. R. Wilk. Edible lasers: What's the next course? *Optics and Photonics News*, 20:14, 2009.

[1457] T. Hänsch, M. Pernier, and A. Schawlow. Laser action of dyes in gelatin. *IEEE J. Quant. Electr.*, 7:45–46, 1971.

[1458] P. P. Sorokin and J. R. Lankard. Stimulated emission observed from an organic dye, chloro-aluminum phthalocyanine. *J. Res. Dev.*, 10:162–163, 1966.

[1459] F. P. Schäfer, W. Schmidt, and J. Volze. Organic dye solution laser. *Applied Physics Letters*, 9:306–309, 1966.

[1460] T. W. Hänsch. Repetitively pulsed tunable dye laser for high resolution spectroscopy. *Appl. Opt.*, 11:895–898, 1972.

[1461] H. P. Freund and R. K. Parker. Free-electron lasers. *Sci. Am.*, 260(4):84, 1989.

[1462] C. Pellegrini. The history of x-ray free-electron lasers. *Eur. Phys. J. H*, 37:659–708, 2012.

[1463] F. Fan, S. Turkdogan, Z. Liu, D. Shelhammer, and C. Z. Ning. A monolithic white laser. *Nature Nanotechn.*, 10(9):796–803, 2015.

[1464] T. J. Orzechowski, B. Anderson, W. M. Fawley, D. Prosnitz, E. T. Scharlemann, S. Yarema, D. Hopkins, A. C. Paul, A. M. Sessler, and J. Wurtele. Microwave radiation from a high-gain free-electron laser amplifier. *Phys. Rev. Lett.*, 54:889–892, 1985.

[1465] F. Krausz. From femtochemistry to attophysics. *Phys. World*, 14:41, 2001.

[1466] H.A. Haus. Mode-locking of lasers. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, 6:1173–1185, 2000.

[1467] P Maine, D Strickland, M Pessot, J Squier, P Bado, G Mourou, and D Harter. Chirped pulse amplification: Present and future. In T. Yajima, K. Yoshihara, Ch. B. Harris, and S. Shionoya, editors, *Ultrafast Phenomena VI*, page 2. Springer, Berlin, 1988.

[1468] R. L. Fork, B. I. Greene, and C. V. Shank. Generation of optical pulses shorter than 0.1 psec by colliding pulse mode locking. *Appl. Phys. Lett.*, 38:671–672, 1981.

[1469] G. Steinmeyer, D. H. Sutter, L. Gallmann, N. Matuschek, and U. Keller. Frontiers in Ultrashort Pulse Generation: Pushing the Limits in Linear and Nonlinear Optics. *Science*, 286:1507–1512, 1999.

[1470] F. X. Kärtner, N. Matuschek, T. Schibli, U. Keller, H. A. Haus, C. Heine, R. Morf, V. Scheuer, M. Tilsch, and T. Tschudi. Design and fabrication of double-chirped mirrors. *Opt. Lett.*, 22:831–833, 1997.

[1471] A. H. Zewail. Femtochemistry. *J. Phys. Chem.*, 97:12427–12446, 1993.

[1472] A. H. Zewail. Femtochemistry. past, present, and future. *Pure and Applied Chemistry*, 72:2219–2231, 2000.

[1473] M. Lewenstein and A. Sanpera. Experimental attophysics comes of age. *Phys. World*, page 25, 2002.

[1474] A. H. Zewail. Laser femtochemistry. *Science*, 242:1645–1653, 1988.

[1475] N. G. Basov. Background story of the invention of efcient blue ingan light emitting diodes. Nobel Lecture, 2014.

[1476] W. G. Kaenders. Blaue Laserdioden - genutzte Chance für eine junge deutsche Technologiefirma. *Phys. J.*, 2(6):71, 2003.

[1477] R. N. Hall, G. E. Fenner, J. D. Kingsley, T. J. Soltys, and R. O. Carlson. Coherent light emission from gaas junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 9:366–368, 1962.

[1478] LBNS. Lawrence berkeley national laboratory. `https://laser-research.lbl.gov/contact-us/`. last visit: 2024-06-18.

[1479] M. W. Berns. Laser surgery. *Scientific American*, 264:84–91, 1991.

[1480] R. Anderson, H. R. Bilger, and G. E. Stedman. Sagnac effect: A century of Earth?rotated interferometers. *Am. J. Phys.*, 62:975–985, 1994.

[1481] N. Ashby. Relativity in the future of engineering. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 43:505–514, 1994.

[1482] A. H. Ziaie, H. Moradpour, V. B. Bezerra, and A. Jawad. On some applications of the Sagnac effect. *Eur. Phys. J. Plus*, 137:628, 2022.

[1483] A. L. Schawlow. Measuring the wavelength of light with a ruler. *Am . J. Phys.*, 33:922–923, 1965.

[1484] S. S. Miller, D. D. DeFord, T. J. Marks, and E. Weitz. Infrared photochemistry of a volatile uranium compound with 10μ absorption. *JACS*, 101:1036–1037, 1979.

[1485] R. are. Laser separation of molecules. *Sci. Am.*, 236:86, 1977.

[1486] S. R. Leone. Applications of lasers to chemical research. *J. Chem. Edu.*, 53(1):13, 1976.

[1487] Tunable dye laser used to enrich uranium, 1974.

[1488] R. H. Stulen and D. W. Sweeney. Extreme ultraviolet lithography. *J. Quant. Electr.*, 35:694–699, 1999.

[1489] R. Lebert, L. Aschke, K. Bergmann, S. Düsterer, K. Gäbel, D. Hoffmann, P. Loosen, W. Neff, P. Nickles, O. Rosier, R. Popr we, D. Rudolph, W. Sandner, R. Sauerbrey, G. Schmahl, H. Schwoerer, H. Stiehl, I. Will, and C. Ziener. Preliminary results from key experiments on sources for EUV lithography. *Microelectr. Eng.*, 57:87–92, 2001.

[1490] B. Wu and A. Kumar. Extrem ultraviolet lithography: A review. *J. Vac. Sci. Techn B*, 25:1743–1761, 2007.

[1491] R. Stephen Craxton, Robert L. McCrory, and John M. Soures. Progress in laser fusion. *Scientific American*, 255:68–79, 1986.

[1492] J: D. Majumdar and I. Manna. Laser material processing. *Int. Mat. Rev.*, 56:341–388, 2011.

[1493] L. Shao, A. Datye, J. Huang, J. Ketkaew, S. Woo Sohn, S. Zhao, S. Wu, Y. Zhang, U. D. Schwarz, and J. Schroers. Pulsed laser beam welding of $pd_{43}cu_{27}ni_{10}p_{20}$ bulk metallic glass. *Sci. Rep.*, 7:7989, 2017.

[1494] R. P. Doherty, T. Varkevisser, M. Teunisse, J. Hoecht, S Ketzetzi, S. Ouhajji, and D. J. Kraft. Catalytically propelled 3D printed colloidal microswimmers. *Soft Mat.*, 16:10463–10469, 2020.

[1495] K. M. Kent and E. M. Graber. Laser tattoo removal: A review. *Dermatol. Surg.*, 38:1–13, 2012.

[1496] G. Paltauf. Ultraschall aus Licht. *Phys. Zeit*, 44:244–250, 2013.

[1497] A. G. Bell. On the production and reproduction of sound by light. *Am. J. Sci.*, s3-20:305–324, 1880.

[1498] J. M. Hopkins and W. Sibbett. Ultrashort-Pulse Lasers. *Sci. Am.*, 2000(2):72, 2000.

[1499] S. Schwartz. *Geometrical and Visual Optics, Second Edition*. McGraw-Hill Education, New York, 2 edition, 2013.

[1500] HA Schiötz. Ein Fall von hochgradigem hornhautastigmatismus nach Staarextraction. Besserung auf operativem Wege. *Arch. Augenheilkd.*, 15:178–181, 1885.

[1501] T. Juhasz, F.H. Loesel, R.M. Kurtz, C. Horvath, J.F. Bille, and G. Mourou. Corneal refractive surgery with femtosecond lasers. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, 5:902–910, 1999.

[1502] K. Bammel. Mit Druck und Laser gegen Tunnelblick. *Phys. J.*, 6(5):43, 2007.

[1503] H. P. Weber, M. Frenz, H. Pratisto, M. Ith, R. Häusler, and P. Schär. Laser as medical instrument for surgery: A report including recent results of ear surgery, performed on 15 patients. *Las. Phys.*, 8:785–793, 1998.

[1504] T. J. Dougherty, G. B. Grindey, R. Fiel, K. R. Weishaupt, and D. G. Boyle. Photoradiation Therapy. II. Cure of Animal Tumors With Hematoporphyrin and Light23. *J. Natl. Cancer Inst.*, 55:115–121, 1975.

[1505] Bin et al. A laser-driven nanosecond proton source for radiobiological studies. *Appl. Phys. Lett.*, 101:243701, 2012.

[1506] L. D. Smullin and G. Fiocco. Optical echoes from the moon. *Nature*, 194:1267–1267, 1962.

[1507] J. Müller, Th. W. Murphy, U. Schreiber, P. J. Shelus, J.-M. Torre, J. G. Williams, D. H. Boggs, S. Bouquillon, A. Bourgoin, and F. Hofmann. Lunar Laser Ranging: a tool for general relativity, lunar geophysics and Earth science. *J. Geod.*, 93:2195–2210, 2019.

[1508] G. J. Megie, G. Ancellet, and J. Pelon. Lidar measurements of ozone vertical profiles. *Appl. Opt.*, 24:3454–3463, 1985.

[1509] D. Bruneau, Ph. Quaglia, C. Flamant, M. Meissonnier, and J. Pelon. Airborne lidar LEANDRE II for water-vapor profiling in the troposphere. I. System description. *Appl. Opt.*, 40:3450–3461, 2001.

[1510] P. Chazette, C. David, J. Lefrère, S. Godin, J. Pelon, and G. Mégie. Comparative lidar study of the optical, geometrical, and dynamical properties of stratospheric post-volcanic aerosols, following the eruptions of El Chichon and Mount Pinatubo. *J. Geophys. Res. Atmos.*, 100:23195–23207, 1995.

[1511] T. Inomata, D. Triadan, V. A. Vázquez Lopez, J. C. Fernandez-Diaz, T. Omori, M. B. Méndez Bauer, M. García Hernández, T. Beach, C Cagnato, K. Aoyama, and H. Nasu. Monumental architecture at Aguada Fénix and the rise of Maya civilization. *Nature*, 582:530–533, 2020.

[1512] F.-J. Lübken. Physics in the mesosphere/lower thermosphere: A personal perspective. *Front. Astron. Space Sci.*, 9, 2022.

[1513] L. J. Gray, J. Beer, M. Geller, J. D. Haigh, M. Lockwood, K. Matthes, U. Cubasch, D. Fleitmann, G. Harrison, L. Hood, J. Luterbacher, G. A. Meehl, D. Shindell, B. van Geel, and W. White. Solar influences on climate. *Rev. Geophys.*, 48, 2010.

[1514] M. Vogel. Turbo fürs Fernlicht. *Phys. J.*, 13(8/9):66, 2014.

[1515] Steven J. Rehse. Laser-based identification of pathogenic bacteria. *Phys. Teach.*, 47:152–156, 2009.

[1516] J. Diedrich, S. J. Rehse, and Su.nil Palchaudhuri. Escherichia coli identification and strain discrimination using nanosecond laser-induced breakdown spectroscopy. *Appl. Phys. Lett.*, 90:163901, 2007.

[1517] S. Morel, N. Leone, Ph. Adam, and J. Amouroux. Detection of bacteria by time-resolved laser-induced breakdown spectroscopy. *Appl. Opt.*, 42:6184–6191, 2003.

[1518] M. López-Claros, F. Javier Fortes, and J. J. Laserna. Subsea spectral identification of shipwreck objects using laser-induced breakdown spectroscopy and linear discriminant analysis. *J. Cult. Herit.*, 29:75–81, 2018.

[1519] M. C. Gather and S. H. Yun. Single-cell biological lasers. *Nature Photon.*, 5:406–410, 2011.

[1520] Houard et al. Laser-guided lightning. *Nature Phot.*, 17:231–235, 2023.

[1521] L. M. Ball. The Laser Lightning Rod System: Thunderstorm Domestication. *Appl. Opt.*, 13:2292–2295, 1974.

[1522] P. C. Ashok, B. B. Praveen, and K. Dholakia. Near infrared spectroscopic analysis of single malt scotch whisky on an optofluidic chip. *Opt. Express*, 19:22982–22992, 2011.

[1523] A. Terray, J. Oakey, and D. W. M. Marr. Microfluidic control using colloidal devices. *Science*, 296:1841–1844, 2002.

[1524] A. Terray, J. Oakey, and D. W. M. Marr. Fabrication of linear colloidal structures for microfluidic applications. *Applied Physics Letters*, 81:1555–1557, 2002.

[1525] G. Marx. Interstellar vehicle propelled by terrestrial laser beam. *Nature*, 211:22–23, 1966.

[1526] Philip Lubin. A roadmap to interstellar flight. `https://arxiv.org/abs/1604.01356`, 2016.

[1527] A. Ashkin. History of optical trapping and manipulation of small-neutral particle, atoms, and molecules. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, 6:841–856, 2000.

[1528] K Svoboda, P P Mitra, and S M Block. Fluctuation analysis of motor protein movement and single enzyme kinetics. *Proc. Nat. Acad.. Sci.*, 91:11782–11786, 1994.

[1529] C. Bustamante, S. B. Smith, J. Liphardt, and D. Smith. Single-molecule studies of DNA mechanics. *Current Opinion in Structural Biology*, 10:279–285, 2000.

[1530] D. McGloin, G.C. Spalding, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia. Applications of spatial light modulators in atom optics. *Opt. Express*, 11:158–166, 2003.

[1531] T. L. Gustavson, A. P. Chikkatur, A. E. Leanhardt, A. Görlitz, S. Gupta, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. Transport of bose-einstein condensates with optical tweezers. *Phys. Rev. Lett.*, 88:020401, 2001.

[1532] G. E. M. Jauncey. The early years of radioactivity. *Am. J. Phys.*, 14:226–241, 1946.

[1533] J. Kniepert and P. Schwartz. Radioaktivität im Alltag. *Praxis Naturwiss. Chem.*, 57:39, 2008.

[1534] S. Hofmann and G. Münzenberg. The discovery of the heaviest elements. *Rev. Mod. Phys.*, 72:733–767, 2000.

[1535] Rothe et al. Measurement of the first ionization potential of astatine by laser ionization spectroscopy. *Nature Commun.*, 4:1835, 2013.

[1536] D. Kasen, B. Metzger, J. Barnes, E. Quataert, and E. Ramirez-Ruiz. Origin of the heavy elements in binary neutron-star mergers from a gravitational-wave event. *Nature*, 551:80–84, 2017.

[1537] J. B. Rogerson and D. G. York. Interstellar deuterium abundance in the direction of β- centauri. In *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975*, pages 75–78. Harvard University Press, Cambridge, 1979.

[1538] H. W. Kroto, J. R. Heath, S. C. O'Brien, R. F. Curl, and R. E. Smalley. C_{60}: Buckminsterfullerene. *Nature (London)*, 318(14):162–3, November 1985.

[1539] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, and A. A. Firsov. Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science*, 306:666–669, 2004.

[1540] L. Becker, J. L. Bada, R. E. Winans, J. E. Hunt, T. E. Bunch, and B. M. French. Fullerenes in the 1.85-billion-year-old sudbury impact structure. *Science*, 265:642–645, 1994.

[1541] Y. Zhang, I. A. G. Snellen, A. J. Bohn, P. Mollière, Ch. Ginski, H. J. Hoeijmakers, M. A. Kenworthy, E. E. Mamajek, T. Meshkat, M. Reggiani, and F. Snik. The ^{13}CO-rich atmosphere of a young accreting super-Jupiter. *Nature*, 595:370–372, 2021.

[1542] G. T. Seaborg and A. R. Fritsch. The synthetic elements: Iii. *Sci. Am.*, 208(4):68–79, 1963.

[1543] A. Ghiorso, T. Sikkeland, J. R. Walton, and G. T. Seaborg. Element no. 102. *Phys. Rev. Lett.*, 1:18–21, 1958.

[1544] P. R. Fields, A. M. Friedman, J. Milsted, H. Atterling, W. Forsling, L. W. Holm, and B. Åström. Production of the new element 102. *Phys. Rev.*, 107:1460–1462, 1957.

[1545] A. Ghiorso, T. Sikkeland, J. R. Walton, and G. T. Seaborg. Attempts to confirm the existence of the 10-minute isotope of 102. *Phys. Rev. Lett.*, 1:17–18, 1958.

[1546] Yu. Ts. Oganessian, V. K. Utyonkov, Yu. V. Lobanov, F. Sh. Abdullin, A. N. Polyakov, R. N. Sagaidak, I. V. Shirokovsky, Yu. S. Tsyganov, A. A. Voinov, G. G. Gulbekian, S. L. Bogomolov, B. N. Gikal, A. N. Mezentsev, S. Iliev, V. G. Subbotin, A. M. Sukhov, K. Subotic, V. I. Zagrebaev, G. K. Vostokin, M. G. Itkis, K. J. Moody, J. B. Patin, D. A. Shaughnessy, M. A. Stoyer, N. J. Stoyer, P. A. Wilk, J. M. Kenneally, J. H. Landrum, J. F. Wild, and R. W. Lougheed. Synthesis of the isotopes of elements 118 and 116 in the ^{249}cf and ^{245}cm + ^{48}ca fusion reactions. *Phys. Rev. C*, 74:044602, 2006.

[1547] RSC. Royal society of chemistry. `https://www.rsc.org`. last visit: 2024-06-20.

[1548] J. J. Thomson. Rays of positive electricity. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci. A*, 89:1–20, 1913.

[1549] Mougeot et al. Mass measurements of $^{99-101}$In challenge ab initio nuclear theory of the nuclide ^{100}Sn. *Nature Phys.*, 17:1099–1103, 2021.

[1550] Casanova et al. Accurate compound-specific ^{14}C dating of archaeological pottery vessels. *Nature*, 580:506–510, 2020.

[1551] I. J Hays. The orbital theory of Pleistocene climate: Support from a revised chronology of the marine δ^{18}O record. *NATO ASI Ser. C*, 126:269–305, 1984.

[1552] Augustin et al. Eight glacial cycles from an Antarctic ice core. *Nature*, 429:623–628, 2004.

[1553] M. Bergelin, J. Putkonen, G. Balco, D. Morgan, L. B. Corbett, and P. R. Bierman. Cosmogenic nuclide dating of two stacked ice masses: Ong Valley, Antarctica. *The Cryosphere*, 16:2793–2817, 2022.

[1554] Lüdecke et al. Carbon, nitrogen, and oxygen stable isotopes in modern tooth enamel: A case study from gorongosa national park, central mozambique. *Front. Ecol. Evol.*, Volume 10 - 2022, 2022.

[1555] NNDC Databases. Nudat 3.0. `https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/`. last visit: 2024-06-19.

[1556] P. de Marcillac, N. Coron, G. Dambier, J. Leblanc, and J.-P. Moalic. Experimental detection of α-particles from the radioactive decay of natural bismuth. *Nature*, 422:876–878, 2003.

[1557] D. R. Schmidt, N. J. Woolf, T. J. Zega, and L. M. Ziurys. Extreme ^{13}C, ^{15}N and ^{17}O isotopic enrichment in the young planetary nebula K4-47. *Nature*, 564:378–381, 2018.

[1558] R. Wolfson. *Essential University Physics.* Addison-Wesley, Boston, 2 edition, 2012.

[1559] K. Altwegg, H. Balsiger, A. Bar-Nun, J. J. Berthelier, A. Bieler, P. Bochsler, C. Briois, U. Calmonte, M. Combi, J. De Keyser, P. Eberhardt, B. Fiethe, S. Fuselier, S. Gasc, T. I. Gombosi, K.C. Hansen, M. Hässig, A. Jäckel, E. Kopp, A. Korth, L. LeRoy, U. Mall, B. Marty, O. Mousis, E. Neefs, T. Owen, H. Rème, M. Rubin, T. Sémon, C.-Y. Tzou, H. Waite, and P. Wurz. 67P/Churyumov-Gerasimenko, a Jupiter family comet with a high D/H ratio. *Science*, 347, 2015.

[1560] W. A. Fowler. Experimental and theoretical nuclear astrophysics: the quest for the origin of the elements. *Rev. Mod. Phys.*, 56:149–179, 1984.

[1561] P. J. Butler, J. A. Green, I. L. Boyd, and J. R. Speakman. Measuring metabolic rate in the field: the pros and cons of the doubly labelled water and heart rate methods. *Functional Ecology*, 18:168–183, 2004.

[1562] K. P. Carter, K. M. Shield, K. F. Smith, Z. R. Jones, J. N. Wacker, L. Arnedo-Sanchez, T. M. Mattox, L. M. Moreau, K. E. Knope, S. A. Kozimor, C. H. Booth, and R. J. Abergel. Structural and spectroscopic characterization of an einsteinium complex. *Nature*, 590:85–88, 2021.

[1563] R Speakman John. The history and theory of the doubly labeled water technique. *Am. J. Clin. Nutr.*., 68:932S–938S, 1998.

[1564] J. A. Romijn, E. F. Coyle, L. S. Sidossis, A. Gastaldelli, J. F. Horowitz, E. Endert, and R. R. Wolfe. Regulation of endogenous fat and carbohydrate metabolism in relation to exercise intensity and duration. *Am. J. Physiol. Endocrinol. Metab.*, 265:E380–E391, 1993.

[1565] H. Craig. Isotopic variations in meteoric waters. *Science*, 133:1702–1703, 1961.

[1566] W. Dansgaard. Stable isotopes in precipitation. *Tellus*, 16:436–468, 1964.

[1567] G. Manca, F. Camin, G. C. Coloru, A. Del Caro, D. Depentori, M. A. Franco, and G. Versini. Characterization of the geographical origin of pecorino sardo cheese by casein stable isotope (^{13}c/^{12}c and ^{15}n/^{14}n) ratios and free amino acid ratios. *J. Agric. Food Chem.*, 49:1404–1409, 2001.

[1568] A. Nissenbaum. Chemical analyses of dead sea and jordan river water, 1778-1830. *Israel J. Chem.*, 8:281–287, 1970.

[1569] S. Ruben and M. D. Kamen. Long-lived radioactive carbon: C^{14}. *Phys. Rev.*, 59:349–354, 1941.

[1570] W. F. Libby. *Nuclear Dating*, chapter 1, pages 1–4. ACS symposium series. American Chemical Society, 1982.

[1571] C. Invernizzi, G. Fiocco, M. Iwanicka, P. Targowski, A Piccirillo, M. Vagnini, M. Licchelli, M. Malagodi, and D. Bersani. Surface and Interface Treatments on Wooden Artefacts: Potentialities and Limits of a Non-Invasive Multi-Technique Study. *Coatings*, 11, 2021.

[1572] Kuitems et al. Evidence for European presence in the Americas in AD 1021. *Nature*, 601:388–391, 2022.

[1573] Maloney et al. Surgical amputation of a limb 31,000 years ago in borneo. *Nature*, 609:547–551, 2022.

[1574] W. F. Libby. Radiocarbon dating. `www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1960/libby/lecture/`, 1960. Nobel Lecture.

[1575] Hershkovitz et al. The earliest modern humans outside africa. *Science*, 359:456–459, 2018.

[1576] C. Stringer and J. Galway-Witham. When did modern humans leave africa? *Science*, 359:389–390, 2018.

[1577] N. Wang, C. Shen, W. Sun, P. Ding, S. Zhu, W. Yi, Z. Yu, Z. Sha, M. Mi, L. He, J. Fang, K. Liu, X. Xu, and E. R.M. Druffel. Penetration of Bomb ^{14}C Into the Deepest Ocean Trench. *Geophys. Res. Lett.*, 46:5413–5419, 2019.

[1578] Ch. B. Ramsey, M. W. Dee, J. M. Rowland, Th. F. G. Higham, S.A. Harris, F. Brock, A. Quiles, E. M. Wild, E. S. Marcus, and A. J. Shortland. Radiocarbon-based chronology for dynastic egypt. *Science*, 328:1554–1557, 2010.

[1579] Heinke et al. Diploid hepatocytes drive physiological liver renewal in adult humans. *Cell Systems*, 13:499–507.e12, 2022.

[1580] H. D. Graven. Impact of fossil fuel emissions on atmospheric radiocarbon and various applications of radiocarbon over this century. *PNAS*, 112:9542–9545, 2015.

[1581] R. E. Taylor. Science-based dating methods in historic preservation. In *Science and Technology in Historic Preservation*, pages 75–96. Springer, 2000.

[1582] D. Finch, A. Gleadow, J. Hergt, P. Heaney, H. Green, C. Myers, P. Veth, S. Harper, S. Ouzman, and V. A. Levchenko. Ages for Australia's oldest rock paintings. *Nature Hum. Behav.*, 5:310–318, 2021.

[1583] G. T Cook, E. Dunbar, B. G Tripney, and D. Fabel. Using carbon isotopes to fight the rise in fraudulent whisky. *Radiocarbon*, 62:51–62, 2020.

[1584] D. Grimm. The mushroom cloud's silver lining. *Science*, 321:1434–1437, 2008.

[1585] A. Walton, M. S. Baxter, W. J. Callow, and M. J. Baker. Carbon-14 concentrations in environmental materials and their temporal fluctuations. In *Radioactive dating and methods of low-level counting*, page 41, International Atomic Energy Agency (IAEA), 1967. IAEA.

[1586] R. Nydal and K. Lövseth. Distribution of radiocarbon from nuclear tests. *Nature*, 206:1029–1031, 1965.

[1587] Wang et al. Penetration of Bomb ^{14}C Into the Deepest Ocean Trench. *Geophys. Res.Lett.*, 46:5413–5419, 2019.

[1588] H. D. Graven, H. Warren, H. K. Gibbs, S. Khatiwala, Ch. Koven, J. Lester, I. Levin, S. A. Spawn-Lee, and W. Wieder. Bomb radiocarbon evidence for strong global carbon uptake and turnover in terrestrial vegetation. *Science*, 384:1335–1339, 2024.

[1589] G. Bonani, S. Ivy, W. Wölfli, M. Broshi, I. Carmi, and J. Strugnell. Radiocarbon dating of fourteen dead sea scrolls. *Radiocarbon*, 34:843–849, 1992.

[1590] P. E. Damon, D. J. Donahue, B. H. Gore, A. L. Hatheway, A. J. T. Jull, T. W. Linick, P. J. Sercel, L. J. Toolin, C. R. Bronk, E. T. Hall, R. E. M. Hedges, R. Housley, I. A. Law, C. Perry, G. Bonani, S. Trumbore, W. Woelfli, J. C. Ambers, S. G. E. Bowman, M. N. Leese, and M. S. Tite. Radiocarbon dating of the shroud of turin. *Nature*, 337:611–615, 1989.

[1591] M. Stuiver and P.D. Quay. Atmospheric ^{14}C changes resulting from fossil fuel CO_2 release and cosmic ray flux variability. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 53:349–362, 1981.

[1592] E. M. Wild und W. Kutschera. Altersbestimmung dank Atomtests. *Spektr. Wiss.*, 3:62, 2016.

[1593] A. Long, O. K. Davis, and J. de Lanois. Separation and 14C Dating of Pure Pollen from Lake Sediments: Nanofossil AMS Dating. *Radiocarbon*, 34:557, 1992.

[1594] H. E. Suess. Radiocarbon concentration in modern wood. *Science*, 122:415–417, 1955.

[1595] M. Stuiver and Th. F. Braziunas. Modeling Atmospheric ^{14}C Influences and ^{14}C Ages of Marine Samples to 10 000 BC. *Radiocarbon*, 35:137, 1993.

[1596] R. E. Taylor. Science-based dating methods in historic preservation. *Arch. Mus. Info.*, 13, 1999.

[1597] E. M. Wild, W. Kutschera, A. Meran, and P. Steier. ^{14}C Bomb Peak Analysis of African Elephant Tusks and its Relation to Cites. *Radiocarbon*, 61:1619, 2019.

[1598] F. Von Blanckenburg, R. K. O'Nions, N. S. Belshaw, A. Gibb, and J. R. Hein. Global distribution of beryllium isotopes in deep ocean water as derived from Fe-Mn crusts. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 141:213–226, 1996.

[1599] Cooper et al. A global environmental crisis 42,000 years ago. *Science*, 371:811–818, 2021.

[1600] J. Nielsen, R. B. Hedeholm, J. Heinemeier, P. G. Bushnell, J. S. Christiansen, J. Olsen, Ch. Bronk Ramsey, R. W. Brill, M. Simon, K. F. Steffensen, and J. F. Steffensen. Eye lens radiocarbon reveals centuries of longevity in the greenland shark. *Science*, 353:702–704, 2016.

[1601] B. B. Bottwood. On the ultimate disintegration products of the radioactive elements. *Am. J. Sci.*, 4:77–88, 1907.

[1602] G. Markl. *Minerale und Gesteine*. Springer, Berlin, 3 edition, 2015.

[1603] J. W. Valley, Aaron J. Cavosie, T. Ushikubo, D. A. Reinhard, D. F. Lawrence, D. J. Larson, P. H. Clifton, Th. F. Kelly, S. A. Wilde, D. E. Moser, and M. J. Spicuzza. Hadean age for a post-magma-ocean zircon confirmed by atom-probe tomography. *Nature Geosci.*, 7:219–223, 2014.

[1604] G. A. Brennecka, Ch. Burkhardt, G. Budde, Th. S. Kruijer, F. Nimmo, and T. Kleine. Astronomical context of solar system formation from molybdenum isotopes in meteorite inclusions. *Science*, 370:837–840, 2020.

[1605] T. J. Heaton, E. Bard, C. Bronk Ramsey, M. Butzin, P. Köhler, R. Muscheler, P. J. Reimer, and L. Wacker. Radiocarbon: A key tracer for studying Earth's dynamo, climate system, carbon cycle, and Sun. *Science*, 374:eabd7096, 2021.

[1606] A. Brumm, A. A. Oktaviana, B. Burhan, B. Hakim, R. Lebe, J. X. Zhao, P. H. Sulistyarto, M. Ririmasse, S. Adhityatama, I. Sumantri, and M. Aubert. Oldest cave art found in sulawesi. *Sci. Adv.*, 7:eabd4648, 2021.

[1607] B. Philippsen, C. Feveile, J. Olsen, and S. M. Sindbæk. Single-year radiocarbon dating anchors Viking Age trade cycles in time. *Nature*, 601:392–396, 2022.

[1608] M. Oberthaler and W. Aeschbach. Spurensuche in der Umwelt. *Phys. J.*, 20:25, 2021.

[1609] A. Paytan, E. M. Griffith, A. Eisenhauer, M. P. Hain, K. Wallmann, and A. Ridgwell. A 35-million-year record of seawater stable Sr isotopes reveals a fluctuating global carbon cycle. *Science*, 371:1346–1350, 2021.

[1610] C. Clauser. *Einführung in die Geophysik*. Springer, Berlin, 2 edition, 2016.

[1611] Côté et al. ^{129}I and ^{247}Cm in meteorites constrain the last astrophysical source of solar r-process elements. *Science*, 371:945–948, 2021.

[1612] M. W. Rowe. Radioactive dating: A method for geochronology. *Journal of Chemical Education*, 62:580, 1985.

[1613] R. Parai and S. Mukhopadhyay. Xenon isotopic constraints on the history of volatile recycling into the mantle. *Nature*, 560:223–227, 2018.

[1614] A. Wallner, J. Feige, N. Kinoshita, M. Paul, L. K. Fifield, R. Golser, M. Honda, U. Linnemann, H. Matsuzaki, S. Merchel, G. Rugel, S. G. Tims, P. Steier, T. Yamagata, and S. R. Winkler. Recent near-earth supernovae probed by global deposition of interstellar radioactive ^{60}fe. *Nature*, 532(7597):69–72, 2016.

[1615] L. Fimiani, D. L. Cook, T. Faestermann, J. M. Gómez-Guzmán, K. Hain, G. Herzog, K. Knie, G. Korschinek, P. Ludwig, J. Park, R. C. Reedy, and G. Rugel. Interstellar ^{60}fe on the surface of the moon. *Phys. Rev. Lett.*, 116:151104, 2016.

[1616] Che et al. Age and composition of young basalts on the Moon, measured from samples returned by Chang'e-5. *Science*, 374:887–890, 2021.

[1617] M. Breidenbach, J. I. Friedman, H. W. Kendall, E. D. Bloom, D. H. Coward, H. DeStaebler, J. Drees, L. W. Mo, and R. E. Taylor. Observed behavior of highly inelastic electron-proton scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 23:935–939, 1969.

[1618] E. E. Chambers and R. Hofstadter. Structure of the proton. *Phys. Rev.*, 103:1454–1463, 1956.

[1619] R. C. Mobley and R. A. Laubenstein. Photo-neutron thresholds of beryllium and deuterium. *Phys. Rev.*, 80:309–314, 1950.

[1620] A. B. Garrett. Radioactivity: Henri Becquerel. *J. Chem. Edu.*, 39:533, 1962.

[1621] W. S. Broecker, Y. H. Li, and J. Cromwell. Radium-226 and Radon-222: Concentration in Atlantic and Pacific Oceans. *Science*, 158:1307–1310, 1967.

[1622] EcuRed. `https://www.ecured.cu`. last visit 2025-07-11.

[1623] BfS. Bundesamt für Strahlenschutz. `https://www.bfs.de`.

[1624] W. Jacobi. Radon - Strahlenwirkung und Strahlenschutz. *Phys. Bl.*, 45:430, 1989.

[1625] P. Flowers, K. Theopold, R. Langley, and W.R. Robinson. *Chemistry*. Openstax, Houston, 2 edition, 2019.

[1626] I. V. Yarmoshenko, A. D. Onishchenko, G. P. Malinovsky, A. V. Vasilyev, E. I. Nazarov, and M. V. Zhukovsky. Radon concentration in conventional and new energy efficient multi-storey apartment houses: results of survey in four russian cities. *Sci. Rep.*, 10:18136, 2020.

[1627] Ch. Normand, G. Pfennig, J. Magill, and R. Dreher. Mapping the nuclear landscape: 50 years of the Karlsruher Nuklidkarte. *J. Radioanal. Nucl. Chem.*, 282(2):395–400, 2009.

[1628] U.R. Christensen. A sheet-metal geodynamo. *Nature*, 454:1058–1059, 2008.

[1629] G. Schubert and K.M. Soderlund. Planetary magnetic fields: Observations and models. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 187:92–108, 2011.

[1630] University of Arizona. `https://ircamera.as.arizona.edu`. last visit 2025-07-11.

[1631] K. Knie, G. Korschinek, T. Faestermann, E. A. Dorfi, G. Rugel, and A. Wallner. ^{60}Fe Anomaly in a Deep-Sea Manganese Crust and Implications for a Nearby Supernova Source. *Phys. Rev. Lett.*, 93:171103, 2004.

[1632] E. Rutherford. I. A radio-active substance emitted from thorium compounds. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 49:1–14, 1900.

[1633] P. M. S. Blackett. Cloud chamber researches in nuclear physics and cosmic radiation, Nobel Lecture (13 December, 1948) In: Frangsmyr, T.,(Ed.), Nobel Lectures Including Presentation Speeches and Laureates Biographies: Physics (1942-1962), 1998.

[1634] E. Rutherford and T. Royds. XXI. The nature of the α particle from radioactive substances. *Phil. Mag.*, 17:281–286, 1909.

[1635] C. E. Carlson. The proton radius puzzle. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 82:59–77, 2015.

[1636] Krauth et al. Measuring the α-particle charge radius with muonic helium-4 ions. *Nature*, 589:527–531, 2021.

[1637] K. Auranen, A. D. Briscoe, L. S. Ferreira, T. Grahn, P. T. Greenlees, A. Herzáň, A. Illana, D. T. Joss, H. Joukainen, R. Julin, H. Jutila, M. Leino, J. Louko, M. Luoma, E. Maglione, J. Ojala, R. D. Page, J. Pakarinen, P. Rahkila, J. Romero, P. Ruotsalainen, M. Sandzelius, J. Sarén, A. Tolosa-Delgado, J. Uusitalo, and G. Zimba. Nanosecond-Scale Proton Emission from Strongly Oblate-Deformed ^{149}Lu. *Phys. Rev. Lett.*, 128:112501, 2022.

[1638] H. Geiger and J.M. Nuttall. XL. The ranges of the α particles from uranium. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 23:439–445, 1912.

[1639] J. G. Beckerley. What is the Geiger-Nuttall Law? *Am. J. Phys.*, 13:158–159, 1945.

[1640] C. Qi, A.N. Andreyev, M. Huyse, R.J. Liotta, P. Van Duppen, and R. Wyss. On the validity of the Geiger-Nuttall alpha-decay law and its microscopic basis. *Phys. Lett. B*, 734:203–206, 2014.

[1641] C. Zhou, J. Zhang, X. Wang, Y. Yang, P. Xu, P. Li, L. Zhang, Z. Chen, H. Feng, and W. Wu. Betavoltaic cell: The past, present, and future. *ECS J. Solid State Sci. Technol.*, 10:027005, 2021.

[1642] H. G. J. Moseley and E. Rutherford. The attainment of high potentials by the use of radium. *Proc. Royal Soc. A*, 88:471–476, 1913.

[1643] T. Wacharasindhu, J. W. Kwon, D. E. Meier, and J. D. Robertson. Radioisotope microbattery based on liquid semiconductor. *Appl. Phys. Lett.*, 95, 2009.

[1644] Engineers Community. `https://engineerscommunity.com`. last visit 2025-07-11.

[1645] A. L. Turkevich, J. H. Patterson, and E. J. Franzgrote. The chemical analysis of the lunar surface. *Am. Sci.*, 56:312–343, 1968.

[1646] R. Rieder, H. Wänke, T. Economou, and A. Turkevich. Determination of the chemical composition of Martian soil and rocks: The alpha proton X ray spectrometer. *J. Geophys. Res. Planets*, 102:4027–4044, 1997.

[1647] C. L. Cowan, F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse, and A. D. McGuire. Detection of the free neutrino: a confirmation. *Science*, 124:103–104, 1956.

[1648] H. Bethe and R. Peierls. The Neutrino. *Nature*, 133:532–532, 1934.

[1649] M. Schwartz. Feasibility of using high-energy neutrinos to study the weak interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 4:306–307, 1960.

[1650] T. D. Lee and C. N. Yang. Theoretical discussions on possible high-energy neutrino experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 4:307–311, 1960.

[1651] Aaltonen et al. High-precision measurement of the W boson mass with the CDF II detector. *Science*, 376(6589):170–176, 2022.

[1652] W.N Cottingham and D.A. Greenwood. *An Introduction to Nuclear Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 2004.

[1653] F. Reines and C. Cowan. The Reines-Cowan experiments: Detecting the Poltergeist. *Los Alamos Science*, 25:4–6, 1997.

[1654] F. M. Gonzalez, E. M. Fries, C. Cude-Woods, T. Bailey, M. Blatnik, L. J. Broussard, N. B. Callahan, J. H. Choi, S. M. Clayton, S. A. Currie, M. Dawid, E. B. Dees, B. W. Filippone, W. Fox, P. Geltenbort, E. George, L. Hayen, K. P. Hickerson, M. A. Hoffbauer, K. Hoffman, A. T. Holley, T. M. Ito, A. Komives, C.-Y. Liu, M. Makela, C. L. Morris, R. Musedinovic, C. O'Shaughnessy, R. W. Pattie, J. Ramsey, D. J. Salvat, A. Saunders, E. I. Sharapov, S. Slutsky, V. Su, X. Sun, C. Swank, Z. Tang, W. Uhrich, J. Vanderwerp, P. Walstrom, Z. Wang, W. Wei, and A. R. Young. Improved Neutron Lifetime Measurement with UCNτ. *Phys. Rev. Lett.*, 127:162501, 2021.

[1655] C. D. Anderson. The positive electron. *Phys. Rev.*, 43:491–494, 1933.

[1656] M. A. Prelas, Ch. L. Weaver, M. L. Watermann, E. D. Lukosi, R. J. Schott, and D. A. Wisniewski. A review of nuclear batteries. *Progress in Nuclear Energy*, 75:117–148, 2014.

[1657] Marie Curie, Pierre Curie with Autobiographical Notes. *Autobiography*. Macmillan, New York, 1923.

[1658] L. Seiferle, B.and von der Wense, P. V. Bilous, I. Amersdorffer, Ch. Lemell, F. Libisch, S. Stellmer, T. Schumm, Ch. E. Düllmann, A. Pálffy, and P. G. Thirolf. Energy of the ^{229}Th nuclear clock transition. *Nature*, 573:243–246, 2019.

[1659] J. Chadwick and M. Goldhaber. A Nuclear Photo-effect: Disintegration of the Diplon by X-Rays. *Nature*, 134:237–238, 1934.

[1660] B. L. Jolliff, S. A. Wiseman, S. J. Lawrence, T. N. Tran, M. S. Robinson, H. Sato, B. R. Hawke, F. Scholten, J. Oberst, H. Hiesinger, C. H. van der Bogert, B. T. Greenhagen, T. D. Glotch, and D.A. Paige. Non-mare silicic volcanism on the lunar farside at Compton–Belkovich. *Nature Geosci.*, 4:566–571, 2011.

[1661] B. W. Grefenstette, F. A. Harrison, S. E. Boggs, S. P. Reynolds, C. L. Fryer, K. K. Madsen, D. R. Wik, A. Zoglauer, C. I. Ellinger, D. M. Alexander, H. An, D. Barret, F. E. Christensen, W. W. Craig, K. Forster, P. Giommi, C. J. Hailey, A. Hornstrup, V. M. Kaspi, T. Kitaguchi, J. E. Koglin, P. H. Mao, H. Miyasaka,

K. Mori, M. Perri, M. J. Pivovaroff, S. Puccetti, V. Rana, D. Stern, N. J. Westergaard, and W. W. Zhang. Asymmetries in core-collapse supernovae from maps of radioactive ^{44}Ti in Cassiopeia A. *Nature*, 506:339–342, 2014.

[1662] R. Diehl and C. J. Hansen. Zerfälle als Zeugen. *Phys. J.*, 19:23, 2020.

[1663] P. W. Merrill. Technetium in the stars. *Science*, 115:479–89, 1952.

[1664] C. E. Ashbaugh. Gemstone irradiation and radioactivity. *Gems Gemol.*, 24:196, 2014.

[1665] Kraemer et al. Observation of the radiative decay of the ^{229}Th nuclear clock isomer. *Nature*, 617:706–710, 2023.

[1666] Masuda et al. X-ray pumping of the ^{229}Th nuclear clock isomer. *Nature*, 573:238–242, 2019.

[1667] V. Gonzalez, S. Hageraats, G. Wallez, M. Eveno, E. Ravaud, M. Réfrégiers, M. Thoury, M. Menu, and D Gourier. Microchemical analysis of leonardo da vinci's lead white paints reveals knowledge and control over pigment scattering properties. *Sci. Rep.*, 10:21715, 2020.

[1668] Necemer M., Lazar T., Smit Z., Kump P., and Zuzek B. Study of the provenance and technology of Asian kris daggers by application of X-ray analytical techniques and hardness testing. *Acta Chim Slov.*, 60:351, 2013.

[1669] J. Chadwick. Possible existence of a neutron. *Nature*, 129:312–312, 1932.

[1670] P. M. S. Blackett and E. Rutherford. The ejection of protons from nitrogen nuclei, photographed by the Wilson method. *Proc. Royal Soc. A*, 107(742):349–360, 1925.

[1671] J. Chadwick. The existence of a neutron. *Proc. Royal Soc. A*, 136:692–708, 1932.

[1672] H. A. Shadduck. The neutron. *J. Chem. Edu.*, 13:303, 1936.

[1673] W. Heisenberg. Über den Bau der Atomkerne. I. *Z. Phys.*, 77:1–11, 1932.

[1674] J. Chadwick and M. Goldhaber. Disintegration by slow neutrons. *Nature*, 135:65–65, 1935.

[1675] NDTnet. Nondestructive testing. `https://www.ndt.net`. last visit 2025-07-11.

[1676] J. A. Shusterman, N. D. Scielzo, K. J. Thomas, E. B. Norman, S. E. Lapi, C. S. Loveless, N. J. Peters, J. D. Robertson, D. A. Shaughnessy, and A.P. Tonchev. The surprisingly large neutron capture cross-section of ^{88}Zr. *Nature*, 565:328–330, 2019.

[1677] A. Hiess and H. Schober. Mit Neutronen auf der Spur der Elektronen: Neutronen-Spektroskopie an Festkörpern. *Phys. Zeit*, 34:112–118, 2003.

[1678] B. Wilster-Hansen, D. C. Mannes, K. L. Holmqvist, K. Ødeby, and H. Kutzke. Virtual unwrapping of the BISPEGATA amulet, a multiple folded medieval lead amulet, by using neutron tomography. *Archaeometry*, pages 1–10, 2021.

[1679] Festa et al. Egyptian Grave Goods of Kha and Merit Studied by Neutron and Gamma Techniques. *Ang. Chem.*, 57:7375–7379, 2018.

[1680] E. V. Sayre and H. N. Lechtman. Neutron activation autoradiography of oil paintings. *Stud. Conserv.*, 13:161–185, 1968.

[1681] K. Trentelman, K. Janssens, G. van der Snickt, Y. Szafran, A. T. Woollett, and J. Dik. Rembrandt's An Old Man in Military Costume: the underlying image re-examined. *Appl. Phys. A*, 121:801–811, 2015.

[1682] B. Weider and D. Hapgood. *The murder of Napoleon.* iUniverse, 1998.

[1683] P. K. Lewin, R. G. V. Hancock, and Paul. Voynovich. Napoleon Bonaparte—no evidence of chronic arsenic poisoning. *Nature*, 299:627–628, 1982.

[1684] T. Yamamoto, K. Tsuboi, K. Nakai, H. Kumada, H. Sakurai, and A. Matsumura. Boron neutron capture therapy for brain tumors. *Transl. Cancer Res.*, 2, 2013.

[1685] E. Rutherford M.A. B.Sc. I. A radio-active substance emitted from thorium compounds. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.*, 49:1–14, 1900.

[1686] M. Curie. *Traité de radioactivité*, volume 2. Gauthier-Villars, 1910.

[1687] W. Crookes. The emanations of radium. *Proc. Royal Soc.*, 71:405–408, 1903.

[1688] G. C. Schmidt. Über die vom Thorium und den Thorverbindungen ausgehende Strahlung. *Verh. Dtsch. Phys. Ges.*, 17:14–16, 1898.

[1689] J. Elster and H. Geitel. Ueber Elektricitätszerstreuung in der Luft. *Ann. Phys.*, 307:425–446, 1900.

[1690] W. Crookes. Certain properties of the emanations of radium. *Chem. News*, 87:241, 1903.

[1691] James J. Barker. Apparatus for teaching physics: Spinthariscopes. *Phys. Teach.*, 7:244–246, 1969.

[1692] J. K. Bøggild, L. Minnhagen, and O. B. Nielsen. A cloud-chamber study of fission fragment ranges in air. *Phys. Rev.*, 76:988–989, 1949.

[1693] N. N. Das Gupta and S. K. Ghosh. A Report on the Wilson Cloud Chamber and Its Applications in Physics. *Rev. Mod. Phys.*, 18:225–290, 1946.

[1694] J. A. Earl. Cloud-chamber observations of primary cosmic-ray electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 6:125–128, 1961.

[1695] S. H. Neddermeyer and C. D. Anderson. Note on the nature of cosmic-ray particles. *Phys. Rev.*, 51:884–886, 1937.

[1696] J. C. Street and E. C. Stevenson. New evidence for the existence of a particle of mass intermediate between the proton and electron. *Phys. Rev.*, 52:1003–1004, 1937.

[1697] G. D. Rochester and C. C. Butler. Evidence for the existence of new unstable elementary particles. *Nature*, 160:855–857, 1947.

[1698] Jr. Langsdorf, A. A continuously sensitive diffusion cloud chamber. *Rev. Sci. Instr.*, 10:91–103, 2004.

[1699] Donald A. Glaser. The bubble chamber. *Scientific American*, 192(2):46–51, 1955.

[1700] G. T. Jones. A quite extraordinary demonstration of quantum electrodynamics! *Phys. Edu.*, 27:81, 1992.

[1701] D. A. Glaser. Some effects of ionizing radiation on the formation of bubbles in liquids. *Phys. Rev.*, 87:665–665, 1952.

[1702] F. K. Loebinger. Spark chambers. *Sci. Prog.*, 58:459–479, 1970.

[1703] M. Nenoi. *Evolution of Ionizing Radiation Research*. IntechOpen, Rijeka, 2015.

[1704] R. W. Pringle. The scintillation counter. *Nature*, 166:11–14, 1950.

Naturkonstanten

Avogadro-Konstante	N_A	$6.022 \cdot 10^{23} / \text{ mol}$
Bohrscher Radius	r_B	$5.29 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$
Bohrsches Magnetron	μ_B	$9.274 \cdot 10^{-24}\ \text{J} / \text{T}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.38{\cdot}10^{-23}\ \text{J} / \text{K}$
Compton-Wellenlänge des Elektrons	λ_C^e	$2.43 \cdot 10^{-12}\text{m}$
Compton-Wellenlänge des Protons	λ_C^p	$1.32 \cdot 10^{-15}\text{m}$
Coulomb-Konstante	k_e	$9.0{\cdot}10^9\,\text{N}{\cdot}\text{m}^2 / \text{C}^2$
Dirac-Konstante	$\hbar$	$1.054{\cdot}10^{-34}\ \text{J}{\cdot}\text{s}$
Elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8.854 \cdot 10^{-12}\,\text{F} / \text{m}$
Elementarladung	e	$1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$
Faraday-Konstante	F	$96\,485\,\text{C} / \text{mol}$
Gravitationsbeschleunigung	g	$9.81\,\text{m} / \text{s}^2$
Gravitationskonstante	G	$6.67{\cdot}10^{-11}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^2 / \text{kg}^2$
Hubble-Konstante	$\mathcal{H}$	$2.32 \cdot 10^{-18}\,\text{s}^{-1}$
Kernmagnetron	μ_K	$5.05 \cdot 10^{-27}\ \text{J} / \text{T}$
Molares Volumen	V_{mol}	$22.4\ \ell / \text{mol}$
Planck-Konstante	h	$6.63{\cdot}10^{-34}\ \text{J}{\cdot}\text{s}$
Lichtgeschwindigkeit	c	$3.0{\cdot}10^8\,\text{m} / \text{s}$
Lichtjahr	Lj	$9.46 \cdot 10^{15}\,\text{m}$
Loschmidtkonstante	N_L	$2.687 \cdot 10^{25}\ \text{l}/\text{m}^3$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$12.57 \cdot 10^{-7}\ \text{N} / \ \text{A}^2$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9.11{\cdot}10^{-31}\,\text{kg}$
Ruhemasse des Myons	m_μ	$1.88{\cdot}10^{-28}\,\text{kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1.673{\cdot}10^{-27}\,\text{kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1.675{\cdot}10^{-27}\,\text{kg}$
Ruhemasse des Deuterons	m_D	$3.343{\cdot}10^{-27}\,\text{kg}$
Ruhemasse des α-Teilchens	m_α	$6.644{\cdot}10^{-27}\,\text{kg}$
Rydberg-Frequenz	R	$3.29 \cdot 10^{15}\,\text{Hz}$
Rydberg-Energie	R_y	$2.18 \cdot 10^{-18}\,\text{J}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$1.097 \cdot 10^7\,\text{m}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ_{SB}	$5.67 \cdot 10^{-8}\ \text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}^4)$
Universelle Gaskonstante	R_G	$8.314\,\text{J}/(\text{mol}{\cdot}\text{K})$
Wiensche Verschiebungskonstante	b_λ	$2897.8\ \mu\text{m}{\cdot}\text{K}$

Index

Äquivalenzprinzip, 494, 499
Äther, 59, 63, 494, 1211
  Ä-Widerstand, 114
Übergangsraten, 1719

Aberration, 272
  relativistische A., 376
  stellare A., 83
Abschirmung, 1509
Absorption
  A.-Kanten, 1659
  A.-Koeffizient, 1175, 1640
  A.-Line, 1131
Akustik
  Schwebung, 733
    beats, 733
    S.-frequenz, 734
  Sonifizierung, 789
Anion, 413, 1214
Anthropologie, 1712
Antimaterie
  Annihilation, 284
  Anti-^{3}He, 1460
  Anti-^{4}He, 1460
  Anti-Deuterium, 1460
  Anti-Tritium, 1460
  Antiproton, 456, 1460
  Positron, 1403, 1461
Asteroid
  433 Eros, 1771
Astrobiologie, 947, 950
Astronomie
  Astrometrie, 529
  Standardkerzen, 145
  Triangulation, 552
Astrophysik
  S-Faktor, 949
  Akkretion, 1570
Atmosphärenphysik, 1773
  Leuchtende Nachtwolken, 1773
Atome, 588
  Abschirmung, 1584
  Feinstruktur, 1426, 1475
    F.-Aufspaltung, 1451
  Hyperfeinstruktur, 1426
  Ionisationsenergie, 1135, 1412
  Ionisationspotenzial, 482, 1344
  Lichtabsorption, 1341, 1369
  Lichtemission, 1341, 1369
  Linienspektrum, 1309
  Rumpfniveau, 1179
  Slater-Regeln
    Abschirmkonstante, 1580
  Spin-Orbit Aufspaltung, 1475
  Termschema, 1455, 1526, 1560
  Zeeman-Effekt, 1466
Atommodell
  Bohr A., 11, 254, 317, 478, 653, 763, 796, 1215, 1326, 1376, 1444, 1552, 1559, 1578, 1715
    Bohrsche Postulate, 1444
    Bohrscher Radius, 1392
  Bohr-Sommerfeld-M., 1450
  Dalton A., 1215, 1268, 1295
  J. J. Thomson A., 1212, 1220, 1284
  Nagaoka A., 1283
  Rutherford A., 1291, 1376
  Vortex A., 1211
Atomuhr, 148, 548, 592, 1426

Wasserstoff-Maser, 540
Attraktor, 1495
Aufbauprinzip, 1505, 1512, 1560, 1580, 1784
Auge
Farbwahrnehmung, 376
Retina, 376
Zapfen, 376
Auger-Meitner-Effekt, 1179, 1569
Auger-Elektron, 290, 1179, 1569
Inverse Auger-Emission, 1168
Auswahlregel, 1203, 1456

Bandbreite, 735, 742
Baryonen, 878
Becquerel-Effekt, 1131
Beobachter, 233
Beschleuniger, 253
Bestrahlungsstärke, 1094
Bezugssystem, 31, 41, 163, 218, 494, 646
absolutes B., 48
Galilei-Transformation, 47, 72, 162
Inertialsystem, 45, 71, 128, 162, 215, 221, 233, 240, 384
Lorentz-Transformation, 59, 72, 95, 215
Bildschirme
CRT, 957
FED, 957
LED, 957
Bindungsenergie, 410, 414, 422, 481, 1179
Biologie
Evolution
präbiotische E., 953
Gene, 1809
Magnetorezeption, 597, 970
Paläontologie, 1846
Pferde, 1696
Photosynthese, 970, 1694, 1702
Pottwal, 1694
Quanten-B., 970
Stangenkopfgans, 595
Biomoleküle
Carotinoide, 1100
Chlorophyll, 1100
DNA, 704, 953, 971
Löwdin Modell, 971
Gramicidin A1, 692
Hämoglobin, 595, 1694, 1766
Melanin, 1766
Myoglobin, 1694
O_2-Affinität, 1694
Proteine, 953, 966, 1809
Proteom, 1809
Proteomik, 1247
Ribose, 953
T4-Lysozym, 1700
Vitamin B_{12}, 1694
Boltzmann-Verteilung, 1718
Bosonen, 1491, 1512
Z-Boson., 777
Bose-Einstein Kondensation, 1491
Bosegas, 1099
BEC, 303, 1099
Bose-Einstein-Statistik, 1099
Higgs B., 765, 777
W-Boson, 777
Brillouin-Streuung, 1770
Brownsche Molekularbewegung, 1219, 1269
Bunsenbrenner, 1339

C14-Methode, 592, 1377, 1425, 1832, 1834
^{14}C-Bombenpeak, 1847
Suess-Effekt, 1845
Casimir-Effekt, 104, 773
Cepheiden, 310, 363
Chandrasekhar Grenze, 1535
Chemie
Arrhenius Gleichung, 969
Bergman Zyklisierung , 987
Chemische Grundgesetze, 412
Gesetz von Avogadro, 413
Konstante Proportionen, 413, 1266
Multiple Proportionen, 413, 1266
Van't Hoff'sche Regel, 413
Chemisorption, 952
Equilibrierung, 968
Eudiometer, 1266

Katalyse, 591
Oktettzustand, 1516
photochemische Reaktion, 1170
Redoxpotenzial, 488
Redoxreaktion, 1228
Stöchiometrische Gesetze, 1214
Teilchenmodell, 1262
Valenz, 1516
Wertigkeit, 1516
Chemische Verschiebung, 1179
Cooper-Minimum, 1179
CPT-Theorem, 1464

Determinismus, 715, 745, 749, 795, 998
Dioden
LED, 1752
blaue LED, 1752
weiße LED, 1752
Superlumineszenz-D., 1728
Dipol
Hertzscher D., 624
Dirac-Gleichung, 796, 1955
Doppler-Effekt
akustischer D., 269, 298
D.-Verbreiterung, 1571
D.-Verschiebung
Gravitations-Rotverschiebung, 272, 331, 1601
kosmologische D., 147, 272, 360
Dopplereffekt
optischer D., 301
Dopplerverschiebung
Gravitations-R., 546
Dosimetrie, 2003
Gray, 1916
Sievert, 1916
TLD, 2002
Wichtungsfaktor, 1916
Dual-Röntgen-Absorptiometrie, 1667
Dublett, 1487, 1496
Dunkle Energie, 317
Dunkle Materie, 272, 317, 320

Eötvös Experiment, 502
Eddington-Grenze, 1569
Eigenwertgleichung, 816
Eindringtiefe, 1648
Einheit
amu, 411
Curie, 285
Dimensionsanalyse, 277
dimensionslose Größen, 277
Einheiten
Astronomische E., 343, 638
Barn, 1998
Becquerel, 1814
Bogenmaß, 522
Bogensekunde, 88
Elektronenvolt, 183
eV, 465, 589
Hefner, 1025
Jansky, 1078
Lichtsekunde, 226
Natürliche E., 1222
Parallaxe, 88
scheinbare Helligkeit, 363
Wellenzahl, 653, 1320, 1416
Einsteins Geburtstagsgeschenk, 504
Einsteinsche Feldgleichungen, 511
Einsteinsche Postulate, 69, 73, 84, 120, 125, 143, 402, 444, 493, 776
Elektrodynamik
Anode, 1214
Batterie, 1222
Blitz, 1232
Dielektrikum, 280
elektrische Leitfähigkeit, 1228
Elektrochemische Spannungsreihe, 1230
Elektroskop, 2002
Faraday-Becher, 675
Townsend-Lawine, 2009
Volta-Pistole, 1266
Wimshurstmaschine, 1266
Elektrolyse, 1214, 1219, 1223
Brennstoffzelle, 1213
elektrochemische Spannungsreihe, 1231
Elektroden, 1214
Elektrolyt, 1214

elektrolytische Dissoziation, 1225
Faraday Gesetz der E., 1219, 1231
Galvanik, 1229
Hoffmannscher Wasserzersetzungsapparat, 1225
Schmelzfluss E., 1228
Elektron
e/m-Verhältnis
Bainbridge-Methode, 1242
klassischer E.-Radius, 406
Elektronenaffinität, 1532
Elektronenbeugung
Thomson-Reid Experiment, 679
Elektronenmikroskop, 696, 798, 980
Elektronen-Ptychografie, 706
Kryo-E., 705
REM, 701
TEM, 702, 1738
Elektronenmikroskopie, 1587
Elektronenstoßionisation, 1559
Elektronenstrahl-Verdampfer, 425
Elektrostriktion, 1770
Elemente, 1801
Übergangsmetalle, 484
Hafnium, 1519
Iridium, 1616
Kupfer, 1564
Molybdän, 1564, 1649
Nickel, 1705
Röntgenium, 480
Rhenium, 1578, 1583
Rhodium, 1650
Tantal, 1594
Technetium, 1276, 1578, 1583, 1788
Titan, 1567
Wismut, 1928
Wolfram, 1564, 1593, 1630
Zirkonium, 1519
Actinoide
Nobelium, 1805
Thorium, 1895
Uran, 1801
Celtium, 1519
Coronium, 1403
Didymium, 1584
Edelmetalle
Gold, 1616
Platin, 1616
Silber, 1650
Eka-Cäsium, 1805
Eka-Silicium, 1276
Halogene
Jod, 1661
Hauptgruppe 1
Francium, 1805
Kalium, 1228
Lithium, 1079, 1455, 1516
Natrium, 1228
Hauptgruppe 2
Barium, 1228, 1712
Beryllium, 1079, 1516, 1984
Kalzium, 1228, 1661, 1712
Magnesium, 1228
Radium, 1787, 1790
Strontium, 1228, 1568
Hauptgruppe 3
Aluminium, 1228
Bor, 1228
Hauptgruppe 4
Blei, 476, 1630, 1661
Gallium, 1276
Germanium, 1276
Kohlenstoff, 1803
Silizium, 476
Hauptgruppe 5
Stickstoff, 1898, 1928
Hauptgruppe 6
Polonium, 1787, 1914, 1928
Sauerstoff, 1663, 1898
Hauptgruppe 7
Chlor, 1228
Jod, 1228
Hauptgruppe 8
Argon, 1898
Oganesson, 1805
Helium, 1079, 1514, 1742, 1927
Lanthanoide, 1584
Lanthan, 1584

Lutetium, 1584, 1928
Neodym, 1584, 1928
Praseodym, 1584
Promethium, 1578, 1583
Massendefekt, 1877
Massenzahl, 1797, 1801
Moldavium, 1805
Nebengruppe 3
Scandium, 1276
Nebulium, 1403
Ordnungszahl, 1786, 1797, 1802
Reinelemente, 419
Reinst-E., 1803
Russium, 1805
Seltene Erden, 1519, 1584
Gadolinium, 1661
Scandium, 1584
Yttrium, 1584
Virginium, 1805
Emission
spontane E., 303, 1715
Emissionstheorie, 59
Energie
E.-Dichte, 1086
spektrale E., 1089
E.-transport, 648
Potenzielle E., 835
Thermische E., 1029
Energieband, 1176
Energiedichte, 1719
Energietransport
Konvektion, 1029
Strahlung, 1029
Wärmeleitung, 1029
Energiezustand
stationärer E., 824, 826
Entartung, 1719
EPR Paradoxon, 994
Bell-Theorem, 999
Quantenkryptologie, 999
Quantenradierer, 1012
Schrödingers Katze, 609, 799, 1004
Verschränkung, 799, 970, 995
versteckte Variablen, 999
Erde
Geodynamo, 1851
Klimawandel, 1049
Lava, 1032
Pahoehoe L., 1032
Smog, 1060
Solarkonstante, 6, 1050
Ereignis, 123, 127
Erhaltungssatz, 1786
Baryonen-E., 1912
Drehimpuls-E., 564, 1449, 1537
Energie-E., 78, 279, 391, 435, 815, 909, 918, 1296, 1911
Energie-Impulssatz, 435, 718, 2006
Impuls-E., 279, 327, 393, 435, 464, 1296, 1911, 1944
Ladungs-E., 1912
Massen-E., 300, 391, 412, 1266
Euler-Formel, 825
Exoplaneten, 144, 270, 339, 950
47 Ursae Majoris, 342
51 Pegasi B, 342
Gliese 486, 347
Habitable Zone, 950
HD209458b, 531
Kepler 186 F, 349
Kepler 20f, 339
Transitmethode, 531
Transitphotometrie, 530
WASP-121b, 1332
WASP-76b, 1332
WASP 39B, 349
Exotische Atome
πK, 1462
Myonium, 1461
Positronium, 1402, 1461
Protonium, 1462

Fallen
Optisches Gitter, 548
Paul-F., 148, 1428
Faraday Paradoxon, 56
Feinstruktur, 474, 1870
F.-Konstante, 477, 1240

FEL, 1747
EurXFEL, 1748
FLASH, 1748
Röntgen-F., 1747
SASE, 1747
XFEL, 1697
Feldemission, 956
Feldionenmikroskop, 1299
Feldkonstante
elektrische F., 70
magnetische F., 70
Fermi-Energie, 486, 956, 984, 1176
Fermikante, 956, 1180
Fermionen, 1491, 1512
Festkörper
Austrittsarbeit, 984, 1135, 1154, 1163, 1412
Bandlücke, 485
Energiebänder, 1176
Exziton, 885, 2011
Graphen, 1803
Leitungsband, 485, 885
Phonon, 1770
Supraleitung
Sprungtemperatur, 482
Valenzband, 485, 885
Zustandsdichte, 985
Feynmans molekulare Ratsche, 1273
Fizeau Experiment, 66
Flammenprobe, 1339
Fluchtgeschwindigkeit, 365, 784
Fluoreszenz, 1203, 1422
Freiheitsgrad, 1115, 1203
Funkenstrecke, 1131
Fusion, 289, 423, 1712, 1957
D-T Reaktion, 416
Gamov Faktor, 949
Stellerator, 1759
Tokamak, 1759

Galaktische Nebel
Elefantenrüssel-N., 1418
Gum 41, 1418
Galaxien
Anadromeda, 165
Andromeda, 318, 357
Cygnus A, 1079
EIS 107, 1413
G.-Haufen, 320
Abell 2218, 523
Coma G., 318
Perseus, 788
Great Wall
CfA2, 320
Hercules-Corona Borealis, 320
Sloan, 320
The great wall, 320
U1.27, 320
M33, 357
M81, 356
M83, 355
M87, 313
Magellansche Wolken, 357
MCG-6-30-15, 1571
Milchstraße, 362
PGC 69457, 523
Radiogalaxien
3C 120, 239
SPT0615-JD, 530
UDFy-38135539, 365
Galilei-Transformation, 217
Gasentladung
anodisches Glimmlicht, 1237
Crookes-Hittorf Röhre, 1240
Dunkelraum
Anoden D., 1237
Aston D., 1236
Crookes D., 1236
Faraday D., 1236
kathodischer D., 1236
Geißlerröhre, 1328
Glimmentladung, 1232
Kathodenglimmhaut, 1236
Kathodenlicht, 1237
positive Säule, 1237
Gedankenexperiment, 49
Gegenfeldmethode, 1143, 1356
Geochronologie, 1851

Stratigraphisches Grundgesetz, 1851
Geschwindigkeiten
superluminare G., 239
Glühkurve, 1425
Gleichgewicht
transientes G., 1826
Gleichverteilungssatz, 1115
Gleichzeitigkeit, 119, 127, 134, 218, 494
Relativität der G., 127, 224
Gluon, 259
Goldilocks-Prinzip, 346, 1099
GPS, 552, 585
Galilei-Satelliten, 540
Gravitation
Geodäten, 511
Raumkrümmung, 511
Gravitationslinse, 497, 515
Einsteinkreuz, 497, 523
Einsteinringe, 523, 524
Microlensing, 529
Gravitationswelle, 67, 103, 115, 559, 585, 749
G.-Detektor
GEO 600, 103, 569
LIGO, 570
LISA, 577
VIRGO, 572
Weber-bars, 568
GW150914, 571
GW170817, 578
SSS17a, 574
Gravitaton
Kelvin-Helmholtz-Zeit, 418
Grundzustand, 317, 481, 851, 857, 1326, 1341, 1396, 1426
Gyroskop, 592
GZK cutoff, 431

Hadronen, 878, 1800
Mesonen
Kaon, 2004
Neutronen, 1984
Haefle-Keating Experiment, 543
Halbleiter, 592
Drain, 959
Ekasidiode, 957
Flashspeicher, 958
floating-gate, 958
GaAs, 873
Löcher, 1274
MOSFET, 958, 962
Raumladungszone, 957
Source, 959
TFET, 962
Tunneldiode, 957
Resonanz-T., 962
Zenerdiode, 958
Hamilton
H.-Formalismus, 814
H.-Funktion, 814
H.-Prinzip, 605
Harmonischer Oszillator, 838
Potenzial des H. O., 839
Hartree-Fock Methode, 1446
Harvard Tower Experiment, 331
Hefnerkerze, 1026, 1187
Hooksches Gesetz, 837, 1110
Hubble
H.-Konstante, 369, 572
Hybridisierung, 484
Hydromechanik
Diffusion, 951, 1271
random walk, 1271
Magnus-Effekt, 730
Viskosität, 1268
Hyperfeinstruktur, 328, 354, 1868

IceCube, 291
Independent electron approximation, 1446
Interferometer, 66
Fabry-Perot I., 1472, 1734
Fabry-Perot-Filter, 308
Fizeau Experiment, 94
FTICR, 421
FTIR, 115
GAIA, 83
Jamin-I., 100
Laser-I., 115

Lloyd mirror, 102
Mach-Zehnder-I., 100
Michelson-I., 67, 99, 115, 569, 1723
Ring-I., 1756
Sagnac-Effekt, 1756
Sagnac-I., 1756
Sea-I., 102
Stern-I., 66
VLTI, 115
Interstellare Wolken, 1435
invariante Größen, 163
Ionen, 413, 1214
wasserstoffähnliche I., 1559
Isotope, 419, 1578, 1802
Ar-39, 1852
Ba-140, 1826
Be-10, 1851
C-14, 1803
Cl-36, 1852
Fe-57, 423
He-3, 1957
kinetischer I.-Effekt, 967
Na-24, 1825
P-32, 1895
Pb-204, 1853
Th-232, 974
U-235, 974
U-238, 974

Jordansche Regeln, 816

Kältetod, 369
Kanalstrahlen, 1328
Kataklysmische Veränderliche, 566
LAMOST J024048.51+195226.9, 1535
Periodenlücke, 567
Katalyse
Enzym-K., 970
Enzymkatalytische Reaktion, 968
Kathode, 1132, 1214
Kathodenstrahlen, 1237, 1285
Kationen, 1214
Kausalität, 163
Kerne, 588
Kernladung, 481
Atommasse, 1801
Compound-Kern, 1364
Fusion, 415, 592, 1786
Interne Konversion, 1971
Kernmagneton, 1469
Kernspaltung, 281, 592, 1786
magnetisches Moment, 1894
Massenzahl, 1578, 1801
Neutronen, 564
Nukleonen, 410, 422, 480, 778
Nuklide, 410, 1796
Tröpfchenmodell, 422
Klima
K.-Forschung, 1846
Paläoklimatologie, 1812
Knotenregel, 1250
Kohärenz, 970, 1716
K.-Länge, 1722
K.-Zeit, 1722
Koinzidenz, 1960
Kometen, 618
Hale Bopp, 618
K. Schweif, 398
Shoemaker-Levy 9, 123
Yarkovsky-Effekt, 620
Kontinuitätsgleichung, 300
Korrespondenzprinzip, 797, 895, 901, 1004, 1413
Kosmische Höhenstrahlung, 182
Kosmische Jets, 239, 240
Jet-break, 240
Kosmische Strahlung, 275
Kosmologie, 270, 272, 317, 363
Kräfte
Zentripetal-K., 502
Kristalle, 674
CdSe, 885
Farbzentren, 2000
Netzebene, 678
Netzebenen, 677, 1681
Rauchquarz, 1977
Kristallographie
LEED, 682

Pulverdiffraktometrie, 682

Längenkontraktion, 140, 155, 169, 207, 209, 216, 220, 255
Fitzgerald-Lorentz-Kontraktion, 161
Universelle $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ Kurve, 168
Ladung-zu-Masse Verhältnis, 441, 651
Lagrange-Punkt, 577
Lamb-Verschiebung, 775, 1445
Landé-Faktor, 474, 1467
Larmor-Formel, 254
Laser, 593, 896, 1709
quantum-well L., 873
Alexandrit-L., 1741
Besetzungsinversion, 1716, 1721
Blitzlampen, 1739
CO_2-L., 1742
CPM-Technik, 1749
Dioden-L., 1751
GaAs, 1751
Drei-Niveau Laser, 1738
Einstein-Koeffizienten, 1719
Excimer-L., 1759
ArF, 1759
F_2, 1759
KrF, 1759
Farbstoff-L., 1743
Güteschaltung, 1741, 1764
HeNe-L., 1712
Inversionsschwelle, 1741
L.-Gyroskop, 1757
L.-Kühlung, 303, 1463
L.-Medium, 1718
LIBS, 1774
LIS, 1758
Littrow-Konfiguration, 1727
Materialbearbeitung, 1760
Modenabstand, 1738
Optischer Maser, 1712
Optischer Resonator, 1735
Optisches Pumpen, 1718, 1738
Resonator, 1736
Güte eines R., 1741
Rubin-L., 1764
Stimulierte Emission, 1716
Ti:Saphir L., 1741
Vier-Niveau Laser, 1738
Lebensdauer, 759
Leitfähigkeit
elektrische L., 482
Lennard-Fenster, 1546
Leptonen
Myon, 2004
Positron, 462, 474, 1955, 2004
Lichtbrechung, 85
Lichtimpuls, 397
Lichtkegel, 228
Lichtquellen
Brillianz, 255
Eu-XFEL, 257
FEL, 256
gequetschtes Licht, 745
Maser, 540
SLAC, 257
Synchrotron, 251
Lichtuhr, 302
LIDAR, 1770
Linienbreite, 305, 328
Dopplerverbreiterung, 328
FWHM, 761
natürliche L., 761, 769, 1327
Linienstrahlung, 1375
Lumineszenz
Bio-L., 1709
Chemie-L., 1709
Elektro-L., 1709
Kathodo-L., 1710
Photo-L., 1709
Sono-L., 1710
Thermo-L., 1425
Tribo-L., 1554
Lyman-α Wald, 1435
Gunn-Peterson-Effekt, 1435
Lyman-Grenze, 1419
Lyman-Break-Technik, 315
Lyman-Break-Galaxien, 315

Mössbauer-Effekt, 114, 272, 325, 547

Mössbauer-Elemente, 330
Mössbauer-Isotop, 329
Mach
M.-Kegel, 269, 275
Magnetismus, 962
Lorentzkraft, 440, 1487, 2001
Rechte-Hand-Regel, 440, 1467
Magnetohydrodynamik, 183
Maser, 1711, 1731
Masse, 410
effektive M., 873
Massendefekt, 414
schwere M., 494, 502
träge M., 494, 502
Massenspektrometrie, 421, 1245
Kendrick
K.-Massendefekt, 421
K.-Massenskala, 421
Massenspektrometer, 1807, 1822
Flugzeit M., 1245
MALDI, 1245
Thomson M., 1245
Wienfilter, 1258
Materiewelle, 603, 712, 1369, 1388
deBroglie Wellenlänge, 652, 678, 685, 690, 699
Mathematik
Fourier
F.-Analyse, 1675
F.-Transformation, 1685
Knotentheorie, 1212
Topologie, 1212
Mechanik
Beschleunigung
konstante B., 43
Keplersche Gesetze, 340, 1450
Zweites K., 1451
Kinematische Gleichungen, 43
Newtons Schalentheorem, 1558, 1580
Reibung
Stokessche R., 1234
Relativitätsprinzip, 71
Medizin
radiologische Dichte, 1627
Abschwächungsgesetz, 1653
Angiogramm, 1622
Angiographie, 1665
Angioplastie, 1768
Auge, 1766
Augapfel, 1186
Fovea, 1185, 1186
Hornhaut, 1189
Kohlrausch-Knick, 1196
photopisches Sehen, 1197
Retina, 1186
Rhodopsin, 1202
Rote-Pupillen Effekt, 1202
Sakkaden, 1186
skotopisches Sehen, 1197
Stäbchen, 1191
Zapfen, 1191
Autoradiographie, 1992
BN-Therapie, 1895, 1995
Corona-Pandemie, 188
Densitogramm, 1235
Doppler-Sonographie, 300
Ebola-Epidemie, 188
EKG, 384
Epidermis, 1764
Grundumsatz, 1822
Iontophorese, 1230
Kernspintomographie, 1487, 1491
Kontrast-Radiographie, 1647
Kontrastmittel, 1647
LASIK, 1765
Lederhaut, 1764
Leduc Versuch, 1230
Leistungsumsatz, 1822
Mammographie, 1649
Massenabschwächungskoeffizient, 1652
Mikrochirurgie, 1768
Neugeborenen-Gelbsucht, 1171
Osteoporose, 634, 1665
Phototherapie, 1171
Radium, 1895, 1914
Radium Girls, 1793
Radon, 1897, 1914
refraktive Chirurgie, 1765

Sauerstoffverbrauch, 1822
Scanning Laser Polarimetrie, 1766
Tattoo, 1764
Therapie
Chemo-T., 1768
Photodynamische T., 1767
Thorotrast, 1895
Tumor, 284
Virus, 1273
Zirkadianer Rhythmus, 23
Meilensteine
Compton Effekt, 614, 624, 643, 739, 1173, 1368, 2006
C. Wellenlänge, 630
Photon-Rückstreuung, 631
C. Kante, 634
C. Plateau, 634
inverser C., 632
Photon-Vorwärtsstreuung, 631
Compton-Effekt, 1654
Davisson-Germer Experiment, 672, 1368, 1705
Franck-Hertz-Versuch, 11, 1354, 1368, 1398, 1399
Michelson-Morley Experiment, 51, 65, 98, 112, 158, 585
Millikan Experiment, 646, 1220, 1248
Photoeffekt, 1368
Rutherford Experiment, 11, 646, 1220, 1287, 1369
R. Streuformel, 1291
Rutherford-Experiment
RBS, 1294
Stern-Gerlach Experiment, 1487
Mesonen, 282, 878, 1491
K^+, 212
Kaon, 282
Myon, 287
Pion, 77, 282, 287, 778
Psion J/Ψ, 462
Meteoriten
Perseiden, 33
Metrologie, 964
Mikroskopie
Abbe-Grenze, 980
Elektronen-M., 593
Mikroskope
Konfokal-M., 699
Nahfeld-M., 916
Numerische Apertur, 697, 701
Rayleigh-Limit, 698, 980
STED, 699
Mikrowellen, 915
Minkowski-Raum, 163, 224
lichtartig, 226
Lichtkegel, 226
raumartig, 224
zeitartig, 224
Mitführungskoeffizient, 91, 94, 96
mittlere freie Weglänge, 307, 1239, 1336, 1356, 1357
Moden
Modendichte
spektrale M., 1089
Moleküle
π-Elektronen, 883
$^{12}C^{16}O$, 847
Aceton, 847
Born-Oppenheimer Näherung, 846
C_2D_2, 987
C_2H_2, 987
C_6H_6, 1003
Kekule-Struktur, 1005
CH_2O, 953
CH_4, 1050
chirale M., 963
CN, 1071
CO, 847, 953
CO_2, 1101, 1742, 1898
Cyanin, 882, 1743
D_2O, 1164
FCKW, 1050
Fluoreszenz, 1372
Fullerene, 690, 1803
C_{60}, 1803
C_{70}, 1803
H_2, 811, 847
ortho-H_2, 950

para-H_2, 950
H_2D^+, 950
H_2O, 809, 953, 1101
H_2^+, 874
He_2, 690
Kovalente Bindung, 874
N_2, 1101, 1742
Na_2, 690
NaCl, 413
Natrium-Fluorescein, 1743
NH_3, 964, 1711
NO, 1050
NO_2, 1060
O_2, 1101, 1694
O_3, 1050, 1101
Phthalocyanin, 692
Polyen, 884
präbiotische M., 953
Protontransfer, 968
Rhodamin 6G, 1744
Monde
Enceladus, 974
Mimas, 974
Myon, 185, 189

Nachweis Ionisierender Strahlung, 2000
Blasenkammer, 288, 2005
Dosimeter, 2001
Emulsionen, 2005
Funkenkammer, 2006
Gasdetektoren, 2006
Geiger-Müller-Bereich, 2009
Geiger-Müller-Zählrohr, 2007
Ionisationsbereich, 2007
Proportionalbereich, 2007
Proportionalzähler, 2007
Rekombinationsbereich, 2007
Ionisationskammern, 2007
Nebelkammer
Diffusions-N., 2005
Spinthariskop, 2002
Szintillation, 2011
Zähler, 2001
Nano
Cluster, 1178
Kohlenstoff-Nanoröhren, 1596
N.-Kristall, 885
N.-Teilchen, 1178
Quantendraht, 882
Quantenpunkt, 961, 962
Quantentopf, 873
Quantum dot, 888
Neutrino, 289, 464, 1491, 1944, 1952
Sonnen-N., 1950
Anti-N., 420, 1952
Elektron-N., 294, 1164
Homestake Gold Mine Experiment, 290
IceCube Neutrino Observatory, 199, 291
Myon-N., 287, 294, 1164
N.-Absorptionstomographie, 295
N.-Oszillation, 293
N.-Oszillation-Tomographie, 295
Poltergeist-Experiment, 1952
Sonnen-N., 287
Sudbury Neutrino Observatory, 1164
Super-Kamiokande, 291, 1164
Tau-N., 293, 294, 1164
Neutrinos, 448
Neutronen, 633, 1788, 1797
thermische N., 684
Neutronenstern, 291, 497, 543, 564, 1536, 1555
Newtonsche Gesetze
Aktionsprinzip, 72, 439, 443, 796, 819
Bewegungsgleichung, 72, 587, 796
Reaktionsprinzip, 47, 72, 499
Trägheitsprinzip, 45, 71, 499, 1271
Newtonsches Schalentheorem, 369
Nichtlineare Optik
OPA, 1012
Idler, 1012
Signal, 1012
Phasenanpassung, 1012
Nukleosynthese, 1974
Nullpunktsenergie, 754, 772, 842, 1112

Observable, 749, 759, 800, 807
Erwartungswert, 801, 803, 813
Ockhams Messer, 42
Operator, 801, 813
Energie-O., 807
Impuls-O., 806
Optik
Beersches Gesetz, 1639
Beugung, 662
B.-gitter, 664, 1312
B.-Maxima, 686
Fresnel-B, 690
Beugungsgitter, 1743
Brechungsindex, 84, 89, 95, 280, 284, 653
CCD, 882
dielektrische Spiegel, 1750
Dispersion, 713, 1750
D.-relation, 653
Divergenz, 1768
Doppelbrechung, 1766
Drei-Polarisator-Paradoxon, 1010
Etalon, 1735
Extinktion, 1639
Fata Morgana, 519
Gesetz von Malus, 1010
Holographie, 1659, 1702, 1780
Röntgen-H., 1659
Interferenz, 20, 66, 85, 96, 99, 101, 750, 918, 1723
destruktive I., 717
konstruktive I., 656, 717, 1679
Kohärenz, 1679, 1723
Komplementärfarbe, 486
Lambert-Beer Gesetz, 1639
Lambertsches Gesetz, 1639
Mode, 1088
Newtonsche Staubringe, 1700
Newtonscher Staubspiegel, 1700
Optische Gitter
Gitterkonstante, 676
Transmissionsgitter, 676
Optisches Tunneln, 913
Phase
Phasensprung, 923
Pockels-Effekt, 1741
Pockelszelle, 1741
Polarisation, 1012
Polarisator, 1010
polarisiertes Licht, 1766
Prisma, 1312
Rayleigh-Kriterium, 738
Reflektivität, 486
Reflexion
spekuläre R., 1679
Retro-Reflektor, 1768
Strahlteiler, 99
Totalreflexion, 915
Optische Pinzette, 623
Optisches Spektrum, 486
Orbitale, 410, 481, 800

Paarerzeugung, 1173, 1249, 1654
e^+e^-, 464
Paul-Falle, 1427
Pauli-Prinzip, 476, 564, 883, 1099, 1133, 1176, 1369, 1505, 1659
s. Aufbauprinzip, 1447
Periodensystem, 419, 476, 1215, 1276, 1369, 1375, 1797, 1819
Ordnungszahl, 413, 477, 1179, 1578, 1583, 1627, 1647, 1656, 1951
Protyle, 1215
Proutsche Hypothese, 1215
Triadenregel, 1443
Phasendifferenz, 1723
Phosphoreszenz, 1203, 1424, 1801
Photoeffekt, 11, 1129, 1131, 1654, 2011
äußerer P., 1167
Alles-oder-Nichts Prinzip, 1150
Einstein Modell, 1149
innerer P., 1167, 1179
IYoP 2005, 1151
Kern-P., 1173
Lichttonverfahren, 1161
PES, 1176
Photomultiplier, 1163
Dynoden, 1163

Photozelle, 1161
Quanteneffizienz, 1163
Photographie, 1046
Photometrie, 1025
Photon, 77, 398, 455, 739, 995
P. Modell, 605
Photovoltaik, 1166
Nuna 2, 1169
Shockley-Queisser Limit, 1168
Solar Impulse 2, 1167
Solarzelle, 1166
Physiologie
Gesetz von Stevens, 1198
Weber-Fechner Gesetz, 1198
Physisorption, 951
piezoelektrischer Effekt, 983
Planck-Einheiten, 1102
P.-Energie, 1104
P.-Länge, 1103
P.-Ladung, 1104
P.-Masse, 1103
P.-Temperatur, 1104
P.-Zeit, 1103
Plancksche Strahlungsformel, 1720
Planeten
Perihel
P. Drehung, 8
Erde, 508
heiße Jupiter, 342
Jupiter, 1211, 1802
Mars, 508, 1771
Merkur, 507, 1451, 1771
Rosettenbahn, 1451
Mond, 1771
Saturn, 349, 974, 1283
Venus, 306, 508
Planetenbewegung
Aphel, 508
Keplerbahn, 507
Periastron, 565
Perihel, 507, 508
P.-Drehung, 506
Plasmen, 183, 1762, 1775
Laser-P., 1759
EUV-Lithography, 1759
Polarlicht, 1232
Polymere
Polyethen, 959
Polymerisation, 959
Polystyrol, 959
Polyvinylchlorid, 959
Potenzial
Äquipotenzialflächen, 819
Äquipotenziallinien, 819
Coulomb-P., 777
Doppelmulden-P., 967
harmonisches P., 837
Morse-P., 847
P.-Mulde, 923
Zentral-P., 800
Potsdamer Kartoffel, 554
Pound-Rebka Experiment, 495
Protontransfer, 966
Psion / J/Ψ
Novemberrevolution, 763
Psion/ J/Ψ, 764
Pulsar, 497, 565
0957+561, 516
Hulse-Taylor P., 560, 566
Little Green Men, 565
PSR J0737-3039A/B, 566
XTE J1739-285, 564

Quadratisches Abstandsgesetz, 1188, 1329
Quanteneffizienz, 2011
Quantenelektrodynamik, 353, 775
Quantenzahl
Drehimpuls-Q., 481, 1369, 1494, 1496
Haupt-Q., 481, 482, 1369, 1494, 1496
Haupt-Q.l, 1388
magnetische Drehimpuls-Q., 1369
magnetische Q., 1494
Spin, 352, 474, 1369, 1483, 1490, 1494, 1512, 1894
Larmor Theorem, 1467
Larmorfrequenz, 1466
Quantisierung, 482, 596
Quark-Gluon Plasma, 168

Quarks, 282, 878, 1255, 1298, 1786, 1864
down-Q., 878
up-Q., 878
Quasar, 516, 1435
3C 273, 539, 546
J0313-1806, 516
Quasiteilchen
Phonon, 1111, 1112, 1124
Querkontraktion, 163, 164

R.-Kontrast
KES, 1670
Röntgen
Bremsstrahlung, 1599
Duane-Hunt Gesetz, 1606
Charakteristische Strahlung, 201, 1179, 1581
Moseley Gesetz, 1577
EDX, 1587
Halbwertsdicke, 1641
Kollimatoren, 1630
R.-Filter, 1648
Ross-Filterpaar, 1654
R.-Fluoreszenz, 1564, 1585
R.-Kontrast, 1623, 1647
R.-Mikroskop, 1616
R.-Röhre, 1593
Heel-Effekt, 1596
Schichtdicke, 1641
streifender Einfall, 1616
Wasserfenster, 1663
Wolter-Spiegel, 1616
Zehntelwert-Schichtdicke, 1642
Zonenplatte, 1616
Röntgenabsorption
EXAFS, 1661
XANES, 1660
Röntgenbeugung, 1673
AXS, 1677
Babinet-Prinzip, 1674
Bragg-Gleichung, 676, 678, 681, 1679
Debye-Scherrer-Verfahren, 1676, 1684
Drehkristall-Verfahren, 1676, 1683
GID, 1677
Guinier-Verfahren, 1676
Kristallographie, 1674, 1682
heavy-atom Methode, 1681
Laue-Verfahren, 674, 1676, 1683
SAXS, 1677
Schiebold-Sauter-Verfahren, 1676
WAXS, 1677
Weissenberg-Verfahren, 1676
Radioaktive Isotope
Am-241, 1936
Ar-37, 290
Be-13, 1930
Co-56, 145
Cs-137, 1911, 1945
Cu-64, 1948
Fe-56, 145, 328, 1955
Fe-57, 547
He-5, 1930
I-131, 1911, 1945
K-40, 1913, 1945
Lu-151, 1930
Ni-56, 145
Np-237, 1913
P-32, 276
Pb-206, 1928
Po-210, 1914, 1928
Po-212, 1929
Po-240, 1911
Pu-241, 1913
Rn-222, 1900
S-35, 1936
Sr-90, 1911
Ti-44, 1976
Tm-147, 1930
U-232, 1931
U-235, 1986
U-237, 1913
U-238, 1913, 1986
W-209, 1913
Radioaktive Marker, 284
Radioaktivität, 1895
Q-Faktor, 454, 1932
α-Teilchen, 616
α-Zerfall, 155, 763, 945, 1926

Geiger-Nuttall-Regel, 946, 1932
β-Zerfall, 283, 289, 419, 447, 464, 1944
γ-Zerfall, 326, 1967
Kernuhr, 1977
Aktivierung, 1983, 1990
Aktivität, 1814
Alphavoltaik, 1936
Betavoltaik, 1936, 1955
Coulombbarriere, 945
Elektroneneinfang, 290
Halbwertszeit, 206, 944, 1815
Interne Paarbildung, 1968
Interne Umwandlung, 1968
K-Einfang, 1945, 1950, 1955
L-Einfang, 1955
Nuklidkarte, 1816
Q-Wert, 1880
Radioaktive Marker, 1895
radioaktive Marker, 276
Radionuklid, 283
Radionuklidbatterie, 1936
Radithor, 1792
Transmutation, 1984
Transurane, 1936
Zerfallsgesetz, 188, 205, 944, 1815
Zerfallskonstante, 205, 1815
Zerfallszeit, 205, 1815
Radioastronomie, 1078
Raman-Effekt, 1770
Ramsauer-Effekt, 923, 926
Rastersonden-Verfahren
AFM, 980
MFM, 980
SNOM, 980
SThM, 980
STM, 592, 979
constant current, 985
constant height, 985
Tunnelstrom, 983
Rauchmelder, 1162
Raumfahrt
Breakthrough Starshot, 1779
Sonnensegel, 621
Raumkrümmung, 517
Raumzeit, 224, 226, 494, 511, 750
R.-Diagramm, 226
R.-Intervall, 163, 194, 228, 450
relative Geschwindigkeit, 233
relativistische Kontraktion, 476, 480
relativistische Parameter
β, 59, 67, 137
Lorentzfaktor γ, 137, 439
Relativitätsprinzip, 73
Resonanz, 962
Resonanzabsorption, 327
Richardson-Effekt, 954, 1129, 1356
Richardson-Dushman Gleichung, 1130, 1593
Ritzsches Kombinationsprinzip, 1416
Roche-Grenze, 566
Rotator
starrer R., 847
Ruhesystem, 206
Eigenlänge, 161, 402
Eigenzeit, 134, 402
Ruheenergie, 401, 435
Ruhemasse, 402, 443, 477

Satelliten
Aqua, 1102
COBE, 1074
Explorer 6, 1171
LightSail-S., 638
Pioneer, 1936
Pioneer 10, 354
PLANCK, 847, 1078
SOHO, 307
Terra, 1102
Vanguard I, 1167
Viking Lander Spacecraft, 549
Voyager, 352, 1936
Golden Record, 352
WMAP, 1078
Schrödingergleichung, 726, 799, 1369
Eigenfunktion, 825
Eigenwert, 825
stationäre Lösungen, 825
zeitabhängige S., 796

zeitunabhängige S., 824
Schwarzer Strahler, 1021, 1308, 1335, 1342, 1375
Eigenschaften , 1035
Emissivität, 1023
Plancksches Strahlungsgesetz, 1092
Rayleigh-Jeans Gesetz, 1085, 1090, 1097, 1098
Stefan-Boltzmann Gesetz, 1042, 1059, 1081, 1094, 1329, 1336, 1342
Ultraviolettkatastrophe, 6, 1085
Wiensches Strahlungsgesetz, 1086
Wiensches Verschiebungsgesetz, 1040, 1094, 1098
Schwarzes Loch, 291, 311, 318, 783, 784, 1555, 1757
Ereignishorizont, 783, 784, 974, 1104
Hawking-Strahlung, 783
Sagittarius A*, 311, 549
Schwarzschild-Radius, 783, 784, 1104, 1571
Verdampfungsrate, 975
SETI, 352
Shapiro-Effekt, 549
SILEX, 1758
Slater-Regeln, 1509
Sonifizierung, 789
Sonne
Chromosphäre, 1057
Fraunhoferlinien, 1131, 1341, 1345, 1347
Kern der S., 307
Konvektionszellen, 415
Konvektionszone, 307, 415
Korona, 307, 1057
Photosphäre, 415, 1057, 1336
Sonnenfinsternis, 515, 1057
Sonnenfleck, 1473
Sonnenwind, 307
Spektrohelioskop, 1310
Spikulen, 306
Standard-Sonnenmodell, 289
Strahlungszone, 307
Speckle, 1728
Speicherring, 210
Spektrallinien, 308, 320
14.4 keV, 328
Spektrometer, 1311
Czerny-Turner S., 1313
Gitter-S., 1312
Hemisphärischer Analysator, 1180
MODIS, 1102
Prismen-S., 1312
Rowland-Circle S., 1314
Spektrometrie
EELS, 1364
Photoelektronen-S., 1176
Spektroskopie
Dopplerfreie S., 769
Mössbauer-S., 114, 272, 328
Spin
JJ-Kopplung, 482
Russel-Saunders Kopplung, 482
Spin-Bahn-Kopplung, 482
Stöchiometrie, 1442
Standardkerzen, 310
Standardmodell, 189, 290
Mediatorteilchen, 995
stationäre Zustände, 763
Sternbilder
Pegasus, 342
Sterne, 1057
β-Centauri, 1802
μ^2Sco, 144
ζ Puppis, 1402
Überriesen, 1344
Alnitak, 1058
Beteigeuze, 379
Brauner Zwerg, 318, 340
Doppel-S.
61 Cygni, 89
Hertzsprung-Russell Diagramm, 1062, 1342
Hauptreihe, 1063
Riesenast, 1063
rote Riesen, 1063
Hertzsprung-Russell-Diagramm
Hauptreihensterne, 1344

Jeans-Masse, 1077
Kepler 186, 349
Leuchtkraft, 418, 1026, 1342, 1436
Masse-zu-Leuchtkraft Beziehung, 1059
MWC 349A, 1711
Orion, 377
Rigel, 379
Sirius, 1062
Spektralklassen, 1062, 1342
Wasserstoffzyklus, 946
Wega, 538
Weiße Zwerge, 1344
Weißer Zwerg, 145, 315, 1535, 1555
Wolf-Rayet Sterne, 1332
WR 104, 1333
Zeta Ophiuchi, 1072
Zeta Orionis, 1319
Strömungen
Mach-Zahl, 277
Reynoldszahl, 277
S. Geschwindigkeit, 300
S.-Dynamik, 277
Strahlentherapie
Microbeam radiation therapy, 263
Strahlung
α-S., 183
γ-S., 181
γ-burst, 240
S.-Druck, 398, 615
Streulänge, 200
Streuung, 626, 630, 918
Bragg S., 1674
Großwinkel S., 1684
Kleinwinkel S., 1684
Streuzentrum, 626
Stroboskop, 897
Supernova, 144, 183, 564, 1069
1987A, 523
Cassiopeia A, 1976
Chandrasekhar-Grenze, 315
Krebsnebel, 1500
SgrA*, 783
SN 1987, 526
SN 1987A, 238
SN 2006gy, 240
supernova remnant tomography, 315
Typ Ia, 315
Typ Ia, 145
Typ Ib, 145
Typ Ic, 145
Typ II, 145
Superpositionsprinzip, 31, 32, 717, 733, 812, 836, 849, 859, 895, 954, 994, 1681
Supraleitung, 972, 1180
Cooper-Paare, 973, 1180
Josephson-Kontakt, 972
kritischer Strom, 974
Sprungtemperatur, 973
SQUID, 974
Biomagnetismus, 974
Synchrotron, 255, 1670, 1747
DORIS, 258
ESRF, 258
PETRA III, 259
S.-Strahlung, 788
Undulator, 258, 1747
Wiggler, 258
Szintillation, 1165

Teilchenbeschleuniger, 463
Bevatron, 1460
CERN, 185, 2005
Linearbeschleuniger, 1747
LCLS, 1748
Teilchendetektoren, 651
Blasenkammer, 287, 615
Funkenkammer, 197
photographische Methode, 192
Szintillationszähler, 282
Wilson Kammer, 192
Teilchenschauer, 184, 190
Teilchenzoo, 1800
Teleskope
Hale, 881
La-Silla-Observatorium, 1418
Radioteleskope
ALMA, 1082

Arecibo, 352, 560
CSIRO, 358
Effelsberg, 358
Event-Horizon, 788
VLBI, 239
SOFIA, 951
TNG, 1015
Weltraum-T.
Chandra, 789, 1319, 1555, 1616
CHEOPS, 339
eROSITA, 1555
Hubble, 88, 344, 529, 697, 1082
James-Webb, 349, 533, 697
Kepler, 339
Spitzer, 525, 953
TESS, 339
WHT, 1015
Terrell-Rotation, 216, 377
Therapie
γ-knife, 592
Radionuklide, 592
Thermodynamik
Allgemeine Gasgleichung, 1114
Enthalpie, 1932
Freiheitsgrad, 1086
Gleichverteilungssatz, 1086
Hauptsatz
Zweiter H., 1274
Dritter H., 772, 842
Nullter H., 786
Zweiter H., 727, 1023
Ideales Gasgesetz, 1264
Kalorimeter, 1951
Kalorimetrie, 1822, 2003
Laplacescher Dämon, 727, 745
Pyrometer, 1031
Schmelzpunkt, 484
Theorem von Nernst, 842
thermisches Gleichgewicht, 1085, 1718
Thermografie, 1044
Wärmekapazität, 1111
Debye-Modell, 1122
Dulong-Petit-Gesetz, 1111
Einstein-Modell, 1112, 1122, 1124
Molare W., 1111
Spezifische W., 1111
Thermolumineszenz, 2000
Tomographie, 635
γ-Kamera, 1895
CT, 1630
MRT, 592, 896
Myonen-T., 197
PET, 1012, 1403, 1895, 1960
Photoakustische Bildgebung, 1765
Torsionswaage, 617
Trägheitsmoment, 562
Transitmethode, 343
Transmission, 919
Tscherenkow-Effekt, 2000
Tscherenkow-Astronomie, 286
Tscherenkow-Strahlung, 182, 275, 280
Tunneleffekt, 155, 916, 933, 1299, 1369
Coulombbarriere, 1929, 1935
Fowler-Nordheim T., 956, 1596
Optisches T., 915
Tunneldiode, 592

Universum, 1067
Big Bang
Uratom, 975
Big Crunch, 369
Dunkle Materie, 1077
Eddington Zahl, 1240
geschlossenes U., 369
GUT, 1080
Horizontproblem, 1080
Hubble
H.-Gesetz, 272, 363
H.-Konstante, 272, 362, 365, 369, 1080
H.-Länge, 371
H.-Parameter, 363
H.-Zeit, 370
Hubble Ultra Deep Field, 365
Inflationäres U., 976, 1080
kosmische Hintergrundstrahlung, 766, 1067
Sunyaev-Zeldovich Effekt, 1080

kosmisches Netz, 42
Offenes U., 369
Olberssches Paradoxon, 270
Urknall, 155, 317, 766, 1068
U. Modell, 1068
Unschärferelation, 725, 749, 805, 839, 840, 994, 1327, 1347, 1369, 1568, 1750, 1892
Drehwinkel-Drehimpuls U., 759
Energie-Zeit U., 758, 1725
Heisenberg-Kredit, 771
Ort-Impuls U., 744
Ununterscheidbarkeit, 994

Vakuumfluktuationen, 104, 772, 776
Archimedes-Experiment, 774
Vakuumniveau, 984, 1659
Valenzband, 485
Van-der-Waals Gleichung, 1264
Verschränkung, 115
Virialsatz, 313
Virtuelle Teilchen, 104, 771, 776
Archimedes-Experiment, 103

Wahrscheinlichkeit
W.-Amplitude, 799
W.-Dichte, 808, 994
W.-dichte
radiale W.-Dichte, 1524
Wasserstoff, 1079, 1514, 1663, 1927
21-cm-Linie, 272, 352, 769, 1493
Balmer Formel, 1320
Bohrscher Radius, 755, 874, 879
Deuterium, 416, 419, 877, 946, 1079, 1164, 1400, 1894, 1957
Grundzustand, 354
H_α, 1418
Lyman-α-Emitter, 1419
Rydberg Formel, 1323
Rydberg-Energie, 1579
Rydberg-Frequenz, 1580
Rydberg-Konstante, 1398, 1399
Rydberg-Zustände, 1446
Serien, 1412
Balmer-S., 540, 1322, 1413, 1559
Brackett-S., 1326
Humphreys-S., 1326
Lyman-S., 315, 1325, 1413, 1559
Paschen-S., 1326, 1413
Pfund-S., 1326
S.-Grenze, 1326
Tritium, 294, 416
wasserstoffähnliche Ionen, 1400
Wechselwirkung
Austauschteilchen, 776, 1870
Coulomb-W., 289, 561, 836, 973
Elektromagnetische W., 211, 455, 588, 772, 1599, 1863
Feinstrukturkonstante, 1451
Fernwirkung, 995
Gluon, 777
Gravitation, 289, 494, 499, 561, 772, 1863
Anti-G., 503
Cavendish-Experiment, 500
GUT, 1863, 1916
Higgs-Feld, 290, 765
Higgs-Teilchen, 290
Quantengravitation, 1104
Reichweite der W., 1946
Schwache W., 211, 289, 772, 1865, 1880, 1946
W-Boson, 2006
Z-Boson, 2006
Stärke der W., 1946
Starke W., 189, 289, 422, 772, 779, 946, 1291, 1292, 1298, 1786, 1863, 1864, 1926
virtuelle Mesonen, 1870
Van-der-Waals W., 772
Welle-Teilchen Dualismus, 11, 32, 85, 593, 611, 644, 662, 751, 798, 1175, 1368, 1390
Wellen
Ausbreitungsgeschwindigkeit, 653
evaneszente W., 915
longitudinale W., 1122
monochromatische W., 711

Phasenfront, 711
stehende W., 836, 849
transversale W., 1122
W.-widerstand, 923
Wellenfunktion, 715, 795, 797, 911, 919
Kollaps der W., 895, 1002
Wellengleichung, 800
Wellenpaket, 710, 734, 803, 843
Zerfließen des W., 730
Wellenvektor, 752
Weltlinie, 226
Woods-Effekt, 1046
Woods-Glassfilter, 1046

Youngscher Doppelspalt, 85, 643, 649, 653, 727, 739, 995, 1006
Yukawa Teilchen, 189

Zeitball, 128
Zeitdilatation, 133, 138, 157, 207, 220, 439
Zerfallsreihe, 1913
Np-237 Z., 1914
Th-232 Z., 1900, 1914
U-235 Z., 1914
U-238 Z., 1900, 1914
Zustandsdichte, 486
Zwillingsparadoxon, 272, 383